

С.С. ШАБАШКИН

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ К КУРСУ ЛЕКЦИЙ
ДЛЯ БАКАЛАВРОВ



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ»

С.С. ШАБАШКИН

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ К КУРСУ ЛЕКЦИЙ
ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2014

УДК 336.01
ББК 65.5я7
Ш951

Шабашкин С.С. Финансовая математика: рабочая тетрадь к курсу лекций для бакалавров. – СПб.: СПбГТУРП, 2014. – 122 с.

Рабочая тетрадь включает в себя рабочую программу курса «Финансовая математика», а также контрольные задания и методические указания, которые подготовлены с целью оказания методической помощи бакалаврам при изучении курса финансовой математики, имеющего важное значение для квалифицированной подготовки.

Предназначена для бакалавров всех форм обучения по направлению 38.03.02 «Менеджмент».

Рецензенты: - доктор экон. наук, проф. кафедры «Исследование операций в экономике» им. проф. Ю.А. Львова СПбГЭУ Л.А. Еникеева;
- канд. экон. наук, доцент зав кафедрой Экономика и организация производства» им. З.В. Участкиной СПбГТУРП Е.М. Фрейдкина.

Подготовлена и рекомендована кафедрой финансов и учёта Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол №7 от 26.05.2014 г.)

Утверждена к изданию методической комиссией факультета экономики и менеджмента СПбГТУРП (протокол №10 от 29.05.2014 г.)

Рекомендована к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве рабочей тетради к курсу лекций.

© Санкт-Петербургский государственный
технологический университет растительных
полимеров, 2014

© Шабашкин С.С., 2014

Введение

Рабочая тетрадь разработана в соответствии с типовой программой курса «Финансовая математика» и требованиями действующего Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по статистической подготовке специалистов экономических специальностей. Цель рабочей тетради – помочь студентам в усвоении теоретических положений курса, а также выработать практические навыки решения задач в области финансово-экономических процессов и явлений.

Рабочая тетрадь содержит рабочую программу курса «Финансовая математика», краткое содержание данного курса, список основной и рекомендуемой литературы.

В рабочей тетради излагаются семь тем:

1. Основы финансовых вычислений.
2. Простые проценты.
3. Сложные проценты.
4. Производные финансовые расчёты.
5. Потоки платежей и финансовые ренты.
6. Кредитные расчёты.
7. Доходность финансовых инструментов и инвестиций.

В процессе создания данной рабочей тетради использовались работы по финансовой математике Е.М. Четыркина, Ю.П. Лукашина, В.И. Малыхина, Б.Т. Кузнецова, данные Росстата и других источников.

Рабочая тетрадь предназначена студентам экономических специальностей для более глубокого изучения лекционного и практического материала.

Руководство к пользованию рабочей тетрадью

Страницы теоретической части рабочей тетради разделены на две половины: в левой части приведено содержание презентаций курса, правая часть тетради предназначена для записи пользователя в произвольной форме.

На страницах контрольных вопросов и практических задач больше свободного места отдано для записи пользователя, чтобы пользователь имел возможность непосредственно в рабочей тетради решать задачи и отвечать на контрольные вопросы.

В приложении в приведены вспомогательные таблицы для расчёта порядковых номеров дней в году, а также множителей наращения и дисконтирования. Также в приложении приведён перечень англоязычных финансовых терминов с их русским переводом.

В конце рабочей тетради приведён перечень рекомендуемой литературы.

Рабочая программа курса «Финансовая математика»

Тема 1. Основы финансовых вычислений

- Фактор времени в финансовых расчётах
- Проценты и процентная ставка
- Контрольные вопросы

Тема 2. Простые проценты

- Формула наращения по простым процентам
- Варианты расчёта процентов по временной базе и числу дней ссуды
- Расчёт процентов с использованием процентных чисел
- Переменные ставки. Реинвестирование
- Дисконтирование по схеме простых процентов
- Математическое дисконтирование по простым процентам
- Банковский учёт по простой учётной ставке
- Наращение по простой учётной ставке
- Сравнительный анализ финансовых последствий математического дисконтирования и банковского учёта
- Совмещение начисления процентов по процентной ставке и дисконтирования по учётной ставке
- Сравнение ставки наращения и учётной ставки
- Эквивалентность простых процентных ставок
- Определение срока ссуды, уровня процентной ставки и их средних значений
- Контрольные вопросы

Тема 3. Сложные проценты

- Формула сложных процентов
- Сравнение наращения по сложным и простым процентам
- Начисление сложных процентов при дробном числе лет
- Начисление процентов в смежных календарных периодах
- Номинальная и эффективная ставки процентов
- Математическое дисконтирование по сложной ставке
- Дисконтирование по сложной учётной ставке
- Наращение по сложной учётной ставке
- Переменная ставка процентов
- Непрерывное начисление процентов
- Определение срока ссуды, уровня сложных ставок и средних значений ставок
- Эквивалентность сложных процентных ставок
- Контрольные вопросы

Тема 4. Производные процентные расчёты

- Изменение финансовых условий
- Сущность инфляции и необходимость её учёта в финансовых расчётах
- Учёт инфляции при использовании простых процентов
- Учёт инфляции при использовании сложных процентов
- Оценка доходности валютных операций
- Конверсия валют и наращение процентов
- Оценка доходности купли-продажи краткосрочных финансовых инструментов
- Налог на полученные проценты
- Контрольные вопросы

Тема 5. Потоки платежей и финансовые ренты

- Потоки платежей и их классификация
- Наращенная величина аннуитета
- Современная (текущая) величина аннуитета
- Рента пренумерандо
- Ренты с выплатами в течение периода. Отложенные ренты
- Определение параметров аннуитета
- Бессрочный аннуитет
- Дискретный поток платежей с непрерывным начислением процентов
- Постоянная непрерывная рента
- Срочные ренты с периодом платежей более года
- Ренты с постоянным абсолютным изменением платежей
- Ренты с постоянным относительным приростом платежей
- Переменный непрерывный поток платежей
- Конверсия рент. Объединение рент
- Изменение параметров рент
- Контрольные вопросы

Тема 6. Кредитные расчёты

- Количественный анализ задолженности (займа)
- Погашение основной суммы долга единовременным платежом с постоянной выплатой процентов
- Погашение основной суммы долга и процентов по нему единовременным платежом в конце срока ссуды
- Погашение долга равными срочными уплатами (дифференцированные платежи)
- Погашение долга равными срочными уплатами (аннуитетные платежи)
- Погашение долга равномерно растущими уплатами
- Потребительский кредит
- Лизинг
- Ипотечные ссуды

- Льготные кредиты и займы
- Реструктурирование займа
- Контрольные вопросы

Тема 7. Доходность финансовых инструментов и инвестиций

- Доходность купли-продажи краткосрочных финансовых инструментов
- Доходность долгосрочных ссуд
- Доходность облигаций
- Доходность акций
- Характеристика эффективности инвестиций
- Чистый приведенный доход
- Внутренняя норма доходности
- Дисконтированный срок окупаемости
- Индекс доходности
- Контрольные вопросы

1. ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1.1. Фактор времени в финансовых расчётах

1.2. Проценты и процентная ставка

1.1. Фактор времени в финансовых расчётах

- В практических финансовых операциях суммы денег вне зависимости от их назначения или происхождения, так или иначе, но обязательно связываются с конкретными моментами или периодами времени.
- Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность выплат. Фактор времени, особенно в долгосрочных операциях, играет не меньшую, а иногда даже большую роль, чем размеры денежных сумм.

- Необходимость учёта временного фактора вытекает из сущности финансирования и кредитования и выражается в **принципе неравноценности денег**, относящихся к разным моментам времени (или **стоимость денег во времени – time value of money**).



Рис. 1.1. Принцип временной стоимости денег

- Временная стоимость денег обуславливается наличием трёх причин:
 - 1) обесценением денежной наличности с течением времени в силу фактора инфляции;
 - 2) обращением капитала (денежных средств) с вложением его для получения будущего дохода в инвестиционные, биржевые проекты или на сберегательные счета – в этом случае инвестируемые сегодня деньги оцениваются с суммой, которую они должны принести в будущем после погашения;
 - 3) неопределённостью будущего состояния дел на рынке и в связи с этим риск повышает ценность имеющихся денег.

- Существуют два подхода и соответствующие им два типа экономического мышления:
 - 1) **статический подход** не учитывает фактор времени, по нему возможно сравнивать или суммировать денежные величины, относящиеся к разным периодам времени;
 - 2) **динамический подход** используется в финансовом анализе и финансовом менеджменте, где фактор времени играет решающую роль и его необходимо обязательно учитывать при сравнении или суммировании денежных величин, относящихся к разным моментам времени.
- Эти два подхода соответствуют «бухгалтерскому» и «экономическому» принципам анализа затрат.

1.2. Проценты и процентная ставка

- Под **процентными деньгами** или **процентами** (*interest*) в финансовых расчётах понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме: выдача ссуды, продажа в кредит, сдача в аренду, депозитный счёт, учёт векселя, покупка облигаций и др.
- Таким образом, проценты можно рассматривать как абсолютную «цену долга», которую уплачивают за пользование денежными средствами.
- Абсолютные показатели чаще всего не подходят для сравнения и оценки ввиду их несопоставимости в пространстве и во времени. Поэтому в финансово-коммерческих расчетах широко пользуются относительными показателями.

- Под **процентной ставкой** понимается относительный показатель, характеризующий интенсивность начисления процентов за единицу времени. Методика расчёта определяется отношением суммы *процентных денег*, выплачивающихся за определённый период времени, к величине ссуды.
- Этот показатель выражается либо в долях единицы, либо в процентах. Таким образом, процентная ставка показывает, сколько денежных единиц должен заплатить заёмщик за пользование в течение определённого периода времени 100 единицами первоначальной суммы долга.

- Начисление процентов, как правило, производится дискретно, т.е. за фиксированные одинаковые интервалы времени, которые носят название «период начисления», – это отрезок времени между двумя следующими друг за другом процедурами взимания процентов.
- **Обычные** или **декурсивные** (*postnumerando*) **проценты** начисляются в конце периода. В качестве единицы периода времени в финансовых расчетах принят год, однако это не исключает использования периода сроком менее года.
- Период времени от начала финансовой операции до её окончания называется **сроком** финансовой операции.

Табл. 1.1. Виды процентных ставок

Относительно момента выплаты или начисления дохода	
Обычная (декурсивная) - начисляется в конце периода относительно исходной величины средств;	Авансовая (антисипативная) начисляется в начале периода относительно конечной суммы денег.
В зависимости от условий проведения финансовых операций	
Простая процентная ставка применяется к одной и той же первоначальной сумме долга на протяжении всего срока ссуды;	Сложная процентная ставка применяется к наращенной сумме долга, т.е. к сумме, увеличенной на величину начисленных за предыдущий период процентов.

Окончание табл. 1.1.

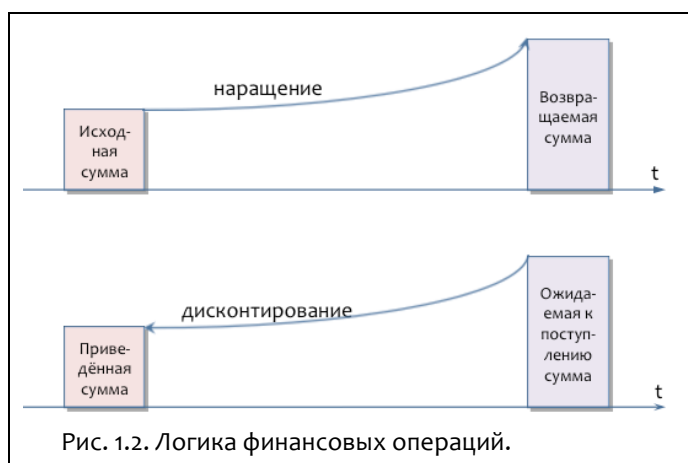
По фиксации процентной ставки	
Фиксированная процентная ставка – ставка, зафиксированная в виде определенного числа в финансовых контрактах;	Плавающая процентная ставка – ставка, привязанная к определённой величине, изменяющейся во времени.
По величине процентной ставки	
Постоянная процентная ставка – ставка, неизменная на протяжении всего периода ссуды;	Переменная процентная ставка – ставка, дискретно изменяющаяся во времени, но имеющая конкретную числовую характеристику.

- Существует два принципа расчёта процентов – наращение на сумму долга и скидка с конечной суммы задолженности. Соответственно им применяют *ставку наращивания (interest base rate)* и *учётную ставку (discount base rate)*. Оба вида ставок применяются для решения сходных задач.
- Однако для *ставки наращивания* прямой задачей является определение *наращенной суммы*, обратной задачей - *дисконтирование*. Для *учётной ставки* наоборот, прямая задача заключается в *дисконтировании*, а обратная - в *наращении*.

- Для рассмотрения формул, используемых в дальнейших расчётах, необходимо ввести ряд условных обозначений:
 - ✓ I – проценты за весь срок ссуды (*interest*);
 - ✓ PV – первоначальная сумма долга или современная (текущая) стоимость (*present value*);
 - ✓ r – ставка процентов за период (*interest rate*);
 - ✓ d – учётная ставка (*discount rate*);
 - ✓ FV – наращенная сумма или будущая стоимость (*future value*), т.е. первоначальная сумма долга с начисленными на неё процентами к концу срока ссуды;
 - ✓ n – срок ссуды в годах.

- После начисления *процентов* возможно два пути:
 - 1) либо их сразу выплачивать, по мере их начисления,
 - 2) либо отдать потом, вместе с основной суммой долга.
- Увеличение суммы долга в связи с присоединением к ней процентных денег называется **наращением**, а увеличенная сумма – **наращенной суммой**. Отсюда можно выделить еще один относительный показатель, который называется **коэффициент наращения** или **множитель наращения**, – это отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга. Коэффициент наращения показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы долга, т.е. по существу является базисным темпом роста.

- Процесс, в котором заданы ожидаемая в будущем к получению (или возвращаемая) сумма и **коэффициент дисконтирования**, называется **дисконтированием**. Экономический смысл дисконтирования заключается во временном упорядочении денежных потоков различных временных периодов. При этом случае искомая величина PV показывает текущую стоимость будущей величины FV .
- При **наращении** движение денежного потока идёт от настоящего к будущему, при **дисконтировании** – от будущего к настоящему.
- Логика финансовых операций представлена на рис. 2.



