

**В. В. Пеленко, С. В. Рыков,
В. В. Нечитайлов, А. Д. Ширяев**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РАБОЧИХ ПРОЦЕССОВ
В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ**

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2026**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики**

**В. В. Пеленко, С. В. Рыков,
В. В. Нечитайлов, А. Д. Ширяев**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОЧИХ ПРОЦЕССОВ В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

Учебное пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

**Санкт-Петербург
2026**

УДК 620.19 (075)

ББК 31.38я7

М34

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой
промышленной энергетики СПбГЛТУ

А. В. Куликов;

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры теплосиловых установок
и тепловых двигателей Высшей школы технологии и энергетики

Санкт-Петербургского государственного университета промышленных
технологий и дизайна

А. М. Хлыновский

Пеленко, В. В.

М34 Математическое моделирование рабочих процессов в теплоэнергетических
установках: учебное пособие / В. В. Пеленко, С. В. Рыков,
В. В. Нечитайлов, А. Д. Ширяев. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2026. —
103 с.

ISBN 978-5-91646-468-9

Учебное пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины
«Математическое моделирование рабочих процессов в теплоэнергетических
установках» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 13.04.01
«Теплоэнергетика и теплотехника», профили: «Технология производства
электрической и тепловой энергии», «Тепломассообменные процессы и установки».

В пособии рассматриваются основные понятия и определения теории
математического моделирования, элементов системного анализа, а также основные
законы сохранения массы, импульса, момента импульса и энергии как в
интегральном, так и в дифференциальном виде, кратко описаны простейшие
математические модели.

Пособие предназначено для подготовки магистров очной и заочной форм
обучения, может быть полезно для бакалавров направления подготовки 13.03.01
«Теплоэнергетика и теплотехника», а также для аспирантов и инженерно-технических
работников предприятий теплоэнергетического комплекса.

УДК 620.19 (075)

ББК 31.38я7

ISBN 978-5-91646-468-9

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2026

© Пеленко В. В., Рыков С. В.,

Нечитайлов В. В., Ширяев А. Д., 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТОДОЛОГИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ	6
ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ И ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКЕ.....	18
2.1. Место математического моделирования в иерархии моделей	18
2.2. Структура и обобщенное описание математической модели	20
2.3. Классификация математических моделей	22
2.4. Состав математического описания	28
2.5. Этапы, стадии, фазы, принципы и подходы при построении математических моделей	29
2.5.1. Основные этапы разработки математических моделей	30
2.5.2. Структурные стадии разработки математических моделей	33
2.5.3. Технологические стадии математического моделирования	34
2.5.4. Основные фазы (ступени) построения математической модели	35
2.5.5. Принципы разработки и построения математических моделей.....	37
2.5.6. Подходы к разработке и построению математических моделей	37
2.6. Общий алгоритм математического моделирования	39
2.7. Свойства математических моделей и требования к ним.....	40
2.8. Оценка математической модели на адекватность	41
2.9. Форма представления математических моделей	43
2.10. Методы получения математических моделей	44
ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ, ОДНОФАКТОРНЫЕ И МНОГОФАКТОРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. ПОСТРОЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.....	45
3.1. Линейные и нелинейные математические модели	45
3.2. Однофакторные и многофакторные математические модели.....	45
3.3. Построение статистических моделей	46
3.3.1. Однофакторные модели.....	47
3.3.2. Многофакторные модели	49
ГЛАВА 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ	50
4.1. Основные положения.....	50
4.2. Виды и типы схем, их назначение	51
4.2.1. Типизация схем по назначению	55
4.2.2. Типизация видов схем по элементам и связям	56
4.3. Общие понятия о структурных схемах теплоэнергетических объектов	57

ГЛАВА 5. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАБОЧИХ ПРОЦЕССОВ В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ.....	62
5.1. Математический аппарат инженера	62
5.2. Основные элементы и этапы рабочего процесса в теплоэнергетических установках	63
5.3. Законы сохранения, равновесия и переноса массы, энергии, импульса ..	64
5.3.1. Законы сохранения.....	64
5.3.2. Законы равновесия	66
5.3.3. Правило фаз	68
5.3.4. Линии равновесия	68
5.3.5. Основные механизмы переноса субстанций	70
5.4. Математическое моделирование процессов теплопередачи	72
5.4.1. Теплопроводность при нестационарном процессе	72
5.4.2. Математическое моделирование процесса нагрева теплообменника при постоянном притоке теплоты	79
5.4.3. Основы теплового расчета при математическом моделировании теплообменных процессов и аппаратов.....	82
5.4.4. Один из методов математического моделирования при оценке качества и оптимизации систем теплоснабжения.....	85
5.5. Разработка математических моделей тепловых процессов на примере элементов парового котла теплоэлектростанции.....	87
5.5.1. Уравнение теплообмена излучением	91
5.5.2. Дифференциальные уравнения для однофазного потока	91
5.5.3. Дифференциальные уравнения для двухфазного потока парожидкостной смеси	92
5.5.4. Дифференциальные уравнения теплообмена в стенках трубок.....	93
5.5.5. Математическая модель сепаратора.....	93
5.6. Теоретические основы рабочих процессов преобразования энергии в тепловых двигателях	96
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	101
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	102

ВВЕДЕНИЕ

По оценкам экспертов уже сегодня в России наблюдается дефицит специалистов, способных выполнять аналитическую, творческую работу, импровизировать, решать задачи не только анализа, но и продуктивного синтеза, самостоятельно принимать определяющие решения. В настоящий момент нехватка таких кадров может достигать 10 миллионов человек. Несомненно, эти выводы служат побудительным мотивом к поиску путей устранения данной проблемы государством и системой образования. И здесь важно не упустить открывающиеся возможности перед высшей школой, поскольку нет более эффективного инструмента по формированию творческой личности и раскрытия ее аналитических возможностей и способностей к синтезу, чем концепция моделирования оборудования и его рабочих процессов, в частности, математического моделирования.

Математическая модель – это лишь специальный способ описания объекта, позволяющий для анализа использовать формально-логический аппарат математики. Изучение математических моделей является основным методом познания, используемым в фундаментальных и прикладных науках.

Метод математического моделирования за короткое время нашел конкретное применение при исследованиях и расчетах в теплоэнергетике. При наличии математических моделей успешно решаются задачи оптимизации теплоэнергетических процессов и управления ими. Однако еще сравнительно мало специалистов теплоэнергетического профиля знакомы достаточно глубоко с принципами построения математических моделей и методами их исследования при проектировании новых и формировании оптимальных режимов действующих теплоэнергетических объектов, а также для получения требуемых исходных данных. Это объясняется, во-первых, сложностью и недостаточной изученностью процессов в теплоэнергетике и, во-вторых, сравнительно слабым знанием и подготовкой выпускников вузов в области математико-информационных технологий.

Предлагаемый в учебном пособии материал содержит основные положения, особенности и предпосылки метода математического моделирования, общие принципы и схемы построения математических моделей с использованием классических представлений о явлениях переноса. Прикладная составляющая ориентирована на инженерный подход к математическому моделированию с использованием идеализированных представлений о гидродинамической структуре и особенностях потоков субстанций в теплоэнергетических объектах.

В настоящее время практически во всех областях знаний моделирование, в широком понимании, является основным методом исследований и научно-обоснованным способом оценки особенностей процессов, а также технических объектов, их характеристик, параметров, свойств, экономических и экологических показателей.

Самым важным и наиболее распространенным предназначением моделей является их применение для анализа и прогнозирования поведения сложных систем, процессов и явлений.

В основу предлагаемого издания положены учебники, учебные пособия, курсы лекций, научные статьи и другие материалы, отраженные в библиографическом списке в конце данного учебного пособия.

ГЛАВА 1. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТОДОЛОГИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование – способ, процесс замещения оригинала его аналогом (моделью) с последующим изучением важнейших свойств и поведения оригинала путем проведения экспериментов на модели.

В гносеологическом смысле **моделирование** – это метод познания окружающего мира, который можно отнести к общенаучным методам, применяемым как на эмпирическом, так и на теоретическом уровне познания. При построении и исследовании модели, могут применяться практически все остальные методы познания.

Теория моделирования – теория замещения одних объектов (оригиналов) другими объектами (моделями).

Модель в общем смысле есть создаваемый с целью получения и (или) хранения информации специфический объект (в форме мысленного образа, описания знаковыми средствами либо материальной системы), адекватно отражающий интересующие свойства, характеристики и связи объекта-оригинала произвольной природы, существенные для задачи, решаемой субъектом.

Под **моделью** (от лат. *modulus* – мера, образец, норма), в универсальном смысле, понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты.

Таким образом, процесс построения и использования модели называется моделированием.

В системном анализе моделирование рассматривается как основной метод научного познания, связанный с совершенствованием способов получения и фиксации информации об изучаемых объектах, а также с приобретением новых знаний на основе модельных экспериментов.

В настоящее время большинство моделей разрабатывается с использованием компьютерной техники и компьютерных технологий, такие модели разрабатываются с помощью программ или сами могут выступать в качестве программы.

При построении модели исследователь всегда исходит из поставленных целей, учитывает только наиболее существенные для их достижения факторы. Поэтому любая модель не тождественна объекту-оригиналу и, следовательно, неполна, поскольку при ее построении исследователь учитывал лишь важнейшие с его точки зрения факторы.

Следует учитывать, что некоторые объекты и явления вообще не могут быть изучены непосредственным образом. Другое, не менее важное, предназначение моделей состоит в том, что с их помощью выявляются наиболее существенные факторы, формирующие те или иные свойства объекта, поскольку сама модель отражает лишь некоторые основные характеристики исходного объекта, учет которых необходим при исследовании того или иного процесса или явления. Модель позволяет научиться осмысленно, правильно управлять объектом путем апробирования различных вариантов управления. Использовать

для этого реальный объект часто бывает рискованно или просто невозможно. Если свойства объекта с течением времени меняются, то особое значение приобретает задача прогнозирования состояний такого объекта под действием различных факторов.

Цель моделирования диктует, какие стороны оригинала должны быть отражены в модели. Различным целям соответствуют разные модели одного и того же объекта.

Модели могут строиться средствами мышления (абстрактные модели) либо средствами материального мира (реальные модели). Особое место среди абстрактных моделей занимают языковые модели. Неоднозначность, расплывчатость естественного языка, столь полезная во многих случаях, может мешать в некоторых видах практики. В таких случаях создаются более точные (профессиональные) языки, целая иерархия языков, все более и более точных, завершающаяся идеально формализованным языком математики.

В энергомашиностроении, как и во всех других областях знаний, моделирование, в широком смысле, является продуктивным методом исследований и научно-обоснованным способом оценки и прогнозирования параметров процессов и технико-технологических характеристик объектов изучения. При решении сложных наукоемких задач в различных отраслях промышленности и сферах инженерной деятельности использование моделирования наиболее эффективно, а в некоторых случаях является единственно возможным методом достижения результата.

В настоящее время в теплоэнергетике необходимость укорочения стадии создания новых конкурентоспособных процессов и изделий требует сокращения сроков и повышения качества проектно-конструкторских работ. Эти требования можно обеспечить только применяя новые технологии проектирования, основанные на использовании методов моделирования и вычислительной техники. Современные технологии основываются как на опыте инженерной практики, так и на научных теоретических и экспериментальных исследованиях. Поэтому инженер должен уметь практически решать задачи, требующие применения современных методов моделирования.

Моделирование технических систем и процессов является сложной наукой, имеющей прикладной характер и свои особенности на данном этапе развития. Базируясь на известных работах, рассмотрим философские аспекты теории моделирования.

Методологическая основа моделирования состоит в упорядочении получения и обработки информации об объектах, которые существуют вне нашего сознания и взаимодействуют между собой и внешней средой.

Как было отмечено ранее, различным целям соответствуют разные модели одного и того же объекта. Поэтому рассмотрим сначала базовые виды моделей и моделирования с позиций принадлежности к сознанию и к внешней среде.

Один из возможных подходов к общей классификации моделирования и моделей включает их разделение по признакам на **материальные (натурные)** модели и **информационные (абстрактные)** модели. Информационные модели, в свою очередь, подразделяются по способу представления на модели

графические, вербальные (словесные), математические и логические. Также используется классификация по характеру связей (**детерминированные** модели, **вероятностные**) и по поведению (**статические**, **динамические**).

Рассмотрим подробнее классификацию моделей по определенным признакам.

Все модели можно разбить на два больших класса: **предметные (материальные)** и **информационные (идеальные)**. Предметные модели воспроизводят физические, геометрические, функциональные свойства объектов в материальной форме (глобус, макет здания и др.). Предметные модели в свою очередь делятся на **физические** и **аналоговые** модели. Информационные модели представляют объекты или процессы в образной или знаковой форме. Рисунки, фотографии, учебные плакаты – это образные информационные модели. **Идеальные** модели подразделяются на **интуитивные** и **научные**.

Физическим называется моделирование, при котором реальный объект замещается его увеличенной или уменьшенной копией, физически однородной с оригиналом. Результаты исследования модели переносятся на оригинал на основе теории подобия.

Например, в самолетостроении к физическим моделям можно отнести модели летательных аппаратов, в архитектуре – макеты зданий.

Аналоговое моделирование основано на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но описываемых формально одними и теми же уравнениями.

Например, изучение механических колебаний можно проводить с помощью электрической схемы, описываемой теми же дифференциальными уравнениями.

Интуитивное моделирование основано на интуитивном представлении об объекте исследования, не поддающимся формализации либо не нуждающемся в ней.

Например, жизненный опыт является моделью окружающего мира.

Научное моделирование – это всегда логически обоснованное моделирование, использующее формальные методы исследования. Главное отличие научного моделирования от интуитивного заключается в знании «внутренних» механизмов, которые используются при научном моделировании.

Знаковым называется моделирование, использующее в качестве моделей знаковые преобразования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы.

Примерами знаковых моделей являются математические выражения и уравнения, химические формулы, музыкальные фразы.

Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование.

Математическое моделирование – это приближенное описание какого-либо класса явлений, выраженное с помощью математической символики.

Модели могут быть классифицированы по **форме представления**:

- **графические**, представляющие собой графическую имитацию планируемого объекта или процесса;
- **числовые**, записанные в виде формул;

- **логические**, записанные в виде логических выражений (блок-схем);
- **табличные**, записанные в виде таблиц.

С точки зрения отражения **временных интервалов**, можно выделить **динамические** модели, отражающие свойства объекта изменять свои параметры во времени, и **статические** модели, не отражающие вышеуказанных свойств. Динамические и статические модели различают по фактору времени, а не по области использования. Динамические модели описывают процессы изменения и развития системы. Примеры: описание движения рабочих тел, процесса химических реакций. Для одной и той же области использования могут создаваться как статические, так и динамические модели.

Часто применяются модели, основанные на использовании теории вероятности и математической статистики (**стохастические** модели). Эти модели используют анализ корреляций и регрессий, дисперсионный анализ, теорию массового обслуживания, теорию игр, статистических решений, информации, надежности, запасов.

Также широко используются модели **математического программирования**. Данные модели позволяют выбрать совокупность чисел, которые являются переменными в уравнениях и обеспечивают экстремум некоторой функции при некоторых ограничениях.

Имитационные модели помогают специалистам лучше понять взаимосвязи факторов, действующих в системе. Имитация представляет собой воспроизведение реальной действительности. Под имитацией понимают создание модели реальной ситуации и манипулирование этой моделью в целях обоснования решения. Имитационные модели позволяют достаточно просто учитывать такие факторы, как наличие дискретных и непрерывных элементов, нелинейные характеристики элементов системы, многочисленные случайные воздействия и другие, которые часто создают трудности при аналитических исследованиях.

При наблюдении за объектом-оригиналом в голове исследователя формируется некий мысленный образ объекта, его **идеальная** модель, которую принято называть **когнитивной**. Представление когнитивной модели на естественном языке называется содержательной моделью.

По функциональному признаку и целям содержательные модели подразделяются на описательные, объяснительные и прогностические.

Описательной информационной моделью можно назвать любое описание объекта.

Объяснительная модель позволяет ответить на вопрос, почему происходит какое-либо явление.

Прогностическая модель должна описывать будущее поведение объекта. При этом прогностическая модель не обязана включать в себя объяснительную.

Концептуальной называют содержательную модель, при формулировке которой используются понятия предметных отраслей знания, занимающихся изучением объекта моделирования. Другими словами, это содержательная модель, базирующаяся на определенной концепции или точке зрения.

Формальная модель является представлением концептуальной модели с помощью одного или нескольких формальных языков (например, математических языков, универсального языка моделирования UML или алгоритмических языков).

Основными задачами теории моделирования являются выбор моделей и перенос результатов исследования моделей на оригинал, которые решаются с помощью достаточно общих эффективных методов. Последние могут служить основой частных специальных методов в различных областях науки и техники. В частности, в качестве заместителей оригиналов модели используют как средства общения (язык, письменность), средства осмысления и познания явлений материального мира (модель атома), средства обучения и тренировки (тренажеры), средства прогнозирования поведения объектов в различных условиях (например, для подбора параметров, соответствующих оптимальному функционированию проектируемого объекта).

Для визуализации формальной модели вычислительного алгоритма используется **схема алгоритма**. Под **вычислительным алгоритмом** понимают точное предписание, определяющее вычислительный процесс, ведущий от варьируемых начальных данных к искомому результату. Существует несколько форм записи алгоритмов: *словесная* форма, *математическая* формула, *схема алгоритма* (блок-схема), *табличная* форма, *программа* для компьютера. Наиболее компактной и наглядной формой записи алгоритма является схема алгоритма. **Схема алгоритма** – это графическое представление алгоритма. Она состоит из различных фигур (прямоугольников, параллелограммов, ромбов, овалов и т. д.), соединенных линиями. Геометрические фигуры, называемые блоками, соответствуют конкретным шагам алгоритмического процесса. Направленные линии указывают порядок выполнения блоков. По схеме алгоритма легко определить модель вычислительного процесса (входящие структурные элементы: линейные, разветвляющиеся, циклические).

Натурное моделирование представляет собой специально поставленные исследования на реальном объекте («на натуре») при специально созданных или подобранных условиях с последующей обработкой результатов эксперимента на основе теории подобия. При натурном моделировании в модели всегда узнается моделируемый объект, то есть модель всегда имеет визуальную схожесть с объектом-оригиналом. Натурное моделирование подразделяется на *научный эксперимент*, *комплексные испытания* и *производственный эксперимент*. Научный эксперимент характеризуется широким использованием средств автоматизации, применением весьма разнообразных средств обработки информации, возможностью вмешательства человека в процесс проведения эксперимента. Одна из разновидностей эксперимента – комплексные испытания, в процессе которых вследствие повторения испытаний над объектами в целом (или больших частей системы) выявляются общие закономерности в характеристиках качества и надежности испытываемых объектов. В этом случае моделирование осуществляется путем обработки и обобщения сведений о группе однородных явлений. Наряду со специально организованными испытаниями возможна реализация натурного моделирования путем обобщения опыта,

накопленного в ходе производственного процесса, т. е. производственный эксперимент. Здесь на базе теории подобия обрабатывают статистический материал по производственному процессу и получают его обобщенные характеристики. Необходимо помнить про отличие эксперимента от реального протекания процесса. Оно заключается в том, что в эксперименте могут появиться отдельные критические ситуации и определиться границы устойчивости процесса.

При имитационном моделировании воспроизводится алгоритм функционирования системы во времени – поведение системы; причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы. Основным преимуществом имитационного моделирования является возможность решения сложных задач. В настоящее время имитационное моделирование – наиболее эффективный метод исследования систем, а часто и единственный практически доступный метод получения информации о поведении системы.

Статистическое моделирование – это исследование объектов познания на их статистических моделях. Оно заключается в построении и изучении моделей реально существующих предметов, процессов или явлений с целью получения объяснений этих явлений, а также для предсказания явлений или показателей, интересующих исследователя. Оценка параметров таких моделей производится с помощью статистических методов (например, методов максимального правдоподобия, наименьших квадратов, моментов и т. д.).

Компьютерное моделирование заключается в проведении серии вычислительных экспериментов на компьютере, целью которых является анализ, интерпретация и сопоставление результатов моделирования с реальным поведением изучаемого объекта и, при необходимости, последующее уточнение модели.

На рисунке 1.1 приведена одна из возможных, наиболее общих схем классификации видов моделирования объектов и технических систем, учитывающая основные особенности свойств моделей.



Рисунок 1.1. Классификация видов моделирования систем

Приведем некоторые исходные базовые понятия теории моделирования.

Объект (лат. *objectum* – предмет) – все то, на что может быть направлена человеческая деятельность.

В моделировании, в том числе математическом, большую роль играют следующие категории:

Гипотеза – определенное предсказание, основывающееся на небольшом количестве опытных данных, наблюдений, догадках. В ходе специально поставленного эксперимента может быть проведена быстрая и полная проверка выдвигаемых гипотез.

Аналогия – суждение о каком-либо частном сходстве объектов, которое может быть существенным и несущественным. Причем понятия существенности и несущественности, сходства или различия объектов условны и относительны. Существенность сходства или различия зависит от уровня абстрагирования и определяется конечной целью проводимого исследования. Аналогия имеет большое значение в качестве метода суждения при формулировании и проверке правильности гипотез. Аналогия связывает гипотезу с экспериментом, поскольку современная научная гипотеза создается, как правило, по аналогии с проверенными на практике научными положениями.

Модель – (лат. *modulus* – мера) – это объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала. Иными словами, **модели** – это удобные для исследования объекты, логические схемы, построенные на основе гипотез и аналогий, упрощающие рассуждения и логические построения или позволяющие проводить эксперименты, уточняющие природу явлений в объекте.

Говоря о математических моделях, А. Розенблют и Н. Винер подчеркивали, что формальная модель может быть разнородной совокупностью элементов, часть из которых изучена детально, т. е. конкретно и структурно, а

другая часть – только исходя из соображений ее общей работоспособности, т. е. обобщено и функционально.

Известно много определений модели. Остановимся на некоторых, наиболее информативных из них.

Модель – это физический или абстрактный образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать интересующие исследователя физические свойства и характеристики объекта.

Это определение можно заменить более кратким эквивалентом:

Модель есть системное отображение оригинала, на основании которого могут быть введены следующие дополнения:

моделирование – замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели путем проведения экспериментов над последней;

теория моделирования – теория замещения одних объектов (оригиналов) другими объектами (моделями).

Определяя гносеологическую роль теории моделирования, т. е. ее значение в процессе познания, необходимо выделить то общее, присущее моделям различных по своей природе объектам реального мира, которое заключается в наличии некоторой структуры (статической или динамической, материальной или мысленной), подобной структуре данного объекта. При этом в процессе изучения модель выступает в роли относительного самостоятельного квазиобъекта, позволяющего получить при исследовании некоторые знания о самом объекте.

Одной из важнейших характеристик в определении модели является ее **адекватность**, которая зависит от цели моделирования и принятых критериев. **Модель адекватна** объекту, если результаты моделирования подтверждаются и могут служить основой для прогнозирования поведения технических объектов или процессов, протекающих в реальных исследуемых системах, с регламентируемой точностью, удовлетворяющей выбранному **критерию адекватности**.

Как отмечается в ряде работ, стадии познания, на которых происходит замена объекта оригинала моделью, а также формы соответствия модели и оригинала могут быть различными.

Моделирование как познавательный процесс, содержащий переработку информации, поступающей из внешней среды о происходящих в ней явлениях, в результате чего в сознании появляются образы, соответствующие объектам.

Моделирование, заключающееся в построении некоторой системы-модели (второй системы), связанной определенными соотношениями подобия с системой-оригиналом (первой системой), причем в этом случае отображение одной системы в другую является средством выявления зависимостей между двумя системами, отраженными в соотношениях подобия, а не результатом непосредственного изучения поступающей информации.

Таким образом, процесс моделирования относится к классу сложных процессов и предполагает наличие: 1) объекта исследования; 2) исследователя, перед которым поставлена конкретная задача; 3) модели, создаваемой для

получения информации об объекте и необходимой для решения поставленной задачи.

Любой эксперимент может представлять ценность и иметь существенное значение в конкретной научной или производственной области только при специальной его обработке и обобщении. Необходимо помнить, что единичный эксперимент никогда не может быть решающим для подтверждения гипотезы или проверки теории. Поэтому современные инженеры должны быть знакомы с элементами современной методологии познания, основу которой составляет краеугольное положение материалистической философии: экспериментальное исследование, опыт и практика, являющиеся критерием истины.

Одной из важнейших проблем современной науки и техники является внедрение в практику проектирования новейших сложных информационно-вычислительных систем различных уровней (автоматизированных систем научных исследований и комплексных испытаний, САПР, АСУ технологическими процессами и др.).

Системы, используемые в современном машиностроении, в силу их многообразия и масштабности можно с определенной долей уверенности отнести к классу больших систем. Они содержат этапы исследования, проектирования, внедрения, эксплуатации и эволюции технических объектов, которые в настоящее время невозможно реализовать без использования различных видов моделирования. В ряде работ отмечается, что на всех перечисленных этапах для сложных видов технических систем различных уровней необходимо учитывать многие особенности. К основным из них относят следующие: сложность структуры и стохастичность связей между элементами, неоднозначность алгоритмов поведения при различных условиях, большое количество параметров и переменных, неполноту и недетерминированность исходной информации, разнообразие и вероятностный характер воздействий внешней среды и т. д.

Ограниченность возможностей непосредственного экспериментального исследования больших технических систем, в особенности на этапе их проектирования, когда они вообще отсутствуют, делает актуальной разработку методики их моделирования, в частности математического. Эта методика должна позволить в соответствующей форме представить процессы функционирования будущего или действующего реального технического объекта, описание протекания этих процессов с помощью математических моделей, получение и обработку результатов экспериментов с моделями по оценке характеристик исследуемых проектируемых или реальных объектов.

При проектировании как сложной технической системы в целом, так и ее подсистем необходимо выполнить внешнее проектирование (**макропроектирование**) и внутреннее (**микропроектирование**). На указанных стадиях рассматриваются различные цели, что приводит к существенному различию используемых при этом методов и средств моделирования. Причем методы моделирования преследуют конкретные цели, а эффективность метода зависит от грамотности использования разработчиком возможностей моделирования.

На стадии **макропроектирования** должна быть разработана обобщенная модель процесса функционирования сложной системы, позволяющая разработчику получить ответы на вопросы об эффективности различных стратегий управления объектом при его взаимодействии с внешней средой. Стадию внешнего проектирования можно разбить на **анализ** и **синтез**. При **анализе** изучают объект управления, строят модель воздействий внешней среды, определяют критерии оценки эффективности, имеющиеся ресурсы, необходимые ограничения. Конечная цель стадии анализа – построение модели объекта управления для оценки его характеристик. При **синтезе** на этапе внешнего проектирования решаются задачи выбора стратегии управления на основе модели объекта моделирования, т. е. сложной системы.

На стадии **микропроектирования** разрабатывают модели с целью создания эффективных подсистем. Причем используемые методы и средства моделирования зависят от того, какие конкретно обеспечивающие подсистемы разрабатываются: информационные, математические, технические, программные и т. д.

Особенности использования моделей. Аспекты данного вопроса достаточно полно изложены в существующей литературе. Они заключаются в том, что выбор метода моделирования и необходимая детализация моделей существенно зависят от этапа разработки сложной системы. На этапах обследования объекта управления, например, промышленного предприятия, и разработки технического задания на проектирование автоматизированной системы управления, модели в основном носят описательный характер и преследуют цель наиболее полно представить в компактной форме информацию об объекте, необходимую разработчику.

На этапах разработки технического и рабочего проектов модели отдельных подсистем детализируются, и моделирование служит для решения конкретных задач проектирования, т.е. выбора оптимального по определенному критерию при заданных ограничениях варианта из множества допустимых. Поэтому в основном на этих этапах проектирования сложных систем используются модели для целей синтеза.

Целевое назначение моделирования на этапе внедрения и эксплуатации сложных систем – это проигрывание возможных ситуаций для принятия обоснованных и перспективных решений по управлению объектом. Моделирование (имитацию) также широко применяют при обучении и тренировке персонала автоматизированных систем управления, вычислительных комплексов и сетей, информационных систем в различных сферах. В этом случае моделирование носит характер деловых игр. Модель, реализуемая обычно на ЭВМ, воспроизводит поведение управляемого объекта и внешней среды, а люди в определенные моменты времени принимают решение по управлению объектом.

Современные методы и средства моделирования технических систем неразрывно связаны с новыми достижениями в различных областях науки и техники, а в особенности с процессом совершенствования ЭВМ, сфера эксплуатации которых распространяется на все отрасли человеческой практики

и стимулирует развитие новых теоретических и прикладных направлений, в том числе и в машиностроении.

Необходимо отметить, что из методов моделирования следует особенно выделить **аналитические и имитационные**:

- **аналитические методы** к исследованию системы (исторически первый) предусматривают использование ЭВМ в качестве вычислителя по аналитическим зависимостям. Анализ характеристик процессов при таком методе связан со значительными трудностями. Так, возникает необходимость существенного упрощения модели на этапе ее построения или в процессе работы с ней, что может привести к получению недостоверных результатов;

- **имитационные методы** основаны на оценке характеристик больших технических систем, представляемых в виде **имитационных моделей**, реализованных на современных ЭВМ с высоким быстродействием и большим объемом оперативной памяти;

- **«чисто машинные» методы** – новые методы решения задач исследования больших систем на основе реализации имитационных экспериментов с их моделями.

Перспективность последних двух методов возрастает с повышением быстродействия и оперативной памяти ЭВМ, с развитием математического обеспечения, расширением банков данных и совершенствованием периферийных устройств, необходимых для организации диалоговых систем моделирования. Реализация экспериментов с имитационными моделями сложных технических систем на автоматизированных рабочих местах, созданных на базе персональных ЭВМ, наряду с анализом их характеристик, позволяет решать задачи структурного, алгоритмического и параметрического синтеза таких систем при заданных критериях оценки эффективности и ограничениях.

Однако при всем совершенстве применяемой вычислительной техники нельзя игнорировать тот факт, что в основу любой модели положено предварительное изучение явлений, лежащих в объекте-оригинале. Успех моделирования технической системы, как и любой другой, зависит, в конечном счете, от того, насколько **детально изучены реальные явления** в объекте-оригинале.

При создании больших технических систем (энергосистемы, автомобили, локомотивы, судовые дизели, авиационная техника, робототехнические комплексы металлообработки и сборки и др.) их отдельные компоненты разрабатываются различными коллективами, которые используют соответствующие средства моделирования при анализе и синтезе отдельных подсистем. Возникает вопрос: что необходимо в этом случае для повышения эффективности проектирования новейших прогрессивных технических систем при сокращении сроков разработки?