Контрольные вопросы к теме 1

- 1) В чем выражается принцип неравноценности денег (стоимости денег во времени) и его учет в финансовых расчетах
- 2) Причины учета временной стоимости денег
- 3) Сложившиеся подходы по отношению к учету принципа неравноценности денег
- 4) Проценты и процентные ставки; виды процентных ставок

Тесты к теме 1

- Подход, не учитывающий фактор времени:
 - 1) статистический
 - 2) статический
 - 3) динамический
 - 4) индексный
- Подход, в котором фактор времени играет решающую роль:
 - 1) статистический
 - 2) статический
 - 3) динамический
 - 4) индексный

- Принцип неравноценности денег заключается в том, что:
 - 1) деньги обесцениваются со временем;
 - 2) деньги приносят доход;
 - 3) равные по абсолютной величине денежные суммы, но относящиеся к различным моментам времени, оцениваются по-разному;
 - 4) сегодняшние деньги ценнее будущих денег.
- Проценты, начисляемые в начале периода:
 - 1) простые
 - 2) сложные
 - 3) декурсивные
 - 4) антисипативные

- Проценты, начисляемые на первоначальную сумму долга:
 - 1) простые
 - 2) сложные
 - 3) декурсивные
 - 4) антисипативные
- Проценты, начисляемые в конце периода:
 - 1) простые
 - 2) сложные
 - 3) декурсивные
 - 4) антисипативные

- Проценты, начисляемые на наращенную сумму долга:
 - 1) простые
 - 2) сложные
 - 3) постоянные
 - 4) переменные
- Проценты, дискретно изменяющиеся во времени:
 - 1) простые
 - 2) сложные
 - 3) постоянные
 - 4) переменные

- Процесс определения будущей стоимости называется:
 - 1) умножением
 - 2) дисконтированием
 - 3) индексированием
 - 4) наращением
- Процесс определения текущей стоимости называется:
 - 1) умножением
 - 2) дисконтированием
 - 3) индексированием
 - 4) наращением

2. ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

- 2.1. Формула наращения по простым процентам
- 2.2. Варианты расчёта процентов по временной базе и числу дней ссуды
- 2.3. Расчёт процентов с использованием процентных чисел
- 2.4. Переменные ставки. Реинвестирование
- 2.5. Дисконтирование по схеме простых процентов
- 2.6. Математическое дисконтирование по простым процентам

- 2.7. Банковский учёт по простой учётной ставке
- 2.8. Наращение по простой учётной ставке
- 2.9. Сравнительный анализ финансовых последствий математического дисконтирования и банковского учёта
- 2.10. Совмещение начисления процентов по процентной ставке и дисконтирования по учётной ставке
- 2.11. Сравнение ставки наращения и учётной ставки
- 2.12. Эквивалентность простых процентных ставок
- 2.13. Определение срока ссуды, уровня процентной ставки и их средних значений

2.1. Формула наращения по простым процентам

- **Схема простых процентов** предполагает неизменность базы, с которой происходит начисление. Если исходный инвестируемый капитал равен PV , а требуемая доходность в долях единицы составляет r , то считается, что инвестиция сделана на условиях простого процента, если инвестированный капитал ежегодно увеличивается на величину $PV \cdot r$,
- Таким образом, через n лет размер инвестированного капитала будет равен:
$$FV = PV + PV \cdot r + \dots + PV \cdot r = PV + PV \cdot nr = PV \cdot (1 + nr)$$

- Из приведённой формулы видно, что проценты начисляются на одну и ту же величину капитала в течение всего срока. Это выражение называется формулой наращенной простыми процентами, а множитель $(1 + n \cdot r)$ – **множителем наращенной** или **коэффициентом наращенной простыми процентами**.
- Формула наращенной показывает, что приращение капитала, составляющее величину $PV \cdot n \cdot r$, прямо пропорционально сроку ссуды (n) и ставке процента (r) и растёт линейно вместе с ростом срока ссуды. Величину $PV \cdot n \cdot r$ обычно называют **процентным платежом**.

- Необходимо обратить внимание на размерность величин, определяющих размер процентного платежа. Размерности срока и процентной ставки всегда должны быть согласованы.
- Исходя из сказанного, наращенная по простым процентам в случае, если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет (например, меньше года), определяется по нижеуказанным формулам.
- При использовании схемы простых процентов частота начисления не оказывает никакого влияния на суммарную величину процентных денег.

Наращенная сумма по формуле простых процентов

$$FV = PV(1 + r \cdot n)$$

Наращенная сумма по формуле простых процентов при сроке, выраженном в месяцах (M)

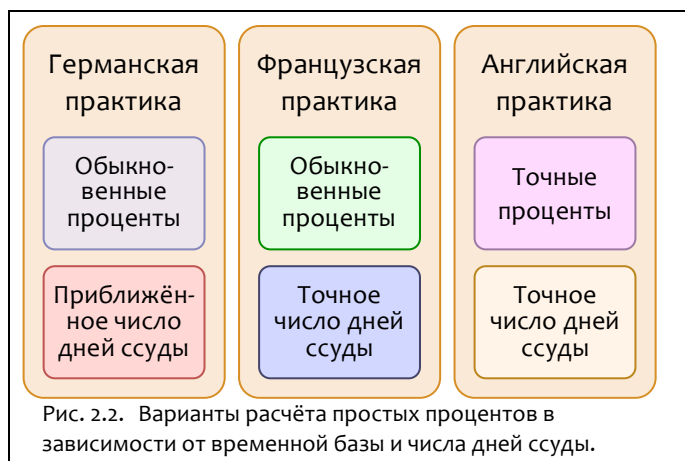
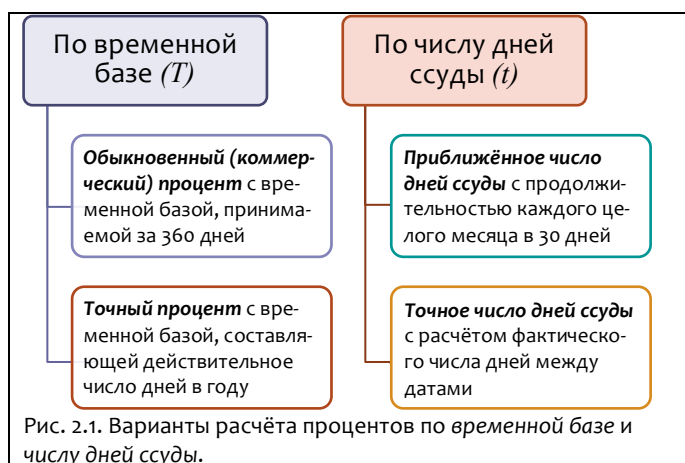
$$FV = PV \left(1 + r \cdot \frac{M}{12} \right)$$

Наращенная сумма по формуле простых процентов при сроке, выраженном в днях (t)

$$FV = PV \left(1 + r \cdot \frac{t}{T} \right)$$

2.2. Варианты расчёта процентов по временной базе и числу дней ссуды

- При определении продолжительности финансовой операции день выдачи и день погашения ссуды принято считать одним днём.
- В зависимости от того, чему принимается равной продолжительность периода сделки (год, квартал, месяц), размер промежуточной процентной ставки может быть различным.
- Возможны следующие варианты расчёта:



2.3. Расчёт процентов с использованием процентных чисел

- В случае, если сумма счета постоянно меняется, общая начисленная за весь период сумма процентов равна сумме процентов за каждый из постоянных отрезков времени.
- В таких случаях для расчета процентов используется методика расчета с вычислением *процентных чисел*: каждый раз, когда сумма на счете изменяется, производится расчет «**процентного числа**» за период, в течение которого сумма на счете была неизменной.

- Процентное число вычисляется по формуле:

$$\text{Процентное число} = (PV \cdot t) / 100$$

где PV – сумма на счёте в течение периода;
 t – продолжительность периода.

- Для определения суммы процентов за весь срок их начисления все «процентные числа» складываются, и их сумма делится на постоянный делитель, который носит название «**процентный ключ**» или **дивизор**, определяемый отношением количества дней в году к годовой процентной ставке:

$$\text{Постоянный делитель} = T / "r"$$

- Проценты, вычисляемые с использованием дивизора, рассчитанного исходя из 365 дней в году, будут меньше, чем проценты по дивизору, где количество дней в году принято за 360, поэтому при обслуживании конкретного клиента всегда используется один из дивизоров.
- Методика с использованием *процентных чисел* по своей сути является последовательным применением формулы простых процентов для каждого интервала постоянства суммы на счёте:

$$I = \sum_{k=1}^m I_k = \sum_{k=1}^m PV_k \cdot r \frac{t_k}{T} = \frac{r}{T} \sum_{k=1}^m PV_k \cdot t_k$$

2.4. Переменные ставки.

Реинвестирование

- Ставка процентов не является застывшей на вечные времена величиной, поэтому в финансовых операциях, в силу тех или иных причин, предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки. Например, наличие инфляции вынуждает собственника денег периодически варьировать процентной ставкой. В таких случаях наращенную сумму определяют, используя следующую формулу:

$$FV = PV \cdot (1 + n_1 \cdot r_1 + n_2 \cdot r_2 + \dots + n_k \cdot r_k),$$

где k – количество периодов начисления;

n_k – продолжительность k -го периода;

i_k – ставка процентов в k -ом периоде.

- Возможен и второй вариант решения задачи с переменными ставками – когда наращенная сумма определяется от рассчитанной за весь период средней взвешенной процентной ставки:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{k=1}^m PV_k n_k r_k}{\sum_{k=1}^m PV_k n_k} \quad FV = PV(1 + \bar{r}n)$$

Что даст тот же результат, что и расчёт наращенной суммы по предыдущей формуле.

- Сумма депозита, полученная вместе с процентами, может быть вновь инвестирована под ту же или иную процентную ставку на новый срок. Такой процесс называется **реинвестированием (капитализацией)** причисленных на каждом этапе наращения процентов.

- Согласно этому, через период n_1 наращенная сумма составит величину $PV(1 + n_1 r_1)$. Если эта сумма будет вновь инвестирована на следующий срок, то через время n_2 наращенная сумма станет равной $PV(1 + n_1 r_1)(1 + n_2 r_2)$.
- В случае многократного инвестирования в краткосрочные депозиты с применением простой процентной ставки наращенная сумма будет определяться по формуле:

$$FV = PV(1 + n_1 r_1)(1 + n_2 r_2) \cdot \dots \cdot (1 + n_k r_k) = PV \cdot \prod_{k=1}^m (1 + n_k i_k)$$

2.5. Дисконтирование по схеме простых процентов

- В финансовой практике часто приходится решать задачи, обратные определению наращенной суммы: по уже известной *наращенной сумме (FV)* следует определить неизвестную *первоначальную сумму долга (PV)*.
- Такие ситуации возникают при разработке условий финансовой сделки, или когда проценты с наращенной суммы удерживаются непосредственно при выдаче ссуды. Процесс начисления и удержания процентов вперед, до наступления срока погашения долга, называют *учетом*, а сами проценты в виде разности наращенной и первоначальной сумм долга **дисконтом (discount)**:

$$D = FV - PV$$

- Термин *дисконтирование* в широком смысле означает определение значения стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит заданную величину.
- Не редко такой расчёт называют *приведением* стоимостного показателя к заданному моменту времени, а величину *PV* называют *приведённой (современной или текущей)* величиной *FV*.
- Таким образом, *дисконтирование* – приведение будущих денег к текущему моменту времени, и при этом не имеет значения, имела ли место в действительности данная финансовая операция или нет, а также независимо от того, можно ли считать дисконтируемую сумму буквально *наращенной*.

- Именно *дисконтирование* позволяет учитывать в стоимостных расчетах *фактор времени*, поскольку дает текущую оценку суммы, которая будет получена в будущем.
- Привести стоимость денег можно к любому моменту времени, а не обязательно к началу финансовой операции.
- Исходя из методики начисления процентов, применяют два вида дисконтирования:
 - 1) **математическое дисконтирование** по процентной ставке;
 - 2) **банковский учет** по учётной ставке.

2.6. Математическое дисконтирование по простым процентам

- **Математическое дисконтирование** представляет собой определение первоначальной суммы долга, которая при начислении процентов по заданной величине процентной ставки (i), позволит к концу срока получить указанную наращенную сумму:
- Для простых процентов формула дисконтирования:

$$DPV = \frac{FV}{1 + nr} = FV \cdot k_d$$

где k_d - дисконтный множитель (коэффициент приведения) для простых процентов

- Дисконтный множитель показывает, какую долю составляет первоначальная сумма долга в величине наращенной суммы.
- Современная величина и процентная ставка, по которой проводится дисконтирование, находятся в обратной зависимости: чем выше процентная ставка, тем при прочих равных условиях меньше современная величина.
- В той же обратной зависимости находятся современная величина и срок финансовой операции: чем выше срок финансовой операции, тем меньше при прочих равных условиях современная величина.

2.7. Банковский учёт по простой учётной ставке

- **Банковский учёт** – второй вид дисконтирования, при котором исходя из известной суммы в будущем, определяют сумму в данный момент времени, удерживая дисконт.
- Операция учёта (учёт векселей) заключается в том, что банк или другое финансовое учреждение до наступления платежа по векселю покупает его у предъявителя по цене ниже суммы векселя, т.е. приобретает его с дисконтом.
- Сумма, которую получает векселедержатель при досрочном учёте векселя, называется дисконтированной величиной векселя. При этом банк удерживает в свою пользу проценты (дисконт) от суммы векселя за время, оставшееся до срока его погашения.

- Для расчёта дисконта используется *учётная ставка*.
Дисконт по *простой учётной ставке*:

$$D = FV - PV = FV \cdot n \cdot d = FV \cdot t/T \cdot d,$$

где n – продолжительность срока в годах от момента учёта до даты выплаты известной суммы в будущем.

- Дисконтирование по *простой учётной ставке*:

$$PV = FV - FV \cdot n \cdot d = FV \cdot (1 - n \cdot d),$$

где $(1 - n \cdot d)$ – дисконтный множитель.

- Очевидно, что чем выше значение *учётной ставки*, тем больше дисконт. Дисконтирование по *простой учётной ставке* чаще всего производится по *французской практике начисления процентов*, т.е. когда временная база принимается за 360 дней, а число дней в периоде берётся точным.

2.8. Нарращение по простой учётной ставке

- В финансовых операциях иногда рассматриваются задачи, обратные *банковскому учёту*. Пусть от учёта капитала FV по *учётной ставке* d за период времени n была получена сумма PV . Требуется определить величину.
- Задачи такого типа возникают, например, при определении суммы, которую надо написать на векселе, если задана *текущая величина* долга.

$$FV = \frac{PV}{1 - nd}$$

- Приращение капитала на основе *простой учётной ставки* вычисляется по формуле:

$$I = \frac{PV}{1 - nd} - PV = \frac{PV \cdot nd}{1 - nd}$$

- Из приведённой формулы видно, что приращение капитала на основе *простой учётной ставки* не пропорционально ни времени финансовой операции, ни *ставке дисконтирования*.

В данном случае величина $1/(1 - nd)$ является *множителем наращения*. Этот множитель равен *индексу роста капитала* за время финансовой операции и является обратной величиной *коэффициента дисконтирования*.

- При *наращении* капитала на основе *простой процентной ставки* капитал ежегодно увеличивается на одну и ту же величину. Если же *наращение* осуществляется на основе *простой учётной ставки*, то величина начисляемых процентов с каждым годом увеличивается.

$$I = \frac{PV \cdot nd}{1 - nd}$$

- Пользуясь формулой $I = \frac{PV \cdot nd}{1 - nd}$, запишем приращение капитала за каждый год финансовой операции.
- За первый год исходный капитал увеличится на величину:

$$I_1 = \frac{PV \cdot d}{1 - d}$$

- За два года капитал увеличится на $\frac{2PV \cdot d}{1 - 2d}$, и, следовательно, его приращение за второй год составит:

$$I_2 = \frac{2PV \cdot d}{1 - 2d} - I_1 = \frac{2PV \cdot d}{1 - 2d} - \frac{PV \cdot d}{1 - d} = \frac{PV \cdot d}{(1 - d)(1 - 2d)}$$

- За три года исходный капитал увеличится на $\frac{3PV \cdot d}{1 - 3d}$ и, следовательно, его приращение за третий год составит:

$$I_3 = \frac{3PV \cdot d}{1 - 3d} - \frac{2PV \cdot d}{1 - 2d} = \frac{PV \cdot d}{(1 - 2d)(1 - 3d)}$$

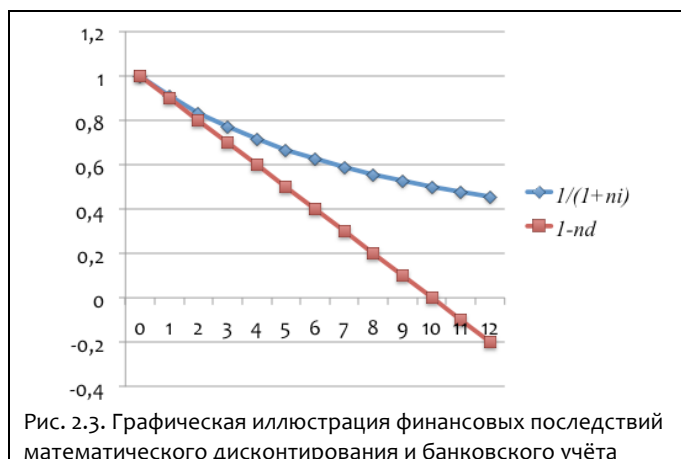
- Следовательно, за k -й год капитал увеличится на:

$$I_k = \frac{PV \cdot kd}{1 - kd} - \frac{PV \cdot (k-1)d}{1 - (k-1)d} = \frac{PV \cdot d}{(1 - (k-1)d)(1 - kd)}$$

2.9. Сравнительный анализ финансовых последствий математического дисконтирования и банковского учёта

- *Учётная ставка* отражает фактор времени более жёстко, чем *процентная*. Иными словами, из формулы учёта по простым ставкам $PV = FV(1 - nd)$ следует, что применение *учётной ставки* для дисконтирования при относительно большом сроке уплаты по векселю ($n \geq 1/d$) и значительной *учётной ставке* может привести к нулевой или даже отрицательной сумме PV . В этом случае владелец векселя ничего не получит при его учёте.

- Такая ситуация не может возникнуть при математическом дисконтировании по формуле $PV = FV/(1+nr)$. В этом случае при любом сроке дисконтирования современная величина всегда останется положительной.
- В случае математического дисконтирования дисконтный множитель $1/(1+nr)$ всегда принимает положительное значение, но его величина по мере увеличения срока будет уменьшаться, асимптотически приближаясь к нулю.
- Различие роста дисконтного множителя при математическом дисконтировании и банковском учёте представлено на рис. 2.3.



2.10. Совмещение начисления процентов по процентной ставке и дисконтирования по учётной ставке

- Если учёту подлежит долговое обязательство, предусматривающее начисление *простых* процентов на первоначальную сумму долга, это предполагает решение 2 задач:
 1. определение конечной суммы долга на момент его погашения;
 2. расчёт суммы, получаемой при учёте, путём дисконтирования конечной суммы долга, применяя учётную ставку, действующую в момент учёта.

- Решение этих двух задач можно записать в виде одной формулы, содержащей и *наращение по простой ставке процентов*, фигурирующей в *долговом обязательстве*, и *дисконтирование по простой учётной ставке*:

$$PV_2 = PV_1(1 + n_1r)(1 - n_2d) ,$$

где PV_1 – первоначальная сумма ссуды;

PV_2 – сумма, полученная при учете обязательства;

n_1 – общий срок платёжного обязательства, в течение которого начисляются *проценты*;

n_2 – срок от момента учёта до погашения долга.

2.11. Сравнение ставки наращивания и учётной ставки

- Различие в *процентной ставке* и *учетной ставке* заключается в различии базы для начислений процентов:

- 1) в *процентной ставке* в качестве базы берётся *первоначальная сумма долга*:

$$r = (FV - PV) / PV$$

- 2) в *учётной ставке* за базу принимается *наращенная сумма долга*:

$$d = (FV - PV) / FV$$

- Проценты, начисленные по *ставке процентов*, называются **декурсивными**, а по *учётной ставке* – **антисипативными**.

Табл.2.1. Сравнение простых ставок

Ставка	Прямая задача	Обратная задача
Наращивания r	Наращивание $FV = PV(1 + nr)$	Математическое дисконтирование $PV = FV/(1 + nr)$
Учётная d	Дисконтирование (банковский учёт) $PV = FV(1 - nd)$	Наращивание по учётной ставке $PV = FV/(1 - nd)$

- Как уже было сказано выше, множитель *учётной ставки* растёт быстрее, чем множитель *ставки процентов*. Однако возможен такой подбор ставок, при котором финансовые результаты *наращения* или *дисконтирования* будут одинаковыми. Такие ставки называются **эквивалентными**.

2.12. Эквивалентность простых процентных ставок

- Зачастую встаёт необходимость выбора между различными вариантами финансовых операций с разнообразными и несопоставимыми условиями. Для возможности сопоставления друг с другом таких операций их условия должны быть приведены к единообразному показателю.
- Процентные ставки различного вида, приводящие за один и тот же срок к одному и тому же финансовому результату, называются **эквивалентными**.

- При выводе соотношений эквивалентности простых ставок между ставкой наращенного и учётной ставкой следует иметь в виду, что при их применении могут использоваться разные временные базы (360, 365 дней).
- В случае, если временные базы ставок одинаковы, то соотношения эквивалентности простых процентной и учётной ставок определяются из равенства соответствующих множителей наращенного.
- В случае, если срок операции измеряется в днях, то имеет значение продолжительность временных баз по наращению и учёту, которые могут быть и различными.

Эквивалентность простых процентных и учётных ставок с равными временными базами

$$r = \frac{d}{1 - nd} \quad d = \frac{r}{1 - nr}$$

Эквивалентность простых ставок с равными временными базами при сроке меньше года

$$r = \frac{T \cdot d}{T - td} \quad d = \frac{T \cdot r}{T - tr}$$

Эквивалентность простых ставок с разными временными базами при сроке меньше года

$$r = \frac{T_1 \cdot d}{T_2 - td} \quad d = \frac{T_2 \cdot r}{T_1 - tr}$$

где T_1 – временная база при начислении процентов;
 T_2 – временная база при учёте;

2.13. Определение срока ссуды, уровня процентной ставки и их средних значений

- В любой простейшей финансовой операции всегда присутствуют четыре величины: *текущая величина (PV)*, *наращенная или будущая величина (FV)*, *процентная ставка (r)* и *срок финансовой операции (n)*.
- Кроме определения *наращенной суммы (FV)* может возникнуть необходимость в нахождении и других параметров финансовой операции, таких как, *срок и процентная ставка*.

- Если в течение всего срока финансовой операции её условия менялись во времени, то все значения операции можно определить с помощью средней арифметической взвешенной. Замена всех усредняемых значений на среднюю не изменит результатов *наращения* или *дисконтирования*.
- Искомые значения средних определяются по формуле средней арифметической взвешенной с весами, равными значениям показателей (*продолжительности, процентной или учётной ставки*) отдельных периодов.

Определение срока ссуды в годах от уровня процентной ставки

$$n = \frac{FV - PV}{PV \cdot r}$$

Определение срока ссуды в месяцах от уровня процентной ставки

$$M = \frac{FV - PV}{PV \cdot r} \cdot 12$$

Определение срока ссуды в днях от уровня процентной ставки

$$t = \frac{FV - PV}{PV \cdot r} \cdot T$$

Определение уровня процентной ставки

$$r = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} = \frac{FV - PV}{PV \cdot t} \cdot T$$

Определение срока ссуды в годах от уровня учётной ставки

$$n = \frac{FV - PV}{FV \cdot d}$$

Определение срока ссуды в месяцах от уровня учётной ставки

$$M = \frac{FV - PV}{FV \cdot d} \cdot 12$$

Определение срока ссуды в днях от уровня учётной ставки

$$t = \frac{FV - PV}{FV \cdot d} \cdot T$$

Определение уровня учётной ставки

$$d = \frac{FV - PV}{FV \cdot n} = \frac{FV - PV}{FV \cdot t} \cdot T$$

Определение среднего срока ссуды от уровня процентной ставки

$$\bar{n} = \frac{\sum_{k=1}^m PV_k n_k r_k}{\sum_{k=1}^m PV_k r_k}$$

Определение среднего срока от момента учёта до даты выплаты

$$\bar{n} = \frac{\sum_{k=1}^m FV_k n_k d_k}{\sum_{k=1}^m FV_k d_k}$$

Определение среднего уровня процентной ставки

$$\bar{r} = \frac{\sum_{k=1}^m PV_k n_k r_k}{\sum_{k=1}^m PV_k n_k}$$

Определение среднего уровня учётной ставки

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^m FV_k n_k d_k}{\sum_{k=1}^m FV_k n_k}$$

Контрольные вопросы к теме 2

- 1) Нарастание по схеме простых процентов
- 2) Варианты расчёта процентов по временной базе и числу дней ссуды
- 3) Расчёт процентов при изменении суммы счёта
- 4) Расчёт процентов при изменении процентных ставок
- 5) Дисконтирование по схеме простых процентов
- 6) Нарастание по простой учётной ставке
- 7) Сравнение ставки наращивания и учётной ставки
- 8) Эквивалентность простых процентных ставок
- 9) Определение срока ссуды и уровня ставки
- 10) Определение средних значений

Задачи по теме 2

1. Вкладчик собирается положить в банк 200 тыс. руб., чтобы накопить 250 тыс. руб. Ставка процентов банка составляет 10 % годовых. Определите срок, за который вкладчик сможет накопить требуемую сумму ($K=360$ дн.)
2. На депозитный счет внесена сумма 100 000 руб. на срок два года под 9% годовых. Найти наращенную сумму и простые проценты за этот срок.
3. Простая процентная ставка равна 10% годовых. Определите значение эквивалентной ей простой учетной ставки при выдаче ссуды сроком на 1 год.

4. Молодая семья получила от банка ссуду на строительство жилья в размере 85 тыс. руб. сроком с 3 февраля по 12 декабря под простую процентную ставку 18 % годовых. Определите множитель наращивания и наращенную сумму кредита по различным практикам расчета процентов:
а) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды; б) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды; в) точные проценты с очным числом дней ссуды. Год високосный.
5. Ссуда 92 тыс. руб. выдана на 2 года. Простая ставка процентов в первый год составила 18 %, а затем поквартально увеличивалась на 0,3 %. Определите размер погасительного платежа.

6. Задолженность по договору одного предприятия перед другим составляет 1 млн. руб. Согласно условиям договора на данную сумму задолженности начисляются проценты по простой процентной ставке 0,1 % в день. Найдите полную сумму долга за два с половиной месяца.
7. Вексель учтен за 2 месяца до срока его погашения по простой учётной ставке 10% годовых. Определите значение эквивалентной ставки простых процентов, определяющей доходность операции учёта, если расчётное число дней в году при учёте векселей принимается равным 360, а при начислении процентов – 365.

8. Задолженность по договору одного предприятия перед другим составляет 1,5 млн. руб. Согласно условиям договора проценты начисляются по простой процентной ставке 0,1 % в день. Найдите период задолженности, если она была погашена в полном объеме вместе с начисленными процентами в сумме 2 млн. руб.
9. Найдите срок, за который проценты, начисленные на сумму задолженности в размере 100 000 руб. по ставке 1% в месяц (простые), были возвращены в сумме 156 000 руб.
10. Найдите проценты, начисленные на сумму задолженности в размере 500 000 руб. за пол года по ставке 2% в месяц.

11. Вексель принят в банке по простой учетной ставке 15% годовых за 50 дней до срока его погашения. Определить значение эквивалентной ставки простых процентов, определяющей доходность операции учета, если при учете векселей $T=365$ дням, а при исчислении процентов $T=360$ (расчетное число дней в году).
12. На вклад в банке размером 100 000 руб. начисляются простые проценты. Найти величину процентной ставки, если накопленная на счете сумма через 5 месяцев составила 140 000 руб.
13. 1 млн. руб. инвестирован на 1 год по простой ставке 10% годовых. Найти наращенную сумму и ее приращение.

14. Вексель номиналом 64 тыс. руб., выданный на срок с 12 марта по 25 декабря, был учтен банком 10 октября по простой учетной ставке 7 % годовых. Определите дисконт банка.
15. Коммерческий банк привлекает средства населения под простые проценты с процентной ставкой 9 % годовых. Клиент внес 12 тыс. руб. на депозит с 12 января по 24 мая. Определите величину коэффициента наращивания и наращенную сумму для случаев: а) точных процентов с точным числом дней; б) обыкновенных процентов с точным числом дней; в) обыкновенных процентов с приближенным числом дней.
Год не високосный.

16. Вкладчик, решивший положить на депозит 45 тыс. руб., хочет накопить через 2 года не менее 60 тыс. руб. Определить ставку процентов, на основании которой он может выбрать подходящий для этой цели банк.
17. За срок займа сумма обыкновенных процентов по банковскому векселю составила 150 тыс. руб. Определите при условии, что год високосный, сумму точных процентов, используя прямое и обратное сообщение обыкновенных и точных процентов.
18. Определите период времени, необходимый для утроения капитала по простой процентной ставке 12 % годовых.

19. Ставка процентов банка по вкладам до востребования, составляющая в начале года 4 % годовых, через 6 месяцев была уменьшена до 3,8 %, а еще через 2 месяца до 3,5 % годовых. Определите сумму процентов, которая была начислена на вклад 22 тыс. руб. за год.
20. Вексель номиналом 50 тыс. руб. со сроком погашения 20 декабря предъявлен в банк для оплаты 25 сентября того же года. Банк приобрел вексель по учетной ставке 14 % годовых. Определить сумму, выплаченную владельцу векселя, и сумму дисконта банка при германской и французской практиках расчета.

3. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

- 3.1. Формула сложных процентов
- 3.2. Сравнение наращения по сложным и простым процентам
- 3.3. Начисление сложных процентов при дробном числе лет
- 3.4. Начисление процентов в смежных календарных периодах
- 3.5. Номинальная и эффективная ставки процентов

- 3.6. Математическое дисконтирование по сложной ставке
- 3.7. Дисконтирование по сложной учётной ставке
- 3.8. Наращение по сложной учётной ставке
- 3.9. Переменная ставка процентов
- 3.10. Непрерывное начисление процентов
- 3.11. Определение срока ссуды, уровня сложных ставок и средних значений ставок
- 3.12. Эквивалентность сложных процентных ставок

3.1. Формула сложных процентов

- Если инвестиция сделана на условиях сложного процента, то очередной годовой доход исчисляется не с исходной величины инвестируемого капитала, а уже с наращенной суммы, которая включает также ранее начисленные, но не востребованные инвестором проценты.
- В этом случае имеет место *капитализация процентов* по мере их начисления, так как база, с которой начисляются проценты, всё время возрастает. Присоединение начисленных процентов к сумме долга, которая служит базой для их начисления, называется **капитализацией процентов**.

- Если процентные деньги не выплачиваются сразу по мере их начисления, а присоединяются к первоначальной сумме долга, то долг, таким образом, увеличивается на невыплаченную сумму процентов, и последующее начисление процентов происходит на увеличенную сумму долга.

- отсюда, за n периодов начисления формула примет вид:

$$FV = PV \cdot (1 + r)^n = PV \cdot k_n,$$

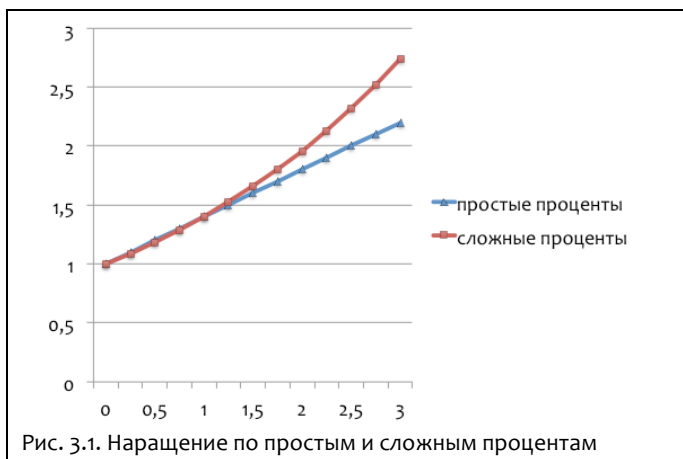
где k_n — коэффициент (множитель) наращивания сложных процентов.