Пользуясь результатами известных работ, на поставленный вопрос можно ответить следующим образом. Прежде всего, разработчикам необходимы оперативный доступ к программно-техническим средствам моделирования, а также оперативный обмен результатами моделирования отдельных взаимодействующих подсистем. Таким образом, появляется необходимость в

создании диалоговых систем моделирования, для которых характерны определенные особенности. К основным из них относят возможность одновременной работы многих пользователей, занятых разработкой одной или нескольких систем, доступ пользователей к программно-техническим ресурсам системы моделирования, в том числе к базам данных и знаний, а также к пакетам прикладных программ моделирования. Важное значение при этом приобретает обеспечение диалогового режима работы с различными вычислительными машинами и устройствами, включая цифровые и аналоговые вычислительные машины, установки натурного и физического моделирования, элементы реальных систем. Значительный вес приобретает диспетчирование работ в **системе моделирования** и оказание различных услуг пользователям.

В зависимости от специфики исследуемых объектов в ряде случаев эффективным оказывается моделирование на аналоговых вычислительных машинах (АВМ). При этом надо иметь в виду, что АВМ значительно уступают ЭВМ по точности и логическим возможностям, но по быстродействию, схемной простоте реализации, сопрягаемости с датчиками внешней информации АВМ превосходят ЭВМ, или, по крайней мере, не уступают им.

Для сложных динамических объектов наиболее перспективным является моделирование на базе гибридных (аналого-цифровых) вычислительных комплексов. Такие комплексы реализуют преимущества цифрового и аналогового моделирования и позволяют наиболее эффективно использовать ресурсы ЭВМ и АВМ в составе единого комплекса. При использовании гибридных моделирующих комплексов упрощаются вопросы взаимодействия с датчиками, установленными на реальных объектах, что позволяет, в свою очередь, проводить комбинированное моделирование с использованием аналого-цифровой части модели и натурной части объекта. Такие гибридные моделирующие комплексы могут входить в состав многомашинного комплекса, что еще больше расширяет его возможности с точки зрения моделируемых классов больших систем.

Таким образом, достижения общей теории моделирования, информатики, ознаменовавшиеся интенсивным развитием новых информационных технологий и прикладных информационных систем, а также их внедрением во все сферы жизни общества к началу XXI века, заняли достойное место в организационном управлении в промышленности, в проведении научных исследований. Отмеченное обстоятельство вполне относится, в том числе, к математическому моделированию действующих и проектируемых сложных производственных систем и процессов, а также к процедурам автоматизированного проектирования. Информатизация, как процесс перехода от индустриального общества к информационному, характеризуется резким перераспределением трудовых ресурсов из материального производства в сферу информации. Это соотношение изменяется от 3:1 к 1:3, создавая предпосылки для повышения качества и эффективности общих методов моделирования, и особенно математического, при исследовании действующих и проектировании новых видов промышленных объектов, рабочих и производственных процессов и технологических систем.

ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ И ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКЕ

2.1. Место математического моделирования в иерархии моделей

Научить формулировать и решать широкий круг практических и теоретических задач теплоэнергетики – основная цель данного учебного пособия для магистров теплоэнергетического направления. Для успешного достижения этой цели, обучающемуся необходимо обладать достаточно глубокими междисциплинарными знаниями из классической математики, уравнений математической физики, теплообмена, гидродинамики и газодинамики, механики деформируемого твердого тела и теории упругости, численных методов и др.

Владение методами математического моделирования, аккумулирующими необходимую информацию из перечисленных выше дисциплин, позволяет справиться с поставленной задачей.

Теория математического моделирования изучает, как с помощью математики описывать, анализировать и прогнозировать поведение реальных объектов и систем, применяя математические методы для решения задач, проверки адекватности моделей и применения результатов. Она включает этапы постановки задачи, построения математической модели, ее исследования (аналитического или численного) и проверки на соответствие реальности.

С философских позиций математическая модель – это относительная истина, отражающая определенные особенности изучаемых явлений. Формализованная на том или ином языке (дифференциальных или разностных уравнений и т. д.) математическая модель отражает лишь отдельные, значимые свойства реальных объектов и процессов, и с ее помощью можно изучать эти свойства.

Понятие «математическое моделирование» в последние несколько десятилетий является все более распространенным в научной литературе, в частности, в естественнонаучной и технической. В настоящее время практически на любом проектном или конструкторском предприятии применяются математические модели. В последние годы широкое распространение получило применение математического моделирования в специальных научных исследованиях. Следует заметить, что математическое моделирование представляет собой отдельную междисциплинарную область знаний со своей совокупностью объектов, подходов и методов исследования.

Математической моделью называют совокупность уравнений или других математических соотношений, отражающих основные свойства изучаемого объекта или явления в рамках принятой умозрительной физической модели и особенности его взаимодействия с окружающей средой на пространственно-временных границах области его локализации. Математические модели различных процессов в изучаемых системах строятся, как правило, на основе законов сохранения и равновесия, позволяющих наиболее точно описать

состояние процесса в любой точке пространства в произвольный момент времени.

Основными свойствами математических моделей являются адекватность и простота, указывающие на степень соответствия модели изучаемому объекту и возможности ее реализации. Процесс формулировки математической модели называется постановкой задачи.

На рисунке 2.1 приведена одна из возможных схем общей системы классификации моделей. В общей системе моделей математическое моделирование занимает все более значимое место ввиду экономичности моделирования, возможности минимизации затрат на разработку и реализацию моделей, широких возможностей развития, прогнозирования и создания перспективных процессов и установок.



Рисунок 2.1. Обобщенная схема классификации моделей процессов и технических систем

На рисунке 2.2 приведена подробная схема классификации моделей по характеру изучаемых процессов и формам представления объектов, выделяя при этом место и структуру математических моделей в общей иерархии моделирования.

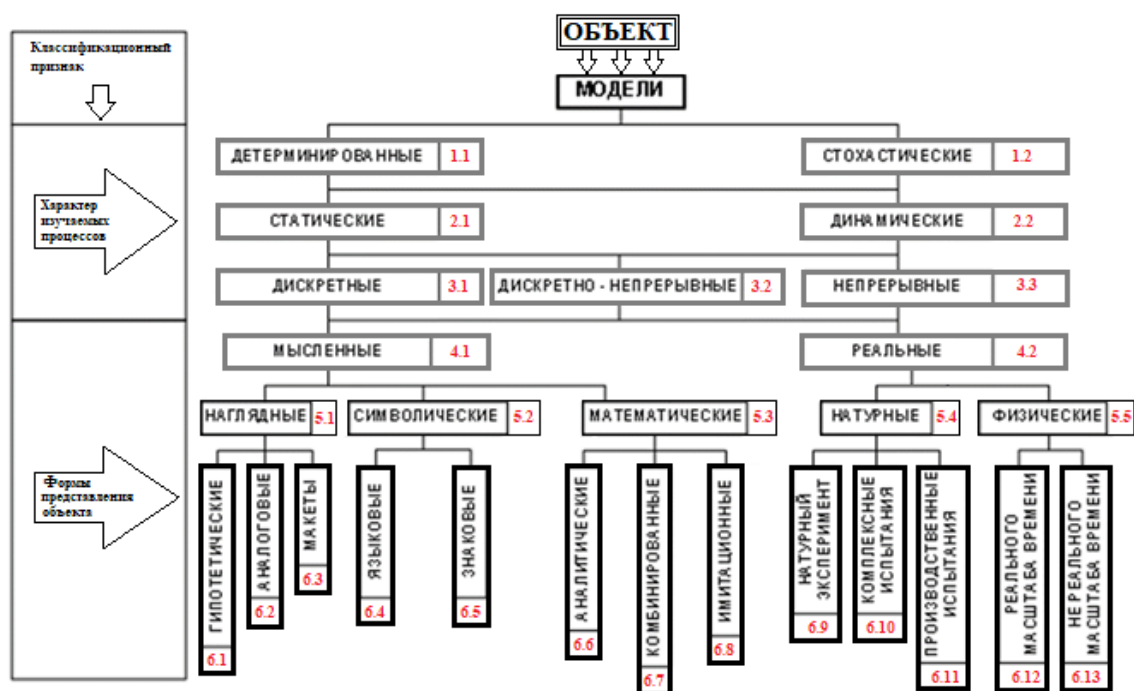


Рисунок 2.2. Классификация моделей по характеру изучаемых процессов и формам представления объектов

2.2. Структура и обобщенное описание математической модели

Предметно-ориентированные объекты имеют довольно сложную структуру и параметрическое описание (рис. 2.3).

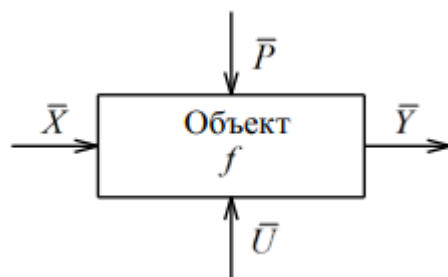


Рисунок 2.3. Общая схема объекта

Вектор входных параметров $\bar{X}$ определяет совокупность состояний объекта, задание которых выделяет из множества возможных траекторий функционирования единственную. Однако на траекторию функционирования могут налагаться стохастические воздействия, которые обозначаются через вектор $\bar{P}$. Эти стохастические воздействия на объект отражают как объективное, так и субъективное вмешательство внешней среды. Вектор управляющих параметров $\bar{U}$ позволяет путем изменения его элементов целенаправленно изменять вектор выходных параметров $\bar{Y}$.

В качестве примера рассмотрим прямоточный теплообменник (рис. 2.4), в который поступают холодный и горячий теплоносители, имеющие на входе

температуры t_x^{BX} и t_r^{BX} соответственно, с объемными расходами v_x и v_r . В результате переноса теплоты от горячего теплоносителя к холодному через теплопередающую поверхность площадью S температура холодного теплоносителя возрастает до $t_x^{BЫX}$, а горячего уменьшается до $t_r^{BЫX}$. В качестве входных параметров теплоносителя необходимо взять t_x^{BX} , t_r^{BX} ; в качестве выходных параметров – $t_x^{BЫX}$, $t_r^{BЫX}$; в качестве управляющих – S , v_x , v_r и коэффициент теплопередачи k ; в качестве случайных параметров можно взять степень отклонения входных параметров от их ожидаемых значений.

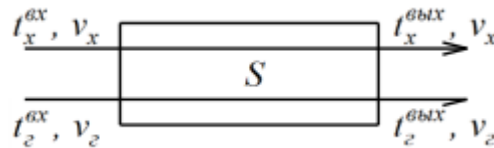


Рисунок 2.4. Схема прямооточного теплообменника

Переходя вновь к анализу функционирования объекта в общем случае можно заключить, что рассмотренные параметры связаны между собой неявной функциональной связью:

$$f(\bar{Y}, \bar{X}, \bar{P}, \bar{U}, \tau) = 0, \quad (2.1)$$

В эту связь дополнительно включена зависимость всех параметров от текущего времени τ . Природа и характер функциональной связи f , как правило, не могут быть определены априори (заранее). Поэтому необходимость идентификации траекторий функционирования объекта (2.1) является одновременно и сложной, и некорректной задачей. Таким образом, f определяет внутреннюю структуру объекта.

Выходом из такой ситуации является замена анализа объекта на анализ его виртуального образа (рис. 2.5). Отличие объекта от его виртуального образа, который и будем называть в дальнейшем математической моделью, заключается в выдвижении гипотезы о функциональной связи между всеми параметрами и τ , то есть

$$F(\bar{Y}, \bar{X}, \bar{P}, \bar{U}, \tau) = 0, \quad (2.2)$$

где F – априори определенная функциональная связь, которая должна обладать свойством идентичности, корректности, качественной и количественной адекватности, что должно отражать условие:

$$F \cong f. \quad (2.3)$$

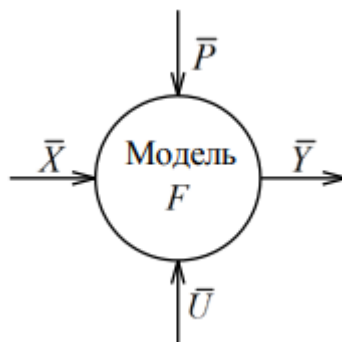


Рисунок 2.5. Общая схема модели

Резюмируя вышесказанное, можно определить, что такое математическая модель. Итак, **математическая модель** – это математическая формализация, которая отражает определенные свойства реальных объектов и проходящих в них процессов и позволяет изучать и прогнозировать эти свойства. Отсюда следует, что математическое моделирование является методом научного исследования, который основан на познании изучаемых объектов с помощью математической модели.

2.3. Классификация математических моделей

На сегодняшний день отсутствует единая система классификации математических моделей вследствие большого количества классификационных признаков, видов и типов моделей.

Математические модели относятся к символьным моделям и представляют собой описание объектов в виде математических символов, формул, выражений. При наличии достаточно точной математической модели можно путем математических расчетов прогнозировать результаты функционирования объекта при различных условиях, выбирать из множества возможных вариантов тот, который дает наилучшие результаты.

Как отмечалось, существует множество вариантов схем классификации математических моделей. Все они достаточно условны. Одна из таких наиболее содержательных схем приведена на рисунке 2.6.



Рисунок 2.6. Классификация математических моделей в зависимости от вида

Возможная схема классификации математических моделей в зависимости от характера входных и выходных параметров приведена на рисунке 2.7.



Рисунок 2.7. Классификация математических моделей в зависимости от характера входных и выходных параметров

Одна из возможных схем, отражающая формы ее представления, характер теоретического описания, степень масштабирования (абстрагирования), способ получения, характер переменных и форму прогнозирования результатов, приведена на рисунке 2.8.

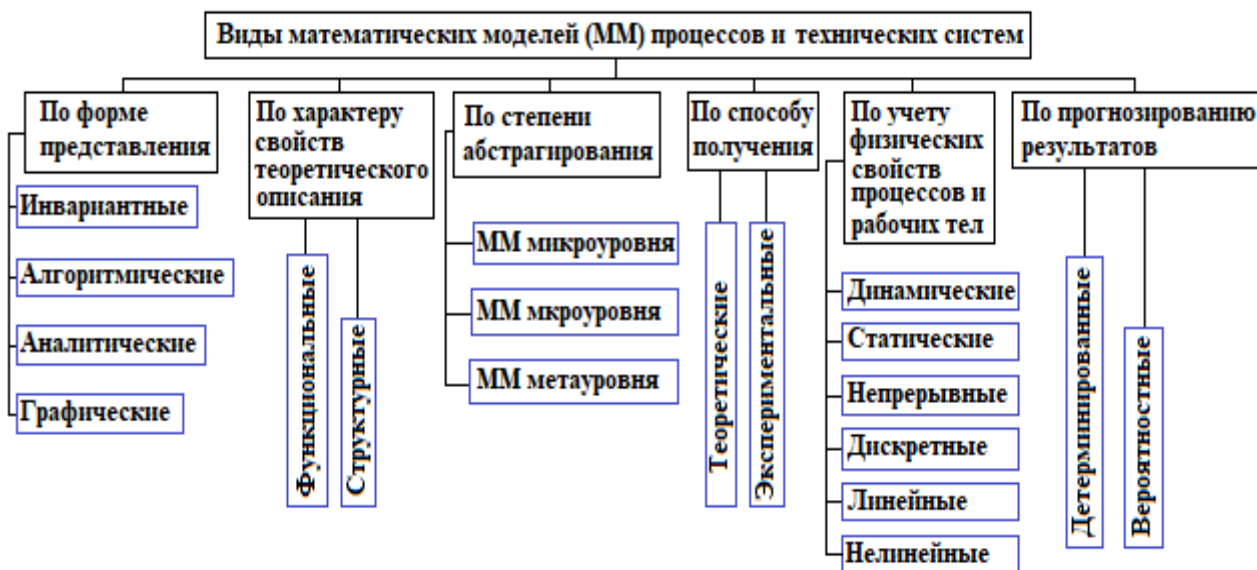


Рисунок 2.8. Классификация математических моделей по спектру факторов

Достаточно общий вариант классификации видов математических моделей по основным признакам может быть проиллюстрирован таблицей 2.1.

При построении математических моделей процессов функционирования систем существуют следующие основные подходы: непрерывно-детерминированный (например, дифференциальные уравнения, уравнения состояния); дискретно-детерминированный (конечные автоматы); дискретно-стохастический (вероятностные автоматы); непрерывно-стохастический (системы массового обслуживания); обобщенный или универсальный (агрегативные системы).

Исходя из понятия математической модели, приведем их классификацию по принципу присутствия (отсутствия) того или иного набора параметров (рис. 2.9). В дальнейшем ограничимся явным видом функциональной связи (2.2), то есть:

$$\bar{Y} = F(\bar{X}, \bar{P}, \bar{U}, \tau). \quad (2.4)$$

Таблица 2.1. Классификация математических моделей

Признаки классификации	Виды математических моделей
1. Принадлежность к иерархическому уровню	Модели микроуровня Модели макроуровня Модели метаяуровня
2. Характер взаимоотношений со средой	Открытые (непрерывный обмен) Закрытые (слабая связь)
3. Характер отображаемых свойств объекта	Структурные Функциональные
4. Способ представления свойств объекта	Аналитические Алгоритмические Имитационные
5. Способ получения модели	Теоретические Эмпирические
6. Причинная обусловленность	Детерминированные Стохастические (Вероятностные) Смешанные
7. По отношению к времени	Динамические (Нестационарные) Статические (Стационарные)
8. По типу уравнений	Линейные Нелинейные
9. По характеру множества значений переменных	Непрерывные Дискретные Дискретно-непрерывные
10. По назначению	Технические Экономические Социальные и т.д.

Если среди аргументов функциональной связи (2.4) отсутствует вектор $\mathbf{P}$, в этом случае имеем детерминированные модели:

$$\bar{Y} = F(\bar{X}, \bar{U}, \tau). \quad (2.5)$$

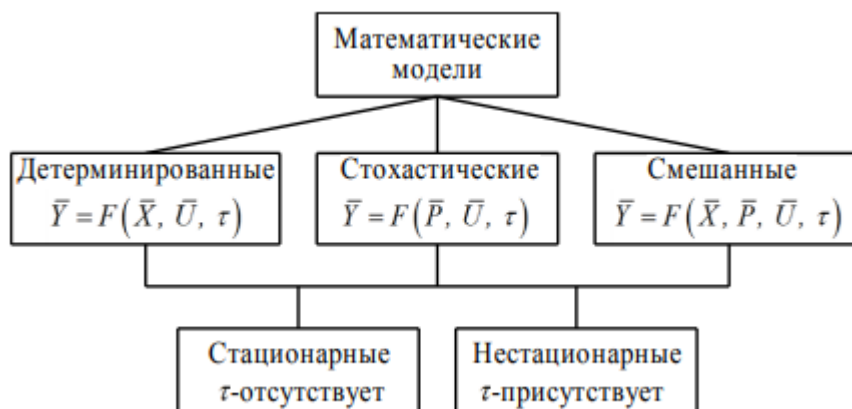


Рисунок 2.9. Классификация математических моделей по принципу присутствия (отсутствия) того или иного набора параметров

Если среди аргументов функциональной связи (2.4) отсутствует вектор $\mathbf{X}$ (его заменяет вектор $\mathbf{P}$), то такие модели носят название стохастических:

$$\bar{Y} = F(\bar{P}, \bar{U}, \tau). \quad (2.6)$$

Присутствие всех параметров в функциональной связи (2.4) классифицирует математическую модель как смешанную. Кроме того, присутствие или отсутствие текущего времени в списке аргументов функциональной связи (2.4) делит математические модели соответственно на стационарные и нестационарные.

Отдельные источники приводят нижеследующую классификацию моделей.

А. По способу построения модели подразделяются на:

- *аналитические (теоретические);*
- *статистические (эмпирические, экспериментальные);*
- *комбинированные.*

Аналитические модели (теоретические) строятся на основе информации, содержащейся в известных законах природы, например, законах сохранения энергии, массы, импульса, электрического заряда, Ома, Кирхгофа, Архимеда и т. п. Объект, для которого строится аналитическая модель, должен быть хорошо изучен. Как правило, при построении аналитических моделей используются различные допущения и упрощения, снижающие точность моделирования. Основным достоинством аналитических моделей является их универсальность. **Аналитические (теоретические)** методы основаны на изучении физических закономерностей для данного объекта или процесса, а также в определении соответствующих этим закономерностям математических описаний или обоснований. Теоретические методы получения модели приводят

в результате к моделям в виде алгебраических, дифференциальных, трансцендентных уравнений.

При необходимости здесь возможны некоторые упрощения и допущения известных физических уравнений и закономерностей (например, уравнение теплопроводности, связывающее большое количество параметров, можно представить в виде зависимости от 2-х, 3-х параметров).

Статистические (экспериментальные, эмпирические) модели строятся на основании обработки экспериментальных данных. Проводится ряд экспериментов, при которых фиксируются значения входных и выходных параметров, после чего производится статистическая обработка результатов экспериментов, на основании которой подбирается математическое выражение, описывающее экспериментальные данные с достаточной точностью. Основным достоинством статистических моделей является простота их построения, основным недостатком – низкая универсальность.

Статистические (экспериментальные, эмпирические) методы основаны на исследовании внешних проявлений свойств объекта, фиксируемых во время эксплуатации этих объектов или при проведении целенаправленных активных экспериментов. По форме связи между входными и выходными величинами эти методы могут быть **детерминированными** или **стохастическими**.

Комбинированные модели совмещают в себе теоретические и экспериментальные, взаимно дополняя друг друга. Комбинированные модели дают наилучший результат, сочетая достоинства аналитических и статистических моделей.

Б. По количеству входных переменных.

Одномерные и многомерные модели различают по количеству входных переменных, входящих в модель.

В. По характеру зависимости между переменными.

Линейные и нелинейные модели. Для линейных моделей справедлив принцип суперпозиции, согласно которому реакция объекта на суммарное воздействие равна сумме реакций объекта на элементарные воздействия.

Г. По зависимости переменных от времени.

Статические и динамические модели. В динамических моделях переменные зависят от времени, в статических моделях – не зависят. Динамические модели сложнее статических моделей, и при необходимости они иногда преобразуются в статические. *Статические* модели описывают также установившиеся режимы, когда переходные процессы закончились.

Д. По зависимости параметров от времени

Стационарные и нестационарные модели

Стационарные модели описывают процессы, инвариантные относительно времени начала процесса. **Нестационарные модели** описывают процессы, течение которых зависит от времени их начала. **Нестационарные** модели являются **динамическими** моделями. *Статические* модели являются частными случаями *стационарных* моделей и описывают функционирование системы в установившихся условиях.

Е. По учету пространственной протяженности объекта.

Модели с параметрами, сосредоточенными или распределенными в пространстве. В моделях с распределенными параметрами переменные зависят от пространственных координат, в моделях с сосредоточенными параметрами – не зависят. Динамические модели с сосредоточенными параметрами описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Динамические модели с распределенными параметрами описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Ж. По прерывистости параметров и переменных модели.

Модели, дискретные и непрерывные (во времени). В дискретных моделях время принимает фиксированные (отдельные, изолированные) значения, в непрерывных моделях – любые значения. При использовании дискретных моделей ось времени разбивается на интервалы, границы которых называются опорными моментами времени. Расчет параметров модели производится для опорных моментов времени.

З. По однозначности или неоднозначности параметров, или зависимости между входными и выходными данными.

Детерминированные и стохастические (вероятностные) модели.

Детерминированные математические модели используют точные и однозначные зависимости между входными и выходными данными, не содержат случайности и дают один и тот же результат при одинаковых начальных условиях, то есть являются строго воспроизводимыми. В стохастических моделях некоторые параметры включают в себя случайные факторы, то есть являются случайными величинами, и результаты моделирования при каждой реализации отличаются друг от друга.

Первые, *детерминированные* – это такие, когда каждому конкретному значению входной величины объекта соответствует конкретное значение выходной величины, т. е. величины связаны функционально. Если же такая связь нарушается, то есть на объект действует случайным образом возмущение, и значения выходных величин не всегда соответствуют значениям входных, то есть в составе выходного значения величины присутствует доля случайности, то такие процессы называют *стохастическими (вероятностными)*. Здесь степень взаимосвязи оценивается коэффициентом корреляции, численное значение которого находится в интервале $0 \dots 1$.

Применительно к теплоэнергетическому оборудованию и рабочим процессам конкретный пример схемы структуризации и систематизации математических моделей для паротурбинных установок, в зависимости от критериев классификации и способов описания, приведен в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Классификация математических моделей паротурбинных установок

Основания (критерии) классификации	ММ ПТУ	Способ описания
По характеру решаемых задач	функциональные	ММ - система уравнений различного типа, устанавливающая зависимости между величинами
	структурные	ММ характеризуют структуру сложного объекта, состоящего из отдельных частей, между которыми имеются определенные связи (теория графов)
По способу представления энергетических характеристик	аналитические	ММ - сложная функциональная зависимость многих переменных
	графические	ММ - диаграмма режимов
	алгоритмические	ММ - программа для ЭВМ, описывающая тепловые процессы нелинейными уравнениями, решаемые численными методами
По характеру исходной информации	экспериментальные	В основу ММ вложены характеристики ступеней, отсеков, полученные на натурных и модельных установках путем проведения экспериментов
	расчетные	ММ - программа детального теплового и газодинамического расчета поточной части
По области применения	номинальные (статические) режимы работы	ММ не предусматривает изменений в тепловой схеме и в режимных параметрах
	переменные режимы работы	ММ адекватно отражает эффективность работы ПТУ и в номинальных, и в переменных режимах работы с учетом изменений в тепловой схеме

2.4. Состав математического описания

Ядро любой математической модели содержит совокупность законов сохранения или равновесия, установленных закономерностей протекания рабочих процессов, математический аппарат, а также дополнительные условия, определяющие и идентифицирующие границы применимости модели (рис. 2.10).

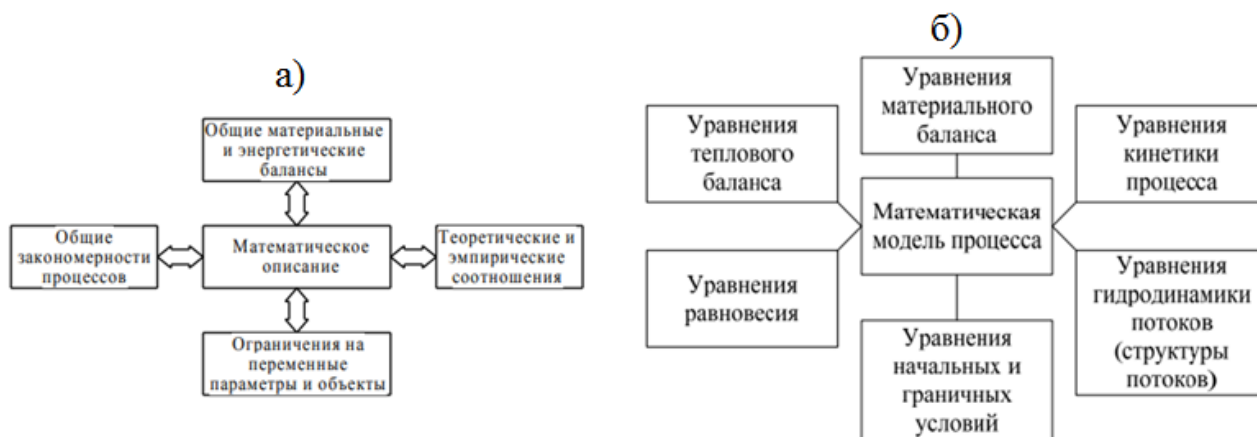


Рисунок 2.10. Структура общего (а) и частного (б) математического описания

Основой подавляющего числа математических моделей в теплоэнергетике являются выражения законов сохранения, представленных либо в алгебраической, либо в дифференциальной, или интегральной формах. Детализация материальных и энергетических балансов выражается в использовании классических закономерностей процессов переноса массы, импульса, энергии, момента количества движения, которые подробно анализируются в соответствующих курсах специальных дисциплин. Кроме детализации законов сохранения, закономерности процессов описывают также кинетику, т. е. скорость протекания процессов. В обязательном порядке математическое описание дополняется соотношениями, которые выделяют данную систему из множества родственных систем (в том числе краевые условия). Сюда могут входить теплофизические и физико-химические параметры рабочих тел и объемов, совокупность которых определяет структурную схему моделируемой системы. Важным атрибутом математического описания является указание, если это возможно, ограничительных соотношений, которые указывают на условия ее корректного использования.

2.5. Этапы, стадии, фазы, принципы и подходы при построении математических моделей

Предварительно необходимо отметить, что в данном контексте термины «фаза», «стадия» и «этап» используются для описания частей более крупного процесса или цикла, но имеют разную степень детализации: этап – самый крупный блок структуры или продолжительный промежуток времени, стадия – более мелкая часть этапа, а фаза – самая мелкая составляющая, которая может делиться на конкретные задачи.

Этапы процесса моделирования можно представить как последовательный переход от моделей одного класса к другому (рис. 2.11). Условно выделяют три больших класса моделей: когнитивные, содержательные и формальные модели. Они составляют три взаимосвязанных уровня моделирования, которые нельзя рассматривать изолированно один от другого. Взаимовлияние уровней моделирования связано со свойством потенциальности моделей. Создание любой модели сопряжено с появлением новых знаний об исследуемом объекте, что ведет к переоценке и уточнению концепций и взглядов на объект моделирования на разных уровнях. Данное обстоятельство приводит, в свою очередь, к пересмотру соответствующих содержательных и когнитивных моделей, обеспечивая спиральное развитие всех уровней моделирования исследуемого объекта.

2.5.1. Основные этапы разработки математических моделей

Основные базовые этапы разработки математических моделей укрупненно могут быть представлены в виде **содержательной, концептуальной и математической** постановки задач моделирования.

Когнитивные и содержательные модели

При наблюдении за объектом-оригиналом в голове исследователя формируется некий мысленный образ объекта, его идеальная модель, которую в научной литературе принято называть когнитивной (мысленной, способствующей познанию). Формируя такую модель, исследователь, как правило, стремится ответить на конкретные вопросы, поэтому от бесконечно сложного устройства объекта отсекается все ненужное с целью получения его более компактного и лаконичного описания. Представление когнитивной модели на естественном языке называется содержательной моделью.