- Эта формула называется формулой сложных процентов.

3.2. Сравнение наращивания по сложным и простым процентам

- Как было выше указано, различие начисления простых и сложных процентов в базе их начисления. Если простые проценты начисляются все время на одну и ту же первоначальную сумму долга, т.е. база начисления является постоянной величиной, то сложные проценты начисляются на увеличивающуюся с каждым периодом начисления базу.
- Сложные проценты характеризуют процесс роста первоначальной суммы со стабильными темпами роста, при наращивании ее по абсолютной величине с ускорением, следовательно, формулу сложных процентов можно рассматривать как определение уровня на базе стабильных темпов роста.

- Согласно общей теории, для получения базисного темпа роста необходимо перемножить цепные темпы роста. Поскольку ставка процента за период является цепным темпом прироста, то цепной темп роста равен $(1 + r)$.
- Тогда базисный темп роста за весь период, исходя из постоянного темпа прироста, будет равен $(1 + r)^n$.
- Экономический смысл множителя наращивания состоит в том, что он показывает, чему будет равна одна денежная единица через n периодов при заданной процентной ставке r .
- Графическая иллюстрация соотношения наращенной суммы по простым и сложным процентам представлена на рис. 3.1.



• Как видно из рис. 3.1:

- 1) при краткосрочных ссудах начисление по простым процентам предпочтительнее, чем по сложным процентам;
- 2) при сроке в один год разница отсутствует;
- 3) при среднесрочных и долгосрочных ссудах наращенная сумма, рассчитанная по сложным процентам значительно выше, чем по простым.

• Или при любой процентной ставке:

- 1) если $0 < n < 1$, то $(1 + nr) > (1 + r)^n$
- 2) если $n > 1$, то $(1 + nr) < (1 + r)^n$
- 3) если $n = 1$, то $(1 + nr) = (1 + r)^n$

• Таким образом, для вкладчиков, решивших положить свои деньги на депозит с целью накопления :

- 1) более выгодна схема простых процентов, если срок вклада менее года (проценты начисляются однократно в конце года);
- 2) более выгодной является схема сложных процентов, если срок вклада превышает один год;
- 3) обе схемы дают одинаковый результат при продолжительности периода один год и однократном начислении процентов.

3.3. Начисление сложных процентов при дробном числе лет

- Достаточно часто финансовые контракты заключаются на период, отличающийся от целого числа лет.
- В случае, когда срок финансовой операции выражен дробным числом лет, начисление процентов возможно с использованием двух методов:
 - 1) *общий метод заключается в прямом расчёте по формуле сложных процентов:*
$$FV = PV(1 + r)^n$$
где n – период сделки;
 a – целое число лет;
 b – дробная часть года.

- 2) *смешанный метод расчёта предполагает для целого числа лет периода начисления использовать формулу сложных процентов, а для дробной части года – формулу простых процентов:*

$$FV = PV(1 + r)^a(1 + rb),$$

где $n = a + b$

- Поскольку *наращение* дробной части года в смешанном методе идёт по схеме *простых процентов*, по которой *наращенная сумма* будет *большей*, чем по схеме *сложных процентов*, то при дробном числе лет *смешанный метод расчёта сложных процентов* даёт *большой результат*, чем *общий метод расчёта*.

3.4. Начисление процентов в смежных календарных периодах

- При начислении *процентов* в смежных календарных периодах, когда даты начала и окончания ссуды находятся в разных периодах, все начисленные за весь срок проценты не могут быть отнесены лишь к последнему. В бухгалтерском и финансовом учёте, налогообложении, прочих сферах возникает задача распределения начисленных процентов по периодам.
- Для решения этой задачи общая сумма процентов (I) распределяется по каждому периоду n_1 и n_2 :
$$I = I_1 + I_2 \quad I_1 = PV((1 + r)^{n_1} - 1)$$
$$I_2 = PV(1 + r)^{n_1}((1 + r)^{n_2} - 1) = PV((1 + r)^n - (1 + r)^{n_1})$$

3.5. Номинальная и эффективная ставки процентов

- Период начисления по *сложным процентам* не всегда равен году, однако в условиях финансовой операции указывается не ставка за период, а годовая ставка с указанием периода начисления – *номинальная ставка*.
- **Номинальная ставка** (*nominal rate, APR*) – годовая ставка процентов, исходя из которой определяется величина ставки процентов в каждом периоде начисления, при начислении сложных процентов несколько раз в год. Эта ставка:
 - во-первых, не отражает реальной эффективности сделки;
 - во-вторых, не может быть использована для сопоставлений.

- Если начисление процентов будет производиться несколько (m) раз в год при сроке долга n лет, то общее количество периодов начисления за весь срок финансовой операции составит:
$$N = n \cdot m$$
- Отсюда формулу сложных процентов можно записать в следующем виде:
$$FV = PV(1 + APR/m)^{nm},$$
где APR – номинальная годовая ставка процентов.
- Номинальная ставка позволяет производить расчёт эффективности финансовой операции в каждом отдельном периоде начисления при начислении процентов несколько раз в год, но не измеряет годового дохода всех этих операций с учетом внутригодовой *капитализации*.

- Если срок ссуды измеряется дробным числом периодов начисления, то при m -разовом начислении процентов в году *нараченную сумму* можно рассчитать несколькими способами, приводящим к разным результатам:
 1. по *обычной формуле* сложных процентов:
$$FV = PV(1 + APR/m)^{N/n},$$
где N/n – число (возможно дробное) периодов начисления процентов
 2. по *смешанной формуле*:
$$FV = PV(1 + APR/m)^a (1 + b \cdot APR/m),$$
где a – целое число периодов начисления;
 b – оставшаяся дробная часть периода начисления.

- Наряду с номинальной ставкой существует **эффективная ставка** (effective rate, EAR), измеряющая тот реальный относительный доход, который получен в целом за год, с учетом внутригодовой капитализации. Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов даёт тот же финансовый результат, что и m -разовое наращение в год по ставке APR/m :

$$(1 + EAR)^n = (1 + APR/m)^{mn} \Rightarrow EAR = (1 + APR/m)^m - 1$$

- Из формулы следует, что эффективная ставка зависит от количества внутригодовых начислений.
- Значение эффективной ставки позволяет сравнивать между собой финансовые операции, имеющие различные условия: чем выше эффективная ставка финансовой операции, тем выгоднее операция для кредитора.

3.6. Математическое дисконтирование по сложной ставке

- Оценивая целесообразность вложений в тот или иной вид бизнеса, обычно исходят из того, является ли это вложение более прибыльным при допустимом уровне риска, чем вложения в государственные ценные бумаги.
- С этой целью анализируются будущие доходы предпринимателя при минимальном (безопасном) уровне доходности. Основная идея при этом заключается в оценке будущих поступлений FV с позиций текущего момента.

- Для целей такого анализа используется формула математического дисконтирования по сложным процентам:

$$DPV = \frac{FV}{(1+r)^n} = FV \cdot v^n$$

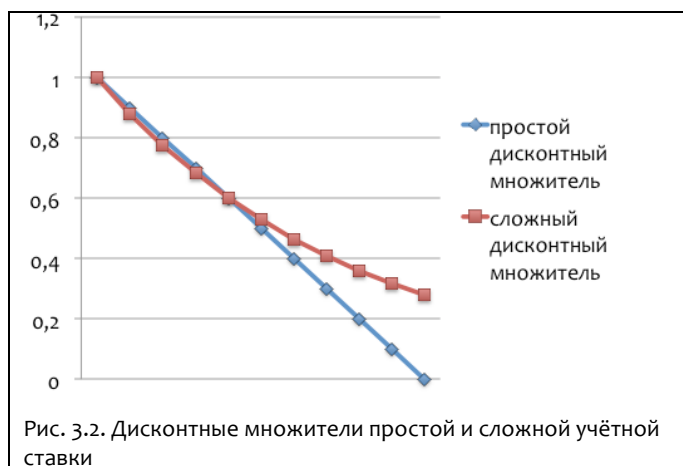
где FV – доход, планируемый к получению в n -м году;
 DPV – дисконтированная (приведённая) стоимость;
 v^n – дисконтный (учётный) множитель.

- Если проценты начисляются несколько раз в году, формула математического дисконтирования по сложным процентам будет выглядеть:

$$DPV = \frac{FV}{(1 + APR/m)^{mn}} = FV \cdot v^{mn}$$

3.7. Дисконтирование по сложной учётной ставке

- Дисконтирование по сложной учётной ставке осуществляется в ситуации предварительного начисления сложного процента, т.е. когда сложный процент начисляется в момент заключения финансового соглашения. В этом случае в начале каждого периода начисления проценты начисляются не на одну и ту же величину, а каждый раз на новую, полученную в результате дисконтирования, осуществленного в предыдущем периоде путём уменьшения на величину дисконта.
- Ввиду этого дисконтирование по сложной учётной ставке происходит не прямолинейно, как в случае учёта по простой учётной ставке, а с замедлением. (см. рис. 3.2.)



- Дисконтирование по сложной учётной ставке:
 $PV = FV (1 - d)^n$
- При равенстве условий учёта простой дисконтный множитель равномерно уменьшается на протяжении всего срока и достигает нуля при сроке $n = 1 / d$, а сложный дисконтный множитель экспоненциально уменьшается и достигает нуля лишь в пределе при $n \rightarrow \infty$. Поэтому для лица, осуществляющего предварительное (антисипативное) начисление процентов:
 - ✓ более выгодным является дисконтирование по сложной учётной ставке при сроке учёта до одного года;
 - ✓ более выгодным является дисконтирование по простой учётной ставке при сроке учёта свыше года;
 - ✓ дисконтирование в обоих случаях даёт один и тот же результат, если срок учёта равен одному году.

- Дисконтирование может производиться не один раз в году, а m раз в год, т. е. каждый раз учёт производится по ставке f/m . В этом случае также как и при наращении, формула дисконтирования определяется через номинальную ставку:

$$PV = FV(1 - f/m)^m \Rightarrow f = m(1 - \sqrt[m]{1-d}),$$

где f – номинальная годовая учетная ставка.

- Эффективная учётная ставка d показывает степень дисконтирования за год. Её определяют из равенства дисконтных множителей:

$$(1-d)^n = (1 - f/m)^m \Rightarrow d = 1 - (1 - f/m)^{m/n}$$

- Эффективная учетная ставка меньше номинальной при $m > 1$.

- Для лица, осуществляющего предварительное начисление процентов, при сроке учёта менее одного года более выгодна сложная учетная ставка; и более выгодна простая учётная ставка, если срок учёта превышает один год.

- Если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет, то при определении стоимости учётного капитала используют либо сложную учётную ставку, либо смешанную схему (сложная учётная ставка для целого числа лет и простая учётная ставка для дробной части года).

$$PV = FV(1-d)^a(1-b \cdot d),$$

где a – целое число лет;

b – дробная часть года.

- При дробном числе лет стоимость учётного капитала больше при использовании смешанной схемы.

3.8. Наращение по сложной учётной ставке

- При решении задачи, обратной банковскому учёту, определяют сумму погашаемого долга при пользовании учётной ставкой. Формулы наращения по сложным учётным ставкам можно получить обратным путём из формул дисконтирования.
- Способ начисления сложных антисипативных процентов аналогичен начислению простых.
- Общий метод наращения по сложной учётной ставке может быть описан формулой:

$$FV = PV/(1-d)^n,$$

где $1/(1-d)^n$ – коэффициент наращения при расчёте сложных антисипативных процентов.

- При наращении сложных процентов по учётной ставке несколько раз в году наращенная сумма определяется по формуле:

$$FV = \frac{PV}{(1 - f/m)^{mt}},$$

где f – номинальная годовая учётная ставка.

- Следует обратить внимание, что при равенстве ставок наращения по сложным процентам и наращения по сложной учётной ставке коэффициент наращения, а значит, и наращенная сумма, при наращении антисипативных процентов по учётной ставке растут быстрее, чем коэффициент наращения декурсивных процентов по сложной ставке процентов.
- Это видно из графика, изображённого на рис. 3.3.

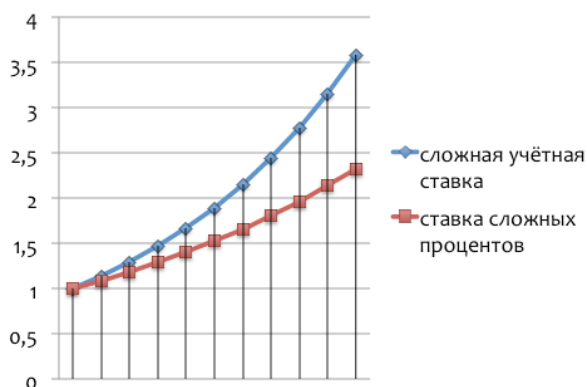


Рис. 3.3. Наращение сложных декурсивных и антисипативных процентов

3.9.Переменная ставка процентов

- Как и в случае начисления простых процентов, финансовое соглашение может предусматривать плавающие или переменные процентные ставки и при наращении по сложным процентам.
- Пусть $n_1, n_2, \dots, n_k$ – следующие друг за другом временные периоды, на каждый из которых установлена своя процентная ставка. Тогда, учитывая капитализацию начисленных процентов, при использовании схемы сложных процентов, наращенная сумма за все время финансовой операции определяется по формуле:

$$FV_k = PV \cdot (1+r_1)^{n_1} (1+r_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (1+r_k)^{n_k} = PV \cdot \prod_{r=1}^k (1+r_r)^{n_r}$$

- То же самое правило можно применить и при дисконтировании. Если в течение нескольких периодов изменялась *учётная ставка*, то общую сумму выплат по *сложной учётной ставке* можно определить по следующей формуле:

$$PV_k = FV \cdot (1-d_1)^{n_1} \dots (1-d_2)^{n_2} (1-d_1)^{n_1} = FV \cdot \prod_{t=1}^k (1-d_t)^{n_t}$$

3.10. Непрерывное начисление процентов

- Все рассмотренные до сих пор ситуации, когда проценты начислялись за фиксированные промежутки времени (год, квартал, месяц, день, час), относились к **дискретным процентам**.
- Но на практике нередко встречаются случаи, когда проценты начисляются непрерывно, за сколь угодно малый промежуток времени. Поскольку проценты начисляются непрерывно, то m стремится к бесконечности, а коэффициент (множитель) наращивания стремится к e^{APR} :

$$e^{APR} = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + APR/m)^m$$

- Отсюда можно записать формулу наращенной суммы при непрерывном наращении процентов:

$$FV = PV \cdot e^{\delta n}$$

где $e \approx 2,718281$, называется числом Эйлера

- Ставку непрерывных процентов называют **силой роста** (force of interest) и обозначают символом δ , в отличие от ставки дискретных процентов (APR).
- Непрерывное начисление процентов на практике обычно применяется при анализе сложных финансовых задач, таких как обоснование и выбор инвестиционных решений.
- Оценивая работу финансового учреждения, где платежи за период поступают многократно, целесообразно предполагать, что наращенная сумма непрерывно меняется во времени и применять непрерывное начисление процентов.