Когнитивные модели (рис. 2.11) субъективны, так как формируются исследователем умозрительно на основе всех его предыдущих знаний и опыта. Получить представление о когнитивной модели, можно лишь описав ее в знаковой форме. Нельзя утверждать, что когнитивные и содержательные модели эквивалентны, поскольку первые могут содержать элементы, которые исследователь не сможет или не хочет сформулировать. В то же время, если содержательная модель сформулирована кем-то другим или является продуктом коллективного творчества, то ее интерпретация, уровень понимания, степень доверия могут существенно изменяться в зависимости от того или иного интерпретатора. Содержательную модель часто называют технической постановкой проблемы.

По своим функциональным признакам, а также целям, содержательные модели подразделяются на описательные, объяснительные и прогностические (рис. 2.11).

- Описательной моделью можно назвать любое описание объекта.
- Объяснительная модель позволяет ответить на вопрос, почему что-либо происходит.
- Прогностическая модель должна описывать будущее поведение объекта. Можно заметить, что прогностическая модель не обязана включать в себя объяснительную.

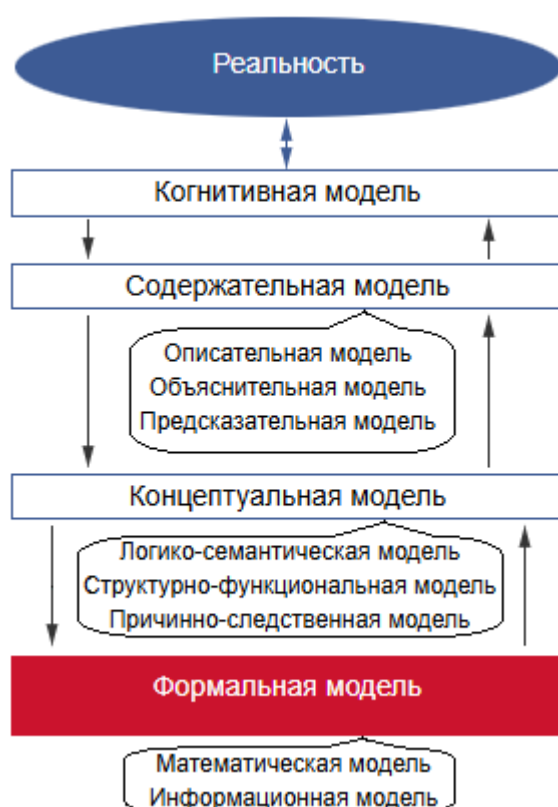


Рисунок 2.11. Этапы перехода моделей от одного класса (уровня) к другому

Как отмечалось, процесс построения и изучения математических моделей реального объекта называется **математическим моделированием**.

Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, в сущности занимаются математическим моделированием: заменяют объект исследования его математической моделью и затем изучают последнюю. Связь математической модели с реальностью осуществляется с помощью цепочки гипотез, идеализаций, аналогий и упрощений. С помощью математических методов описывается, как правило, идеальный объект, построенный на этапе содержательного моделирования.

Этап 1. Содержательная постановка

Необходимость в новой модели может появиться в связи с проведением научных исследований (особенно – на стыке различных областей знания), выполнением проектных и конструкторских работ на производстве, созданием систем автоматического управления, планирования и контроля. Человека или организацию, которые заинтересованы в разработке новой математической модели, для краткости будем называть **заказчиком**. После принятия решения о необходимости построения новой математической модели заказчик ищет **исполнителя** своего заказа.

Основной целью данного этапа является подготовка содержательной постановки задачи моделирования (рис. 2.11). Перечень сформулированных в содержательной (словесной) форме основных вопросов об объекте моделирования, интересующих заказчика, составляет **содержательную постановку задачи моделирования**.

Конечной целью этапа 1 является разработка технического задания. Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) исследовать моделируемый объект или процесс с целью выявления основных его свойств, параметров и факторов;
- 2) собрать и проверить доступные экспериментальные данные об объектах-аналогах;
- 3) проанализировать литературные источники и сравнить между собой построенные ранее модели данного объекта или ему подобные;
- 4) систематизировать и обобщить накопленный ранее материал;
- 5) разработать общий план создания и использования комплекса моделей.

При этом важно правильно поставить вопросы, на которые должна ответить модель. Для этого нужны специалисты, хорошо знающие предметную область и, вместе с тем имеющие достаточно широкий научный кругозор, чтобы общаться со специалистами в различных областях знания, в частности с заказчиком модели. Это является условием успешного формулирования таких требований к создаваемой модели, которые, с одной стороны, удовлетворят заказчика, а с другой стороны – удовлетворят ограничениям на сроки и ресурсы, выделенные для создания и реализации модели. В целом выполнение этого этапа может занять до 30 % времени, отпущенного на разработку модели, а с учетом возможных уточнений – и более.

Этап 2. Концептуальная постановка задачи моделирования

Концептуальные модели

Концептуальной моделью принято называть содержательную модель, при формулировке которой используются понятия и представления предметных областей знания, занимающихся изучением объекта моделирования.

В более широком смысле под концептуальной моделью понимают содержательную модель, базирующуюся на определенной концепции или точке зрения. Выделяют три вида концептуальных моделей: логико-семантические, структурно-функциональные и причинно-следственные.

– Логико-семантическая модель является описанием объекта в терминах и определениях соответствующих предметных областей знаний, включающим все известные логически непротиворечивые утверждения и факты. Анализ таких моделей осуществляется средствами логики с привлечением знаний, накопленных в соответствующих предметных областях.

– При построении структурно-функциональной модели объект обычно рассматривается как целостная система, которую расчленяют на отдельные элементы или подсистемы. Части системы связываются структурными отношениями, описывающими подчиненность, логическую и временную последовательность решения отдельных задач. Для представления подобных моделей удобны различного рода схемы, карты и диаграммы.

– Причинно-следственная модель часто используется для объяснения и прогнозирования поведения объекта. Данные модели ориентированы в основном на следующее: 1) выявление главных взаимосвязей между составными элементами изучаемого объекта; 2) определение того, как изменение одних факторов влияет на состояние компонентов модели; 3) понимание того,

как в целом будет функционировать модель, и будет ли она адекватно описывать динамику интересующих исследователя параметров.

Концептуальная постановка задачи математического моделирования – это сформулированный в терминах конкретных дисциплин (физики, химии, биологии и т. д.) перечень основных вопросов, интересующих заказчика, а также совокупность гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования. Наибольшие трудности при формулировке концептуальной постановки приходится преодолевать в моделях, находящихся на «стыке» различных дисциплин.

Этап 3. Математическая постановка задачи моделирования

Законченная концептуальная постановка позволяет сформулировать математическую постановку задачи моделирования, включающую совокупность различных математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования. **Математическая постановка задачи моделирования** – это совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования. Совокупность математических соотношений определяет вид оператора модели.

Для создания математических моделей сложных систем и процессов, применимых для широкого класса реальных задач требуется привлечение большого объема знаний, накопленных в рассматриваемой дисциплине (а в некоторых случаях и в смежных областях).

2.5.2. Структурные стадии разработки математических моделей

1. Разработка математического описания предварительного варианта модели (уточнение задачи моделирования, определение требований к входным и выходным переменным, построение структурной схемы модели, выбор ее параметров, выбор методов получения конечных и промежуточных результатов). Результатом этого этапа является формальное математическое описание блоков модели. При этом как бы исчезает физическая сторона исследуемой задачи, то есть для лиц, не знакомых с решаемой задачей, по математическому описанию модели крайне затруднительно или даже невозможно уяснить сущность этой задачи.

2. Разработка машинной программы моделирования, включая алгоритмизацию математического описания, разработку программы в соответствующей среде программирования и проверку правильности ее работы (например, по моделированию характерных частных вариантов входных величин, для которых известны или могут быть рассчитаны значения выходных величин).

3. Испытания и корректировка модели (моделирование исследуемой системы для известных частных случаев, сравнение получаемых при этом результатов с известными результатами и в случае необходимости – корректировка параметров модели). Данную стадию часто называют интерпретацией результатов моделирования.

2.5.3. Технологические стадии математического моделирования

Технологический процесс математического моделирования, то есть изучения явления с помощью математической модели, можно подразделить на 4 стадии.

Первая стадия – формулирование законов, связывающих основные объекты модели. Этот этап требует широкого знания фактов, относящихся к изучаемым явлениям, и глубокого проникновения в их взаимосвязи. Эта стадия завершается записью в математических терминах сформулированных качеств, представлений о связях между объектами модели.

Вторая стадия – исследование математических задач, к которым приводят математические модели. Основным вопросом здесь является решение прямой задачи, то есть получение в результате анализа модели выходных данных (теоретических следствий) для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений. На этой стадии важную роль приобретают математический аппарат, необходимый для анализа математической модели, и вычислительная техника – мощное средство для получения количеств, выходной информации как результата решения сложных математических задач. Часто математические задачи, возникающие на основе математической модели различных явлений, бывают одинаковыми. Это дает основание рассматривать такие типичные математические задачи как самостоятельный объект, абстрагируясь от сущности изучаемых явлений.

Третья стадия – выяснение того, удовлетворяет ли принятая гипотетическая модель критерию практики, то есть выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений. Если модель была вполне определена – все параметры ее были заданы, то определение отклонений теоретических следствий от наблюдений дает решения прямой задачи с последующей оценкой отклонений. Если отклонения выходят за пределы точности наблюдений, то модель не может быть принята. Часто при построении модели некоторые ее характеристики остаются не определенными. Задачи, в которых определяются характеристики модели (параметрические, функциональные) таким образом, чтобы выходная информация была сопоставима в пределах точности наблюдений с результатами наблюдений изучаемых явлений, называются обратными задачами. Если математическая модель такова, что ни при каком выборе характеристик этим условиям нельзя удовлетворить, то модель непригодна для исследования рассматриваемых явлений. Применение критерия практики к оценке математических моделей позволяет делать вывод о правильности положений, лежащих в основе подлежащей изучению (гипотетической) модели. Этот метод является единственным методом изучения недоступных нам непосредственно явлений макро- и микромира.

Четвертая стадия – последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели. В процессе развития науки и техники информационные данные об изучаемых явлениях все более и

более уточняются, и наступает момент, когда выводы, получаемые на основании существующей математической модели, не соответствуют нашим знаниям о явлении. Таким образом, возникает необходимость построения новой, более совершенной математической модели.

2.5.4. Основные фазы (ступени) построения математической модели

Основные фазы построения математической модели включают в себя следующие базовые составляющие компоненты.

1. Постановка задачи.

Определение цели анализа и пути ее достижения и выработки общего подхода к исследуемой проблеме. На этой ступени (шаге, фазе) требуется глубокое понимание существа поставленной задачи. Иногда правильно поставить задачу не менее сложно, чем ее решить. Постановка – процесс не формальный, общих правил нет.

2. Изучение теоретических основ и сбор информации об объекте оригинала.

На этой ступени подбирается или разрабатывается подходящая теория. Если ее нет, устанавливаются причинно-следственные связи между переменными описывающими объект. Определяются входные и выходные данные, принимаются упрощающие предположения.

3. Формализация.

Заключается в выборе системы условных обозначений и с их помощью записывать отношения между составляющими объекта в виде математических выражений. Устанавливается класс задач, к которым может быть отнесена полученная математическая модель объекта. Значения некоторых параметров на этой ступени еще могут быть не конкретизированы.

4. Выбор метода решения.

На этой ступени устанавливаются окончательные параметры моделей с учетом условия функционирования объекта. Для полученной математической задачи выбирается какой-либо метод решения или разрабатывается специальный метод. При выборе метода учитываются знания пользователя, его предпочтения, а также предпочтения разработчика.

5. Реализация модели.

Разработав алгоритм, пишется программа, которая отлаживается, тестируется и получается решение нужной задачи.

6. Анализ полученной информации.

Сопоставляется полученное и предполагаемое решение, проводится контроль погрешности моделирования.

7. Проверка адекватности реальному объекту.

Результаты, полученные по модели, сопоставляются либо с имеющейся об объекте информацией или проводится эксперимент и его результаты сопоставляются с расчетными.

Процесс моделирования является итеративным. В случае неудовлетворительных результатов ступени 6 или 7 осуществляется возврат к

одной из ранних ступеней, который мог привести к разработке неудачной модели. Эта фаза и все последующие уточняются, и такое уточнение модели происходит до тех пор, пока не будут получены приемлемые результаты.

Фазы (шаги, ступени, циклы) разработки математических моделей могут быть структурированы в виде более общей и полной схемы взаимосвязи шагов, этапов и циклов моделирования, которая представлена на рисунке 2.12.

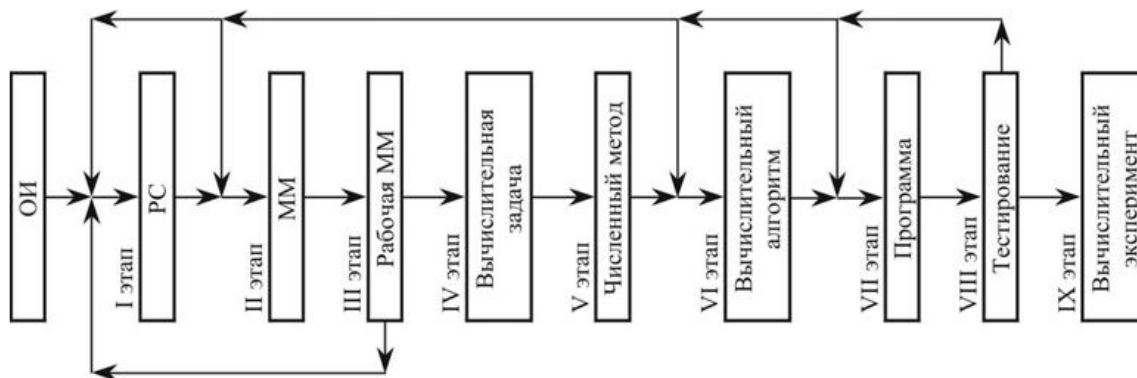


Рисунок 2.12. Схема взаимосвязи основных шагов и циклов математического моделирования

ОИ – объект исследования (носитель свойств и качеств, подлежащих изучению).

РС – расчетная схема (условное описание **ОИ**, которое должно учитывать его особенности и количественные характеристики, существенные для рассматриваемого случая).

ММ – математические модели, отличающиеся уровнем упрощения (или единственная математическая модель), описывающие **ОИ**.

Рабочая ММ – построенная и выбранная математическая модель, подлежащая дальнейшему детальному количественному анализу.

Вычислительная задача – анализ свойств и специфики решаемой задачи, где особое внимание уделяют анализу корректности ее постановки, исследованию устойчивости решения к погрешностям входных данных.

Численный метод – способ решения вычислительной задачи (метод аппроксимации математических процессов), который содержит только принципиальную схему решения задачи, включающую многие детали, без которых становится невозможным использование средств вычислительной техники для реализации этого метода.

Вычислительный алгоритм – последовательность действий, которая, начиная с заданных исходных данных, за конечное число шагов приводит к искомому результату. Двумя важнейшими требованиями, предъявляемыми к вычислительным алгоритмам, являются корректность и хорошая обусловленность (робастность – результат работы алгоритма не будет сильно меняться при небольших изменениях входных данных). Кроме того, к вычислительным алгоритмам предъявляют другие существенные требования: надлежащая точность, экономичность, простота и другие.

Программа – перевод математической модели, выраженной в виде уравнений, алгоритмов и других математических выражений, в программный код, который может быть реализован на компьютере. К программам также предъявляют ряд требований: надежность, работоспособность, переносимость, простота в использовании и другие.

Тестирование – это важный процесс апробирования **рабочей математической модели**, который позволяет убедиться, что модель правильно отражает реальный объект или процесс и позволяет делать точные прогнозы. Тестирование может выявить недочеты в программе, а также и в алгоритме, что приводит к необходимости доработки программы или же модификации алгоритма и программы. Анализ результатов вычислений, и их инженерная интерпретация могут привести к необходимости корректировки **расчетной схемы и математической модели**.

Вычислительный эксперимент (машинный эксперимент) – это метод научного исследования, который использует компьютерное моделирование для изучения поведения сложных систем и явлений, описываемых **рабочей математической модели**.

2.5.5. Принципы разработки и построения математических моделей

При построении моделей используют два принципа:

- дедуктивный (от общего к частному);
- индуктивный (от частного к общему).

При первом подходе рассматривается частный случай общеизвестной фундаментальной модели. Здесь при заданных предположениях известная модель приспособляется к условиям моделируемого объекта.

Второй способ предполагает выдвижение гипотез, декомпозицию сложного объекта, анализ, затем синтез. Здесь широко используется подобие, умозаключение с целью формирования каких-либо закономерностей в виде предположений о поведении системы.

2.5.6. Подходы к разработке и построению математических моделей

Среди **подходов** к разработке математических моделей относят:

Фундаментальные законы природы. Данный подход является самым распространенным и заключается в использовании фундаментальных законов природы применительно к конкретной ситуации. Как правило, законы признаны, доказаны опытом и являются базой научно-технических достижений. В этой связи нет необходимости в их дополнительной обоснованности. В итоге самый главный вопрос возникает при выборе конкретного закона для решения определенной задачи.

Приведем ниже базовые законы сохранения, используемые при математическом моделировании основных процессов.

1. Закон сохранения энергии.
2. Закон сохранения импульс.

3. Закон сохранения момента импульса.
4. Закон сохранения массы.
5. Закон сохранения электрического заряда.
6. Закон сохранения лептонного числа.
7. Закон сохранения барионного числа.
8. Закон сохранения четности.

Вариационные принципы. Данный подход по широте и универсальности сравним с первым подходом, и заключается в применении вариационных принципов, которые являются утверждениями об исследуемом объекте. Вариационные принципы в математическом моделировании используются для построения моделей, исходя из фундаментальных законов природы или системы, сформулированных в виде принципов экстремума или стационарности, например, принципа наименьшего действия в физике. Эти принципы позволяют находить уравнения движения или равновесия системы, минимизируя или максимизируя определенный функционал, который выражает ее состояние или динамики. **Принцип наименьшего действия** (в механике, электродинамике и квантовой теории поля). **Принцип наименьшей энергии** (в термодинамике и статистической физике). **Принцип наименьшей диссипации энергии** (в теории диссипативных систем). При этом выбор вариантов поведения осуществляется на основании определенных условий. Полученные вариационные принципы для класса явлений позволяют единообразно создавать соответствующие математические модели. Данный подход позволяет не учитывать конкретную природу процесса.

Применение аналогий при построении моделей. Метод аналогий применяется, когда невозможно выбрать фундаментальные законы или вариационные принципы. Это может быть связано с тем, что на сегодняшний момент подобные законы могут не существовать и, следовательно, описать их математически не представляется возможным.

Иерархический подход к получению моделей. Построение математических моделей с учетом всех значимых факторов не всегда бывает удобным и оправданным. Подход реализации «от простого – к сложному» в этом случае является более предпочтительным. При данном подходе создается иерархия более полных моделей, обобщающих предыдущие модели как частные случаи. Математические модели нижнего уровня могут быть достаточно простыми, типовыми, допускающими широкую унификацию и использование набора готовых моделей. При иерархическом построении общей модели сложной системы задача оптимизации всей системы распадается на ряд частных задач оптимизации на различных уровнях. При этом общий критерий оптимизации разделяется на критерии для каждого уровня. Таким образом, задача большой размерности может быть сведена к ряду задач меньшей размерности. При этом следует учитывать взаимное влияние элементов и уровней.

Блочный подход. При построении математических моделей широко используют блочный подход. Модель строится из отдельных логически законченных блоков, отражающих ту или иную сторону рассматриваемого

процесса. Блочный подход построения моделей позволяет: разбить общую задачу построения математической модели на отдельные подзадачи и тем самым упростить ее решение, а также использовать разработанные блоки в других моделях, модернизировать отдельные блоки и заменять их на новые. Общее математическое описание модели представляет собой совокупность математических описаний отдельных блоков. Применение блочного подхода построения математических моделей позволяет во многих случаях решить проблему масштабирования процессов.

Принципиально каждый блок математической модели может иметь различную степень детализации математического описания. Важно лишь, чтобы входные и выходные переменные всех блоков модели находились во взаимном соответствии, что обеспечит получение замкнутой системы уравнений математической модели процесса в целом. В идеале математическое описание каждого блока должно включать уравнения, параметрами которых являются только физико-химические свойства веществ. При практическом использовании блочного подхода в математическом описании каждого блока на том или ином уровне его детализации приходится применять эмпирические соотношения.

2.6. Общий алгоритм математического моделирования

Различают аналитический, аналитико-экспериментальный и экспериментальный методы моделирования. Первый основывается на изучении физических и химических процессов и отражает уровень знаний о них. Если знания не точны или их не хватает, недостающие получают из эксперимента. Это и есть содержание второго метода. А когда совсем (или почти) ничего неизвестно, к объекту подходят как к «черному ящику», снимают ряд характеристик и их обрабатывают. Излагаемый материал предполагает применение первого метода.

Алгоритм метода структурно весьма несложен.

1. Разделение процесса (или объекта) на элементы (звенья).
2. Анализ величин, описывающих объект (или процесс) и его части.
3. Выбор выходной величины как объекта регулирования. Выбор входных и выходных величин (управляющих, возмущающих).
4. Принятие допущений.
5. Составление уравнений статики в установившемся режиме относительно значения параметра субстанции, изменяющегося в процессе.
6. Составление уравнений динамики. Если не получается, – возврат к п. 4 для принятия дополнительных допущений.
7. Составление математической модели, запись ее в полном виде.
8. Построение структурной схемы математической модели.
9. Исследование системы по математической модели.

2.7. Свойства математических моделей и требования к ним

При разработке математической модели (ММ) устанавливается ряд требований к ее свойствам, выполнение которых необходимо для ее эффективного использования. Рассмотрим основные из этих требований.

Целенаправленность модели. В модели должны фигурировать параметры, описывающие цель объекта, а также параметры, с помощью управления которыми можно добиться достижения цели.

Полнота модели. Степень универсальности ММ характеризует полноту отображения в модели свойств реального объекта. Математическая модель отражает лишь некоторые свойства объекта. Так, большинство ММ, используемых при функциональном проектировании, предназначено для отображения протекающих в объекте физических или информационных процессов, при этом не требуется, чтобы ММ описывала такие свойства объекта, как геометрическая форма составляющих его элементов.

Точность модели определяется величинами погрешности, с которыми рассчитываются выходные параметры. Погрешности подразделяются на систематические и случайные. Систематическая погрешность характеризует среднее отклонение между вычисленными и экспериментальными значениями выходного параметра, а случайная (среднеквадратичная) погрешность σ – среднеквадратичное отклонение экспериментальных значений от вычисленных.

Непротиворечивость модели характеризует отсутствие абсурдных ответов и выводов при использовании модели. Модель проверяется также на противоречия между выводами, которые можно сделать из модели и из экспериментальных данных.

Реалистичность модели оценивается путем также расчета типовых примеров, для которых заранее известен результат (точный или ориентировочный).

Устойчивость модели (Робастность) характеризуется слабой чувствительностью к погрешностям ее входных данных и параметров. Неустойчивость модели является ее свойством и не всегда свидетельствует о неустойчивости описываемых ею объектов.

Удобство использования является одним из основных свойств математических моделей, что обусловлено самим методом моделирования. Это требование, в частности, должно предусматривать удобство реализации в виде компьютерных программ.

Универсальность модели обеспечивает описание с помощью нее как можно более широкий класс объектов.

Адаптивность и возможность изменения. Модели, обладающие этими свойствами можно корректировать при изменении окружающих условий и совершенствовать для улучшения ее свойств.

Экономичность, простота, физический смысл. Требование экономичности модели подразумевает минимизацию затрат на ее разработку и реализацию (в частности, время, необходимое для компьютерных расчетов).

Наличие физического смысла полезно для изучения модели с целью исключения возможных ошибок. Принцип простоты заключается в том, что из нескольких моделей с одинаковыми другими свойствами нужно выбрать наиболее простую.

Адекватность математической модели является ее интегральным свойством, объединяющим другие наиболее важные свойства. Если свойства модели удовлетворяют требованиям точности и корректности, говорят, что она адекватна (оригиналу), в противном случае – не адекватна.

Результативность математической модели. При использовании математической модели должны быть решены поставленные задачи.

2.8. Оценка математической модели на адекватность

На рисунке 2.13 приведена схема качественного и количественного содержательного наполнения понятия «Адекватность» математической модели.

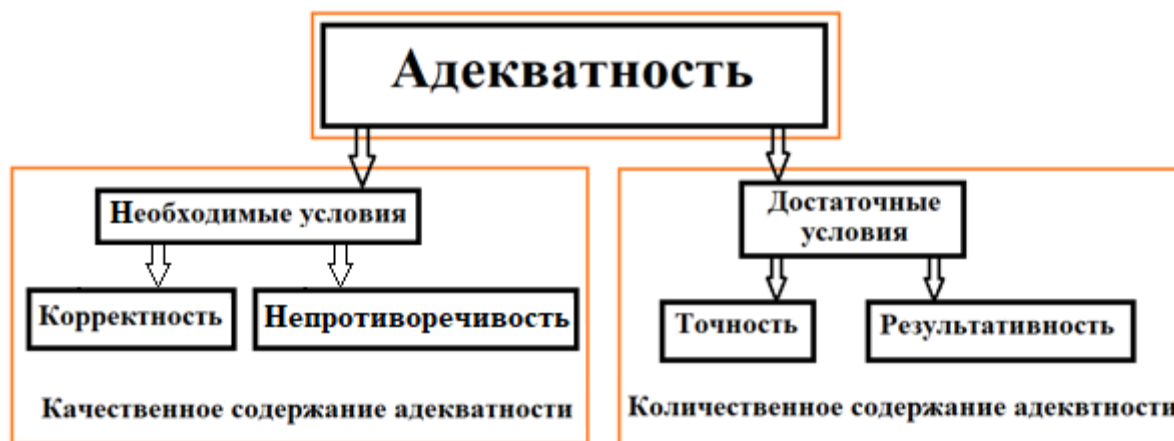


Рисунок 2.13. Содержание понятия «Адекватность»

В теории моделирования под *адекватностью модели* понимают соответствие результатов, полученных на модели, поведению реального объекта. Например, определение адекватности математической модели (ММ) дается как соответствия ММ экспериментальным данным по выбранному критерию. Это соответствие следует оценивать с точки зрения целей исследования, поэтому для моделей в различных областях знаний могут использоваться совершенно непохожие приемы, методы и критерии проверки адекватности.

Общее понятие модели сводится к тому, что *модель* – это заместитель оригинала, позволяющий изучить некоторые его свойства в определенных условиях. Заметим, что в этом определении оговаривается не только назначение модели, но и ее заведомо ограниченные возможности – ограниченные целями исследования.

Особенностью ММ является то, что получение с их помощью каких-либо результатов связано с вычислениями, т. е. с получением результатов *вычислительного эксперимента (ВЭ)*. ВЭ – это получение результатов с помощью ММ для какого-либо конкретного случая исследований. Таким образом, *адекватность ММ* – это соответствие результатов ВЭ поведению реального объекта. Для проверки адекватности ММ служит *контрольный ВЭ*,

воспроизводящий реальный известный случай поведения оригинала в конкретных условиях.

Дадим некоторые пояснения к терминологии.

Что касается иностранизмов, то они не вносят в теорию никаких принципиально новых понятий. Так, например, **верификация** – это процесс проверки адекватности модели (независимо от результата). **Валидация модели** – установление факта удовлетворения модели заявленным свойствам (самой модели, может быть независимо от оригинала). Это понятие, скорее, административное, чем научное.

При проверке соответствия модели оригиналу (проверке адекватности, верификации) для технических систем и процессов, характеризующихся измеримыми величинами – параметрами – необходимо провести сравнение соответствующих параметров модели и оригинала в одних и тех же условиях.

Какими критериями оценивать это соответствие (или несоответствие, ошибочность), подсказывает определение ММ как заместителя оригинала. ММ должна быть инструментом получения информации в виде числовых данных и функциональных зависимостей, характеризующих поведение оригинала.

Имеет место полная аналогия с теорией ошибок измерений, которая на основании центральной предельной теоремы теории вероятностей утверждает, что ошибка при многократных измерениях распределена по нормальному закону – закону ошибок. Итак, если мы покажем, что рассогласование ММ и оригинала ведет себя как простая малая ошибка измерений, то тем самым положительно ответим на вопрос об адекватности. Поэтому для адекватности ММ поведению оригинала достаточно убедиться в выполнении двух свойств: *точности* и *непротиворечивости*.

При проверке адекватности по единичным значениям параметров требование непротиворечивости отпадает, и адекватность становится эквивалентной точности, которую единственно и следует оценить.

Точность

Точность в технических задачах означает, что обобщенная характеристика рассогласования соответствующего параметра построенной модели и оригинала ($\Delta u = u_{\text{модели}} - u_{\text{оригинала}}$) должна быть не больше, чем заранее заданное значение приемлемой погрешности. В качестве такой характеристики может выступать наибольшее по модулю значение рассогласования, среднее значение рассогласования, но чаще всего используется доверительный интервал для математического ожидания рассогласования. Заметим, что доверительный интервал дает только оценку разброса значений рассогласования с заданной доверительной вероятностью, например, рассогласование результатов ВЭ с поведением реального объекта не выходит за границы ($-0,52$ м/с; $+0,27$ м/с) с вероятностью 0,99 или в относительных величинах – за границы ($-0,104$ %; $+0,054$ %) в 99 % случаев.

Итак, ранее мы отметили, что одной характеристики точности для проверки адекватности недостаточно. Только в случаях выражения результатов ВЭ в виде одного числа (а не функции) точность может служить единственной проверкой адекватности. В подавляющем большинстве современных задач

требуется воспроизведение в ММ сложных функциональных зависимостей, причем подчас важнее, чтобы эти зависимости имели логическое объяснение, а точность – вопрос второстепенный.

Непротиворечивость

Непротиворечивость подразумевает идентичный характер изменения соответствующих параметров, т. е. идентичный вид основных свойств функциональных зависимостей на отдельных участках, как то: возрастание, убывание, экстремумы, выпуклость и т. п. При более глубоком рассмотрении этого понятия становится очевидным многообразие возможных критериев проверки непротиворечивости.

Однако центральная предельная теорема подсказывает универсальный метод проверки непротиворечивости – с помощью проверки подчиненности рассогласования закону ошибок. То есть для того чтобы рассогласование между оригиналом и моделью не описывало бы какую-либо закономерность, рассогласование должно вести себя вполне хаотически, иначе говоря, подчиняться нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием. Для такой проверки существуют известные статистические критерии, в частности, критерий Пирсона χ^2 . Такой подход оправдан для технических систем и процессов: регистрация параметров на оригинале часто сопряжена с наложением шума – влиянием не учитываемых факторов, в том числе и погрешностей регистрирующей аппаратуры.

Если будет доказана вышеупомянутая подчиненность нормальному закону распределения такого интегрального рассогласования, то тем самым, с одной стороны, будет доказана непротиворечивость ММ, а, с другой стороны, проверенный закон распределения можно будет использовать при построении доверительного интервала для рассогласования. Таким образом, в итоге будет доказана адекватность ММ, т. е. модель будет находиться в поле «хорошего измерительного инструмента».

Корректность

Качественным содержанием *адекватности*, как необходимое условие, выступает понятие *корректность*.

Математическая модель является **корректной**, если для нее осуществлены контрольные проверки и получены положительные результаты всех из них: размерности, порядков, характера зависимостей, экстремальных ситуаций (значений), граничных условий, физического смысла и математической замкнутости.

2.9. Форма представления математических моделей

В общем смысле формы представления математической модели определяют:

- **инвариантная** форма – это запись соотношений в математической модели в общем виде с помощью традиционного математического языка без относительно (не учитывая) к методу решения.

- **алгоритмическая** форма учитывает структуру модели, соотношение и взаимосвязи между величинами, а также рассматривается относительно принятого метода численного решения – в виде алгоритма.

- **аналитическая** форма представляет собой явные выражения, взаимосвязи выходных параметров, как функций входных, внутренних, внешних параметров. Она получается в виде результата аналитического решения исходных уравнений модели или обработки статистических данных по принятым методам идентификации.

- **схемная или графическая** форма – это представление модели на некотором графическом языке в виде графов, например, модель сетевого планирования выполнения работ, диаграмм, чертежей, схем и т. д. Дальнейшее использование такой формы представления модели возможно при наличии обобщенных правил истолкования отдельных элементов этой формы и их перевода на языки математических описаний или другие формы.

Среди алгоритмических форм наибольшее распространение получили имитационные модели, суть которых состоит в том, что модель имитирует физические или информационные процессы объекта при задании различных входных воздействий в некоторой среде, которая имитирует реальную среду работы объекта.

2.10. Методы получения математических моделей

Методы получения математических моделей включают в себя аналитический подход, при котором создаются уравнения, описывающие объект, а также статистические методы, основанные на анализе данных для построения моделей, часто с помощью регрессионного анализа и машинного обучения. Процесс создания модели включает формулировку проблемы, сбор данных, выбор способа, построение самой модели и ее валидацию.

Получение математических моделей объектов, т. е. переход от структурных схем, когнитивных мысленных представлений о них к их математическому описанию, является не форматированной процедурой, и в каждом конкретном случае решение принимается индивидуально. Другими словами, все решения по моделированию, по оценке входных и выходных параметров, по исследованию математических зависимостей, по оценке особенностей взаимосвязей между параметрами принимает разработчик модели. Когда эти вопросы решены, то есть получена конкретная модель в виде математического выражения, все другие действия или операции, такие как расчет численных значений параметров модели, определение областей адекватности, значимости и т. д. могут быть алгоритмизированы, т. е. формализованы и необходимые расчеты могут выполняться по определенным правилам аналитически или на ЭВМ.

ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ, ОДНОФАКТОРНЫЕ И МНОГОФАКТОРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОСТРОЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

3.1. Линейные и нелинейные математические модели

Линейные математические модели характеризуются тем, что отклик объекта на изменение каких-то условий пропорционален величине этого изменения.

Нелинейные математические модели не подчиняются принципу суперпозиции, и знание о поведении части объекта еще не гарантирует знания поведения всего объекта. Отклик объекта на изменение условий может качественно зависеть от величины этого изменения.

Большинство реальных процессов и соответствующих им математических моделей являются нелинейными. Линейные же модели отвечают весьма частным случаям и, как правило, служат лишь первым приближением к реальности.

3.2. Однофакторные и многофакторные математические модели

Однофакторные модели – это простейшие виды факторных моделей, в которых фактором является какой-либо временный параметр.

Многофакторные модели позволяют одновременно учитывать воздействие нескольких факторов на уровень и динамику прогнозируемого показателя.

Однофакторные модели прогнозирования представляют собой построение прогноза с помощью уравнения одной переменной. Линейная однофакторная модель имеет вид:

$$Y_t = aX_t + b,$$

где Y_t – значение прогнозируемой величины в момент времени t (предполагается, что существует линейная связь с фактором);

X_t – значение фактора в момент времени t (независимый фактор);

a, b – коэффициенты.

Однофакторные модели могут быть описаны не только при помощи линейных уравнений, но и при помощи экспоненциальных, параболических, гиперболических, степенных, логарифмических и др. Сущность этого метода прогнозирования заключается в том, что при известном значении фактора (от которого зависит прогнозная величина) на прогнозном интервале, при помощи зависимости, построенной на основе данных на интервале, можно получить прогноз. В самом простом случае, когда в роли независимого фактора выступает время, то однофакторные модели представляют собой модели экстраполяции.

В случае, когда строится зависимость не от одного фактора, а от нескольких, подобные модели называются **многофакторными**. Подобно однофакторным моделям многофакторные модели могут описываться

различными типами функций. Например, степенная многофакторная модель имеет вид:

$$Y_t = bX_{1t}^{a1} X_{2t}^{a2} \dots X_{nt}^{an},$$

где Y_t – значение прогнозируемой величины в момент времени t (предполагается, что существует степенная связь с факторами);

$X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{nt}$ – значение независимых факторов в момент времени t ;

$b, a1, a2, \dots, an$ – коэффициенты.

Прогнозирование в случае применения многофакторной модели осуществляется аналогично случаю однофакторной модели. На 1 этапе на основе ретроспективной информации по объекту прогнозирования и независимым факторам определяют вид зависимости между ними. На следующем этапе строятся прогнозы независимых факторов (при этом могут использоваться различные методы, в том числе и методы экспертных оценок).

3.3. Построение статистических моделей

Основной и необходимый источник информации для построения статистической модели – эксперимент, а обработка экспериментальных данных осуществляется методами теории вероятностей и математической статистики. Объект в этом случае представляется в виде «черного ящика», на который воздействуют случайные и управляющие воздействия (рис. 3.1). Модель строится для описания связи отдельного свойства изучаемого объекта или процесса с воздействующим фактором. Влияющий фактор (аргумент) принимается независимой переменной, или предиктором, а результат – зависимой переменной, или функцией отклика (переменной отклика). Факторы подразделяются на управляемые, неуправляемые и неконтролируемые. Под управляемыми факторами понимаются такие факторы, которые влияют на процесс и могут быть измерены и воспроизведены с заданной точностью. Под неуправляемыми факторами понимаются такие, которые также влияют на процесс и могут быть достаточно точно измерены, но не могут быть воспроизведены по желанию экспериментатора, например, условия окружающей среды. Неконтролируемые факторы в процессе исследования не измеряются и не воспроизводятся на заданном уровне, например, степень износа деталей экспериментальной установки.

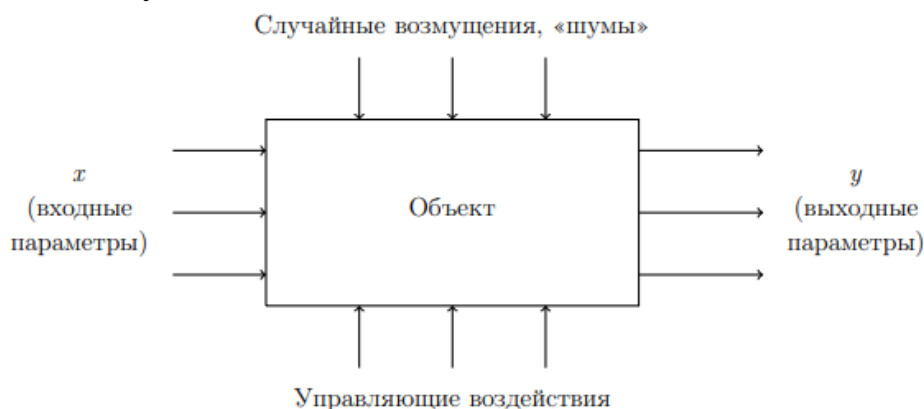


Рисунок 3.1. Схематическое изображение объекта

Математической моделью объекта будет функция отклика:

$$Y = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, b_1, b_2, \dots, b_n),$$

где Y – выходной параметр процесса; $x_1, \dots$;

x_n – независимые переменные (факторы), которые варьируются при постановке эксперимента; $b_1, \dots$;

b_n – коэффициенты эмпирической модели.

Заменой символа для обозначения зависимого признака с y на Y , мы подчеркиваем, что на базе признака x уравнение позволяет рассчитать теоретическое значение признака Y , в общем случае не равное ни одному наблюдаемому значению y .

В общем случае решение задачи моделирования состоит из ряда этапов:

- 1) проведение эксперимента;
- 2) выбор вида эмпирической зависимости;
- 3) нахождение параметров выбранной зависимости;
- 4) исследование модели и выводы.

3.3.1. Однофакторные модели

Рассмотрим простейший случай, когда на вход действует только одна переменная

$$y = \phi(x).$$

На первом этапе задают значения входной переменной x из возможного диапазона и измеряют соответствующие значения выходной переменной y , исключая грубые промахи. При сборе экспериментальных данных и расчетах на их основе следует учитывать правила округления и работы со значащими цифрами. Результаты расчетов представляют в табличном и графическом виде (рис. 3.2).

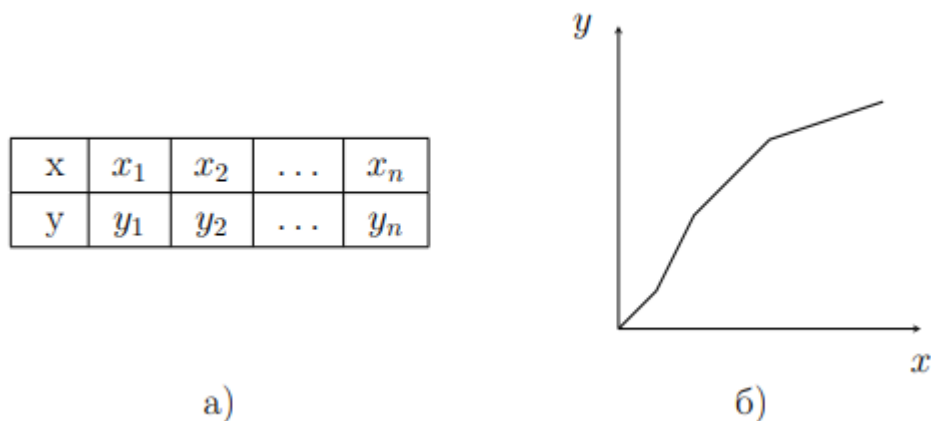


Рисунок 3.2. Табличное (а) и графическое (б) представление экспериментальных данных

На втором этапе необходимо подобрать зависимость, которая могла бы описать экспериментальные данные. Если зависимость значительно отличается от прямолинейной, в некоторых случаях ее удастся линеаризовать.

Линеаризация модели заключается в том, что с помощью подходящих преобразований исходных переменных исследуемую зависимость представляют в виде линейного соотношения между преобразованными переменными. В рамках этого подхода различают два класса нелинейных регрессионных моделей, допускающих линеаризацию: а) модели нелинейные относительно включенных в модель переменных, но линейные по оцениваемым параметрам; б) модели нелинейные по оцениваемым параметрам.

Примером нелинейной регрессии, линейной по оцениваемым параметрам, могут служить следующие функции (здесь и далее, ε – случайное отклонение):

- полиномы, например, $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3 + \varepsilon$;
- равносторонняя гипербола $Y = \alpha + \beta/X + \varepsilon$.

К нелинейным регрессионным моделям, нелинейным по оцениваемым параметрам, относятся:

- степенная функция $Y = \alpha \cdot X^\beta \cdot \varepsilon$;
- показательная функция: $Y = \alpha \cdot \beta^X \cdot \varepsilon$.

Введение новых переменных в нелинейную регрессионную модель с линейно включенными в нее параметрами позволяет свести ее к линейной модели, для оценки параметров которой можно использовать обычный метод наименьших квадратов. Так, например, если нужно оценить параметры регрессионной модели $Y = \beta_0 + \beta_1 X^2 + \beta_2 \sqrt{X} + \varepsilon$, то вводятся новые переменные $Z_1 = X^2$, $Z_2 = \sqrt{X}$, получают линейную модель $Y = \beta_0 + \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \varepsilon$, параметры которой находятся обычным методом наименьших квадратов.

Недостаток такой замены переменных связан с тем, что оценки параметров получаются не из условия минимизации суммы квадратов отклонений для исходной переменной, а из условия минимизации суммы квадратов отклонений для новых переменных, что искажает исходные предпосылки метода наименьших квадратов, поскольку новые переменные будут зависимыми. В связи с этим необходимо определенное уточнение полученных оценок.

В случае нелинейности модели по параметрам линеаризация достигается при помощи более сложных преобразований. Приведенную выше степенную модель при помощи логарифмического преобразования можно привести также к линейному виду $\ln(Y) = \ln(\alpha) + \beta \cdot \ln(X) + \ln(\varepsilon)$. К этой модели уже можно применить обычный метод наименьших квадратов. Однако следует подчеркнуть, что критерии значимости и интервальные оценки параметров, применяемые для нормальной линейной регрессии, требуют, чтобы случайное отклонение ε (а в данном случае случайное отклонение выражено в виде $\ln(\varepsilon)$) имело логарифмически нормальное распределение.

Следует отметить, что к модели $Y = \alpha \cdot X^\beta + \varepsilon$, рассматриваемой в качестве альтернативной к уже рассмотренной, изложенный метод исследования непригоден, и ее нельзя привести к линейному виду.

3.3.2. Многофакторные модели

Общее назначение множественной регрессии (этот термин был введен Пирсоном в 1908 г.) состоит в анализе связи между несколькими независимыми переменными и зависимой переменной. Конкретный вид функциональной зависимости и значения коэффициентов определяются из опытных данных. В дальнейшем будем использовать следующие термины: факторное пространство – пространство с координатами $(x_1, \dots, x_n)$; поверхность отклика – геометрическое изображение функции отклика в факторном пространстве. В том случае, когда исследование поверхности отклика ведется при неполном знании механизма изучаемых явлений, аналитическое выражение многофакторной функции отклика неизвестно, поэтому математическая модель, как правило, по своему виду не имеет ничего общего с природой процессов, происходящих в системе, поэтому в качестве целевой функции $f(x_i, b_i)$ целесообразно выбирать простые аналитические зависимости (полиномы различных классов, тригонометрические функции и др.). Чаще всего функция представляется в виде полинома некоторой степени (в зависимости от требуемой точности) – **уравнения регрессии**. Значения выходных измерений, как правило, отличаются друг от друга. Поэтому при обработке экспериментальных данных можно определить только так называемые выборочные коэффициенты регрессии, которые являются лишь оценками для теоретических коэффициентов регрессии, определяемых для некоторой генеральной совокупности, состоящей из всех возможных опытов. В результате пользуются приближенным уравнением регрессии, полученным по ограниченной выборке экспериментальных данных. Коэффициенты регрессии характеризуют соответственно линейные эффекты, эффекты взаимодействия и квадратичные эффекты. Первый этап решения этой задачи – выбор вида модели. В данном случае он заключается в выборе степени уравнения регрессии в зависимости от сложности решаемой задачи и требуемой точности. При первоначальном исследовании объекта обычно применяют линейное уравнение регрессии:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n.$$

На следующем этапе выбирают уравнение второго порядка:

$$y = b_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n + b_{11}x_1^2 + \dots + b_{nn}x_n^2 + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{n-1,n}x_{n-1}x_n.$$

Для определения коэффициентов регрессии можно применить метод наименьших квадратов, который в случае линейного вида уравнения регрессии сводится к решению системы $k + 1$ линейных алгебраических уравнений для k факторов (с предварительным накоплением соответствующих сумм). При вычислении коэффициентов нелинейных уравнений проводят их линеаризацию, так чтобы новые переменные были линейно независимы. Уравнение регрессии используется для построения статистических моделей объектов химической технологии. Эта модель не несет никакой информации о физико-химических свойствах процессов и справедлива только для объекта, на котором проводили эксперимент. Однако такие модели широко используются при решении задач оптимизации. Конкретный вид эмпирических моделей определяется по результатам экспериментов – активных или пассивных.

ГЛАВА 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ

4.1. Основные положения

Структурные схемы объектов, систем и процессов теплоэнергетики при моделировании представляют собой наглядно-символические изображения связей между элементами системы, отражающие ее структуру и функции для анализа и управления. В общем виде моделирование включает субъект, объект исследования и модель, которая формирует и фиксирует взаимоотношения между ними.

Структурные схемы играют ключевую роль при моделировании, поскольку они визуализируют компоненты системы, их взаимосвязи и потоки энергии, что необходимо для понимания, математического описания, анализа, оптимизации и прогнозирования поведения системы. Они позволяют понять внутреннее устройство системы, определить критические участки, взаимные связи, провести имитационное моделирование и оценить эффективность различных режимов работы.

Основные функции структурных схем:

1. Визуализация системы:

Структурные схемы предоставляют наглядное представление о всех элементах сложного теплоэнергетического объекта (например, котлы, турбины, трубопроводы, теплообменники) и их компоновке.

2. Определение взаимосвязей:

Помогают понять взаимосвязи между элементами и оценить их влияние на работу всей системы. Они показывают, как компоненты системы соединены друг с другом, какие потоки энергии и веществ проходят между ними.

3. Анализ и диагностика:

Схемы позволяют выявлять узкие места, потенциальные проблемы и дефекты в системе, что важно для технической диагностики и обслуживания.

4. Оптимизация работы:

На основе структурной схемы можно проводить анализ различных сценариев работы системы, оптимизировать режимы, снижать энергопотребление и повышать эффективность.

5. Имитационное моделирование:

Они служат основой для создания математических моделей, позволяющих проводить имитационное моделирование и прогнозировать поведение системы при изменении внешних условий или управляющих воздействий.

6. Проектирование, разработка и модернизация:

При проектировании новых систем или модернизации существующих, структурные схемы помогают в разработке проектных решений, оценке их реализуемости и влияния на общую работу.

7. Обучение и подготовка персонала:

Схемы являются важным и удобным инструментом для обучения персонала, так как помогают быстро освоить структуру и принцип работы сложной теплоэнергетической установки.

Примеры применения:

- **Моделирование тепловых потоков:**

Определение распределения температуры и тепловых потерь в трубопроводах.

- **Анализ динамических процессов:**

Изучение переходных процессов при запуске, остановке или изменении нагрузки.

- **Оценка энергоэффективности:**

Расчет и сравнение потребления энергии различными компонентами системы.

Этапы создания структурной схемы:

- 1. Определение границ объекта моделирования**

Четко определить, что именно входит в систему теплоэнергетики, а что является внешней средой.

- 2. Выделение основных элементов**

Идентифицировать ключевые компоненты системы, такие как котлы, турбины, теплообменники, насосы, трубопроводы и т. д.

- 3. Обозначение связей**

Описать, как эти элементы взаимодействуют между собой – потоки теплоносителя, электрические, управляющие сигналы и т.д.

- 4. Условные обозначения**

Использовать стандартные символы и сокращения для представления элементов и процессов (например, стрелки для обозначения направления потоков).

- 5. Добавление параметров**

На схему можно нанести числовые значения ключевых параметров, таких как температура, давление, расход, чтобы более полно отразить поведение системы.

Таким образом, структурные схемы являются незаменимым инструментом для понимания, анализа и управления системами теплоэнергетики в процессе их жизненного цикла.

4.2. Виды и типы схем, их назначение

Для качественного анализа и расчета теплоэнергетических установок и оборудования используются соответствующие структурные схемы.

Простейшая схема тепловой станции представлена на рисунке 4.1. В паровом котле (КП) в результате сжигания топлива вода преобразуется в пар. Пар поступает в турбину (ТП), которая вращает генератор (Г), вырабатывающий электрическую энергию, т. е. тепловая энергия преобразуется в механическую, а

она в свою очередь – в электрическую. После турбины отработанный пар конденсируется в конденсаторе (К) и, так как цикл тепловых станций является замкнутым, конденсат пара насосом (Н) направляется обратно в паровой котел (КП).

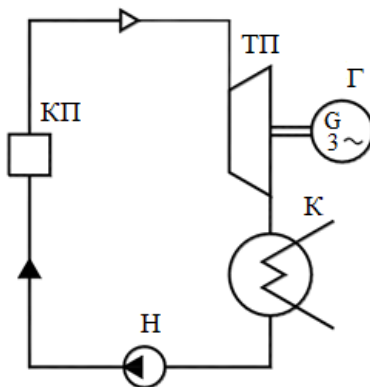


Рисунок 4.1. Схема тепловой электростанции

Более сложная схема котельной с водогрейным котлом, а также структурная технологическая схема конденсационной электростанции КЭС и структурная технологическая схема ТЭЦ представлены на рисунках 4.2, 4.3. и 4.4.

Конденсационные электростанции (КЭС) в нашей стране исторически получили название государственных районных электрических станций (ГРЭС).

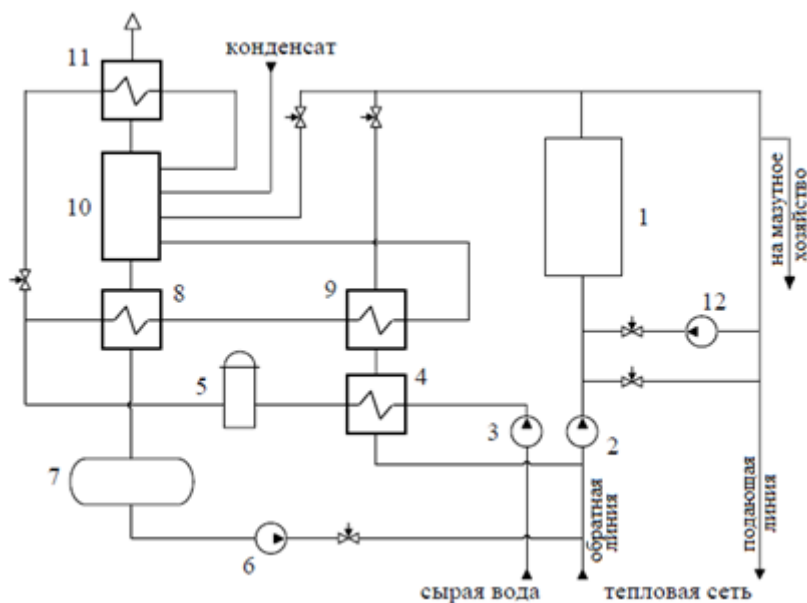


Рисунок 4.2. Схема котельной с водогрейным котлом:

- 1 – водогрейный котел; 2 – сетевой насос; 3 – насос сырой воды;
- 4 – подогреватель сырой воды; 5 – химводоочистка; 6 – подпиточный насос;
- 7 – бак деаэрированной воды; 8 – охладитель деаэрированной воды;
- 9 – подогреватель химически очищенной воды; 10 – деаэратор; 11 – охладитель пара; 12 – рециркуляционный насос

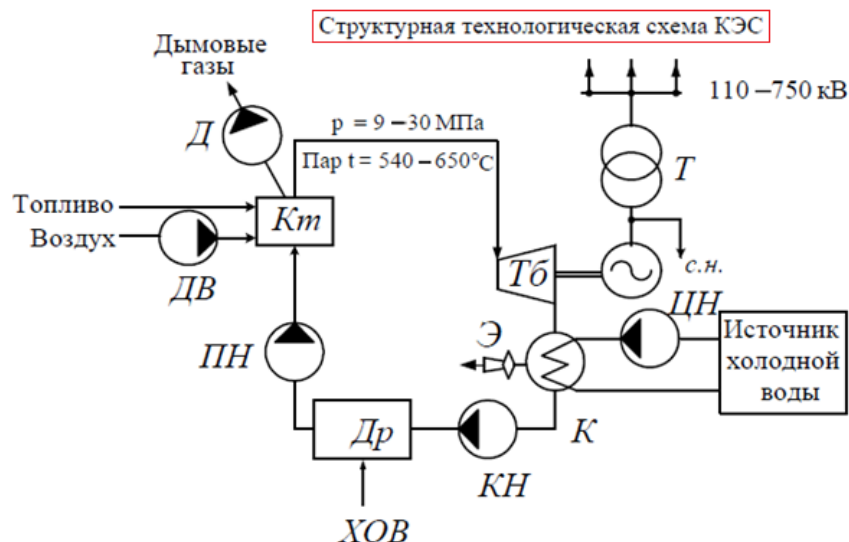


Рисунок 4.3. Структурная технологическая схема КЭС:

Д – дымосос; *Кт* – котел; *ДВ* – дутьевой вентилятор; *ПН* – питательный насос;
Др – деаэратор; *КН* – конденсатный насос; *К* – конденсатор (теплообменник);
Э – эжектор; *ЦН* – циркуляционный насос; *Тб* – паровая турбина;
Т – трансформатор; *с. н.* – собственные нужды;
ХОВ – химически очищенная вода

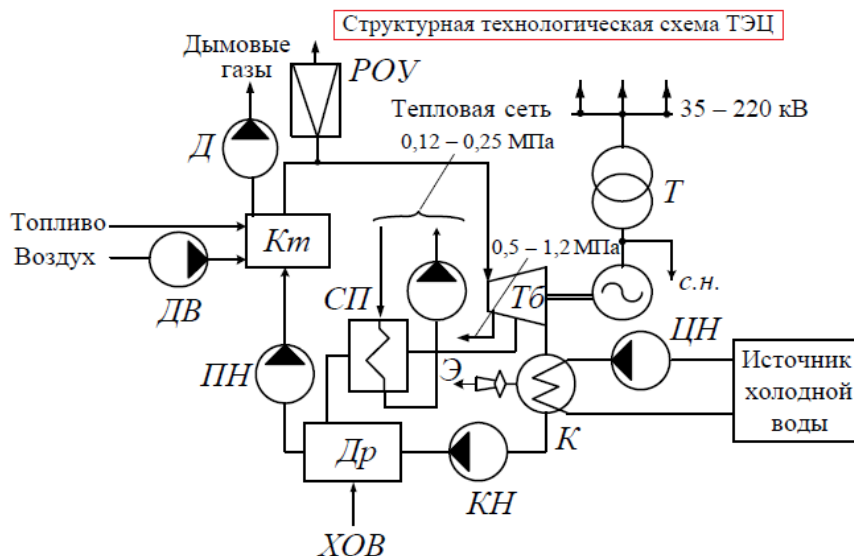


Рисунок 4.4. Структурная технологическая схема ТЭЦ

Д – дымосос; *Кт* – котел; *ДВ* – дутьевой вентилятор; *ПН* – питательный насос;
Др – деаэратор; *КН* – конденсатный насос; *К* – конденсатор (теплообменник);
Э – эжектор; *ЦН* – циркуляционный насос; *Тб* – паровая турбина;
Т – трансформатор; *с. н.* – собственные нужды; *ХОВ* – химически очищенная вода; *РОУ* – редуционно-охладительная установка; *СП* – сетевой подогреватель (бойлер)

Согласно ГОСТ 2.102-2013 схема – это конструкторский документ, на котором с помощью условных графических обозначений (УГО) с определенной степенью подробности раскрывается состав, внутренние связи и взаимодействие отдельных узлов, блоков и элементов изделия. Схемы с разной степенью подробности и детализации входят в состав конструкторской документации всех стадий проектирования. Схемы значительно упрощают изображение изделия и облегчают изучение его устройства в случаях, когда нет необходимости в изображении конструкции деталей изделия. Классификацию схем и общие требования к их выполнению устанавливает ГОСТ 2.701-2013. В зависимости от элементов, составляющих изделие, и связей между ними схемы разделяются на *виды и типы*.

При выполнении схем используют следующие термины.

Элемент схемы – составная часть схемы, которая выполняет определенную функцию в изделии и не может быть разделена на части, имеющие самостоятельное функциональное назначение (резистор, трансформатор, насос и т. п.).

Устройство – совокупность элементов, представляющих единую конструкцию (блок, плата, шкаф, механизм). Устройство может не иметь в изделии определенного функционального назначения.

Функциональная группа – совокупность элементов, выполняющих в изделии определенную функцию и не объединенных в единую конструкцию.

Функциональная часть – элемент, устройство, функциональная группа.

Функциональная цепь – линия, канал, тракт определенного функционального назначения (канал звука, видеоканал и т. п.).

Линия взаимосвязи (или связи) – отрезок линии, указывающий на наличие связи между функциональными частями изделия.

Установка – условное наименование объекта в энергетических сооружениях, на который выпускается схема.

Схемы делятся по видам и типам с присвоением им соответствующего кода (табл. 4.1). Код схемы должен состоять из буквенной части, определяющей вид схемы, и цифровой части, определяющей тип схемы (табл. 4.1). Так, схема электрическая структурная имеет код Э1; электрическая принципиальная – Э3; схема гидравлическая соединений – Г4; схема деления структурная – Е1; схема электрогидравлическая принципиальная – С3; схема электрическая соединений и подключения – ЭО; схема гидравлическая структурная, принципиальная и соединений – ГО.

Код схемы записывают в основной надписи в конце обозначения документа, подобно, например, коду сборочного чертежа – СБ. Перед и после кода точка не ставится.

Таблица 4.1. Виды и типы схем

Виды схем обозначают буквами:		Типы схем обозначают цифрами:	
электрические	- Э	структурные	-1
гидравлические	- Г	функциональные	-2
пневматические	- П	принципиальные (полные)	-3.1 -3.2
газовые (кроме пневматических)	- Х	соединений (монтажные)	-4
кинематические	- К	подключения	-5
вакуумные	- В	общие	-6
оптические	- Л	расположения	-7
энергетические	- Р	объединенные	-0
деления	- Е		
комбинированные	- С		

4.2.1. Типизация схем по назначению

Структурная схема – это совокупность элементарных звеньев объекта и связей между ними, один из видов графической модели. Под элементарным звеном подразумевается часть объекта, системы управления и т. д., которая реализует элементарную функцию.

Структурная схема определяет основные функциональные части изделия, их назначение и взаимосвязи. Разрабатывается при проектировании изделия на стадии, предшествующей разработке схем других типов, и используется для общего ознакомления с изделием. Функциональные части изображают на схеме в виде прямоугольников или иных плоских фигур с вписанными в них обозначениями типов элементов. Допустимо использование стандартных условных графических изображений. Ход рабочего процесса поясняют линиями взаимосвязи со стрелками. Этот тип схем применяется наиболее часто, он объединяет схемы, отражающие состав изделий; блок-схемы, определяющие алгоритмы обработки информации; организационно-управленческие схемы и т. п.