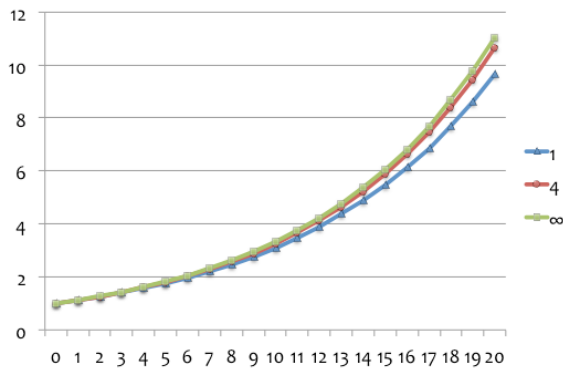


Рис 3.4. Изменение коэффициента (множителя) наращивания в зависимости от числа начислений процентов в год

- При непрерывном начислении процентов наращенная сумма составит конечную величину, которая будет зависеть от первоначальной суммы, срока наращивания и силы роста.
- При дисконтировании по непрерывной учётной ставке непрерывную учётную ставку называют силой дисконта по аналогии с силой роста в непрерывном наращении. Таким образом, сила дисконта - это номинальная учётная ставка при $m \rightarrow \infty$.
- При том, что дисконтные множители наращивания и дисконтирования называются по-разному, математически они равны друг другу. Если ставка процентов и учётная ставка в финансовой операции приводят к разным результатам, то в пределе из-за бесконечно малого отрезка времени разница между ними исчезает.

Определение множителя наращивания непрерывных процентов

$$e^{APR} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + APR/m\right)^m$$

Непрерывное наращивание по постоянной силе роста

$$FV = PV \cdot e^{\delta n}$$

Математическое дисконтирование при постоянной силе роста

$$PV = \frac{FV}{e^{\delta n}}$$

3.11. Определение срока ссуды, уровня сложных ставок и средних значений ставок

- Довольно часто в финансовой практике возникает необходимость рассчитать не только сумму денег, получаемую в результате начисления *процентов*, но и дополнительные параметры, связанные с этими расчетами, а именно: ставку прибыльности, время начисления процентов, количество раз начисления процентов в году.
- Эти параметры легко выводятся из соответствующих формул для определения *наращенной* или *приведённой* суммы.

- Как и в случае *простых ставок*, если в течение времени условия финансовой операции меняются, то все их значения можно обобщить с помощью *средней*. Замена всех усредняемых значений на *среднюю* не изменит условий финансовой операции.
- Если в операции с течением времени меняются *процентные ставки* при сохранении суммы счёта, то *среднюю процентную ставку* можно определить по *средней геометрической* из равенства *множителей наращивания*:

$$(1+r_1)^{n_1} (1+r_2)^{n_2} \dots (1+r_k)^{n_k} = (1+\bar{r})^{\sum_{i=1}^k n_i}$$

$$\bar{r} = \sqrt[k]{(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_k)} - 1$$

- Для усреднения ставок финансовых операций, где изменяется не только *процентная ставка*, но и *сумма счёта*, искомые ставки находятся из равенства соответствующих сумм после наращивания процентов при условии, что сроки усредняемых операций *одинаковы*:

$$\bar{r} = \sqrt[n]{\frac{\sum PV_t (1+r_t)^n}{\sum PV_t}} - 1$$

- Для *учётных ставок* *средняя учётная ставка* при изменении суммы счёта рассчитывается как:

$$\bar{d} = 1 - \sqrt[n]{\frac{\sum FV_t (1-d_t)^n}{\sum FV_t}}$$

Определение срока ссуды

$$n = \frac{\ln(FV/PV)}{\ln(1+r)}$$

Определение срока ссуды при начислении процентов несколько раз в год

$$n = \frac{\ln(FV/PV)}{\ln(1+APR/m)^m} = \frac{\ln(FV/PV)}{m \cdot \ln(1+APR/m)}$$

Определение уровня процентной ставки

$$r = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1$$

Определение уровня процентной ставки при начислении процентов несколько раз в год

$$APR = m \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{FV}{PV}} - 1 \right)$$

Определение уровня сложной учётной ставки

$$d = 1 - \sqrt[n]{\frac{PV}{FV}}$$

Определение номинальной учётной ставки при дисконтировании несколько раз в год

$$f = m \left(1 - \sqrt[m]{\frac{PV}{FV}} \right)$$

Определение срока учёта по сложной учётной ставке

$$n = \frac{\ln(PV/FV)}{\ln(1-d)}$$

Определение срока учёта по сложной учётной ставке при дисконтировании несколько раз в год

$$n = \frac{\ln(PV/FV)}{\ln(1-f/m)^m} = \frac{\ln(PV/FV)}{m \cdot \ln(1-f/m)}$$

Определение среднего уровня процентной ставки при сохранении суммы счёта

$$\bar{r} = \sqrt[n_1]{(1+r_1)^{n_1} (1+r_2)^{n_2} \dots (1+r_k)^{n_k}} - 1$$

Определение среднего уровня учётной ставки при сохранении суммы счёта

$$\bar{d} = 1 - \sqrt[n]{(1-d_1)^{n_1} (1-d_2)^{n_2} \dots (1-d_k)^{n_k}}$$

Определение среднего уровня процентной ставки разных операций

$$\bar{r} = \sqrt[n]{\sum PV_i (1+r_i)^n / \sum PV_i} - 1$$

Определение среднего уровня учётной ставки разных операций

$$\bar{d} = 1 - \sqrt[n]{\sum FV_i (1-d_i)^n / \sum FV_i}$$

3.12. Эквивалентность сложных процентных ставок

- Достаточно часто в практике возникает ситуация, когда необходимо произвести между собой сравнение по выгоды условия различных финансовых операций и коммерческих сделок.
- Условия финансово-коммерческих операций могут быть весьма разнообразными и напрямую несопоставимыми. Для сопоставления альтернативных вариантов ставки, используемые в условиях контрактов, приводят к единообразному показателю.
- Различные финансовые схемы можно считать эквивалентными в том случае, если они приводят к одному и тому же финансовому результату.

- Эквивалентная процентная ставка – это ставка, которая для рассматриваемой финансовой операции даст точно такой же денежный результат (наращенную сумму), что и применяемая в этой операции ставка.
- Классическим примером эквивалентности являются номинальная и эффективная ставка процентов:

$$EAR = (1 + APR/m)^m - 1 \quad APR = m((1 + EAR)^{1/m} - 1)$$
- Эффективная ставка измеряет тот относительный доход, который может быть получен в целом за год, т.е. совершенно безразлично – применять ли ставку APR при начислении процентов m раз в год или годовую ставку EAR, – и та, и другая ставки эквивалентны в финансовом отношении.
- Если две номинальные ставки определяют одну и ту же эффективную ставку процентов, то они называются эквивалентными.

- Соотношение эквивалентности можно найти для любой пары различного вида ставок – простых и сложных, дискретных и непрерывных. Формулы эквивалентности ставок во всех случаях получаются из равенства взятых попарно множителей наращения.
- Следующим примером эквивалентности является эквивалентность простой и сложной ставки, полученная путём приравнивания друг к другу соответствующих множителей наращения:

$$1 + n r_{ПП} = (1 + r_{СА})^n$$

- Решение приведённого выше равенства даёт следующие соотношения эквивалентности простых и сложных ставок:

$$r_{ПП} = \frac{(1 + r_{СА})^n - 1}{n} \quad r_{СА} = \sqrt[n]{1 + n r_{ПП}} - 1$$

Эквивалентность номинальной и эффективной ставок

$$EAR = (1 + APR/m)^m - 1 \quad APR = m((1 + EAR)^{1/m} - 1)$$

Эквивалентность простой и сложной процентных ставок

$$r_{ПП} = \frac{(1 + r_{СА})^n - 1}{n} \quad r_{СА} = \sqrt[n]{1 + n r_{ПП}} - 1$$

Эквивалентность простой учётной и сложной процентной ставок

$$d_{ПП} = \frac{1 - (1 + r_{СА})^{-n}}{n} \quad r_{СА} = \sqrt[n]{1 - n d_{ПП}} - 1$$

Эквивалентность простой учётной и номинальной ставок

$$d_{ПП} = \frac{1 - (1 + APR/m)^{-mn}}{n} \quad APR = m(\sqrt[mn]{1 - n d_{ПП}} - 1)$$

Эквивалентность сложных процентной и учётной ставок

$$r = \frac{d}{1 - d} \quad d = \frac{r}{1 + r}$$

Эквивалентность сложной процентной ставки и силы роста (дискретных и непрерывных ставок)

$$r = e^{\delta} - 1 \quad \delta = \ln(1 + r)$$

Эквивалентность номинальной процентной ставки и силы роста

$$APR = m(e^{\delta/m} - 1) \quad \delta = m \cdot \ln(1 + APR/m)$$

Эквивалентность сложной учётной ставки и силы дисконта (дискретных и непрерывных ставок)

$$d = 1 - e^{-\delta} \quad \delta = -\ln(1 - d)$$

Эквивалентность номинальной учётной ставки и силы дисконта

$$f = m(1 - e^{-\delta/m}) \quad \delta = -m \cdot \ln(1 - f/m)$$

Контрольные вопросы к теме 3

- 1) Реинвестирование и капитализация процентов
- 2) Сравнение наращения по простым и сложным процентам
- 3) Общий и смешанный метод расчёта сложных процентов
- 4) Номинальная и эффективная ставки процентов
- 5) Математическое дисконтирование по сложной процентной ставке
- 6) Дисконтирование по сложной учётной ставке
- 7) Наращение по сложной учётной ставке
- 8) Непрерывное начисление процентов

- 9) Определение дополнительных параметров по сложным ставкам
- 10) Определение средних значений
- 11) Эквивалентность сложных процентных ставок

Задачи по теме 3

1. Депозит в размере 50 тыс. рублей положен в банк на 2 года. Определите начисленную сумму и проценты по сложной ставке 10% годовых.
2. Банк начисляет проценты на вклад 50 тыс. рублей по сложной ставке 15% годовых. Определите сумму начисленных процентов, если вклад будет востребован через 2.5 года.
3. Кредитная организация начисляет на вклады сложные проценты по ставке 18% годовых. Рассчитать полную сумму вклада на сумму 100 000 руб. за 6 месяцев при ежемесячной капитализации.

4. Банк начисляет проценты на вклад 20 000 руб. по ставке 10% годовых. Определите наращенную сумму за 2 года, если проценты начисляются: а) по полугодиям; б) ежеквартально; в) ежемесячно.
5. На вклад 100 000 рублей будут начисляться проценты по ставке 10% годовых. Определите наращенную сумму, если проценты будут начисляться: а) по полугодиям; б) ежеквартально; в) ежемесячно; г) ежедневно; д) непрерывно.
6. 300 000 руб. инвестированы на 6 месяцев по ставке 11% годовых. Определите наращенную сумму и ее приращение при начислении сложных процентов еженедельно.

7. Определите первоначальную сумму вклада, на который начислялись проценты по ставке 10% годовых с ежедневной капитализацией за период 2,5 года, если по окончании срока на счете накопилась сумма 300 000 руб.
8. Коммерческий банк начисляет на вклады сложные проценты по номинальной ставке 8% годовых. Определить доход вкладчика от вложения средств в сумме 100 000 руб. на срок 3 месяца, если проценты начисляются ежемесячно.
9. Вексель номинальной стоимостью 10 000 руб. и сроком обращения два года учтен за 2 месяца до окончания срока его обращения по сложной учетной ставке 10% годовых. Найти стоимость векселя на момент его учёта.

10. Определите величину дисконта от суммы задолженности в размере 100 000 руб. за полгода по сложной учетной ставке 1,5% в месяц.
11. Согласно условиям договора задолженность на сумму 10 млн. руб. полностью погашается векселем. Срок обращения данного векселя – 1 год с момента его получения предприятием. Через пол года вексель был учтён по сложной учетной ставке 8 % годовых. Определите полученную при его учёте сумму.
12. Вексель номинальной стоимостью 5 000 руб. и сроком обращения один год учтен за 6 месяцев до окончания срока его обращения по номинальной учетной ставке 10% годовых. Найти стоимость векселя на момент его учета, если операция учета производится ежемесячно.

13. Вексель номинальной стоимостью 3 000 руб. и сроком обращения полгода учтён за 12 дней до окончания срока его обращения по номинальной учетной ставке 6% годовых. Найдите стоимость векселя на момент его учёта, если операция учёта производится ежедневно.
14. За какой срок сумма в 100 000 руб. достигнет величины 200 000 руб. при непрерывном начислении процентов и силе роста 8%?
15. Банк начисляет на сумму 1 млн. руб., находящуюся на расчётном счету производственной фирмы непрерывные проценты. Определите наращенную сумму за 2 месяца, если сила роста изменяется следующим образом: в первый месяц равна 0,1%, во второй – 0,15%.

16. Найдите величину множителя наращения за 4 года, если начальное значение силы роста составляет 5% и затем сила роста изменяется непрерывным и линейным образом на 0,1 % в год.
17. Капитал в сумме 10000 руб. внесен в банк сроком на 2 месяца. Определите наращенную сумму, если начисление процентов производится непрерывно по ставке $\delta = 2\%$.
18. Найдите величину множителя наращения за 6 месяцев, если начальное значение силы роста составляет 2% и затем сила роста изменяется непрерывным образом с ежемесячным приростом в 0,5 %.

19. Два банка предлагают следующие условия: в первом на вклады начисляются сложные проценты из расчета 8% годовых, во втором производится начисление по непрерывной ставке $\delta = 2\%$. В какой банк клиенту выгоднее вкладывать деньги?
20. Два банка предлагают следующие условия: в первом на вклады начисляются проценты по номинальной ставке 5% годовых при ежемесячном начислении, во втором – производится начисление по непрерывной ставке $\delta = 3\%$. В какой банк клиенту выгоднее вкладывать деньги?
21. Определите полную сумму вклада через 1 год, если известно, что его первоначальная величина составляла 5 000 руб., начислялась непрерывная процентная ставка в первый месяц 1%, а затем увеличивалась ежемесячно на 0,2%.

22. Определите текущую стоимость предприятия, если известно, что через 5 лет планируется его продать за 1 млн руб. Применяется непрерывная ставка, равная 3%.
23. На депозитный счет внесена сумма 50 000 руб. под 8% годовых (сложные проценты). Найти срок, за который данная сумма увеличится вдвое.
24. Определите срок, за который первоначальная сумма вклада 100 000 руб. при начислении непрерывных процентов по ставке 5% увеличилась до 300 000 руб.
25. Определите величину силы роста, если известно, что первоначальная стоимость ценной бумаги составляла 1000 руб., а через 2 года она была продана за 2000 руб.

26. Определите срок, за который капитал в размере 100 000 руб. превратился в 200 000 руб. при начислении непрерывных процентов по ставке 6%.
27. Предлагается платеж в 50 тыс. руб. со сроком уплаты через 3 года заменить платежом со сроком уплаты через 5 лет. Найти новую сумму платежа, исходя из процентной ставки 12 % годовых.
28. Решено консолидировать два платежа со сроками 20.04 и 10.07 и суммами платежа 20 тыс. руб. и 30 тыс. руб. Срок консолидации платежей 31.05. Определить сумму консолидированного платежа при условии, что ставка равна 10% годовых.

4. ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОЦЕНТНЫЕ РАСЧЁТЫ

- 4.1. Изменение финансовых условий
- 4.2. Сущность инфляции и необходимость её учёта в финансовых расчётах
- 4.3. Учёт инфляции при использовании простых процентов
- 4.4. Учёт инфляции при использовании сложных процентов
- 4.5. Оценка доходности валютных операций

- 4.6. Конверсия валют и наращение процентов
- 4.7. Оценка доходности купли-продажи краткосрочных финансовых инструментов
- 4.8. Налог на полученные проценты

4.1. Изменение финансовых условий

- В практической деятельности часто возникает необходимость изменения условий ранее заключенного контракта при объединении нескольких платежей или замене единовременного платежа рядом последовательных платежей. Естественно, что в таких условиях ни один из участников финансовой операции не должен пострадать от изменения финансовых условий.
- Решение подобных задач сводится к построению уравнения эквивалентности, в котором сумма заменяемых платежей, приведённая к какому-то одному моменту времени, приравнена к сумме платежей по новому обязательству, приведённому к тому же моменту времени.

- Эквивалентными считаются платежи, которые будучи «приведёнными» к одному моменту времени, окажутся равными. Две суммы, выплачиваемые в разные моменты времени, считаются эквивалентными, если их рассчитанные к одному моменту времени и по одной ставке величины (наращенные или современные), дают одинаковый результат.
- Принцип финансовой эквивалентности широко применяется при решении задач, связанных с изменением финансовых условий: объединения, сплита (раздела) платежей, их переноса в ту или иную сторону. Общим методом решения задач подобного рода является построение уравнения эквивалентности, в котором сумма приведённых заменяемых платежей приравнивается к сумме платежей по новому обязательству.

- Для краткосрочных контрактов консолидация платежей осуществляется на основе простых ставок. Величина объединённого платежа определяется суммой приведённых платежей: платежи, срок оплаты по которым откладывается, наращиваются на срок отсрочки, платежи, которые выплачиваются досрочно, дисконтируются на срок предоплаты:

$$\sum FV = \sum_1 PV_1(1+n_1r) + \sum_2 PV_2(1+n_2r)^{-1},$$

где PV_1 и PV_2 – размеры платежей, которые соответственно выплачиваются позже и досрочно;

- По сложным процентным ставкам формула консолидированного платежа выглядит следующим образом:

$$\sum FV = \sum_1 PV_1(1+r)^{n_1} + \sum_2 PV_2(1+r)^{-n_2}$$

- В зависимости от вида применяемых процентных ставок и направлений переноса платежа применяют следующие множители наращивания и дисконтирования (табл. 4.1.):

Ставки	Множители наращивания	Множители дисконтирования
Простая процентная	$1 + rn$	$(1 + rn)^{-1}$
Сложная процентная	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$
Простая учётная	$(1 - dn)^{-1}$	$1 - dn$
Сложная учётная	$(1 - d)^{-n}$	$(1 - d)^n$
Номинальная процентная	$(1 + APR / m)^{mn}$	$(1 + APR / m)^{-mn}$
Номинальная учётная	$(1 - f / m)^{-mn}$	$(1 - f / m)^{mn}$

4.2. Сущность инфляции и необходимость её учёта в финансовых расчётах

- Во всех ранее рассмотренных методах *наращения и дисконтирования* все денежные суммы учитывались по *номиналу*, т.е. не учитывался *фактор инфляции*. Иначе говоря, не принималось во внимание снижение реальной покупательной способности денег за период, охватываемый рассматриваемыми операциями.
- **Инфляция**, как экономическое явление, отражает повышение общего уровня цен на товары и услуги. Инфляция представляет устойчивый рост среднего уровня цен на товары и услуги.

- **Индекс цен** (I_t) показывает, во сколько раз выросли цены, а уровень инфляции (τ) – темп их прироста. Для расчёта этих показателей необходимы значения цен корзины в текущем и базовом периодах.
- **Индекс потребительских цен** (CPI) – показатель инфляции, характеризующий динамику среднего уровня цен на постоянный набор товаров и услуг. Расчёт ИПЦ в РФ осуществляется ежемесячно нарастающим итогом с начала каждого года.
- Инфляция является цепным процессом, поэтому индекс цен за период (например, год), как цепной индекс, будет равен произведению базовых индексов цен за каждый его составляющий период (месяц).

Связь индекса цен (I_t) и темпа роста цен (уровня цен)

$$I_t = (\tau + 1)^n$$

Расчёт ИПЦ (по индексу Ласпейреса)

$$CPI = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0}$$

Расчёт дефлятора ВВП

$$GDP \text{ deflator} = \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1}$$

4.3. Учёт инфляции при использовании простых процентов

- Наращение по простой процентной ставке будет обесцениваться ростом цен. Формула *реальной наращенной суммы по простым процентам* выглядит как:

$$FV = PV \frac{1+nr}{I_{\tau}} = PV \frac{1+nr}{(1+\tau)^n}$$

- Из приведённой выше формулы следует, что *реальное наращение* первоначального капитала с учётом покупательной способности денег будет происходить только в том случае, если $1 + nr > I_{\tau}$. Если $1 + nr = I_{\tau}$, то *наращение* только лишь компенсирует негативное действие инфляции.

- Владельцы денежных средств не могут смириться с их инфляционным обесценением и предпринимают различные попытки компенсации потерь, наиболее распространённой среди которых является *корректировка ставки процента*, т.е. увеличение её на величину инфляционной премии.
- Скорректированная таким образом ставка – **брутто-ставка** – получается из скорректированного на инфляцию множителя наращения:

$$r_{\delta p} = \frac{(1+nr)I_{\tau} - 1}{n} = \frac{(1+nr)(1+\tau)^n - 1}{n},$$

где r – доходность финансовой операции согласно условий договора;

$r_{БР}$ – скорректированная с поправкой на инфляцию норма доходности (*брутто-ставка*).

- В западной финансовой литературе *брутто-ставку* называют *номинальной ставкой*. Применение этого названия в расчёте инфляции может запутать, поскольку *номинальная ставка* широко применяется в расчётах.
- Если объявлена требуемая норма доходности по простым процентам, то *реальную процентную ставку (нетто-ставку)*, т.е. доходность финансовой операции с учётом инфляции при начислении простых процентов можно определить по формуле:

$$r_{РЕАЛ} = \frac{(1+nr)/I_{\tau} - 1}{n} = \frac{(1+nr)/(1+\tau)^n - 1}{n},$$

где $r_{РЕАЛ}$ – реальная доходность финансовой операции (*нетто-ставка*);

r – доходность финансовой операции согласно условий договора.

- Как видно из предыдущих формул, при наращении по простым процентам реальная доходность зависит от срока операции. Положительной простая *нетто-ставка* может быть только при условии $(1 + nr) > I_\tau$. Только выполнение этого условия, т.е. превышение коэффициента наращения над индексом цен, будет способствовать реальному росту вложенного капитала.
- Компенсация потерь от инфляции достигается не только путём увеличения процентной ставки на величину инфляционной премии, но и индексацией первоначальной суммы инвестиций согласно движению определённого, заранее оговоренного индекса:

$$FV = PV \cdot I_\tau(1 + nr)$$

- Если наращение капитала производится на основе простой учётной ставки, то формула для определения учётной ставки, компенсирующей потери от инфляции, имеет следующий вид:

$$d_{\delta p} = \frac{1 - (1 - nd)I_\tau}{n} = \frac{1 - (1 - nd)(1 + \tau)^n}{n}$$

- Если объявлена требуемая доходность по простой учётной ставке, то реальную учётную ставку, т.е. доходность операции с учётом инфляции, при наращении по простой учётной ставке можно определить по формуле:

$$d_{PEAA} = \frac{1 - (1 - nd)/I_\tau}{n} = \frac{1 - (1 - nd)/(1 + \tau)^n}{n}$$

Простая процентная ставка, компенсирующая потери от инфляции (брутто-ставка)

$$r_{\delta p} = \frac{(1 + nr)I_\tau - 1}{n} = \frac{(1 + nr)(1 + \tau)^n - 1}{n}$$

Доходность операции с учетом инфляции (реальная процентная ставка)

$$r_{PEAA} = \frac{(1 + nr)/I_\tau - 1}{n} = \frac{(1 + nr)/(1 + \tau)^n - 1}{n}$$

Компенсация потерь от инфляции индексированием

$$FV = PV(1 + nr) \cdot I_\tau = PV(1 + nr)(1 + \tau)^n$$

Простая учётная ставка, компенсирующая потери от инфляции

$$d_{\delta p} = \frac{1 - (1 - nd)I_{\tau}}{n} = \frac{1 - (1 - nd)(1 + \tau)^n}{n}$$

Доходность операции с учетом инфляции (реальная учётная ставка)

$$d_{PEAA} = \frac{1 - (1 - nd)/I_{\tau}}{n} = \frac{1 - (1 - nd)/(1 + \tau)^n}{n}$$

4.4. Учёт инфляции при использовании сложных процентов

- При начислении процентов по сложной ставке и наращение процентов, и их обесценение вследствие инфляции будут индексироваться по сложным процентам:

$$FV = PV \frac{(1+r)^n}{(1+\tau)^n} = PV \left(\frac{1+r}{1+\tau} \right)^n$$

- Как видно, значения этой формулы представляют собой множители наращения, учитывающие ожидаемый уровень инфляции. Посмотрим, как влияют ставка сложных процентов (r) и темп инфляции (τ) на изменение множителя наращения и конечной суммы.

- Из этой формулы следуют следующие выводы:

- 1) если уровень инфляции равен ставке начисляемых процентов ($\tau = r$), то реального роста денежных сумм не будет, т.к. наращение будет полностью поглощаться инфляцией;
- 2) если уровень инфляции выше уровня процентной ставки ($\tau > r$), то происходит «проедание» капитала, и реальная наращенная сумма будет меньше первоначальной денежной суммы;
- 3) если уровень инфляции ниже процентной ставки ($\tau < r$), то это будет соответствовать росту реальной денежной суммы.

- Наращенная по сложным процентам сумма через год с учётом фактора инфляции составит:

$$FV\tau = PV(1+r)(1+\tau)$$

- Из этого выражения получаем расчёт брутто-ставки, т.е. ставки с поправку на инфляцию:

$$r_{op} = (1+r)(1+\tau) - 1 = r + \tau + r \cdot \tau$$

- Данная формула называется **формулой Фишера**, а сумма $(\tau + r \cdot \tau)$, добавляемая к реальной процентной ставке для компенсации потерь от инфляции, является инфляционной премией.

Сложная процентная ставка, компенсирующая потери от инфляции (брутто-ставка)

$$r_{\delta p} = (1+\tau)(1+r) - 1 = r + \tau + r \cdot \tau$$

Номинальная брутто-ставка при начислении процентов несколько раз в год

$$APR_{\delta p} = m \left((1+\tau)(1+APR/m)^m - 1 \right)$$

Сложная учётная ставка, компенсирующая потери от инфляции

$$d_{\delta p} = 1 - (1-d)(1+\tau) = d - \tau + d \cdot \tau$$

Сложная учётная ставка, компенсирующая потери от инфляции, при учёте несколько раз в год

$$f_{\delta p} = m \left(1 - (1+\tau)(1-f/m)^m \right)$$

Доходность операции с учетом инфляции (реальная сложная процентная ставка)

$$r_{PEAL} = \frac{1+r}{1+\tau} - 1 = \frac{1+r}{\sqrt[m]{I_\tau}} - 1$$

Реальная номинальная ставка при начислении процентов несколько раз в год

$$APR_{PEAL} = m \left(\frac{(1+APR/m)^m}{1+\tau} - 1 \right) = m \left(\frac{(1+APR/m)^m}{\sqrt[m]{I_\tau}} - 1 \right)$$

Доходность операции с учетом инфляции
(реальная сложная учётная ставка)

$$d_{PEAL} = 1 - \frac{1-d}{1+\tau} = 1 - \frac{1-d}{\sqrt[m]{I_\tau}}$$

Реальная сложная учётная ставка при учёте
несколько раз в год

$$f_{PEAL} = m \left(1 - \frac{(1-f/m)^m}{1+\tau} \right) = m \left(1 - \frac{(1-f/m)^m}{\sqrt[m]{I_\tau}} \right)$$

4.5. Оценка доходности валютных операций

- Инфляционные опасения граждан и прочие потребности вынуждают их покупать иностранную валюту. Оценка доходности операций купли-продажи валют и их конверсии оценивается с того, что быстрее растёт – валютный курс или индекс цен.
- **Валютный курс** – это цена денежной единицы национальной валюты, выраженная в денежных единицах другой страны. Установление курса иностранной валюты называется **котировкой**.

- **Прямая котировка** отражает стоимость единицы иностранной валюты, выраженной в определенном количестве единиц национальной валюты.
- **Обратная (косвенная) котировка** отражает стоимость единицы национальной валюты, выраженной в определённом количестве единиц иностранной валюты.
- Оценка доходности операций покупки-продажи валюты основывается на сравнении темпов роста валютного курса и индекса цен в моменты купли и продажи валюты. Так, сумма, полученная в результате проведения операции купли-продажи валюты, составит:

$$FV = PV \cdot K_1 / K_0 = PV \cdot I_K$$
 где K_0 и K_1 – курс обмена при покупке и продаже валюты соответственно.

- Поскольку за этот период покупательная способность обеих валют в результате инфляции снизилась, то её реальная покупательная способность может быть определена по следующей формуле:

$$FV = PV \frac{K_1(1+\tau_2)^n}{K_0(1+\tau_1)^n} = PV \cdot I_K \left(\frac{1+\tau_2}{1+\tau_1} \right)^n = PV \cdot I_K \frac{I_{P2}}{I_{P1}} = PV \cdot \frac{I_K}{I_P}$$

где τ_1 и τ_2 – годовые темпы инфляции, показывающие на сколько процентов обесценились ввиду роста цен в своих странах соответственно российский рубль и иностранная валюта.

- Учитывая и колебание валютного курса (I_K), и индекс цен национальной валюты (I_τ), определим доходность вложения в национальную валюту в виде ставки сложных процентов (r) с учётом влияния вышесказанных факторов:

$$FV = PV(1+r)^n = PV \cdot \frac{I_K}{I_\tau} \quad r = \sqrt[n]{\frac{I_K}{I_\tau}} - 1$$

- Как видно из формул, реальная доходность такой финансовой операции покупки-продажи валюты:
 - будет доходной, если курс обмена приобретаемой валюты растёт быстрее курса цен;
 - будет равна нулю, если индексы роста цен и курса обмена валют растут одинаково;
 - будет убыточной, если курс цен растёт быстрее курса обмена приобретённой валюты.

4.6. Конверсия валют и наращение процентов

- При свободной возможности обмена рублей на валюту и обратной конверсии (обмена) возникает необходимость выбора наилучшего варианта размещения денежных средств со сравнением их результата – либо получение дохода от размещения денежных средств под проценты в депозиты, либо их обмен на какую-либо валюту.
- Рассмотрим 4 варианта наращения и конверсии:
 - 1) рубли $\rightarrow$ рубли
 - 2) валюта $\rightarrow$ валюта
 - 3) рубли $\Leftrightarrow$ валюта $\rightarrow$ валюта $\Leftrightarrow$ рубли
 - 4) валюта $\Leftrightarrow$ рубли $\rightarrow$ рубли $\Leftrightarrow$ валюта

- Здесь знак $\rightarrow$ означает процесс наращивания, а $\Leftrightarrow$ означает процесс конверсии.

- Введём следующие условные обозначения:

PV_P – исходная сумма в рублях;
 PV_S – исходная сумма в валюте;
 FV_P – наращенная сумма в рублях;
 FV_S – наращенная сумма в валюте;
 K_0 – курс валюты в начале операции;
 K_1 – курс валюты в конце операции;
 r_P – процентная ставка рублёвых депозитов;
 r_S – процентная ставка валютных депозитов;
 n_P – срок вложений в рублёвые депозиты;
 n_S – срок вложений в валютные депозиты.

- Первые два варианта операций представляют собой наращивание вкладов без конверсии и обмена в исходной валюте. Формулы наращивания по *простым* и *сложным* процентам, а также эффективность таких операций уже рассматривались.
- В операциях *наращивания с конверсией* уже присутствует два источника дохода:
 - 1) наращивание процентов;
 - 2) изменение валютного курса.
- Если *процентная ставка*, как правило, фиксирована, то *валютные курсы* на рынке постоянно меняются. К тому же, *двойное конвертирование* валюты (в начале и в конце операции) при неблагоприятных условиях может быть даже убыточным.