Функциональная схема поясняет определенные процессы, протекающие в отдельных цепях изделия или изделия в целом. Используется для изучения принципа работы изделия, а также при наладке, регулировке, контроле и ремонте изделия. Такие схемы позволяют анализировать возможности вновь разрабатываемых объектов, обосновывать проведение отладки и ремонта.

Принципиальная схема (полная) детально определяет полный состав элементов и связей между ними и дает представление о принципах работы изделия. Служит для разработки других конструкторских документов, например,

чертежей печатных плат, монтажных схем, а также изучения принципов работы изделия при его наладке и эксплуатации.

Схема соединений (монтажная) показывает порядок соединения составных частей изделия, состав элементов соединений (проводов, жгутов, трубопроводов), места присоединений, ввода и вывода. Используется при разработке других конструкторских документов – чертежей, определяющих прокладку и способы крепления элементов соединений, схем подключения и присоединения для осуществления контрольных операций с указанием их геометрического положения относительно частей объекта.

Схема подключения показывает внешние входные и выходные подключения изделия. Используется для разработки других конструкторских документов и осуществления подключений изделия при его эксплуатации.

Общая схема дает общее представление о составе изделия или установки. Определяет составные части комплекса и соединения его составных частей на месте эксплуатации. Используется при ознакомлении с комплексом, его монтаже и проведении контрольных операций на месте эксплуатации.

Схема расположения определяет относительное взаимное геометрическое расположение составных частей изделия на поверхности или в пространстве, в том числе (при необходимости) проводов, жгутов, трубопроводов и т. п. Используется при монтаже, эксплуатации и ремонте изделий.

Схема объединенная содержит в виде совмещения на одном конструкторском документе двух или нескольких типов схем, разрабатываемых для одного изделия.

4.2.2. Типизация видов схем по элементам и связям

- **Электрические**

Показывают электрические элементы и связи между ними.

- **Гидравлические**

Отображают системы, использующие жидкость в качестве рабочей среды.

- **Пневматические**

Показывают системы, использующие газ в качестве рабочей среды.

- **Кинематические**

Демонстрируют последовательность передачи движения от одного механизма к другому.

- **Другие виды**

Газовые, вакуумные, оптические, энергетические и комбинированные схемы.

4.3. Общие понятия о структурных схемах теплоэнергетических объектов

В соответствии с приведенным выше определением, *структурные схемы* определяют основные функциональные компоненты изделия или процесса, их назначение и взаимосвязи. Этот тип схем применяется наиболее часто, он объединяет схемы, отражающие состав изделий; блок-схемы, определяющие алгоритмы обработки информации; организационно-управленческие схемы и т. п.

Отдельное место в иерархии видов и типов схем занимают тепловые схемы.

Характеристика тепловых схем

Тепловая схема представляет собой графическое изображение основного и вспомогательного оборудования тепловых станций и объединенных тепловых пунктов.

Различают следующие типы тепловых схем:

- Принципиальная
- Развернутая (полная)
- Рабочая или монтажная

Принципиальная тепловая схема. В ней указано условно лишь оборудование (котлоагрегаты, подогреватели, деаэраторы, насосы) и трубопроводы, не указывая арматуру, вспомогательные устройства, второстепенные трубопроводы, не уточняя количество и расположение оборудования.

Развернутая (полная) тепловая схема содержит все установленное оборудование, все трубопроводы, соединяющие оборудование с расположенными на них запорной и регулирующей арматурой. Так как эта схема получается очень объемной, развернутую тепловую схему делят на части по технологическому принципу. Полные тепловые схемы разрабатываются на стадии технического и рабочего проектирования. По ГОСТ 2.701-2013 схема принципиальная и полная считаются одного типа и имеют одинаковый цифровой код – 3. Чтобы конкретизировать классификацию тепловых схем, принципиальной тепловой схеме присваивается код – Р3.1, а полной – Р3.2, который ставится после классификационного номера в основной надписи.

При этом в основной надписи должен быть указан тип схемы: «Схема тепловая принципиальная» или «Схема тепловая полная».

Рабочая. Выполняется в ортогональной или аксонометрической проекции с указанием их размеров, наклонов и т. д. Эту схему делят на части для удобства использования монтажа оборудования и трубопроводов. В рабочей схеме указывают все опоры и подвески трубопроводов, места установки арматуры, сгибы, уклоны, длины участков с соответствующими выносками и ссылками на детализованные чертежи, сообщаются все сведения о марках стали или металле узла, способе присоединения, о массе детали или блока. Составляется спецификация на все элементы данной части тепловой схемы.

Развернутая и рабочая тепловые схемы могут быть составлены лишь после разработки принципиальной тепловой схемы и ее расчетов, на основе которых выбирают оборудование. По результатам расчета тепловой схемы определяют суммарную теплопроизводительность котлоагрегата при нескольких режимах

работы. Для выбора варианта часто принимают более простой способ определения паро- и теплопроизводительности при известных потребностях потребителей. Расходы теплоты на отопление, вентиляцию и горячее водоснабжение в количестве возвращаемого конденсата.

В качестве элементов тепловых схем используются теплообменники реакторов, нагреватели, испарители, конденсаторы и другая теплообменная аппаратура. Каждый элемент характеризуется параметрами входа и выхода. Структура системы реализуется в определенной последовательности теплотехнических связей между элементами. Теплотехнические связи представлены горячими и холодными материальными потоками (продукты реакции, сырье) и потоками горячих (теплоносители) и холодных (хладагенты) энергоресурсов.

Каждая структура является комбинацией из трех основных структур:

- параллельное прямоточное включение холодного и горячего потоков (рис. 4.5, прямоток);
- параллельное противоточное включение холодного и горячего потоков (рис. 4.5, противоток);
- перекрестное включение холодного потока с несколькими горячими потоками (рис. 4.5, перекрестный ток).

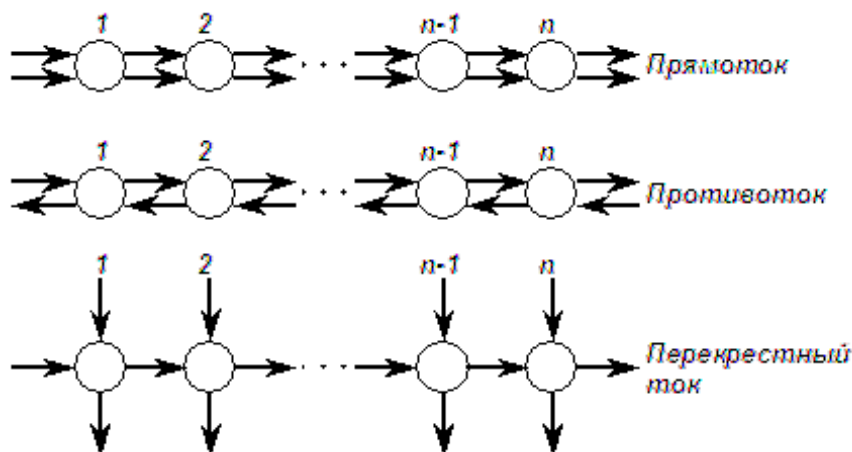


Рисунок 4.5. Структура теплотехнических связей

На рисунке 4.6 показана смешанная структура тепловой схемы. Направление потока внутри теплообменника не влияет на классификацию структур.

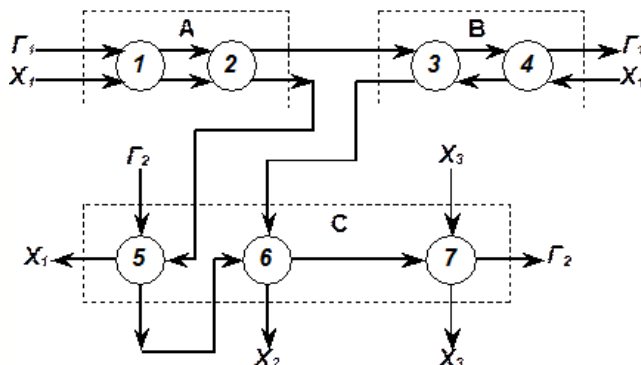


Рисунок 4.6. Смешанная структура теплотехнических связей

На рисунке 4.7 приведен рисунок общего вида тепловой электрической станции с экспликацией состава комплектующего оборудования.

Принципиальная тепловая схема тепловой электрической станции, изображенной на рисунке 4.7, иллюстрируется рисунком 4.8.

На схеме, представленной на рисунке 4.7, отображен состав основного оборудования тепловой электрической станции и взаимосвязь ее систем. По этой схеме можно проследить общую последовательность технологических процессов, протекающих на ТЭС.

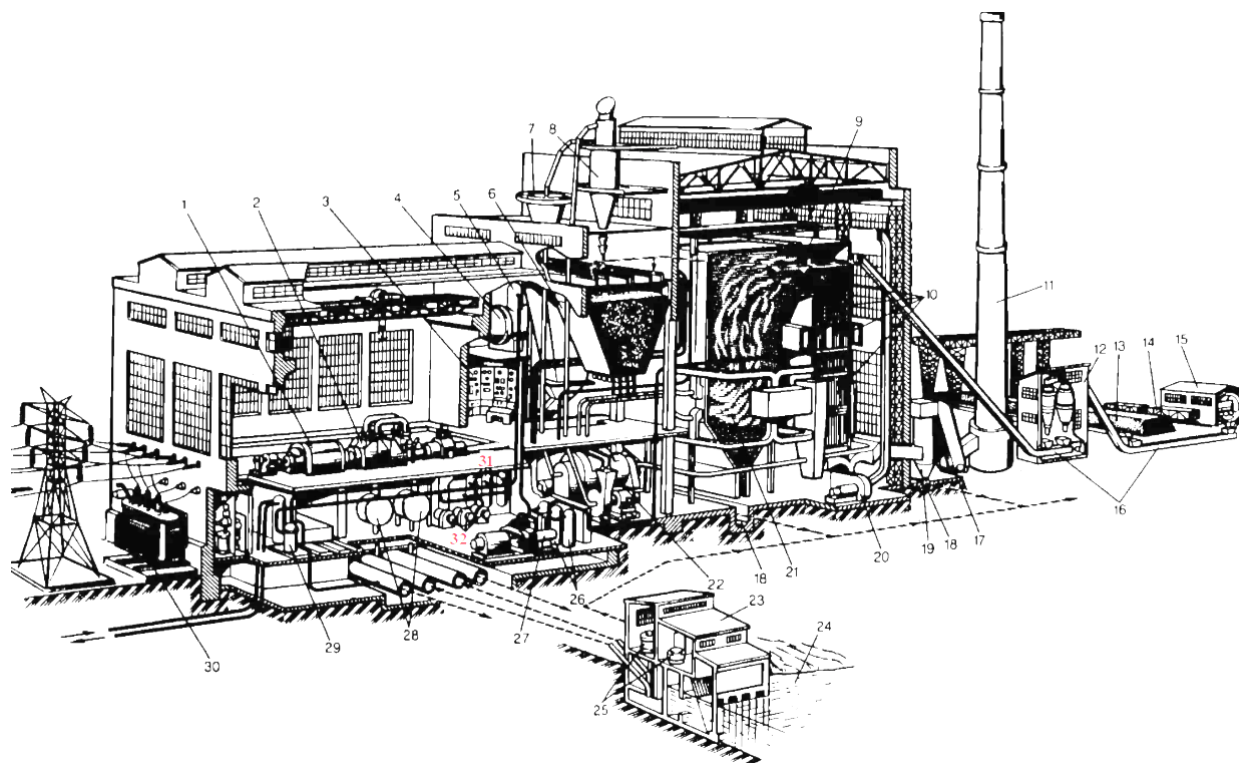


Рисунок 4.7. Тепловая электрическая станция (рисунок общего вида):

- 1 – электрический генератор; 2 – паровая турбина; 3 – пульт управления;
- 4 – деаэратор; 5 и 6 – бункеры; 7 – сепаратор; 8 – циклон; 9 – котел;
- 10 – поверхность нагрева (теплообменник); 11 – дымовая труба;
- 12 – дробильное помещение; 13 – склад резервного топлива; 14 – вагон;
- 15 – разгрузочное устройство; 16 – конвейер; 17 – дымосос; 18 – канал;
- 19 – золоуловитель; 20 – вентилятор; 21 – топка; 22 – мельница; 23 – насосная станция;
- 24 – источник воды; 25 – циркуляционный насос;
- 26 – регенеративный подогреватель высокого давления; 27 – питательный насос;
- 28 – конденсатор; 29 – установка химической очистки воды;
- 30 – повышающий трансформатор; 31 – регенеративный подогреватель низкого давления; 32 – конденсатный насос

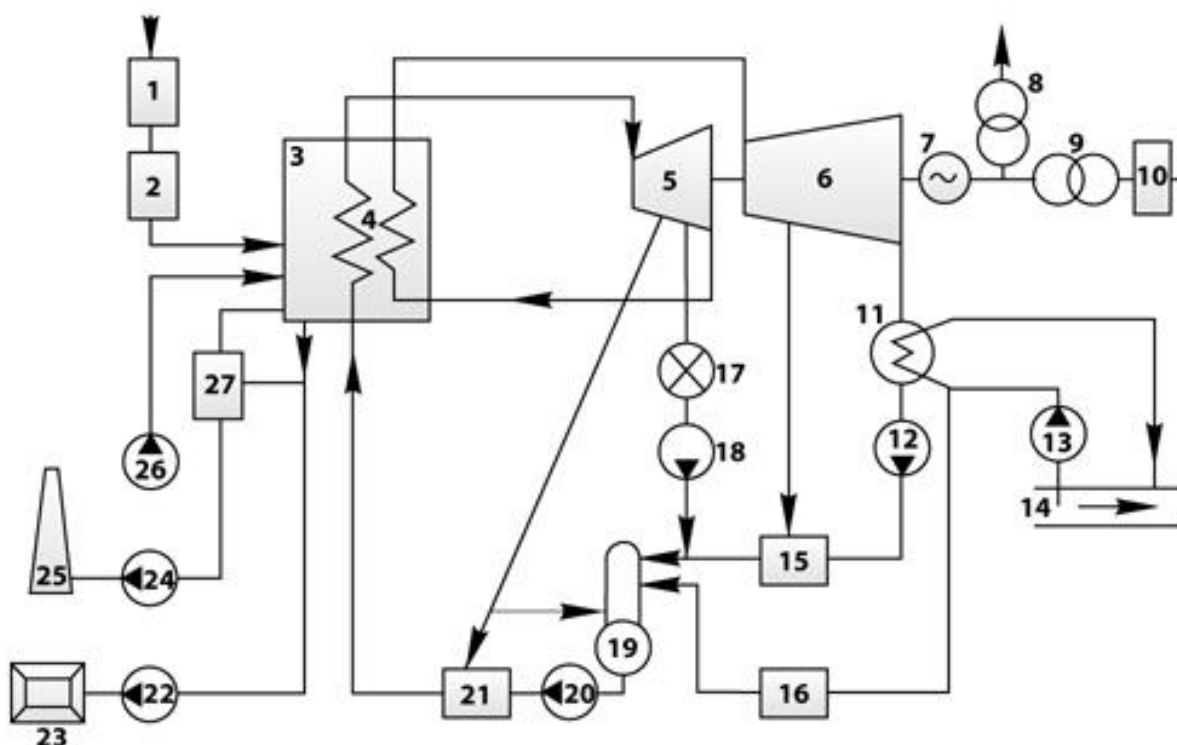


Рисунок 4.8. Принципиальная схема ТЭС:

- 1 – Топливное хозяйство; 2 – подготовка топлива; 3 – котел;
 4 – промежуточный пароперегреватель; 5 – часть высокого давления паровой турбины (ЧВД или ЦВД); 6 – часть низкого давления паровой турбины (ЧНД или ЦНД); 7 – электрический генератор; 8 – трансформатор собственных нужд;
 9 – трансформатор связи; 10 – главное распределительное устройство;
 11 – конденсатор; 12 – конденсатный насос; 13 – циркуляционный насос;
 14 – источник водоснабжения (например, река); 15 – подогреватель низкого давления (ПНД); 16 – водоподготовительная установка (ВПУ);
 17 – потребитель тепловой энергии; 18 – насос обратного конденсата;
 19 – деаэратор; 20 – питательный насос; 21 – подогреватель высокого давления (ПВД); 22 – шлакозолоудаление; 23 – золоотвал; 24 – дымосос (ДС);
 25 – дымовая труба; 26 – дутьевой вентилятор (ДВ); 27 – золоуловитель

Схема тепловой электростанции (ТЭС/ТЭЦ) включает сжигание топлива для нагрева воды в котле, превращая ее в пар. Затем пар под давлением подается на турбину, где преобразуется в механическую энергию вращения. Эта механическая энергия, в свою очередь, приводит в действие генератор, который вырабатывает электроэнергию. На ТЭЦ тепловая энергия может использоваться только для производства электричества, в то время как на ТЭС (теплоэлектростанциях) часть тепловой энергии также используется для отопления зданий.

Основные компоненты и принцип работы

Котел:

- В топке котла происходит сжигание топлива (уголь, газ, мазут).

- Тепло сгорания греет воду в котле до состояния пара высокого давления.
- Турбина:**
- Пар высокого давления направляется на лопатки турбины, заставляя ее вращаться.
 - В результате тепловая энергия пара преобразуется в механическую энергию вращения.
- Генератор:**
- Турбина соединена с валом генератора.
 - Вращение генератора преобразует механическую энергию в электрическую энергию.
- Конденсатор (и система охлаждения):**
- После прохождения через турбину, отработанный пар поступает в конденсатор, где охлаждается и превращается вновь в воду.
 - В ТЭС вода из конденсатора возвращается в котел для повторного нагрева, осуществляя замкнутый цикл.
- Система теплоснабжения (только для ТЭЦ):**
- Часть тепловой энергии, которая на обычной ТЭС уходит в отработанный пар, на ТЭЦ отбирается перед конденсацией.
 - Это тепло используется для нагрева теплоносителя (воды), поступающего в систему центрального отопления зданий.

ГЛАВА 5. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАБОЧИХ ПРОЦЕССОВ В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

Математическое моделирование рабочих процессов и технических установок теплоэнергетических систем имеет специфические особенности как по составу различных процессов и структур объектов, так и по их целевому назначению и методам описания.

Математические модели рабочих процессов оборудования в теплоэнергетике – это математические описания процессов, происходящих в тепловых агрегатах и технических системах с использованием уравнений, формул и других математических символов, позволяющие проводить анализ, прогнозирование и оптимизацию их функционирования.

В качестве характерных примеров приложения математического моделирования в теплоэнергетике может быть рассмотрен широкий перечень объектов. Учитывая, что особенности математического моделирования каждого из возможных конкретных объектов и процессов глубоко освещены и представлены в рамках изложения соответствующих дисциплин учебного плана, в данном пособии будут рассмотрены общие подходы к математическому моделированию и некоторые наглядные практические примеры.

5.1. Математический аппарат инженера

Математический аппарат инженера определяется как взаимосвязанная совокупность языка, методов математики и моделей, ориентированная на решение инженерных задач.

В формальный язык математики и ее разделов входят системы символов, обозначающие математические объекты и переменные, а также операции над объектами и отношения между ними. Рассмотрим некоторые из них.

Классическая система уравнений для теплоэнергетических систем включает уравнения сохранения массы, импульса и энергии, а также уравнение состояния вещества, которые описывают тепловые и гидравлические процессы. Основой являются классические уравнения Навье–Стокса, дополняемые уравнениями теплопроводности и состояния, позволяющие моделировать потоки жидкости или газа, теплопередачу и термодинамические изменения в системе.

Основные компоненты системы уравнений:

1. Уравнение неразрывности (сохранение массы):

Описывает, как масса среды сохраняется, и как она может перетекать из одной части системы в другую.

2. Уравнение движения (сохранение импульса, момента импульса):

Это фундаментальные уравнения Навье–Стокса, описывающие движение вязкой жидкости или газа, включая силы, действующие на поток.

3. Уравнение энергии (сохранение энергии):

Описывает перенос тепловой энергии за счет конвекции и теплопроводности.

4. Уравнение состояния:

Связывает давление, температуру и плотность вещества, определяя его термодинамические свойства.

Применение в теплоэнергетике:

Эти уравнения используются для моделирования и анализа различных процессов в теплоэнергетических системах, таких как:

- **Теплообмен:**

Расчеты теплообменников, котлов и других устройств для передачи тепла.

- **Гидродинамика:**

Моделирование движения теплоносителей (воды, пара, газов) в трубопроводах, насосах и других устройствах.

- **Процессы сгорания:**

Изучение и оптимизация процессов сгорания топлива в двигателях и котлах.

- **Влияние температуры на свойства веществ:**

Определение изменений плотности, вязкости и других свойств теплоносителей при изменении температуры.

Дополнительные соображения:

- **Сложность моделей:**

В зависимости от задачи, могут использоваться упрощенные модели (например, одномерные) или более сложные трехмерные модели.

- **Типы теплопередачи:**

Уравнения учитывают кондуктивный, конвективный и лучистый теплообмен, а также фазовые переходы (например, испарение).

- **Ограничения:**

Применение этих уравнений часто сопряжено с численными методами решения, которые помогают анализировать сложные геометрии и условия.

5.2. Основные элементы и этапы рабочего процесса в теплоэнергетических установках

Рабочие процессы в теплоэнергетических установках – это процессы преобразования тепловой энергии в другие виды энергии (механическую, электрическую) с помощью циркулирующего рабочего тела. Включают в себя фазы нагрева, работы, охлаждения и сжатия рабочего тела, а также передачу тепла от горячего к холодному источнику в рамках замкнутого термодинамического цикла.

Ключевые элементы рабочего процесса:

- **Рабочее тело:**

Вещество (пар, газ, жидкая среда), которое циркулирует в установке, поглощая и отдавая теплоту.

– **Горячий источник:**

Нагревает рабочее тело до высокой температуры.

– **Холодный источник:**

Охлаждает рабочее тело, отводя от него теплоту.

– **Теплообменники:**

Устройства, где происходит теплообмен (теплопередача и теплоотдача) между рабочим телом и источниками, а также между различными контурами установки (например, котел, конденсатор).

Основные этапы (принцип работы):

1. Нагрев и расширение:

Рабочее тело нагревается горячим источником, поглощает теплоту и расширяется.

2. Работа:

При расширении рабочее тело совершает механическую работу (например, вращает турбину).

3. Охлаждение и сжатие:

Рабочее тело охлаждается холодным источником, отдает теплоту, а затем сжимается.

4. Цикличность:

Этот процесс многократно повторяется, образуя замкнутый цикл преобразования энергии.

Виды рабочих процессов:

– **Цикл Карно:**

Идеальный термодинамический цикл, служащий эталоном для оценки эффективности реальных циклов.

– **Реальные циклы:**

Циклы, воплощенные в тепловых машинах, таких как паровые турбины и двигатели внутреннего сгорания, где учитываются потери энергии и неидеальность процессов.

5.3. Законы сохранения, равновесия и переноса массы, энергии, импульса

Теоретическим фундаментом математического моделирования рабочих процессов в теплоэнергетических установках являются следующие основные законы природы.

1. Законы *сохранения* массы, энергии и импульса.
2. Законы термодинамического *равновесия*.
3. Законы *переноса* массы, энергии и импульса.
4. Законы *химической кинетики*.

5.3.1. Законы сохранения

При анализе технологических процессов и расчете аппаратов используются законы сохранения массы, импульса и энергии, которые допускают только такие превращения, при которых суммарные масса, энергия и

импульс внутри изолированной системы остаются неизменными. Законы сохранения принимают форму уравнений балансов (например, теплового и материального). Они могут записываться как применительно к системе в целом или отдельным ее частям (*интегральная форма*), так и к отдельным точкам пространства (*локальная форма*).

1. Закон сохранения энергии

Из первого закона термодинамики следует, что у всякой изолированной системы внутренняя энергия остается постоянной, т. е.

$$dU = 0,$$

где U – внутренняя энергия системы.

Если система не является изолированной и получает из окружающей среды некоторое количество энергии в форме теплоты δQ , то часть ее расходуется на производство работы δA , другая часть идет на увеличение внутренней энергии системы:

$$dU = \delta Q - \delta A,$$

где Q – теплота;

A – работа.

При расчете химико-технологического процесса обычно необходимо определить расход энергии на его проведение, в частности, расход теплоты. Для этого составляют тепловой баланс как часть общего энергетического баланса.

Тепловой баланс можно записать так:

$$\sum Q_{\text{вх}} + \sum Q_p = \sum Q_{\text{вых}} + \sum Q_{\text{пот}},$$

где $\sum Q_{\text{вх}}$ – теплота, вводимая в аппарат с исходными материалами;

$\sum Q_p$ – тепловой эффект физических и химических превращений;

$Q_{\text{вых}}$ – теплота, выводимая из аппарата с конечными продуктами;

$\sum Q_{\text{пот}}$ – потери теплоты в окружающую среду.

2. Закон сохранения массы

Закон сохранения массы для изолированной системы состоит в том, что суммарное количество массы в системе не изменяется при любых происходящих в ней процессах:

$$dM = 0; \rightarrow M = \text{const.}$$

Если система состоит из k компонентов и Φ фаз, то

$$\sum_{j=1}^{\Phi} \sum_{i=1}^k M_{ji} = M,$$

где M_{ji} – масса i -го компонента в j -й фазе; тогда масса j -й фазы в системе будет равна:

$$\sum_{i=1}^k M_{ji} = M_{j1} + M_{j2} + \dots + M_{jk},$$

а масса i -го компонента в системе равна:

$$\sum_{j=1}^{\Phi} M_{ji} = M_{1i} + M_{2i} + \dots + M_{\Phi i}.$$

Таким образом, можно получить балансовые уравнения для каждого компонента и каждой фазы, участвующих в процессе.

Материальный баланс составляется следующим образом: масса поступающих на переработку веществ $\sum M_{\text{вх}}$ должна быть равна массе конечных продуктов $\sum M_{\text{вых}}$:

$$\sum M_{\text{ex}} = \sum M_{\text{блх}}.$$

На практике при проведении технологического процесса происходят необратимые потери вещества со сточными водами или газовыми выбросами, поэтому материальный баланс принимает вид:

$$\sum M_{\text{ex}} = \sum M_{\text{блх}} + \sum M_{\text{пот}}.$$

3. Закон сохранения импульса (количества движения)

Импульсом системы называется вектор, равный произведению массы системы на скорость ее движения:

$$\vec{W} = M\vec{w}.$$

Импульс системы $\vec{W}$, состоящей из n подсистем, равен сумме импульсов всех подсистем:

$$\vec{W} = \sum_{i=1}^n M_i \vec{w}_i.$$

Закон сохранения импульса состоит в том, что суммарный импульс изолированной системы с течением времени не изменяется (в интегральной системе отсчета).

$$d\vec{W} = 0.$$

Взаимодействие подсистем, составляющих изолированную систему, приводит к обмену количествами движения между этими подсистемами, но не изменяет движения системы как целого.

5.3.2. Законы равновесия

Законы термодинамического равновесия определяют условия, при которых процесс переноса любой субстанции (массы, энергии и импульса) приходит к своему завершению. Состояние системы, при котором перенос субстанций отсутствует, называется **равновесным**.

Знание условий равновесия позволяет определить направление процесса переноса (из какой фазы, в какую переходит субстанция) и рассчитать **движущую силу** процесса.

Условия равновесия в процессах переноса теплоты определяются измерением температур соприкасающихся фаз. Механическое равновесие (при переносе импульса) обнаруживают по равенству непосредственно измеренных давлений в соприкасающихся фазах.

Сложнее определить условия равновесия системы в процессах переноса массы. Процесс перехода вещества (массы) из одной фазы в другую в изолированной системе, состоящей из двух и более фаз, возникает самопроизвольно (без вмешательства извне) и протекает до тех пор, пока между фазами при данных условиях (температуре и давлении) не установится **подвижное фазовое равновесие**. Оно характеризуется тем, что в единицу времени из первой фазы во вторую и обратно переходит одинаковое число молекул вещества.

Система будет находиться в равновесии до тех пор, пока какое-либо внешнее воздействие не выведет ее из этого состояния.

Таким образом, состояние изолированной системы при равновесии определяется только внутренними условиями. Поэтому дифференциалы интенсивных параметров должны быть равны нулю:

$$dT = 0, \quad dP = 0, \quad d\mu_i = 0, \quad (5.1)$$

где T – температура;

P – давление в системе;

μ_i – химический потенциал i -го компонента ($i = 1, 2, \dots, K$).

Выражения (5.1) – *условия термического, механического и химического (материального) равновесия* системы.

Справедливы утверждения:

а) все самопроизвольные процессы протекают в направлении достижения равновесия;

б) чем в большей степени состояние системы отклоняется от равновесия, тем выше скорость процесса переноса субстанций между фазами.

Из второго закона термодинамики следует, что в самопроизвольных процессах *энтропия* S системы возрастает и достигает максимума при равновесии, то есть в состоянии равновесия системы:

$$dS = 0. \quad (5.2)$$

Действительно, энтропию системы можно рассматривать как меру вероятности пребывания системы в данном состоянии, а равновесие для самопроизвольного процесса есть наиболее вероятное состояние.

Уравнения (5.1) и (5.2) определяют условия равновесия системы.

Химический потенциал i -го компонента системы вычисляют как частную производную от внутренней энергии системы U по числу частиц (или молей) этого компонента при постоянных объеме, энтропии и массах других компонентов:

$$\mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{\substack{V=\text{const}, S=\text{const}, \\ n_j=\text{const}, (j=1,2,\dots,K, j \neq i)}} = \left(\frac{\partial H}{\partial n_i} \right)_{\substack{S=\text{const}, P=\text{const}, \\ n_j=\text{const}, (j=1,2,\dots,K, j \neq i)}}, \quad i = 1, 2 \dots K,$$

где n_i – число молей i -го компонента;

H – энтальпия системы.

Известно, что при постоянном давлении изменение энтальпии равно количеству теплоты, подведенной к системе, т. е.:

$$dH = dQ \text{ при } P = \text{const},$$

поэтому энтальпию называют *теплосодержанием* системы.

В состоянии термодинамического равновесия (при $P = \text{const}$, $S = \text{const}$) энтальпия системы *минимальна*.

Для *смеси идеальных газов* химический потенциал i -го компонента можно вычислить по формуле:

$$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln \left(\frac{p_i}{p_i^0} \right),$$

где μ_i^0 – значение μ_i при стандартном состоянии, зависит только от температуры;

p_i – парциальное давление i -го компонента смеси;

p_i^0 – давление i -го компонента смеси в стандартном состоянии (берется из справочников);

R – универсальная газовая постоянная.