- Вариант *рубли $\Leftrightarrow$ валюта $\rightarrow$ валюта $\Leftrightarrow$ рубли* предполагает пошаговое выполнение трёх действий: обмен рублей на валюту, начисление на неё процентов и конверсию обратно в рубли.
- Конечную сумму данной операции можно определить из формул:
 - 1) при начислении *процентов по простой ставке*:

$$FV_P = PV_P (1 + n_S r_S) K_1 / K_0$$
 - 2) при начислении *процентов по сложной ставке*:

$$FV_P = PV_P (1 + r_S)^{n_S} K_1 / K_0$$
- Исходя из обоих вариантов обмена с конверсией можно сказать, что конечная сумма будет зависеть от колебаний курсов покупки-продажи, а также ставки процентов по валюте депозитного вклада.

- При обмене валюты в рубль с дальнейшим начислением на них процентов и обратной конвертацией в валюту конечная сумма будет определяться как:

1) при начислении процентов по простой ставке:

$$FV_{\$} = PV_{\$} (1 + n_p r_p) K_0 / K_1$$

2) при начислении процентов по сложной ставке:

$$FV_{\$} = PV_{\$} (1 + r_p)^{n_p} K_0 / K_1$$

Эффективность конвертирования валюты в рубль и наращения по простой ставке

$$r_{\$} = \frac{FV_p - PV_p \cdot K_0}{PV_p \cdot n_{\$} \cdot K_1}$$

Эффективность конвертирования валюты в рубль и наращения по сложной ставке

$$r_{\$} = \sqrt[n_{\$}]{\frac{FV_p \cdot K_0}{PV_p \cdot K_1}} - 1$$

Эффективность конвертирования рубля в валюту и наращения по простой ставке

$$r_p = \frac{FV_{\$} - PV_{\$} \cdot K_1}{PV_{\$} \cdot n_p \cdot K_0}$$

Эффективность конвертирования рубля в валюту и наращения по сложной ставке

$$r_p = \sqrt[n_p]{\frac{FV_{\$} \cdot K_1}{PV_{\$} \cdot K_0}} - 1$$

4.7. Оценка доходности купли-продажи краткосрочных финансовых инструментов

- Также, как и при операциях купли-продажи валюты, операции купли-продажи краткосрочных финансовых инструментов могут принести их владельцу некоторый доход или в неблагоприятных случаях – убытки.
- **Покупка и продажа финансовых инструментов по процентной ставке.**
- Если депозитный сертификат или другой подобный краткосрочный финансовый инструмент через некоторое время после его покупки продан до наступления срока его

погашения, то эффективность (доходность) такой операции можно определить в виде ставки простых или сложных процентов.

- Эффективность такой операции зависит от сроков актов купли-продажи, а также цен или процентных в эти моменты времени. Сертификат обеспечивает его владельцу полную доходность только в том случае, если он находился на руках у владельца полный срок.
- Доходность операции купли-продажи имеет место только в том случае, если $t_1 r_{ОБ} > t_2 r_{ПРОД}$. Предельное значение процентной ставки, при которой инвестор получит доход, составит:

$$r_{ПРОД} < t_1 r_{ОБ} / t_2$$

Стоимость сертификата, проданного за t_2 дней до его погашения

$$P_{ПРОД} = P_{НОМ} \left(1 + r \frac{t_1 - t_2}{T} \right)$$

Доходность владения сертификатом в течение $t_1 - t_2$ при продаже по ставке $r_{ПРОД}$

$$r_{ПР} = \left(\frac{1 + t_1 r_{ОБ} / T}{1 + t_2 r_{ПРОД} / T} - 1 \right) \cdot \frac{T}{t_1 - t_2}$$

Доходность владения сертификатом в течение $t_1 - t_2$ по сложным ставкам

$$r_{СА} = \left(\frac{K + t_1 r_{ОБ}}{K + t_2 r_{ПРОД}} \right)^{T / (t_1 - t_2)} - 1$$

Доходность покупки после выпуска и продажи в момент погашения по номиналу

$$r_{ПР} = \left(P_{НОМ} \frac{1 + t_1 r_1 / K}{P_{ПОК}} - 1 \right) \frac{T}{t_2}$$

Доходность покупки после выпуска и продажи в момент погашения по номиналу

$$r_{СА} = \left(\frac{P_{НОМ} (1 + t_1 r / T)}{P_{ПОК}} \right)^{T / t_2} - 1$$

- **Покупка и продажа векселя (простая учётная ставка).**
Пусть номинал векселя равен FV . Он был куплен (учтён) по учётной ставке d_1 за t_1 дней до наступления срока по цене учёта (покупки):
$$P_{\text{ПОК}} = FV(1 - t_1 d_1 / T)$$
- За t_2 дней до погашения вексель продаётся с дисконтом по ставке d_2 :
$$P_{\text{ПРОД}} = FV(1 - t_2 d_2 / T)$$
- Инвестиции в начале операции купли-продажи составили $P_{\text{ПОК}}$, а отдача от них равна $P_{\text{ПРОД}}$. Продолжительность операции $t_1 - t_2$. Для того, чтобы операция не была убыточной, необходимо, чтобы $t_2 d_2 < t_1 d_1$ или $P_{\text{ПОК}} < P_{\text{ПРОД}}$.

Доходность купли-продажи векселя в виде ставки простых процентов

$$r_{\text{пр}} = \frac{P_{\text{ПРОД}} - P_{\text{ПОК}}}{P_{\text{ПОК}}} \cdot \frac{T}{t_1 - t_2}$$

Доходность купли-продажи векселя в виде ставки простых процентов

$$r_{\text{пр}} = \left(\frac{1 - t_2 d_2 / T}{1 - t_1 d_1 / T} - 1 \right) \frac{T}{t_1 - t_2}$$

Доходность купли-продажи векселя в виде ставки сложных процентов

$$r_{\text{сЛ}} = \left(\frac{P_{\text{ПРОД}}}{P_{\text{ПОК}}} \right)^{T/(t_1 - t_2)} - 1 \quad r_{\text{сЛ}} = \left(\frac{K - t_2 d_2}{K - t_1 d_1} \right)^{T/(t_1 - t_2)} - 1$$

4.8. Налог на полученные проценты

- В ряде стран полученные проценты облагаются налогом, что уменьшает реальную наращенную сумму и доходность депозитных операций. В РФ подлежат налогообложению вклады с доходностью, превышающей пороговую ставку (ст. 214.2 НК) - рублёвые вклады с доходностью, превышающей на 5% ставку рефинансирования ЦБ РФ, и валютные вклады с доходностью, превышающей 9% годовых.
- При исчислении налога на проценты возможны два варианта: единовременное начисление налога за весь срок сразу или последовательное его начисление в каждом отдельном периоде.

- При налогообложении *простых процентов* за весь срок сумма налога составит:

- 1) при налогообложении всей суммы вклада:

$$T = PV \cdot TRP \cdot r \frac{t}{y}$$

- 2) при налогообложении ставки, превышающей пороговую, установленную законодательством:

$$T = PV \cdot TRP (r - r_{\Pi}) \frac{t}{y}$$

где T – общая сумма налога (tax);

TRP – ставка налога на прибыль (tax rate profit);

y – год (year, tax year)

r_{Π} – пороговая ставка процентов.

- Нарощенная сумма с учётом налогообложения (FVT) составит:

$$FVT = FV - (FV - PV)TRP = PV(1 + nr(1 - TRP))$$

- Таким образом, учёт налога сводится к сокращению наращенной суммы, поскольку помимо срока и *процентной ставки*, появляется и множитель $(1 - TRP)$, размер которого зависит от *налоговой ставки* по полученным процентам и кредитам.
- Данная взаимосвязь получила название **эффекта «налогового щита»** - чем выше сумма уплаченных процентов, тем ниже будет налогооблагаемая прибыль, и следовательно ниже величина налоговых платежей.

- Таким образом, часть *процентов*, уплаченных предприятием по кредитам и займам, вернётся обратно в виде сокращения затрат по налогу на прибыль.
- Эффект «налогового щита» выражается коэффициентом $(1 - TRP)$, а абсолютная величина налоговых выигрышей определяется текущим долгом предприятия и установленной ставкой налога на прибыль:

$$VTS = PV \cdot TRP,$$

где VTS – величина налоговых выигрышей (value tax shield)

- В долгосрочных операциях наращение производится по схеме *сложных процентов*.

- При единоразовом налогообложении за весь срок такой операции размер налога определяется по формуле:

$$T = (FV - PV)TRP = PV \cdot TRP((1 + r^*)^n - 1)$$

- где r^* – база налогообложения в соответствии с национальным законодательством – или *процентная ставка* полностью, или *процент* её превышения над пороговой ставкой.

- *Нарощенная сумма* после выплаты налога составит:

$$FVT = FV - T = PV((1 - TRP)(1 + r^*)^n + rt)$$

- В случае, если налог на проценты исчисляется за каждый период отдельно, то его величина будет переменной – с ростом *наращенной суммы* будет расти и сумма налога.

- Так, величина налога за m -й период составит:

$$Tm = (FVm - FVm-1)rt = PV \cdot TRP ((1 + r^*)^m - (1 + r^*)^{m-1}) = \\ = PV \cdot r^* \cdot TRP (1 + r^*)^{m-1}$$

- Сумма налогообложения за весь срок будет равна сумме налогов в каждом периоде и будет равной полученной ранее формуле единоразовой уплаты налога:

$$\Sigma T_m = \Sigma PV \cdot r^* \cdot TRP (1 + r^*)^{m-1} = PV \cdot TRP ((1 + r^*)^n - 1) = T$$

- Как видно, метод взыскания не влияет на общую его сумму – она при любом случае одинакова.

Контрольные вопросы к теме 4

- 1) Применение принципа финансовой эквивалентности при изменении финансовых условий
- 2) Сущность и показатели инфляции
- 3) Учёт инфляции по простым ставкам
- 4) Учёт инфляции по сложным ставкам
- 5) Конверсия валют и наращение процентов
- 6) Оценка доходности купли-продажи различных краткосрочных финансовых инструментов
- 7) Налогообложение полученных процентов

Задачи по теме 4

1. Имеются 2 обязательства. Условия первого – оплатить 400 тыс. руб. через 4 мес., условия второго – оплатить 500 тыс. руб. через полгода. Можно ли их считать равномерными при применении простой ставки 12% годовых?
2. Платежи в 2 и 3 млн. руб. со сроками оплаты через 2 и 3 года объединяются в один со сроком оплаты в 2,5 года. При консолидации используется сложная ставка 13% годовых.

3. Четыре векселя номинальной стоимостью 50, 60, 35 и 40 млн. руб. со сроками погашения в 45, 60, 70 и 100 дней объединяются в один со сроком погашения 80 дней. Объединение происходит по а) простой учётной ставке 8% годовых; б) сложной учётной ставке 8% годовых.
4. Вексель был куплен за 160 дней до его погашения по учётной ставке 6% годовых. Через 40 дней вексель был перепродан по учётной ставке 5,75%. Определите эффективность операции купли-продажи векселя в виде простой ставки процентов.

5. Депозитный сертификат был куплен за 1 млн.руб. за 150 дней до его выкупа. Финансовый инструмент был перепродан через 90 дней за 1,1 млн.руб. Какова доходность финансовой операции купли-продажи в виде простой и сложной процентной ставок?
6. Финансовый инструмент, приносящий постоянный процент, был куплен за 200 дней до его погашения и перепродан через 100 дней. В момент покупки процентная ставка была 10,2%, в момент продажи – 9,9%. Какова доходность купли-продажи финансовой операции в виде годовой ставки сложных процентов?

7. Определите ставку процентов при выдаче ссуды с учётом уровня инфляции 0,5 % в месяц и погашаемую сумму для ссуды в размере 15 тыс. руб., выданной на 3 месяца при требуемой реальной доходности операции 3,5 % годовых.
8. Ссуда 100 тыс. руб. выдана на год. Требуемая реальная доходность операции 10 % годовых, ожидаемый годовой уровень инфляции 8 %. Определите ставку процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции и погашаемую сумму.

9. Платежи суммами в размере 160, 150, 120 тыс. руб. со сроками погашения 200, 280, 170 дней от некоторой выбранной даты заменяются одним со сроком погашения 250 дней от той же даты. Определите сумму нового объединенного платежа при простой ставке 13 % годовых и временной базой 360 дней.
10. Ссуда 70 тыс. руб. выдана на год. Требуемая реальная доходность операции 4 % годовых, ожидаемый годовой уровень инфляции 10 %. Определите ставку процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции и погашаемую сумму.

11. Банк в в конце мая 2014 установил следующую котировку валют:

	Покупка	Продажа
Доллар США / рубль	34,33	34,66
Евро/рубль	46,87	47,32

Определите: а) кросс-курс доллара США к евро; б) сколько евро можно приобрести на 200 долларов США; в) сколько долларов США можно приобрести на 2 500 евро.

5. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ И ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

- 5.1. Потоки платежей и их классификация
- 5.2. Наращенная величина аннуитета
- 5.3. Приведённая величина аннуитета
- 5.4. Рента пренумерандо
- 5.5. Ренты с выплатами в течение периода.
Отложенные ренты
- 5.6. Определение параметров аннуитета
- 5.7. Бессрочный аннуитет

- 5.8. Дискретный поток платежей с непрерывным начислением процентов
- 5.9. Постоянная непрерывная рента
- 5.10. Срочные ренты с периодом платежей более года
- 5.11. Ренты с постоянным абсолютным изменением платежей
- 5.12. Ренты с постоянным относительным приростом платежей
- 5.13. Переменный непрерывный поток платежей
- 5.14. Конверсия рент. Объединение рент
- 5.15. Изменение параметров рент
- 5.16. Нерегулярные потоки платежей

5.1. Потоки платежей и их классификация

- Погашение ссуды возможно не только единовременным платежом, но множеством распределённых во времени платежей. В финансовой литературе ряд распределённых во времени выплат и поступлений называется **потоком платежей**.
- Отдельные элементы такого ряда платежей именуются **членами потока**.
- Члены потока могут быть как положительными величинами (**поступления**), так и отрицательными величинами (**выплатами**), а временные интервалы между членами такого потока могут быть равными и неравными.

- Поток платежей, все члены которого имеют одинаковое направление (знак), а временные интервалы между последовательными платежами постоянны, называется **финансовой рентой** или **аннуитетом**.
- Рента описывается следующими параметрами: **член ренты** – размер каждого отдельного платежа, **период ренты** – временной интервал между двумя последовательными платежами, **срок ренты** – время от начала финансовой ренты до конца её последнего периода, **процентная ставка**.
- В своей классификации ренты подразделяются по таким признакам как: по периоду выплаты платежей, по числу начислений процентов, по величине членов ренты, по числу членов ренты, по вероятности выплаты и по методу выплаты платежей.

- При рассмотрении финансовой ренты используются следующие основные категории:

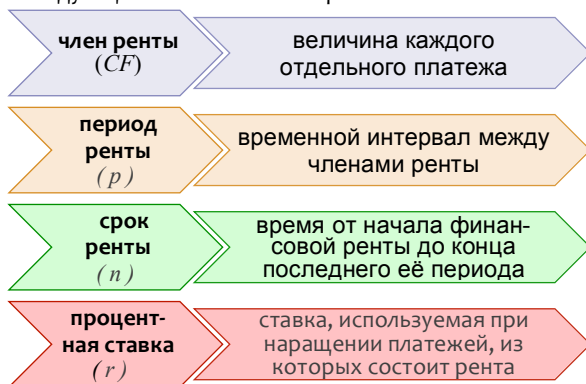


Табл. 5.1. Виды финансовых рент

По периоду выплаты платежей:		
годовые ренты с периодом ренты равным 1 году;		срочные ренты с периодом ренты более или менее года.
По числу начислений процентов:		
ренты с начислением процентов 1 раз в год;	ренты с начислением процентов m раз в год;	ренты с непрерывным начислением процентов.