В случае *неидеальных* систем химический потенциал μ_i зависит не только от концентрации i -го компонента, но и от концентрации других компонентов смеси. Для его вычисления можно использовать формулу:

$$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln(\gamma_i x_i),$$

где x_i и γ_i – мольная доля и коэффициент активности i -го компонента смеси.

Коэффициент активности γ_i является количественной мерой неидеальности поведения i -го компонента в смеси. При $\gamma_i > 1$ отклонение от идеального поведения называют положительным, при $0 < \gamma_i < 1$ – отрицательным, для идеальных систем коэффициенты активности равны единице.

5.3.3. Правило фаз

Необходимым условием фазового равновесия является постоянство температуры и давления во всех фазах системы. Действительно, при неравенстве температуры равновесие нарушается из-за теплообмена, при неравенстве давления – из-за массообмена между фазами. Таким образом, на равновесие системы оказывают влияние изменения температуры, давления и состава фаз. Возможное существование данной фазы в равновесии с другими определяется *правилом фаз*:

$$N = K - \Phi + 2,$$

где N – число степеней свободы (число параметров, определяющих состояние системы, которые можно изменять, не нарушая равновесия системы);

K – число компонентов;

Φ – число фаз системы.

Например: пусть система состоит из двухкомпонентной (бинарной) жидкой смеси и паров, образующихся при ее кипении. Если компоненты жидкой смеси *абсолютно нерастворимы* друг в друге, то $K = 2$, $\Phi = 3 \Rightarrow N = 1$, то есть система моновариантна. Изменение давления над этой системой влечет за собой одновременное изменение температуры кипения и состава паровой фазы.

Если же рассматриваемая смесь состоит из компонентов с *неограниченной взаимной растворимостью*, то $K = 2$, $\Phi = 2 \Rightarrow N = 2$, то есть система бивариантна. В этом случае одной из переменных величин (например, давлением) задаются и получают однозначную зависимость между температурой и концентрацией или (при постоянной температуре) – между давлением и концентрацией. Если эти зависимости изобразить на плоскости, то получим *фазовые диаграммы*.

Правило фаз дает качественную характеристику равновесной системы, но не указывает количественных зависимостей переноса вещества между фазами.

5.3.4. Линии равновесия

Чтобы определить направление процесса массообмена между фазами и его скорость, необходимо знать зависимость равновесной концентрации y^*

распределяемого вещества в одной фазе от его рабочей концентрации x в другой фазе, то есть зависимость:

$$y^* = f(x). \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) описывает *линию равновесия*.

Для идеальных систем уравнения линии равновесия известны. Например, для идеального раствора, если его температура выше критической температуры растворенного газа (то есть происходит испарение), применим закон Генри, по которому парциальное давление растворенного газа над раствором p_r пропорционально его мольной доле в растворе:

$$p_r = Ex, \quad (5.4)$$

где E – константа Генри.

Из закона Дальтона следует, что

$$y^* = \frac{p_r}{p}, \quad (5.5)$$

где P – общее (полное) давление в системе. Тогда

$$y^* = \frac{Ex}{p} = mx. \quad (5.6)$$

Значение параметра m зависит от общего давления и температуры.

Для систем, не подчиняющихся закону Генри, m является переменной величиной, и линия равновесия представляет собой кривую, которую обычно строят по опытным данным.

При расчете процесса массообмена между фазами, надо совместить на одной диаграмме рабочую линию, устанавливающую связь между сопряженными концентрациями распределяемого вещества во взаимодействующих неравновесных фазах, и кривую фазового равновесия (рис. 5.1). Линия равновесия может располагаться ниже или выше рабочей линии.

При $y > y^*$ (рис. 5.1а) равновесная линия располагается ниже рабочей линии (распределяемое вещество переходит из фазы Φ_y в фазу Φ_x , при этом $x < x^*$), а при $y^* > y$ (рис. 5.1б) равновесная линия лежит выше рабочей линии (распределяемое вещество переходит из фазы Φ_x в фазу Φ_y , при этом $x > x^*$).

Таким образом, распределяемое между фазами вещество в точке контакта фаз переходит в ту фазу, *рабочая* концентрация которой меньше *равновесной*. Разность концентраций $y - y^*$ (или $y^* - y$, или $x^* - x$) – *движущая сила* процесса массообмена.

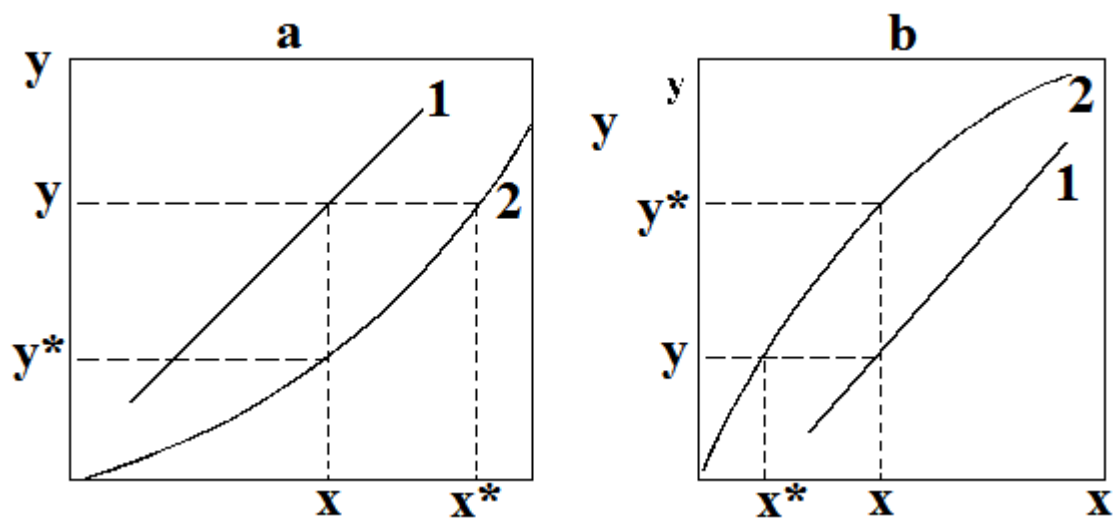


Рисунок 5.1. Диаграммы процессов массообмена между фазами:
1 – рабочая линия; 2 – линия равновесия; x^* , y^* – равновесные концентрации;
 x , y – текущие (рабочие) концентрации распределяемого вещества в фазах

5.3.5. Основные механизмы переноса субстанций

Классифицировать механизмы переноса удобнее всего по, уровню, то есть по масштабу, в котором осуществляется элементарный акт переноса.

Наинизший уровень – **квантовый**: элементарный акт переноса заключается в излучении и поглощении элементарной частицы (кванта). Механизм переноса на квантовом уровне называют **излучением**.

Перенос вещества излучением обуславливает, например, все ядерные реакции, возникающие в результате поглощения тех или иных элементарных частиц. Процессы излучения играют большую роль в теплоэнергетике.

Так, например, значительная часть экранных труб парогенератора находится в пределах топки котла, где температура факела достигает 2000 °С. Согласно закону Стефана–Больцмана, описывающему теплообмен путем излучения, тепловой поток между факелом с температурой Θ_{ϕ} и стенкой топки с температурой $\Theta_{ст}$ и площадью поверхности F , определяется зависимостью:

$$Q_{1-2} = \varepsilon_{\phi} \varepsilon_{ст} C_0 F \left[\left(\frac{\Theta_{\phi}}{100} \right)^4 - \left(\frac{\Theta_{ст}}{100} \right)^4 \right], \quad (5.7)$$

где ε_{ϕ} , $\varepsilon_{ст}$ – приведенные коэффициенты излучения факела и стенки топки соответственно; $C_0 = 5,76 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – коэффициент излучения абсолютно черного тела. Поскольку температура факела значительно выше температуры поверхности нагрева, можно принять, что тепловой поток не зависит от температуры труб.

Второй, более высокий уровень переноса связан с тепловым движением молекул. Это **молекулярный уровень**. Перенос количества движения, тепла и вещества на молекулярном уровне играет важнейшую роль практически во всех рабочих процессах теплоэнергетики.

Начнем рассмотрение с более хорошо известных случаев – переноса тепла и вещества.

Механизм переноса тепла на молекулярном уровне – **теплопроводность**. Это перенос тепловой энергии за счет теплового движения молекул (в случае металла – электронов).

Механизм переноса вещества на молекулярном уровне – **диффузия**. Это перемещение вещества также за счет теплового движения молекул.

Сходство механизмов порождает глубокую аналогию между законами теплопроводности и диффузии. Оба процесса описываются аналогичными законами Фурье–Фика:

для потока тепла

$$q_T = -\lambda \text{grad} T, \quad (5.8)$$

для потока вещества

$$q_M = -D \text{grad} C, \quad (5.9)$$

где λ – коэффициент теплопроводности вещества;

D – коэффициент диффузии;

T – температура;

C – концентрация вещества.

Однако наряду с аналогией между молекулярными механизмами переноса тепла и вещества имеется и серьезное различие. Оно связано со следующим обстоятельством. Для переноса вещества от одной точки к другой диффундирующие молекулы непременно должны переместиться между этими точками. Для переноса же тепловой энергии не обязательно непосредственное перемещение «быстрой» молекулы среди «медленных». Тепловая энергия может передаваться от молекулы к молекуле и таким образом переноситься «эстафетой». Глубина сходства между этими механизмами зависит от среды, в которой идет перенос. В газе интенсивности теплопроводности и диффузии – величины одного порядка, что выражается соотношением:

$$D \approx a_T. \quad (5.10)$$

Различие между a_T и D для газов редко превышает двукратное.

В капельных жидкостях значительное взаимодействие между молекулами затрудняет диффузию и в то же время облегчает «эстафетный» перенос тепла. В жидкости

$$D \ll a_T. \quad (5.11)$$

Наконец, в твердых телах (особенно в металлах) тепло проводится хорошо, а диффузия протекает чрезвычайно медленно. Здесь

$$\frac{D}{a_T} \approx 0. \quad (5.12)$$

Поэтому в ряде случаев диффузия и теплопроводность проходят совсем по-разному.

5.4. Математическое моделирование процессов теплопередачи

5.4.1. Теплопроводность при нестационарном процессе

Если какое-нибудь тело поместить в среду с более высокой температурой, чем температура тела, то в процессе теплообмена между средой и телом последнее будет нагреваться, причем сначала прогреваются поверхностные слои, а затем теплота распространяется к центру тела.

На рисунке 5.2а приведены зависимости температуры поверхности t_n и центра t_c тела от времени.

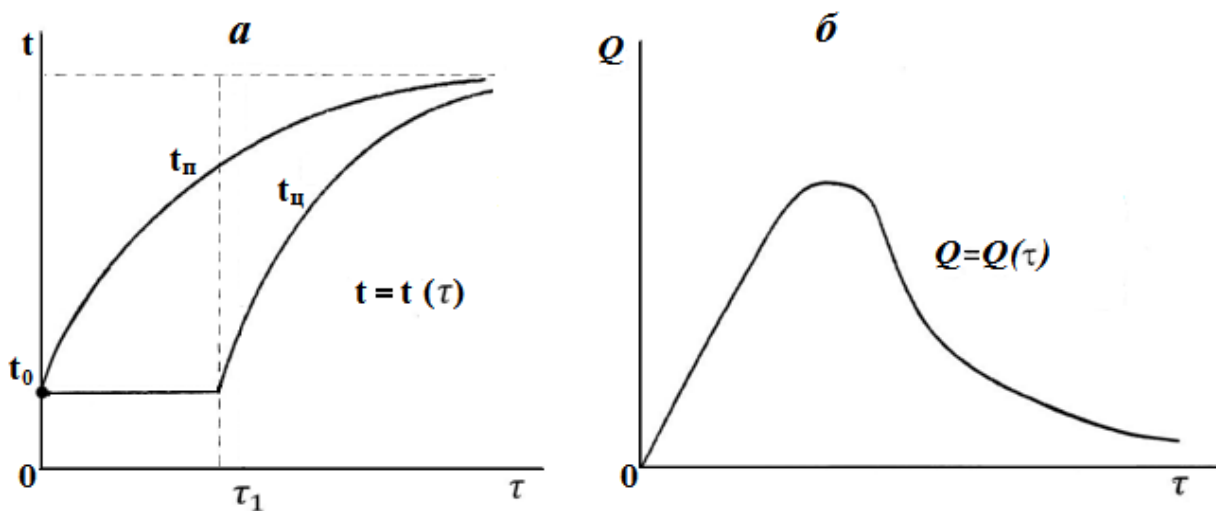


Рисунок 5.2. Характер изменения температуры t и количества переданной теплоты Q во времени при нагревании тела

Хотя вид кривой $t = t(\tau)$ зависит от формы, размеров и физических свойств тела и среды, общим будет то, что температура центра тела при нагревании всегда меньше температуры поверхности. По истечении значительного промежутка времени температура всех частей тела выравнивается и становится равной температуре среды. Количество теплоты, получаемой телом в процессе нагревания, также изменяется во времени (рис. 5.2б). Площадь, ограниченная кривой и осью абсцисс, определяет полное количество теплоты, переданной телу за время τ , в результате чего повышается его внутренняя энергия. При охлаждении тела наблюдаются аналогичные зависимости.

Нестационарный тепловой режим в технике встречается очень часто, однако не всегда его рассчитывают. В большинстве теплообменных аппаратов (например, рекуперативных) нестационарные процессы имеют временный характер, а в основном же эти аппараты работают при стационарном режиме. В энергетических машинах и аппаратах, регенеративных теплообменниках рабочий процесс протекает при нестационарном режиме. В этих и подобных случаях расчет нестационарной теплопроводности необходим, так как она определяет продолжительность технологического процесса, качество изделия и производительность установки.

При нестационарном режиме перераспределение теплоты сопровождается изменением температуры отдельных элементов тела. Изменение температурного поля твердого тела при нестационарной теплопроводности описывается дифференциальным уравнением теплопроводности.

А. Дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности

Изучение любого физического явления, процесса сводится к установлению зависимости между величинами, характеризующими это явление, то есть к разработке математической модели. Процесс нагревания твердого тела является сложным физическим процессом, в котором определяющие величины могут существенно изменяться в пространстве и времени, и установить зависимость между этими величинами очень трудно. Однако можно существенно упростить эту зависимость, если ограничиться малым промежутком времени dt процесса и из всего пространства тела рассматривать лишь элементарный объем dv , что дает возможность пренебречь изменением некоторых величин, характеризующих процесс.

Полученная таким образом зависимость, математическая модель, будет общим дифференциальным уравнением теплопроводности. Решая затем это уравнение, можно получить аналитическую зависимость между величинами для всего тела и всего времени процесса.

Выведем уравнение теплопроводности упрощенным методом. Для этого примем следующее допущения:

- тело однородно и изотропно (физические свойства тела по всем направлениям одинаковы);
- физические параметры (теплофизические коэффициенты) постоянны, т.е. не зависят от координат и времени;
- деформация рассматриваемого объема, связанная с изменением температуры, мала по сравнению с самим объемом;
- температурное поле одномерно (теплота распространяется в одном направлении, например, в направлении оси «х»);
- внутренние источники теплоты в теле отсутствуют.

В основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности положен закон сохранения энергии: количество теплоты dQ , выделенное в элементарный объем dv извне за время dt вследствие теплопроводности, равно изменению внутренней энергии dU в этом объеме, за время dt :

$$dQ = dU. \quad (5.13)$$

Выделим в теле элементарный параллелепипед со сторонами dx , dy , dz , параллельными соответствующими координатным осям (рис. 5.3). Объем этого параллелепипеда, следовательно, равен $dv = dxdydz$.

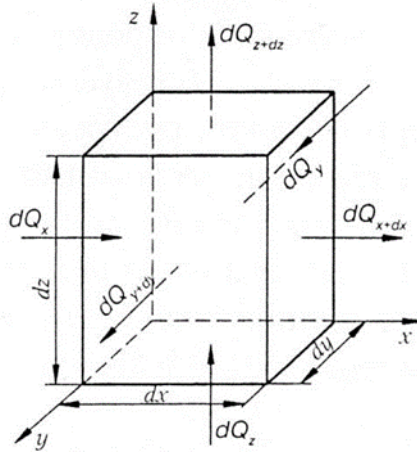


Рисунок 5.3. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

Количество теплоты, подведенное к грани $dydz$ в направлении оси ox за время $d\tau$, равно $dQ_x = q_x dy dz d\tau$, где q_x – проекция плотности теплового потока на направление нормали к указанной грани. Количество теплоты, отведенное через противоположную грань элементарного параллелепипеда в направлении оси ox , составляет: $dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz d\tau$.

Тогда разность между количеством теплоты, подведенным к параллелепипеду, и количеством теплоты, отведенным от него за время $d\tau$ в направлении оси «Ох», равно:

$$dQ = dQ_x - dQ_{x+dx} = q_x dy dz d\tau - q_{x+dx} dy dz d\tau, \quad (5.14)$$

функция q_{x+dx} является непрерывной рассматриваемом интервале q_x , и если ее разложить в ряд Тейлора и ограничиться двумя первыми членами ряда, то можно написать для неизвестной функции q_{x+dx} приближенное равенство

$$q_{x+dx} \approx q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx,$$

которое тем точнее, чем меньше dx .

Тогда из равенства (5.14) получим:

$$dQ = - \frac{\partial q_x}{\partial x} dv d\tau. \quad (5.15)$$

Если рассматривать внутреннюю энергию единицы объема $U = U(t, v)$, то

$$dU = C_u \frac{\partial t}{\partial \tau} dv d\tau = c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dv d\tau, \quad (5.16)$$

где C_u – изохорная теплоемкость единицы объема, Дж/(кг К);

c_v – изохорная теплоемкость единицы массы (удельная теплоемкость), Дж/(кг К);

ρ – плотность вещества.

После подстановки полученных выражений (5.15) и (5.16) в уравнение (5.13) получим:

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = - \frac{\partial q_x}{\partial x}. \quad (5.17)$$

Учитывая закон Фурье стационарной теплопроводности, получим

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right),$$

или

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad (5.18)$$

что и является дифференциальным уравнением нестационарной теплопроводности для одномерного потока теплоты.

Обозначив $\frac{\lambda}{c_v \rho} = a$, получим это уравнение в виде:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (5.19)$$

В общем случае вектор q можно разложить на три составляющие по координатным осям. Тогда, рассуждая аналогичным образом, можно найти количество теплоты, подведенное к элементарному объему и в направлениях двух других координатных осей Oy и Oz , и окончательно получить дифференциальное уравнение теплопроводности (уравнение Фурье) в виде:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) = a \nabla^2 t, \quad (5.20)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – выражение оператора Лапласа в декартовой системе координат.

Дифференциальное уравнение в частных производных (УЧП) (5.20) является дифференциальным уравнением энергии для изохорного процесса переноса теплоты, или уравнением нестационарной теплопроводности. Оно устанавливает связь между временным и пространственным изменением температуры в любой точке твердого тела, в котором происходит процесс теплопроводности.

Коэффициент пропорциональности « a » в уравнении (5.20) называется коэффициентом температуропроводности и является физическим параметром вещества. Он существует для нестационарных тепловых процессов и характеризует скорость изменения температуры. Если коэффициент теплопроводности « λ » характеризует способность тел проводить теплоту, то коэффициент температуропроводности является мерой теплоинерционных свойств тела. Из уравнения (5.20) следует, что скорость изменения температуры во времени $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ в теле тем больше, чем больше « a ». Поэтому при прочих равных условиях выравнивание температур во всех точках пространства будет происходить быстрее в том теле, которое обладает большим коэффициентом температуропроводности.

Коэффициент температуропроводности зависит от природы вещества: металлы обладают меньшей тепловой инерционностью в сравнении с жидкостями и газами, поэтому они имеют большие коэффициенты температуропроводности, чем жидкости и газы.

При стационарной теплопроводности $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ и уравнение (5.20) принимает вид уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (5.21)$$

С помощью уравнения (5.20) можно решить задачу о тепловом состоянии тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда. Решение этой задачи

можно представить как произведение решений для трех неограниченных пластин, толщины которых равны соответствующим измерениям параллелепипеда.

При решении задач теплопроводности для тел сферической формы, когда температура является только функцией времени « t » и расстояния « r » от центра (симметричная задача), уравнение теплопроводности (5.20) примет вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right). \quad (5.22)$$

Для решения задачи о тепловом состоянии тел цилиндрической формы уравнение (5.20) выглядит так:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right). \quad (5.23)$$

С помощью уравнений (5.22) и (5.23), содержащих две независимые переменные r и t определяют температурные поля шара или цилиндра. Но задачи по-прежнему являются одномерными, подобными задаче об охлаждении (нагреве) пластины.

Все три уравнения (5.19), (5.22) и (5.23) удобно записать в виде одного, введя для этого величину Γ , называемую постоянной формы, которая для неограниченной пластины равна «0», для бесконечного цилиндра – «1», для шара – «2»:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{\Gamma}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right). \quad (5.24)$$

Учитывая существующую в математическом описании механизмов переноса теплоты зависимость в форме (5.20), можно записать уравнения нестационарного переноса массы вещества (диффузии):

$$\frac{\partial c(x,y,z,\tau)}{\partial \tau} = D \nabla^2 c(x,y,z,\tau). \quad (5.25)$$

Б. Условия однозначности

Уравнение (5.18) устанавливает наиболее общую связь между входящими в него переменными, так как при его выводе не принимались во внимание какие-либо конкретные условия процесса. Дифференциальное уравнение выражает связь между изменением температуры в данной точке во времени и ее распределением в пространстве вокруг этой точки.

Коэффициент температуропроводности « a » является физической константой вещества и характеризует реакцию тела на перераспределение теплоты, т. е. его теплоинерционные свойства: тепловой поток растет с увеличением λ и уменьшается при возрастании объемной теплоемкости c_v и плотности ρ . Вторую производную уравнения (5.19) можно представить в следующем виде: $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)$.

Отсюда следует, что она определяет интенсивность изменения градиента температуры по направлению оси « x » и, следовательно, интенсивность изменения потока теплоты в этом направлении. Это характерно для нестационарной теплопроводности.

Для решения задачи о распространении теплоты в твердом теле применительно к конкретному случаю необходимо располагать

дополнительными условиями, характеризующими свойства рассматриваемого явления и не содержащимися в исходном дифференциальном уравнении.

Условия, которые в совокупности с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса теплопроводности, то есть однозначно определяют единичное явление, *называются условиями однозначности или краевыми условиями*.

Условия однозначности содержат сведения, которые задаются по условию конкретной задачи, а именно:

- геометрические свойства системы (тела);
- физические свойства (физические константы тел рассматриваемой системы);
- временные (начальные) условия, характеризующие состояние системы в начальный момент времени;
- граничные условия, которые учитывают условия взаимодействия системы с окружающей средой.

Геометрическими условиями задаются форма и линейные размеры тела, в котором протекает процесс.

Физическими условиями задаются физические параметры тела (λ, c_p, ρ , и др.) и может быть задан закон распределения внутренних источников теплоты.

Начальные условия необходимы при рассмотрении нестационарных процессов и состоят в задании закона распределения температуры внутри тела в начальный момент времени. В общем случае начальное условие аналитически может быть записано следующим образом (при $\tau = 0$):

$$t = t(x, y, z, 0) = t(x, y, z). \quad (5.26)$$

При равномерном распределении температуры в теле начальное условие (при $\tau = 0$) упрощается:

$$t = t_0 = \text{const}. \quad (5.27)$$

Обычно реальные тела рассматривают как тела основной геометрической формы:

– *неограниченная (бесконечная) пластина*, под которой понимают такую пластину, ширина и длина которой бесконечно велика по сравнению с толщиной, то есть неограниченная пластина представляет собой тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями. Изменение температуры происходит только в одном направлении « x », в двух других направлениях « y » и « z » температура неизменна, то есть в уравнении (5.20):

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0.$$

Следовательно, изотермические поверхности представляют плоскости, параллельные плоскости « yz », и задача является одномерной;

– *шар* – тело сферической формы такое, что изотермы внутри шара представляют собой концентрические сферы, то есть температура при термической обработке тела (нагревание или охлаждение) зависит только от радиуса – вектора $\vec{r}$ и времени « t » (симметричная задача);

– *неограниченный бесконечный цилиндр*, под которым понимают цилиндр, длина которого значительно больше его диаметра. Если теплообмен между

поверхностью цилиндра и окружающими телами происходит одинаково по всей поверхности, то температура его будет зависеть только от времени и радиуса (симметричная задача).

В. Граничные условия

Граничные условия могут быть заданы различными способами.

1. Граничные условия первого рода

Задается распределение температуры поверхности тела как функции времени. В простейшем случае температура остается постоянной во всем процессе теплообмена: $t = \text{const}$. Это может быть осуществлено, например, при искусственном поддержании постоянной температуры.

2. Граничное условие второго рода

Условие состоит в задании распределения плотности теплового потока на границах тела и ее изменения во времени: $q_n = f(\tau)$. В частном случае: $q_n = \text{const}$. Такой случай теплообмена имеет место при нагревании тел в высокотемпературных печах, где передача тепла в основном происходит при помощи излучения по закону Стефана – Больцмана, когда температура тела значительно меньше температуры излучающих поверхностей.

3. Граничное условие третьего рода

В граничных условиях третьего рода $\left(-\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right)_n + \alpha \Delta t = 0$ задаются температура окружающей среды t_c и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой по закону Ньютона $q = \alpha(t_n - t_c)$. Это отражает в первом приближении сложный лучистый и конвективный теплообмен, в котором доля лучистого потока тепла является преобладающей. При этом разность температур $\Delta t = t_n - t_c$ должна быть достаточно малой. Задача упрощается, если температура окружающей среды и коэффициент теплоотдачи α постоянны.

4. Граничное условие четвертого рода

Граничное условие четвертого рода соответствует теплообмену поверхности тела с окружающей средой по закону теплопроводности Фурье или теплообмену соприкасающихся твердых тел, когда температура соприкасающихся поверхностей одинакова (идеальный, совершенный тепловой контакт). При обтекании твердого тела потоком жидкости (или газа) передача тепла от жидкости (газа) к поверхности тела в непосредственной близости к поверхности тела (ламинарный пограничный слой или ламинарный подслой) происходит по закону теплопроводности (молекулярный перенос тепла), т. е. имеет место теплообмен, соответствующий граничному условию четвертого рода (полагается равенство температур поверхности тела t_n и обтекающего его слоя жидкости (газа) t_c : $t_n(\tau) = t_c(\tau)_n$).

Помимо равенства температур может быть также равенство потоков тепла, направленных по нормали n к изотермической поверхности:

$$\left(-\lambda_c \frac{\partial t_c}{\partial x}\right)_n = \left(-\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right)_n.$$

В случае нестационарного температурного поля ($\frac{\partial t}{\partial \tau} \neq 0$), необходимо при точной формулировке задачи теплопроводности применять граничные условия четвертого рода.

Дифференциальное уравнение теплопроводности совместно с начальными и граничными условиями (краевая задача теплопроводности) полностью определяет математическую модель (задачу). То есть, зная геометрическую форму тела, начальные и граничные условия, можно дифференциальное уравнение решить до конца и, следовательно, найти поле температур в теле – функцию распределения температуры в любой момент времени $t(x,y,z,\tau)$.

Функция $t(x,y,z,\tau)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению (при подстановке ее вместо t в дифференциальное уравнение теплопроводности последнее должно обращаться в тождество), а также начальному и граничному условиям.

В курсе математической физики доказывается теорема единственности решения, из которой следует, что если некоторая функция $t(x,y,z,\tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности, начальным и граничным условиям, то она является *единственным решением* данной задачи.

Из-за сложности изучаемых явлений решить аналитически дифференциальные уравнения в частных производных современными математическими методами бывает очень трудно, а иногда и невозможно. Однако существует много методов решения, пригодных для практического использования. При решении ряда технических задач используются численные, приближенные, а также экспериментальные методы решения задач нестационарной теплопроводности, основанные на аналогии между теплопроводностью и движением вязкой жидкости (метод гидротепловой аналогии), между тепловыми и электрическими явлениями (метод электротепловой аналогии). Преимущество этих методов состоит в том, что их можно применять для тел любой формы и при любых граничных условиях.

5.4.2. Математическое моделирование процесса нагрева теплообменника при постоянном притоке теплоты

Теплообменники обеспечивают передачу теплоты между двумя или большим числом потоков теплоносителей, проходящих через аппарат. Основной характеристикой конструкции теплообменника является тип относительного движения потоков теплоносителей, взаимная геометрия этих течений.

Наиболее общие типы конструкций и течений:

1) противоток (два теплоносителя движутся параллельно друг другу, но в противоположных направлениях).

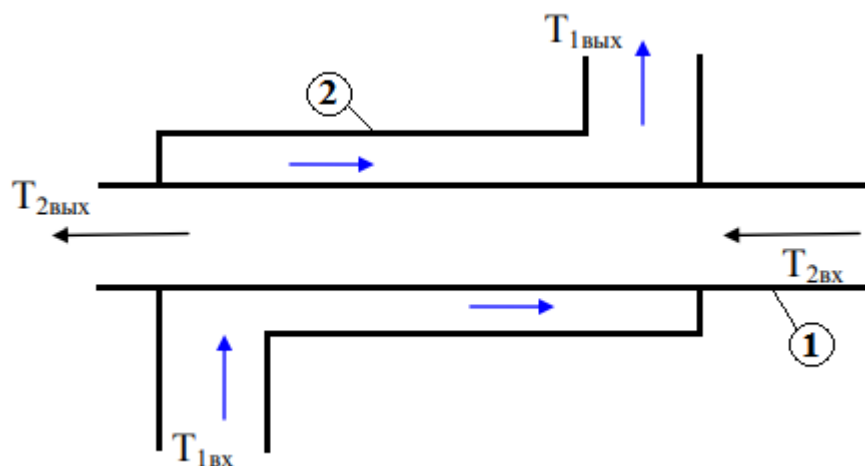


Рисунок 5.4. Схема движения потоков теплоносителей:

1 – одиночная труба относительно малого диаметра, расположенная внутри трубы большого диаметра 2; один теплоноситель течет во внутренней трубе (T_2), другой – в кольцевом пространстве 2 между двумя трубами (T_1);

T – температура, «вх» – условия на входе, «вых» – условия на выходе теплообменника

Противоточные теплообменники наиболее эффективны, поскольку обеспечивают наилучшее использование располагаемой разности температур, в них так же может быть достигнуто наибольшее изменение температуры каждого теплоносителя;

2) параллельное однонаправленное течение;

3) перекрестный ток, перекрестный ток с теплоносителем и др.

Для того чтобы рассчитать характеристики теплообменника, необходимо задать схему движения теплоносителей в нем, установить расходы теплоносителей по выбранным направлениям и определить значения термических сопротивлений передаче теплоты от одного теплоносителя другому в каждой точке объема теплообменника. После этого отыскание распределения температуры в отдельных потоках является чисто математической операцией.

Построим **математическую модель** простейшего закона нагрева теплообменника при постоянном притоке теплоты (рис. 5.4).

Пусть T – температура наружной поверхности теплообменника;

dT – изменение температуры отопительного аппарата в течение времени dt ;

m – масса аппарата;

c – удельная теплоемкость материала аппарата;

α – коэффициент теплоотдачи (теплообмена) от поверхности аппарата;

Q – количество теплоты, поступающей в теплообменник в единицу времени;

S – поверхность теплообмена (теплоотдачи) аппарата;

T_1 – наружная температура (температура среды);

$T - T_1$ – превышение наружной температуры теплообменника над температурой среды.

Требуется найти закон $T(t)$.

В течение времени dt происходят следующие процессы:

а) в теплообменник поступает количество теплоты, равное $Q \cdot dt$;

б) количество теплоты в аппарате изменяется на величину, равную $m \cdot c \cdot dT$;

в) при этом отдается в окружающую среду количество теплоты, равное величине $\alpha \cdot S \cdot (T - T_1) \cdot dt$.

Суммируя эти количества, получаем уравнение теплового баланса (применение закона сохранения энергии к тепловым процессам):

$$m \cdot c \cdot dT + \alpha \cdot S \cdot (T - T_1) \cdot dt = Q \cdot dt, \quad \text{или} \quad (5.28)$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{\alpha \cdot S}{m \cdot c} (T - T_1) = \frac{Q}{m \cdot c}. \quad (5.29)$$

Полагая, $a = \alpha \cdot S / m \cdot c$ и $b = Q / m \cdot c$, получаем дифференциальное уравнение процесса (5.29) в следующем виде:

$$\frac{dT}{dt} + a(T - T_1) = b. \quad (5.30)$$

Разделяем переменные, преобразуя при этом левую часть уравнения (5.30) так, чтобы в числителе получился дифференциал знаменателя:

$$-\frac{1}{a} \frac{d[b - a(T - T_1)]}{b - a(T - T_1)} = dt. \quad (5.31)$$

Интегрируя (5.31), получаем:

$$\ln|b - a(T - T_1)| - \ln C_1 = -at, \quad (5.32)$$

где $C_1 = \text{const} > 0$, откуда следует:

$$T - T_1 = \frac{b}{a} + C e^{-at},$$

где $C = -\frac{C_1}{a}$.

Используя начальное условие: $T = T_1$ при $t = 0$, получаем: $C = -b/a$.

Тогда уравнение процесса примет вид:

$$T - T_1 = \frac{b}{a} (1 - e^{-at}), \quad (5.33)$$

или, подставляя значения a и b , имеем:

$$T = T_1 + \frac{Q}{\alpha \cdot S} (1 - e^{-\frac{\alpha \cdot S}{m \cdot c} t}). \quad (5.34)$$

Рассмотрим этот закон (5.34) или (5.33).

При бесконечном (достаточно продолжительном) времени теплообмена, температура нагреваемой среды в теплообменнике достигает своего конечного значения:

$$t \rightarrow \infty, T \rightarrow (T_1 + \frac{b}{a}) = T_k,$$

где T_k – конечная температура теплообменника.

Уравнение (5.33) может быть записано в виде:

$$T(t) = T_k - \frac{b}{a} e^{-at}. \quad (5.35)$$

Если $T_1 = 0$, то $T_k = b/a$, тогда соотношение (5.35) примет вид:

$$T = T_k (1 - e^{-at}). \quad (5.36)$$

Подставляя в уравнение (5.36) значение $t = 1/a = \tau$, которое называется постоянной времени, получим:

$$T = T_k (1 - e^{-1}) = 0,63 T_k. \quad (5.37)$$

5.4.3. Основы теплового расчета при математическом моделировании теплообменных процессов и аппаратов

Несмотря на многообразие конструкций, и принципов работы теплообменных аппаратов, процессы теплообмена в них подчиняются общим закономерностям, а основные положения методики их расчета могут быть рассмотрены в общей постановке.

До недавнего времени расчет теплообменных аппаратов приводился только для стационарных режимов, и при этом в основном решались две задачи:

1. Для заданных параметров на входе и выходе из аппарата и типе теплообменной поверхности определить требуемую площадь поверхности теплообмена и произвести его конструктивную разработку. Это есть проектный расчет.

2. Для реально существующего аппарата при заданных параметрах потоков на входе определить количество передаваемой теплоты и параметры потоков на выходе из аппарата. Это задача проверочного расчета.

К этим двум задачам можно добавить третью, так называемый оптимальный расчет теплообменного аппарата. Решение этой задачи возможно благодаря использованию ЭВМ. Суть этой задачи сводится к расчету оптимального теплообменника по выбранному критерию.

Тепловой расчет теплообменных аппаратов базируется на уравнениях теплового баланса и теплопередачи.

Решение нестационарных задач теплообмена возможно только при использовании математических моделей, записанных на основе моделей структуры потоков теплоносителей.

Проектный расчет теплообменного аппарата

Задачей проектного расчета является определение геометрических размеров и режима работы теплообменника, необходимого для отвода или подвода заданного количества теплоты к теплоносителю.

При проектном расчете задают:

1. Тип аппарата и общие геометрические характеристики поверхности теплообмена (размеры труб, оребрения, толщина стенок и др.).

2. Параметры теплоносителей на входе и выходе из аппарата (температура, давление и т. д.)

3. Тепловую мощность аппарата Q или расход сред.

Взаимность изменений температур теплоносителей определяется условием теплового баланса, которое для бесконечно малого элемента теплообменника имеет вид:

$$-G_1 C_{p1} dT_1 = G_2 C_{p2} dT_2.$$

Здесь G_1 , G_2 , C_{p1} , C_{p2} – расходы и теплоемкости теплоносителей 1 и 2, T_1 и T_2 – их температуры в произвольном сечении аппарата. Уравнение теплового баланса для всего аппарата получается путем интегрирования приведенного уравнения и имеет вид:

$$G_1 C_{p1} (T_{k1} - T_{h1}) = G_2 C_{p2} (T_{h2} - T_{k2}),$$

где T_{h1} и T_{h2} , T_{k1} и T_{k2} – начальные и конечные температуры теплоносителей.

Последнее уравнение содержит две неизвестные: G_1 или G_2 и T_{k1} или T_{k2} . Следовательно, это уравнение является неопределенным. Общий прием решения этих задач заключается в использовании метода последовательных приближений, состоящего в том, что в начале принимаются определенные решения относительно конструкции аппарата и неизвестных технологических параметров, затем путем пересчета проверяется до получения результатов с желаемой степенью точности.

Проверочный расчет теплообменного аппарата

Целью проверочного расчета теплообменного аппарата заданной конструкции является определение его мощности и температур потоков на выходе T_{k1} , T_{k2} при заданных площадях поверхности теплообмена F , расхода сред G_1 , G_2 и их температурах на входе T_{h1} и T_{h2} .

Математические модели теплообменников

Обычно принимают, что движение потоков теплоносителя и хладагента характеризуется гидродинамическими моделями идеального смешения, идеального вытеснения, ячеечной моделью (однофазные диффузионные модели – ОДМ) или их комбинацией.

Если гидродинамическая структура потоков в теплообменном аппарате соответствует модели идеального смешения, то во всем потоке происходит полное смешение молекул потока. В таком случае любое изменение температуры потока на входе в зону идеального смешения мгновенно распространяется по всему объему зоны.

Гидродинамическая структура потоков теплоносителя, соответствующая модели идеального смешения, имеет место в теплообменных аппаратах с изменением агрегатного состояния потоков – в конденсаторах, кипятильниках, испарителях. Уравнение, описывающее изменение температуры для теплообменника в зоне идеального смешения, имеет вид:

$$VC_p \frac{dT}{d\tau} = vC_p(T - T_1),$$

где V – объем зоны идеального смешения;

v – объемная скорость;

$T_{вх}$, T – температура потока на входе и в зоне идеального смешения;

C_p – теплоемкость потока;

τ – время.

Условие физической реализуемости модели идеального вытеснения выполняются в случае поршневого потока, когда предполагается, что в направлении его движения смещение полностью отсутствует, а в направлении, перпендикулярном движению, происходит идеальное смешение. Гидродинамическая структура потоков, соответствующая модели идеального вытеснения, характерна для движения потоков в трубном пространстве кожухотрубчатых теплообменников различных конструкций, а также для теплообменного аппарата типа «труба в трубе».

Уравнение, описывающее изменение температуры в зоне идеального вытеснения, имеет вид:

$$S_B C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = -v C_p \frac{\partial T}{\partial l},$$

где S_B – сечение зоны идеального вытеснения;

l – координата длины аппарата.

Диффузионная модель гидродинамической структуры потоков соответствует такому движению потоков, когда в направлении его движения существует продольное смещение, а перпендикулярном направлении предполагается наличие идеального смешения.

Диффузионная модель значительно лучше, чем модель идеального вытеснения, описывает гидродинамические условия в реальных кожухотрубчатых теплообменниках. Уравнение, характеризующее изменение температуры по длине зоны, имеет вид:

$$S_B C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = S_B E_T \frac{\partial T}{\partial l} - v C_p \frac{\partial T}{\partial l},$$

где E_T – коэффициент продольного переноса теплоты.

Температуры потоков в теплообменных аппаратах могут изменяться в каждой точке потока не только в результате его движения, но также из-за теплообмена с окружающей средой или за счет источника теплоты. Интенсивность источника теплоты записывается следующим образом:

$$V \cdot q_T = F \cdot K \cdot \Delta T,$$

где F – поверхность теплообмена, отнесенная к единице объема;

K – коэффициент теплопередачи;

ΔT – разность температур.

Уравнения идеального смешения и идеального вытеснения для температур потока с учетом источника теплоты в потоке имеют, соответственно, вид:

$$V C_p \frac{dT}{d\tau} = v C_p (T - T_1) + V \cdot q_T;$$

$$S_B C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = - v C_p \frac{\partial T}{\partial l} + S_B q_T.$$

Учитывая выражение для интенсивности источника теплоты, и зная при этом, что $V = S_B \cdot L$ из последнего уравнения получим:

$$S_B C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = - v C_p \frac{\partial T}{\partial l} + S_B \frac{F \cdot K \cdot \Delta T}{S_B \cdot L},$$

или

$$S_B C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = - v C_p \frac{\partial T}{\partial l} + \frac{F}{L} \cdot K \cdot \Delta T.$$

Аналогично для двухфазной диффузионной модели (ДДМ), с учетом наличия источника теплоты, запишем:

$$S_B C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = S_B E_T \frac{\partial^2 T}{\partial l^2} - v C_p \frac{\partial T}{\partial l} + \frac{F}{L} \cdot K \cdot \Delta T.$$

Для описания гидродинамической структуры потоков в реальных теплообменных аппаратах используются комбинированные модели движения потоков: ячеечная модель; модель идеального смешения с застойной зоной; модель идеального смешения с байпасом; последовательное соединение двух моделей МИС (модель идеального смешения) и МИВ (модель идеального вытеснения). Применение таких моделей для описания гидродинамической структуры потоков позволяет описать изменение профиля температур, как по длине, так и в объеме теплообменного аппарата.

5.4.4. Один из методов математического моделирования при оценке качества и оптимизации систем теплоснабжения

В связи с высокой конкуренцией на рынке производства тепловой энергии основной целью по осуществлению оптимальной работы отопительной котельной является комплексное повышение эффективности работы производственного объекта на основе рационального использования энергоресурсов на собственные нужды и повышение конечных результатов деятельности энергоснабжающего предприятия. Решение такой задачи возможно путем системного анализа и математического моделирования, а также оценки комплексной эффективности производства. Примем в качестве комплексных показателей энергоэффективности энергетические ресурсы, используемые котельной.

Во-первых, проведем **статистический** анализ статистических данных по работе отопительной котельной, рассмотрим динамику изменения энергетических ресурсов: удельного расхода топлива и расхода электрической энергии котельной на собственные нужды. Реальные статистические данные в статье используем в безразмерном, приведенном к максимуму, виде. Исследуемый период является отопительным: с октября по апрель. В летние месяцы котельная не работает.

Удельный расход топлива достигает своего максимума в период пиковых нагрузок в январе. В октябре и апреле достигает своего минимума, соответствующего 50 %, относительно января.

Второй параметр – расход электрической энергии котельной на собственные нужды зависит от количества используемого оборудования, уровня автоматизации котельной, внедрения инновационных технологий в работу всего оборудования и поддержания номинальных режимов работы. В октябре показатель равен 0,58. В ноябре, январе и февраль достигает своих наибольших значений (0,96–1,0). В декабре, марте и апреле значения находятся в промежутке 0,91–0,93.

Динамика полезного отпуска тепловой энергии аналогична динамике изменения удельного расхода топлива.

На следующем этапе для исследования энергоэффективности проведем математическое моделирование зависимости изменения отпуска тепловой энергии от количества используемых энергетических ресурсов. Наиболее распространенным классом моделей функционирования производственных систем является класс производственных функций. Производственная функция описывает взаимосвязь используемых входных ресурсов и готовой выпускаемой продукции.

Для этого проработаем чрезвычайно часто используемую в математическом моделировании двухфакторную производственную функцию.

Уравнение в общем виде:

$$Y = F(B, E), \quad (5.38)$$

где в качестве входных параметров рассмотрим B и E , а в качестве выходного параметра Y .

Согласно общей структуре:

$$Y(t) = A \cdot B(t)^\alpha \cdot E(t)^\beta, \quad (5.39)$$

где $B(t)$ – удельный расход топлива на выработку тепловой энергии котельной;
 $E(t)$ – расход электрической энергии на собственные нужды;
 $Y(t)$ – значение отпуска тепловой энергии;
 A – коэффициент, описывающий масштабную эффективность производственной системы предприятия;
 α и β – коэффициенты эластичности, показывающие, на сколько процентов изменится выпуск конечной продукции при увеличении соответствующего ресурса на один процент.

$$\alpha = \frac{Y}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial Y};$$

$$\beta = \frac{Y}{E} \cdot \frac{\partial E}{\partial Y}.$$

Методом наименьших квадратов на конкретных данных были определены параметры модели. Сопоставлены полученные коэффициенты эластичности и масштабный коэффициент производственной системы.

Уравнение приняло следующий вид (отопительный период):

$$Y = 2,75 \cdot B^{1,3} \cdot E^{-0,05}.$$

Таким образом, анализ качества модели выявил адекватность полученной модели, так как коэффициент детерминации (R^2) равен 0,98. Величина среднеквадратичной невязки ($\sigma = 4,3\%$) не превышает 5 %. Оценка по F статистике Фишера приемлема и равна 126. Критерии Дарбина–Уотсона соответствуют допустимым пределам: $DW = 1,47$ (см. табл. 5.1).

Таблица 5.1. Полученные коэффициенты модели за отопительный период

Параметры	A	α	β	R^2	σ	F	$ta1$	$ta2$	ta	DW
Полученные значения	2,75	1,3	-0,05	0,98	4,3	126	30,23	637,9	16,4	1,47

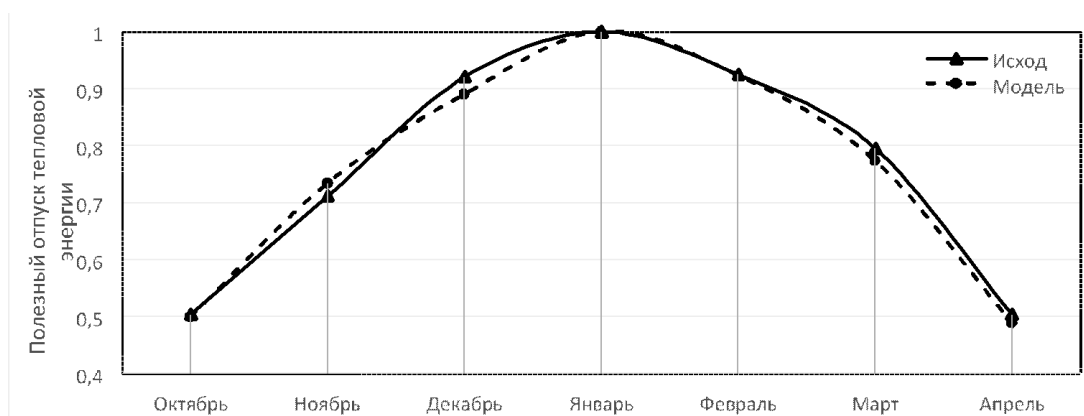


Рисунок 5.5. Действительный отпуск тепла в отопительный сезон по отношению к расчетному по модели $Y = 2,75 \cdot B^{1,3} \cdot E^{-0,05}$

Модель (Y) (см. рис. 5.5) может быть применена для анализа эффективности работы котельной, а также в качестве имитационной модели для получения прогнозных вариантов управленческих решений.

Из сказанного следуют выводы:

1. Коэффициент эластичности $\alpha = 1,3$ положителен. Это говорит о том, что использование топливного ресурса экономично. При повышении расхода топлива на 1 %, отпуск тепловой энергии повышается на 1,3 %.
2. Коэффициент эластичности $\beta = -0,05$ является показателем эффективности использования энергетического ресурса. При снижении расхода электроэнергии на собственные нужды на 1 % отпуск тепловой энергии повышается на 0,05 %.
3. Существует необходимость в модернизации технической части оборудования, потребляющего электрическую энергию. Возможный вариант для снижения расхода электроэнергии на собственные нужды котельной – например, применение частотно-регулируемого привода двигателей вспомогательного оборудования котельной.

5.5. Разработка математических моделей тепловых процессов на примере элементов парового котла теплоэлектростанции

Предлагаемый раздел подготовлен на основе материалов исследований профессора А. Л. Ляшенко. Теплоэнергетические установки характеризуются непрерывностью протекающих в них процессов. При этом выработка тепловой и электрической энергии в любой момент времени должна соответствовать потреблению (нагрузке). Соблюдение этого условия сопровождается непрерывным контролем большого количества различных технологических параметров и процессов, одним из которых является регулирование питания котельного агрегата.

Регулирование питания котельных агрегатов и корректировка давления в барабане котла главным образом сводится к поддержанию материального баланса между отводом пара и подачей воды. Параметром, характеризующим баланс, является уровень воды в барабане котла. Надежность работы котельного агрегата во многом определяется качеством регулирования уровня. При повышении давления, снижение уровня ниже допустимых пределов может привести к нарушению циркуляции в экранных трубах, в результате чего произойдет повышение температуры стенок обогреваемых труб и их пережог.

Повышение уровня также ведет к аварийным последствиям, так как возможен заброс воды в пароперегреватель, что вызовет выход его из строя. В связи с этим к точности поддержания заданного уровня предъявляются очень высокие требования. Качество регулирования питания также определяется равенством подачи питательной воды. Необходимо обеспечить равномерное питание котла водой, так как частые и глубокие изменения расхода питательной воды могут вызвать значительные температурные напряжения в металле экономайзера.

Рассмотрим методику построения математической модели регулирования питания котельных агрегатов путем настройки давления в барабане котла и поддержания технологических параметров на заданном уровне, что позволяет осуществлять прогнозирование возможных аварийных ситуаций в случае нарушения технологических процессов. В качестве объекта описания может быть принят паровой котел БКЗ-75-39 ГМА, установленный на теплоэлектростанции.

Для описания параметров паровой котельной установки теплоэлектростанции предлагается рассмотреть котельный агрегат как объект с распределенными параметрами. Для разработки математической модели объекта рассматривается функциональная схема данного котла с основным оборудованием и технологическими потоками жидкостей и газов.

Рассмотрение процессов, протекающих в экранных трубах, позволяет составить дифференциальные уравнения движения, описывающие течение одно- и двухфазной рабочей среды в трубах парогенератора. Определяющие уравнения будут записаны с соблюдением условия сохранения баланса массы, энергии и количества движения. Разработанная методика математического моделирования распространения тепла в экранных трубах котельного агрегата позволит составить математическую модель для рассматриваемого объекта.

Данная математическая модель будет достаточно сложной, и решить полученную систему дифференциальных уравнений в частных производных аналитически (выделить передаточную функцию) не представится возможным. Для численного анализа математической модели рассматриваемого объекта управления должны быть составлены дискретная модель уравнений и вычислительный алгоритм, что выходит за рамки предлагаемого изложения.

В процессе составления дискретных моделей могут быть решены задачи «стыковки» граничных условий, обеспечения устойчивости вычислительной схемы и выбраны шаги дискретизации по пространственным переменным.

Для компьютерного моделирования необходимо специально разработанное программное обеспечение. С его помощью могут быть рассчитаны значения температур в контрольных точках. Значения, полученные путем моделирования, должны совпадать с показаниями датчиков, которые могут быть установлены на реальном объекте.

Представленная математическая модель позволит разработать тренажерный комплекс для подготовки оперативного персонала теплоэлектростанции, позволяющий моделировать различные режимы работы котельных установок типа БКЗ.

Разрабатываемая в данном исследовании аналитическая математическая модель будет представлять систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Постановка задачи. Основным оборудованием, вырабатывающим тепловую энергию в промышленных и отопительных установках, является парогенераторы и водяные котлы. Промышленные предприятия потребляют огромное количество тепла на технологические нужды, вентиляцию, отопление и горячее водоснабжение. Тепловая энергия в виде пара и горячей воды

вырабатывается теплоэлектростанциями, промышленными районами отопительными котельными. Работа с высокими технологиями и огромная ответственность персонала теплоэлектростанций требуют, чтобы учитывались даже маловероятные риски возникновения аварии. Для этого проводится постоянный мониторинг состояния технологического оборудования. Диагностирование физического состояния паровой котельной установки позволяет выявить возможные нарушения функций безопасности, вызванные отказами оборудования и систем, оценить приоритетность восстановления этих функций и определить оптимальную последовательность действий оператора, направленных на обеспечение целостности барьеров безопасности и перевод котла в нормальный режим работы.

Для мониторинга параметров паровой котельной установки теплоэлектростанции предлагается рассмотреть котельный агрегат как объект с распределенными параметрами.

В качестве примера рассматривается паровой котел БКЗ-75-39 ГМА.

Описание технологического процесса. Продольный разрез парового котла БКЗ-75-39 ГМА, представлен на рисунке 5.6.

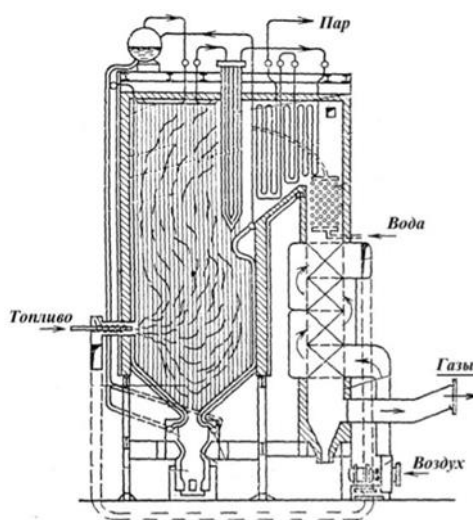


Рисунок 5.6. Продольный разрез типовой паровой котельной установки

Паровой котел БКЗ-75-39 ГМА предназначен для получения перегретого пара. Котел барабанный, с естественной циркуляцией, с камерным сжиганием топлива. В котле происходит нагрев воды, ее испарение и перегрев образовавшегося пара. В качестве топлива используется природный газ. Котел предназначен для работы в закрытых помещениях. Паропроизводительность котла 75 т/час, (при реконструкции предусматривается увеличение производительности до 90 т/час) абсолютное давление пара 3,9 МПа и температура 440 °С, температура питательной воды 145 °С.

Горение топлива происходит в вертикальной топочной камере, образованной экранными трубами. Верхние и нижние концы труб введены в сборные коллекторы. На фронтальной стенке топки на двух ярусах расположены по три газо-мазутных горелки типа ГМУ-10, с помощью которых сжигается

топливо. В обогреваемых газами трубах, образующих топку и конвективную шахту, образуется насыщенный водяной пар. Пароводяная смесь поступает в верхние коллекторы, а из них в барабан-паросборник и выносные сепараторы-циклоны. В барабанах и циклонах происходит отделение пара от воды. После барабанов и циклонов пар направляется в пароперегреватель, где он перегревается горячими дымовыми газами, а затем идет потребителю. Питание котла водой производится через экономайзер, в котором вода предварительно подогревается. Горячий воздух необходимый для горения, подается в топку через горелки из воздухоподогревателя, обогреваемого горячими дымовыми газами. Движение дымовых газов по трактам котла осуществляется за счет работы дымососа ДН-18. Подача воздуха производится высоконапорным вентилятором ВДН-20 ПУ. Воздух поступает с напора вентилятора на первую ступень воздухоподогревателя, а после первой ступени воздухоподогревателя направляется во вторую ступень воздухоподогревателя, где нагревается до 200 °С и подается к горелкам котла (в топочную камеру). Продукты сгорания с температурой 1180 °С поступают на пароперегреватель. Затем с температурой 520 °С, давлением 10 мм. в. ст. и 2 % содержанием кислорода направляются к экономайзеру, на входе которого температура 300 °С и давление 70 мм. в. ст. Продукты сгорания после воздухоподогревателя с температурой 130 °С направляются в дымосос. Природный газ (8400 нм³/ч) поступает к горелкам по газопроводу при температуре 4 °С и давлении 40 кПа. Природный газ по отдельному газопроводу при давлении 60 кПа поступает к запально-защитным устройствам.

На рисунке 5.7 изображена функциональная схема котла с основным оборудованием и технологическими потоками жидкостей и газов.

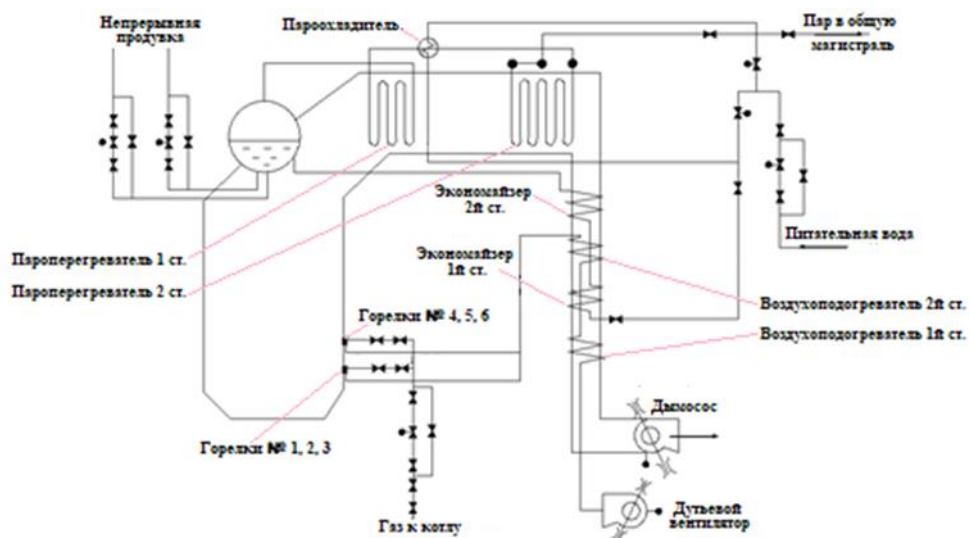


Рисунок 5.7. Функциональная схема котла

Формирование математических моделей рабочих процессов в элементах котла. Как известно, режим течения пароводяной смеси в экранных трубах парогенератора зависит от величины теплового потока,

теплофизических свойств жидкости и пара, расходов отдельных фаз, а также от материала, размеров и положения трубки в пространстве. В вертикальных трубках существуют 4 основных режима течения: пузырьковый, снарядный, кольцевой и эмульсионный. Вследствие постепенного испарения воды в экранных трубах прямоточного парогенератора возможны все режимы двухфазного течения. Рассмотрим следующие математические модели основных рабочих процессов в котле:

1. Уравнение теплообмена излучением.
2. Дифференциальные уравнения для однофазного потока.
3. Дифференциальные уравнения для двухфазного потока.
4. Дифференциальные уравнения теплообмена в стенках трубок.
5. Математическая модель сепаратора.

5.5.1. Уравнение теплообмена излучением

Значительная часть экранных труб парогенератора находится в пределах топki котла, где температура факела достигает 2000 °С. Согласно закону Стефана-Больцмана, описывающему теплообмен путем излучения, тепловой поток между факелом с температурой Θ_{ϕ} и стенкой топki с температурой $\Theta_{ст}$ определяется зависимостью:

$$Q_{1-2} = \varepsilon_{\phi} \varepsilon_{ст} C_0 F \left[\left(\frac{\Theta_{\phi}}{100} \right)^4 - \left(\frac{\Theta_{ст}}{100} \right)^4 \right],$$

где $\varepsilon_{\phi}, \varepsilon_{ст}$ – приведенные коэффициенты излучения факела и стенки топki соответственно;

$C_0 = 5.76 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – коэффициент излучения абсолютно черного тела.

Поскольку температура факела значительно выше температуры поверхности нагрева, можно принять, что тепловой поток не зависит от температуры трубок. После описания процесса теплообмена в экранных трубках, исходя из уравнений сохранения массы, энергии и количества движения, рассмотрим уравнения, описывающие течение одно- и двухфазной рабочей среды в экранных трубках парогенератора.

5.5.2. Дифференциальные уравнения для однофазного потока

Условия баланса массы, энергии и количества движения для однофазного течения в трубках парогенератора в результате преобразований можно приближенно записать в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial z} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t}; \\ \rho \frac{\partial h}{\partial t} + M \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{M}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= q_d^1; \\ \frac{\partial M}{\partial t} + 2 \frac{M}{\rho} \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{M^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho g \cos \beta + 10^3 \frac{\partial p}{\partial z} + f \frac{M^2}{\rho} &= 0, \end{aligned}$$

где $M(z, t) = \rho w$ – массовый расход (w – скорость движения жидкости);

$\rho(z, t) = \rho(p, h)$ – плотность жидкости;

$h(z, t)$ – энтальпия жидкости;

$p(z, t)$ – давление;

$q_d^1 = \pi d \alpha (\theta_{in} - \vartheta)$ – внутренний тепловой поток на единицу длины трубки (d – внутренний диаметр трубки; $\alpha(p, h, M, q)$ – коэффициент теплообмена; q – тепловой поток на единицу длины трубки; θ_{in} – температура внутренней поверхности стенки трубки; θ – температура рабочей среды; $\vartheta(p, h)$ – температура жидкости);

g – ускорение свободного падения;

β – угол между трубкой парогенератора и вертикалью;

f – коэффициент потери давления.

Система уравнений в частных производных гиперболического типа имеет характеристические значения w , $w + C_s$, $w - C_s$, определяющие скорости перемещений вдоль длины трубки, где C_s – скорость звука.

5.5.3. Дифференциальные уравнения для двухфазного потока парожидкостной смеси

Парожидкостный поток, перемещающийся в экранной трубке парогенератора, можно считать одномерным. В таком случае система дифференциальных уравнений, описывающих течение пароводяной смеси в экранных трубках парогенератора, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial z} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t}; \\ \rho \frac{\partial h}{\partial t} + M \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{M}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= q_d^1 - \left[M \left(\frac{w_2}{w} - 1 \right) (h - h') \right]; \\ \frac{\partial M}{\partial t} + 2 \frac{M}{\rho} \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{M^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho g \cos \beta + 10^3 \frac{\partial p}{\partial z} + f \frac{M^2}{\rho} &= 0; \\ \frac{w_2}{w} &= \frac{1}{\left[c + \frac{1-c}{S} \right]}; S = (M, p, h), \end{aligned}$$

где $\rho(z, t) = \rho(p, h)$ – плотность пароводяной смеси;

$h(z, t)$ – энтальпия пароводяной смеси;

w_2 – скорость движения пара;

w – скорость пароводяной смеси;

h' – энтальпия кипящей воды;

$c = (h - h') / h_{21}$ – массовая доля пара, ($h_{21} = h'' - h'$ – тепло испарения;

h'' – энтальпия сухого насыщенного пара);

$(1-c)$ – массовая доля воды;

$S = w_2 / w_1 = (1-c) \chi / (1-x) c$ – коэффициент скольжения;

$w_1 = (1-x) w / (1-c)$ – скорость движения воды;

$x = c w_2 / w$ – массовое расходное паросодержание.

5.5.4. Дифференциальные уравнения теплообмена в стенках трубок

Если параметры материала трубки λ , $\rho_{\text{тр}}$, $c_{\text{тр}}$ не зависят от температуры, уравнение теплопроводности принимает форму:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \nabla^2 \theta,$$

где $a = \frac{\lambda}{\rho_{\text{тр}} c_{\text{тр}}}$ – коэффициент выравнивания температур (коэффициент температуропроводности);

λ – коэффициент теплопроводности;

$\rho_{\text{тр}}$, $c_{\text{тр}}$ – плотность и удельная теплоемкость материала стенки трубки.

$\Delta = \nabla^2$ – оператор Лапласа.

В цилиндрической системе координат лапласиан $\nabla^2 \theta$ имеет вид:

$$\nabla^2 \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

при граничных условиях на внешней и внутренней поверхности трубки:

$$\pi D \lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=\frac{D}{2}} = q;$$

$$\pi d \lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=\frac{d}{2}} = \pi d \alpha [\theta_{\text{in}} - \vartheta] = q_{\text{in}},$$

где r – радиальная координата;

φ – угол по периметру трубки;

D , d – внешний и внутренний диаметры трубки парогенератора;

θ_{in} – температура внутренней поверхности стенки трубки.

В условиях эксплуатации парогенератора градиентом температуры вдоль оси можно пренебречь по сравнению с градиентом вдоль радиуса и периметра трубки.

5.5.5. Математическая модель сепаратора

Сепарация пара представляет собой отделение воды от *насыщенного пара*, вырабатываемого в парогенераторах. Сепарация пара предотвращает осаждение минеральных примесей, содержащихся в воде, на внутренних поверхностях труб пароперегревателей и на лопатках паровых турбин (примеси ухудшают условия охлаждения труб и снижают КПД паровых турбин).

В процессе сепарации поступающий в барабан парогенератора пар направляется на отбойные щитки, в циклоны и другие приспособления.

Различают **объемную** сепарацию пара, в результате которой происходят гашение динамического напора струй *пароводяной смеси*, отделение больших количеств воды, выравнивание пароводяных нагрузок, и **механическую** сепарацию пара – улавливание остатков влаги из пара, выходящего из барабана парогенератора.

При высоких давлениях для очистки пара от растворенных в нем веществ применяют также **промывку** пара конденсатом или питательной водой. При

высоком содержании солей в питательной воде используют метод *ступенчатого испарения*, предложенный советским ученым Э. И. Роммом в 1937 году.

Роль сепаратора в прямоточных парогенераторах заключается в отделении воды из пароводяной смеси, вытекающей из экранных труб парогенератора. Сепаратор является цилиндрическим баком. В верхней части сепаратора находятся штуцеры для тангенциального ввода пароводяной смеси со скоростью приблизительно 16 м/с. Отсепарированная вода вытекает из сепаратора через тангенциальные штуцеры, расположенные в нижней части, со скоростью приблизительно 2,5 м/с. Механизм разделения парожидкостных смесей представляет собой весьма сложный процесс, зависящий от ряда физических, конструктивных и эксплуатационных факторов.

Как объект математического описания и управления процессом, сепаратор представляет собой систему с четырьмя входными M_p^* , M_{sep}^* , h_{sep}^* , M_{kond}^* и двумя выходными параметрами P_{sep} , H_{sep} .

Входы:

- M_p^* – Массовый расход паровой фракции (Исходного материала /Вода+пар/).
- M_{sep}^* – Массовый расход (Поток) целевого сепарируемого компонента /пар/).
- h_{sep}^* – *Энтальпия потока целевого сепарируемого компонента /пар/;* (Энергетическое содержание пара на входе, влияющее на фазовое состояние и состав выхода. Этот параметр описывает энергетическое состояние поступающего вещества, которое влияет на процесс разделения).
- M_{kond}^* – Массовый расход конденсата. (Сепаратор может производить не только основной продукт, но и конденсат, например, воду из парогазовой смеси, и этот параметр отражает его количество).

Выходы:

- P_{sep} – **Давление сепаратора.** Давление в рабочем объеме сепаратора, которое является одной из ключевых управляемых переменных. (Это давление, под которым выходит целевой сепарированный продукт из сепаратора).
- H_{sep} – **Энтальпия паровой фракции на выходе.** (Энтальпия сепарированного продукта. Энергетическое содержание пара на выходе из сепаратора, которое связано с его составом и температурой).

Понимание физического смысла этих параметров позволяет создавать корректные математические модели, которые описывают поведение сепаратора, прогнозировать его работу и разрабатывать системы управления для оптимизации процесса разделения.

Запишем математическую модель сепаратора, как объекта с сосредоточенными параметрами, базируясь на уравнениях баланса массы и внутренней энергии рабочего вещества, а также баланса тепловой энергии в толстостенной оболочке. Уравнение баланса массы в сепараторе приобретает следующий вид:

$$M_{sep}^* - M_p^* - M_{kond}^* = \frac{d}{dt} [V' \rho + V'' \rho''],$$

где ρ' – плотность паровой фракции на входе в сепаратор;

ρ'' – плотность паровой фракции;

ρ – плотность воды;

$V'' = (V - V')$ – объем пара в сепараторе;

$V' = AH_{sep}$ – объем воды в сепараторе;

A – коэффициент пропорциональности.

На этой основе получаем следующее уравнение баланса массы в сепараторе:

$$M_{sep}^* - M_p^* - M_{kond}^* = A(\rho' - \rho'') \frac{dH_{sep}}{dt} + [AH_{sep} \frac{d\rho'}{dP} + (V - AH_{sep}) \frac{d\rho''}{dP}] \frac{dP_{sep}}{dt}.$$

Уравнение баланса внутренней энергии рабочего вещества в сепараторе можно записать следующим образом:

$$M_{sep}^* h_{sep}^* - M_p^* h^{\circ\circ} - M_{kond}^* h^{\circ} - L_{sep} q_d = [AH_{sep} \frac{d(\rho^{\circ} h^{\circ})}{dP} + (V - AH_{sep} \frac{d(\rho^{\circ\circ} h^{\circ\circ})}{dP}) \frac{dP_{sep}}{dt} + A[\rho^{\circ} h^{\circ} - \rho^{\circ\circ} h^{\circ\circ}] \frac{dH_{sep}}{dt},$$

где $q_d = \pi d \alpha (\vartheta - \Theta_w)$ – тепловой поток (отнесен к 1м длины сепаратора) обмена между рабочим веществом и оболочкой сепаратора;

α – коэффициент теплопередачи между рабочим веществом и оболочкой сепаратора (теплоотдачи);

ϑ – температура рабочего вещества в сепараторе;

Θ_w – температура внутренней поверхности оболочки сепаратора.

В парогенераторе, кроме экранных труб и сепаратора, находятся устройства со значительно менее сложными динамическими свойствами, а именно: смеситель, соединительные трубопроводы, фильтр, а также циркуляционный насос, для которых также составляются уравнения, описывающие протекающие в них процессы.

Данная математическая модель получилась достаточно сложной, и решить полученную систему дифференциальных уравнений в частных производных аналитически (выделить передаточную функцию) не представляется возможным.

Для численного анализа рассматриваемого математической модели (объекта управления) составляют дискретную модель уравнений и вычислительный алгоритм. В процессе составления дискретных моделей решают задачи «стыковки» граничных условий, обеспечения устойчивости вычислительной схемы и выбирают шаги дискретизации по пространственным переменным.

Для компьютерного моделирования разрабатывается специальное программное обеспечение. С его помощью рассчитываются значения температур в контрольных точках. Значения, полученные путем моделирования, сравниваются с показаниями датчиков, которые установлены на реальном объекте.

Данная модель может использоваться для разработки программных и тренажерных комплексов, позволяющих моделировать различные режимы работы котельных установок типа БКЗ, в том числе аварийные и нештатные ситуации, что, несомненно, позволит повысить уровень подготовки персонала.

5.6. Теоретические основы рабочих процессов преобразования энергии в тепловых двигателях

Электрические станции на органическом топливе всегда используют перегретый пар. В настоящее время температура пара перед турбиной обычно достигает 540...560 °С при давлении пара перед турбиной до 23,5 МПа.

Энергия сгораемого топлива идет на нагрев питательной воды и пара в паровом котле. Энергия пара парового котла (теплогенератора) преобразуется в механическую энергию вращения паровой турбины, расходуется на промежуточный перегрев пара, на регенерацию (регенеративный подогрев питательной воды), на теплофикацию самой электростанции и жилых массивов (сетевой подогрев) и др. Устройства, преобразующие внутреннюю энергию топлива собственно в механическую, называют тепловыми двигателями.

Термодинамическое состояние тепловых двигателей характеризуется важными термодинамическими функциями состояния – энтальпией и энтропией.

Следует напомнить, что энтальпия h – термодинамическая функция, характеризующая теплосодержание системы. Она определяется соотношением:

$$h = U + pV,$$

где U – внутренняя энергия системы;

p – давление пара;

V – объем пара.

Энтальпия отражает 1-й закон термодинамики – количество теплоты, подведенное к системе, идет на изменение ее внутренней энергии и на совершение системой работы. При постоянном давлении количество теплоты, поглощенной системой при переходе из одного состояния в другое, равно приращению энтальпии.

Энтропия s – термодинамическая функция, характеризующая изменение энергии в процессе перехода из одного равновесного состояния в другое. Энтропия отражает 2-й закон термодинамики, определяющий статистическую направленность изменения состояния системы – замкнутая система самопроизвольно переходит из менее вероятного в более вероятное состояние. В необратимых тепловых процессах, что характерно для любых тепловых двигателей, энтропия определяется соотношением:

$$s \geq Q/T,$$

где T – абсолютная температура системы;

Q – количество тепла, поглощенного системой.

Преобразование энергии на КЭС производится на основе термодинамического цикла Ренкина, в котором подвод тепла воде и водяному пару в котле и отвод тепла охлаждающей водой в конденсаторе турбины происходят при постоянном давлении, а работа пара в турбине и повышение давления воды в насосах – при постоянной энтропии.

В турбоустановках ТЭС преобразование теплоты в работу осуществляется по циклу Ренкина на перегретом пару, а на АЭС, как правило – на насыщенном пару.

Цикл Ренкина – идеальный термодинамический цикл (круговой процесс), в котором совершается превращение теплоты в работу (или работы в теплоту); принимается в качестве теоретической основы для приближенного расчета реальных циклов, осуществляемых в паросиловых установках. Назван по имени У. Дж. Ренкина, одного из создателей технической термодинамики.

Цикл Ренкина осуществляется следующим образом: в паровом котле происходит испарение рабочего тела (воды); в пароперегревателе – перегрев пара при постоянном давлении; в паровой турбине пар адиабатически расширяется, совершая работу; в конденсаторе – конденсируется при постоянном давлении; конденсат подается насосом в экономайзер, где он подогревается, а затем – в котел, где испаряется.

На рисунке 5.8 показан термодинамический цикл Ренкина; работа 1 кг пара, совершаемая в цикле Ренкина, на диаграмме состояния характеризуется площадью. Термический КПД цикла Ренкина равен отношению этой работы ко всему количеству теплоты, подведенному к 1 кг пара. КПД цикла Ренкина с насыщенным паром составляет 0,29...0,36, а с перегретым паром – 0,34...0,46. Цикл Ренкина отличается от цикла Карно тем, что подвод теплоты к воде и перегрев пара идут при постоянном давлении и возрастающей температуре.

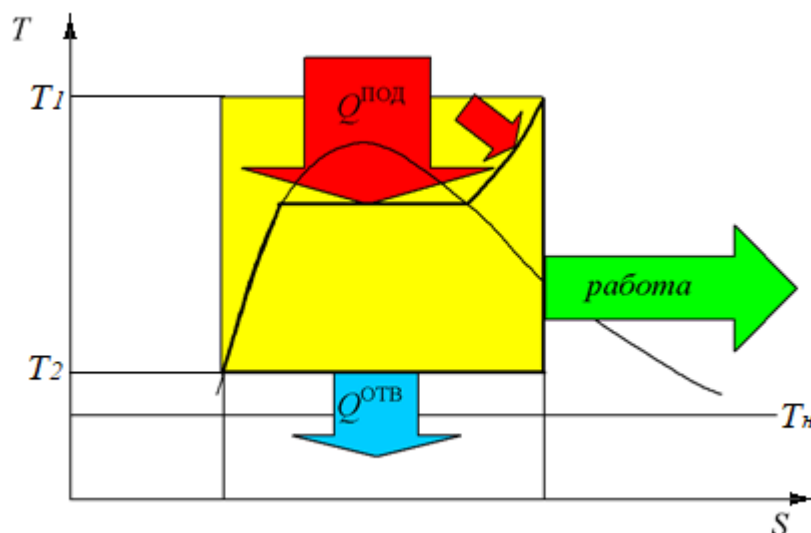


Рисунок 5.8. Термодинамический цикл Ренкина, T-S диаграмма

При идеальном протекании всех процессов, как показано на рисунке 5.8, энергетические показатели цикла на 1 кг перегретого пара определяются следующими соотношениями.

Работа, совершенная паром, равна теоретически располагаемому (адиабатному) теплоперепаду:

$$\omega_t = \Delta h_a = h_0 - h_k.$$

Теплота, отведенная в конденсаторе от отработавшего пара:

$$q_{отв} = h_k - h_1.$$

Работа сжатия воды в насосе:

$$\omega_{тн} = h_2 - h_1 = \zeta (p_0 - p_k),$$

где ζ – удельный объем воды.

Теплота, подведенная к рабочему телу (располагаемая теплота турбины):

$$q_0 = h_0 - h_2 = h_0 - [h_1 + \zeta (p_0 - p_k)].$$

Полезная теоретическая работа цикла:

$$\omega_{\text{тн}} = \omega_t - \omega_{\text{тн}}.$$

Теоретический КПД турбины и термический КПД цикла Ренкина:

$$\eta_t = \omega_t / q_0;$$

$$\eta_t = 1 - q_{\text{отв}} / q_0.$$

В реальных турбинах работа, совершаемая килограммом пара ω_i и называемая удельной внутренней работой, равна действительному теплоперепаду Δh_i , то есть

$$\omega_i = \Delta h_i \neq h_0 - h_k,$$

который меньше адиабатного из-за необратимости процесса расширения.

Действительный теплоперепад в турбине определяется либо из детального поступенчатого расчета турбины, либо из соотношения:

$$\Delta h_i = \eta_{0i} \Delta h_a = \eta_{0i} (h_0 - h_k),$$

где η_{0i} – внутренний относительный КПД турбины или ее отдельных цилиндров.

Если расчет турбины отсутствует, то η_{0i} обычно определяют по аналогам, эмпирическим формулам или графикам.

Энтальпия пара за турбиной определяется как:

$$h_k = h_0 - \Delta h_i = h_0 - \eta_{0i} \Delta h_a$$

и затем находится теплота, отведенная в конденсаторе:

$$q_{\text{отв}} = h_k - h_1 = h_0 - (\omega_i + h_1).$$

Из конденсатора вода откачивается насосом. В насосе происходит сжатие воды, и ее энтальпия возрастает на величину Δh_n , равную внутренней работе насоса:

$$\Delta h_n = \omega_{\text{ин}} = \zeta (p_n - p_k) / \eta_{\text{гид}},$$

где p_n – давление за насосом на 30...40 % большее, чем перед турбиной, из-за потерь давления в пароводяном тракте;

$\eta_{\text{гид}}$ – гидравлический КПД насоса, учитывающий внутренние потери от трения, вихреобразования и т. п.

Полная работа насоса ω_n больше внутренней из-за потерь в подшипниках, а также из-за протечек воды и составляет:

$$\omega_n = \omega_{\text{ин}} / \eta_m \eta_{\text{об}} = \zeta (p_n - p_k) / \eta_n,$$

где η_m , $\eta_{\text{об}}$ – механический КПД насоса, учитывающий потери в подшипниках, и объемный КПД, учитывающий потери из-за протечек через уплотнения;

$\eta_n = \eta_{\text{гид}} \eta_m \eta_{\text{об}}$ – полный КПД насоса.

Работа, затраченная на привод насоса (электроэнергия или энергия пара), частично возвращается в цикл в виде теплоты, а небольшую часть составляют потери в подшипниках и с протечками.

Количество подведенной к 1 кг рабочего тела теплоты равно разности энтальпий пара и воды, поступающей из насоса в котел:

$$q_0 = h_1 - h_2 = h_0 - (h_1 + \Delta h_n).$$

Внутренний абсолютный КПД турбины:

$$\eta_i = \omega_i / q_0 = \Delta h_i / q_0 = (h_a / q_0) \eta_{0i}.$$

Если турбина вращает генератор мощностью N , киловатт, а 1 кг пара вырабатывает ω , килоджоулей электроэнергии, то секундный расход пара на турбину составит:

$$D_0 = N / \omega.$$

Полное количество теплоты, подведенной к турбине за 1 с, измеренной в килоджоулях в секунду, или, что то же самое, в киловаттах:

$$Q_0 = q_0 D_0.$$

Отношение мощности турбогенератора к количеству подведенной за 1 с теплоты называется КПД турбоустановки по выработке электроэнергии:

$$\eta_i = \omega_i / D_0 = \Delta h_i / D_0 = (h_a / D_0) \eta_{0i}.$$

Отношение отпущенной мощности к подведенной к турбине теплоте есть КПД турбоустановки по отпуску электроэнергии, или КПД нетто турбоустановки:

$$\eta_{\text{нт.э}} = N_{\text{нт.э}} / Q_0.$$

Тепловую экономичность турбоустановок часто характеризуют величиной, обратной КПД по выработке электроэнергии и называемой удельным расходом теплоты на выработанную электроэнергию:

$$q_0 = 1 / \eta_0 \text{ или } q_0 = Q_0 / N_0.$$

Выше рассматривались простые турбоустановки, в которых расход пара через все ступени турбины сохраняется одинаковым (отборы отсутствуют) и промежуточный перегрев пара не производится.

КПД реального термодинамического цикла Ренкина составляет 0,5...0,55; внутренний относительный КПД турбины – 0,8...0,9; механический КПД турбины – 0,98...0,99; КПД электрического генератора – 0,98...0,99; КПД трубопроводов пара и воды – 0,97...0,99; КПД котлоагрегата – 0,9...0,94. Общий КПД современной КЭС – 35...42 %.

Увеличение КПД КЭС достигается главным образом повышением начальных параметров (начальных давления и температуры) водяного пара, совершенствованием термодинамического цикла, а именно – применением промежуточного перегрева пара и регенеративного подогрева конденсата и питательной воды паром из отборов турбины.

На КЭС по технико-экономическим основаниям применяют начальное давление пара докритическое 13...14 МПа, или сверхкритическое 23...25 МПа, начальную температуру свежего пара и после промежуточного перегрева – 540...570 °С.

В России и за рубежом созданы опытно-промышленные установки с начальными параметрами пара 30...35 МПа при 600...650 °С. Промежуточный перегрев пара применяют обычно одноступенчатый, на некоторых зарубежных КЭС сверхкритического давления – двухступенчатый. Число регенеративных отборов пара – 7...9, конечная температура подогрева питательной воды – 260...300 °С. Конечное давление отработавшего пара в конденсаторе – 0,003...0,005 МПа.

Часть вырабатываемой электроэнергии потребляется вспомогательным оборудованием КЭС (насосами, вентиляторами, угольными мельницами и т. д.). Расход электроэнергии на собственные нужды пылеугольной КЭС составляет до

7 %, газомазутной – до 5 %. Значительная часть (около половины энергии на собственные нужды) расходуется на привод питательных насосов. На крупных КЭС применяют паротурбинный привод; при этом расход электроэнергии на собственные нужды снижается.

Различают КПД КЭС брутто (без учета расхода на собственные нужды) и КПД КЭС нетто (с учетом расходов на собственные нужды). Энергетическими показателями, равноценными КПД, служат также удельные (на единицу электроэнергии) расходы тепла и условного топлива с теплотой сгорания 29,3 МДж/кг (7000 кКал/кг), равные для КЭС 8,8...10,2 МДж/кВт · ч (2100...2450 кКал/кВт · ч) и 300...350 г/кВт · ч.

Повышение КПД, экономия топлива и уменьшение топливной составляющей эксплуатационных расходов обычно сопровождаются удорожанием оборудования и увеличением капиталовложений.

Выбор оборудования КЭС, параметров пара и воды, температуры уходящих газов котлоагрегатов и т. д. производится на основе технико-экономических расчетов, учитывающих одновременно капиталовложения и эксплуатационные расходы (расчетные затраты).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Самым важным и наиболее распространенным предназначением математических моделей является их применение в целях исследования и *прогнозирования* поведения сложных процессов и явлений, в том числе интересующих нас здесь, в теплоэнергетической сфере. Дело в том, что ряд подобных объектов вообще не может быть изучен непосредственным образом, например, в силу быстротечности их процессов, дороговизны или опасности натурального исследования.

По этим причинам проведению крупных или сложных экспериментов всегда должно предшествовать создание и исследование различных моделей, вначале идеальных, а затем и материальных, при необходимости. Тем более что в последнее время появилась мощная электронно-вычислительная техника, позволяющая проводить так называемые машинные эксперименты, не столь дорогостоящие и в то же время довольно обстоятельные, которые способны учитывать колоссальное число объективно действующих факторов.

Второе, не менее важное назначение математического моделирования и математических моделей состоит в том, что с их помощью выявляются наиболее существенные факторы, формирующие те или иные свойства объекта-оригинала. Заметим, что не все его факторы и свойства, а лишь те, которые интересуют разработчика и пользователя математической модели.

Наконец, математическая модель позволяет научиться управлять самим объектом, апробируя различные варианты воздействия на него. Использовать в этих целях оригинал часто бывает экономически не выгодно или рискованно, особенно в такой области техники, как теплоэнергетика (особенно ядерная).

Более того, поскольку свойства реальных сложных объектов непрерывно меняются с течением времени, то особое значение приобретает задача прогнозирования их состояния под воздействием этого и других факторов. Например, при проектировании, изготовлении и эксплуатации любого сложного технического устройства желательно уметь прогнозировать изменения надежности и безопасности его функционирования, а также определять наиболее эффективные меры по поддержанию таких свойств.

Таким образом, мы ознакомились с наиболее существенными признаками и свойствами математических моделей и с их конкретными примерами. В частности, установили, что моделирование, модели вообще, и математические модели в частности, нужны для того, чтобы а) понять, как устроен конкретный объект-оригинал; каковы его структура, основные свойства, закономерности функционирования и развития; б) научиться управлять объектом и процессом его функционирования, определять наилучшие управляющие воздействия при заданных целях и критериях; в) прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации конкретных способов и форм воздействия на моделируемый объект.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аверченков, В. И. Основы математического моделирования технических систем: учебное пособие / В. И. Аверченков, В. П. Федоров, М. Л. Хейфец. – 4-е изд., стер. – Москва: ФЛИНТА, 2021. – 271 с.
2. Бараков, А. В. Моделирование и алгоритмизация задач теплоэнергетики: учеб. пособие / А. В. Бараков, А. А. Надеев, В. И. Ряжских. – Воронеж: ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2015. – 199 с.
3. Бойко, Е. А. Котельные установки и парогенераторы: учеб. пособие. – Красноярск: ФАО РФ ГОУВПО КГТУ, 2005. – 292 с.
4. Бреус, В. И. Анализ температурного режима топочных экранов котлов ТГМЕ-464 / В. И. Бреус, И. И. Беляков // Электрические станции. – 1986. – № 8.
5. Введение в математическое моделирование: учеб. пособие / под ред. П. В. Трусова. – Москва: Университетская книга, Логос, 2007. – 440 с.
6. Галдин, В. Д. Паровые и водогрейные котлы: учеб. пособие / В. Д. Галдин. – Омск: СибАДИ, 2011. – 47 с.
7. Зарубин, В. С. Математическое моделирование в технике: учебник для втузов / В. С. Зарубин – 3-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. – 495 с.
8. Звонарев, С. В. Основы математического моделирования: учебное пособие / С. В. Звонарев. – Екатеринбург: Изд-во Урал. Ун-та, 2019. – 112 с.
9. Использование сигнала по тепловосприятию топочных экранов для оценки теплонапряженности поверхностей нагрева барабанного котла / А. Н. Лесничук, В. А. Лошкарев, Г. П. Плетнев и др. // Вестник МЭИ. – 1999. – № 3. – С. 56–60.
10. Кутепов, А. М. Гидродинамика и теплообмен при парообразовании / А. М. Кутепов, Л. С. Стерман, Н. Г. Стюшин. – М.: Высшая школа, 1977. – 352 с.
11. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов / Л. Г. Лойцянский. – 7-е изд. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
12. Ляшенко, А. Л. Разработка программного обеспечения для моделирования тепловых полей в объектах с распределенными параметрами / А. Л. Ляшенко // Анализ и прогнозирование систем управления: труды XII Международной научно-практической конференции молодых ученых, студентов и аспирантов. II часть. – СПб.: СЗТУ, 2011. – С. 55-63.
13. Ляшенко, А. Л. Синтез распределенной системы управления тепловыми полями в парогенераторных установках / А. Л. Ляшенко // Системный синтез и прикладная синергетика: сб. трудов 7-й Всероссийской научной конференции (ССПС-2015). – Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2015. – С.131–138.
14. Магидей, П. Л. Изменение условий локального и суммарного теплообмена в топке при рециркуляции газов под факел / П. Л. Магидей, Е. Г. Воротников // Энергомашиностроение. – 1972. – № 3.

15. Першин, И. М. Синтез систем с распределенными параметрами / И. М. Першин. – Пятигорск, 2002. – 212 с.
16. Пономарев, В. Б. Математическое моделирование технологических процессов: курс лекций / В. Б. Пономарев, А. Б. Лошкарев. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006. – 129 с.
17. Рабочая документация "Автоматизированная система управления котлом БКЗ-75-39 ГМА ТЭЦ-3 котел № 3 АО «Светогорск»". Руководство оператора. – СПб., 2014.
18. Рапопорт, Э. Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами / Э. Я. Рапопорт. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.
19. Решение задачи механической очистки пищевых сред / Б. А. Вороненко, В. В. Пеленко, С. В. Поляков, В. Н. Марков // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств. – 2008. – № 2. – С. 7–14.
20. Решение задачи моделирования поведения температурного поля в распределенных объектах управления / А. Л. Ляшенко, Ю. В. Ильюшин, И. А. Кучеренко, И. М. Новожилов // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2014. – № 7. – С. 48-51.
21. Самарский, А. А. Математическое моделирование / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М.: Наука.Физматлит, 1997. – 320 с.
22. Соколов В. В. Тепловые нагрузки в топке котла энергоблока 800 МВт при сжигании природного газа / В. В. Соколов, Л. А. Литвинова // Теплоэнергетика. – 1998. – № 5. – С. 55–58.
23. Станиславски В. Динамические модели прямоточных парогенераторов как объектов управления иерархической структуры / В. Станиславский, Д. Х. Имаев // Теоретические и практические проблемы развития электроэнергетики России: тр. Междунар. науч.-практич. конф. (27-28 июня 2002). – СПб.: СПбГТУ, 2002. – С. 203-203.
24. Тепловой расчет рекуперативного теплообменного аппарата / В. В. Бухмиров, Д. В. Ракутина, Ю. С. Солнышкова, М. В. Пророкова; ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В. И. Ленина». – Иваново, 2014. – 124 с.
25. Тепловые и атомные электрические станции / под общ. ред. В. А. Григорьева, В. М. Зорина. – 3-е изд., перераб. – М.: МЭИ, 2003.
26. Холщев, В. В. Тепловые нагрузки и температурный режим экранных труб барабанного котла газоплотного исполнения, работающего на мазуте / В. В. Холщев // Теплоэнергетика. – 1986. – № 10.
27. Цветков Ф.Ф. Тепломассообмен / Ф. Ф. Цветков, Б. А. Григорьев. – М.: Изд-во МЭИ, 2005. – 550 с.
28. Щеткин, В. С. Исследование работоспособности труб фронтального экрана котла БКЗ-420-140 НГМ Бобруйской ТЭЦ-2 / В. С. Щеткин // Теплоэнергетика. – 1985. – № 1.

Учебное издание

**Пеленко Валерий Викторович
Рыков Сергей Владимирович
Нечитайлов Василий Васильевич
Ширяев Александр Дмитриевич**

Математическое моделирование рабочих процессов в теплоэнергетических установках

Учебное пособие

Редактор и корректор А. А. Чернышева
Техн. редактор М. Д. Баранова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 19.02.2026 г. Рег. № 5229/25

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.