Продолжение табл. 5.1.

По величине членов ренты:	
постоянные ренты , где величина каждого отдельного платежа постоянна, т.е. рента с равными членами;	переменные ренты , где величина платежа варьируется, т.е. рента с неравными членами.
По числу членов ренты:	
с конечным числом членов (ограниченные ренты) , когда число членов ренты конечно и заранее известно;	с бесконечным числом (вечные ренты, Perpetuity) , когда число её членов заранее не известно.

Окончание табл. 5.1.

По вероятности выплаты ренты:	
верные ренты , которые подлежат безусловной выплате, т.е. не зависят не от каких условий, например, погашение кредита;	условные ренты , которые зависят от наступления некоторого случайного события.
По методу выплаты платежей:	
обычные ренты (постнумерандо, Ordinary Annuity) – с выплатой платежа в конце периода ренты;	ренты, с выплатой в начале периода ренты (пренумерандо, Annuity Due).

5.2. Нарастающая величина аннуитета

- Нарастающая сумма ренты (FVA) представляет собой сумму всех её платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

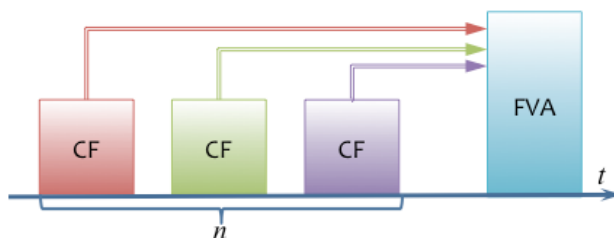


Рис. 5.1. Механизм наращивания финансовой ренты

- **Нарращенная сумма ренты** представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом (CF) и множителем прогрессии равным коэффициенту наращения ренты $FVIFA_n$. (см. рис. 5.1)

Годовая постоянная обычная рента

$$FVA = CF \frac{(1+r)^n - 1}{r} = CF \cdot FVIFA_{n;r}$$

Годовая рента с начислением процентов несколько раз в год

$$FVA = CF \frac{(1 + APR/m)^{nm} - 1}{(1 + APR/m)^m - 1} = CF \cdot FVIFA_{nm;APR}$$

Срочная рента при начислении процентов один раз в год

$$FVA = CF \frac{(1+r)^n - 1}{p((1+r)^{1/p} - 1)} = CF \cdot FVIFA_{n;r}^{(p)}$$

Срочная рента с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$FVA = CF \frac{(1 + APR/m)^{nm} - 1}{p((1 + APR/m)^{m/p} - 1)} = CF \cdot FVIFA_{nm;APR}^{(p)}$$

Прямой метод расчёта (на основе годовой постоянной обычной ренты)

$$FVA = \sum_i CF_i (1+r)^{n_i}$$

5.3. Приведённая величина аннуитета

- **Современная (текущая) величина** потока платежей представляет собой сумму всех приведённых на начальный момент ренты платежей (CF), дисконтированных по процентной ставке ренты.

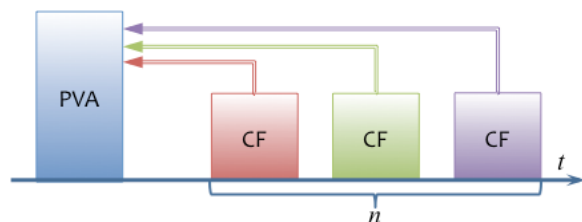


Рис. 5.2. Механизм дисконтирования потока платежей

- Это важнейшая характеристика инвестиционного анализа, являющаяся основой для измерения эффективности финансово-кредитных операций, сравнения условий контрактов и т.д.

Годовая постоянная обычная рента

$$PVA = CF \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} = CF \cdot PVIFA_{n;r}$$

Годовая рента с начислением процентов несколько раз в год

$$PVA = CF \frac{1 - (1 + APR/m)^{-mn}}{(1 + APR/m)^m - 1} = CF \cdot PVIFA_{mn;APR}$$

Срочная рента при начислении процентов один раз в год

$$PVA = CF \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{p((1 + r)^{1/p} - 1)} = CF \cdot PVIFA_{n;r}^{(p)}$$

Срочная рента с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$PVA = CF \frac{1 - (1 + APR/m)^{-mn}}{p((1 + APR/m)^{m/p} - 1)} = CF \cdot PVIFA_{mn;APR}^{(p)}$$

Прямой метод расчёта (на основе годовой постоянной обычной ренты)

$$PVA = \sum_t \frac{CF_t}{(1 + r)^{n_t}}$$

5.4. Рента пренумерандо

- Рента пренумерандо с выплатами в начале периодов отличается от обычной ренты тем, что каждый член такой ренты работает на период больше, чем у обычной ренты постнумерандо.
- Поэтому каждый член такой ренты работает на период больше, чем в соответствующей ренте постнумерандо.
- Отсюда наращенная (приведённая) сумма ренты пренумерандо будет больше суммы соответствующей ренты постнумерандо:

- в $(1 + r)$ раз при начислении процентов раз в год;
- в $(1 + APR/m)^m$ при начислении процентов m раз в год.

Наращенная величина годовой постоянной ренты пренумерандо

$$FVA = CF \frac{(1+r)^n - 1}{r} (1+r) = CF \cdot (1+r) \cdot FVIFA_{n;r}$$

Текущая величина годовой постоянной ренты пренумерандо

$$PVA = CF \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} (1+r) = CF \cdot (1+r) \cdot PVIFA_{n;r}$$

Наращенная величина годовой ренты при начислении процентов несколько раз в год

$$FVA = CF \frac{(1 + APR/m)^{mn} - 1}{(1 + APR/m)^m - 1} (1 + APR/m)^m$$

Текущая величина годовой ренты при начислении процентов несколько раз в год

$$PVA = CF \frac{1 - (1 + APR/m)^{-mn}}{(1 + APR/m)^m - 1} (1 + APR/m)^m$$

Наращенная величина срочной ренты при начислении процентов один раз в год

$$FVA = CF \frac{(1+r)^n - 1}{p((1+r)^{1/p} - 1)} (1+r)^{1/p}$$

Текущая величина срочной ренты при начислении процентов один раз в год

$$PVA = CF \frac{1 - (1+r)^{-n}}{p((1+r)^{1/p} - 1)} (1+r)^{1/p}$$

Наращенная величина срочной ренты с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$FVA = CF \frac{(1 + APR/m)^{mn} - 1}{p((1 + APR/m)^{m/p} - 1)} (1 + APR/m)^{m/p}$$

Текущая величина срочной ренты с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$PVA = CF \frac{1 - (1 + APR/m)^{-mn}}{p((1 + APR/m)^{m/p} - 1)} (1 + APR/m)^{m/p}$$

5.5. Ренты с выплатами в течение периода. Отложенные ренты

- Зачастую на практике встречается ситуация, когда платежи осуществляются не в конце периода, как в обычной ренте, и не в начале периода, как в ренте пренумерандо, а в течение периода – в его середине или на какую-то определённую дату.
- В таких случаях, также, как и в ренте пренумерандо, дополнительно появляется соответствующий варианту множитель наращивания, но не в первой степени, а в степени, отражающей ту часть периода, в которой производились платежи.

Наращенная величина годовой постоянной отложенной ренты

$$FVA = CF \frac{(1+r)^n - 1}{r} (1+r)^{t/T} = CF \cdot (1+r)^{t/T} \cdot FVIFA_{n,r}$$

Текущая величина годовой постоянной отложенной ренты

$$PVA = CF \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} (1+r)^{t/T} = CF \cdot (1+r)^{t/T} \cdot PVIFA_{n,r}$$

Наращенная величина годовой ренты при начислении процентов несколько раз в год

$$FVA = CF \frac{(1 + APR/m)^{nm} - 1}{(1 + APR/m)^m - 1} (1 + APR/m)^{m \cdot t/T}$$

Текущая величина годовой ренты при начислении процентов несколько раз в год

$$PVA = CF \frac{1 - (1 + APR/m)^{-nm}}{(1 + APR/m)^m - 1} (1 + APR/m)^{m \cdot t/T}$$

Наращенная величина срочной ренты при начислении процентов один раз в год

$$FVA = CF \frac{(1+r)^n - 1}{p((1+r)^{1/p} - 1)} (1+r)^{t/(T \cdot p)}$$

Текущая величина срочной ренты при начислении процентов один раз в год

$$PVA = CF \frac{1 - (1+r)^{-n}}{p((1+r)^{1/p} - 1)} (1+r)^{t/(T \cdot p)}$$

Наращенная величина срочной ренты с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$FVA = CF \frac{(1 + APR/m)^{mn} - 1}{p((1 + APR/m)^{m/p} - 1)} (1 + APR/m)^{m \cdot t/(T \cdot p)}$$

Текущая величина срочной ренты с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$PVA = CF \frac{1 - (1 + APR/m)^{-mn}}{p((1 + APR/m)^{m/p} - 1)} (1 + APR/m)^{m \cdot t/(T \cdot p)}$$

5.6. Определение параметров аннуитета

- Как уже было показано выше, постоянная рента описывается набором постоянных показателей. До сих пор мы определяли *наращенную (FVA) и приведённую (PVA) величину аннуитета*.
- Но при разработке финансовых условий и контрактов могут возникнуть условия, когда необходимо определить другие параметры аннуитета – срок или размер платежа. Каждый из этих параметров определяется из *наращенной, и из приведённой стоимости аннуитета*.

Срок годовой постоянной обычной ренты из наращенной величины аннуитета

$$n = \frac{\ln(1 + FVA \cdot r / CF)}{\ln(1 + r)}$$

Срок годовой постоянной обычной ренты из текущей величины аннуитета

$$n = \frac{-\ln(1 - r \cdot PVA / CF)}{\ln(1 + r)}$$

Срок годовой ренты с начислением процентов несколько раз в год

$$n = \frac{\ln(1 + FVA((1 + APR/m)^m - 1)/CF)}{m \cdot \ln(1 + APR/m)}$$

Срок годовой ренты с начислением процентов несколько раз в год

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \left((1 + APR/m)^m - 1\right) \cdot PVA / CF\right)}{m \cdot \ln(1 + APR/m)}$$

Срок срочной ренты при начислении процентов один раз в год

$$n = \frac{\ln\left(1 + FVA \cdot p \left((1 + r)^{1/p} - 1\right) / CF\right)}{\ln(1 + r)}$$

Срок срочной ренты при начислении процентов один раз в год

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \left((1 + r)^{1/p} - 1\right) \cdot PVA \cdot p / CF\right)}{\ln(1 + r)}$$

Срок срочной ренты с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$n = \frac{\ln\left(1 + FVA \cdot p \left((1 + APR/m)^{m/p} - 1\right) / CF\right)}{m \cdot \ln(1 + APR/m)}$$

Срок срочной ренты с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \left((1 + APR/m)^{m/p} - 1\right) \cdot PVA \cdot p / CF\right)}{m \cdot \ln(1 + APR/m)}$$

Платёж годовой постоянной обычной ренты из наращенной величины аннуитета

$$CF = \frac{FVA \cdot r}{(1 + r)^n - 1} = \frac{FVA}{FVIFA_{n,r}}$$

Платёж годовой постоянной обычной ренты из текущей величины аннуитета

$$CF = \frac{PVA \cdot r}{1 - (1 + r)^{-n}} = \frac{PVA}{PVIFA_{n,r}}$$

Платёж годовой ренты с начислением процентов несколько раз в год

$$CF = \frac{FVA \cdot \left((1 + APR/m)^m - 1\right)}{(1 + APR/m)^m - 1} = \frac{FVA}{FVIFA_{m,APR}}$$

Платёж годовой ренты с начислением процентов несколько раз в год

$$CF = \frac{PVA \cdot \left((1 + APR/m)^m - 1 \right)}{1 - (1 + APR/m)^{-mn}} = \frac{PVA}{PVIFA_{mn; APR}}$$

Платёж срочной ренты при начислении процентов один раз в год

$$\frac{CF}{p} = \frac{FVA \cdot \left((1 + r)^{1/p} - 1 \right)}{(1 + r)^n - 1} = \frac{FVA}{FVIFA_{n; r}^{(p)}}$$

Платёж срочной ренты при начислении процентов один раз в год

$$\frac{CF}{p} = \frac{PVA \cdot \left((1 + r)^{1/p} - 1 \right)}{1 - (1 + r)^{-n}} = \frac{PVA}{PVIFA_{n; r}^{(p)}}$$

Платёж срочной ренты с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$\frac{CF}{p} = \frac{FVA \cdot \left((1 + APR/m)^{m/p} - 1 \right)}{(1 + APR/m)^{mn} - 1} = \frac{FVA}{FVIFA_{mn; APR}^{(p)}}$$

Платёж срочной ренты с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$\frac{CF}{p} = \frac{PVA \cdot \left((1 + APR/m)^{m/p} - 1 \right)}{1 - (1 + APR/m)^{-mn}} = \frac{PVA}{PVIFA_{mn; APR}^{(p)}}$$

5.7. Бессрочный аннуитет

- Если платежи осуществляются достаточно длительное время и их число заранее не может быть известно ($n \rightarrow \infty$), то такой поток называется **бессрочным аннуитетом** или **вечной рентой** (англ. *Perpetuity*).
- Характерными примерами вечных рент являются платежи в пенсионном страховании и договоре пожизненной ренты; консоли – облигации некоторых стран, не имеющие фиксированного срока купонных выплат. В западной практике к бессрочным относят аннуитеты, рассчитанные на 50 и более лет.
- Для данного вида финансовой ренты определение будущей стоимости не имеет смысла.

- Что же касается обратной задачи – определения *приведённой стоимости* – то даже поток с неограниченным числом платежей всё же имеет конечную *приведённую стоимость*, поскольку с финансовой точки зрения платежи отдалённых лет имеют низкую *приведённую стоимость* и сейчас практически ничего не стоят.

- Для *бессрочного годового аннуитета постнумерандо* формула *приведённой стоимости* имеет следующий вид:

$$PVP_{pst} = \frac{CF}{1+r} \cdot \frac{1}{1-1/(1+r)} = \frac{CF}{r}$$

- Приведённая стоимость *бессрочного аннуитета пренумерандо* отличается от данной появлением соответствующего дополнительного коэффициента.

Годовая постоянная вечная рента

$$PVP = \frac{CF}{r}$$

Годовая вечная рента с начислением процентов несколько раз в год

$$PVP = \frac{CF}{(1 + APR/m)^m - 1}$$

Срочная вечная рента при начислении процентов один раз в год

$$PVP = \frac{CF}{p((1+r)^{1/p} - 1)}$$

Срочная вечная рента с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$PVP = \frac{CF}{p((1 + APR/m)^{m/p} - 1)}$$

Годовая вечная рента с непрерывным начислением процентов

$$PVP = \frac{CF}{e^\delta - 1}$$

Срочная вечная рента с непрерывным начислением процентов

$$PVP = \frac{CF}{p(e^{\delta/p} - 1)}$$

5.8. Дискретный поток платежей с непрерывным начислением процентов

- Рента с непрерывным начислением процентов представляет собой ренту, в которой $m \rightarrow \infty$. Заменяв номинальную ставку APR на силу роста δ и перейдя к пределу, получим:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + APR/m)^m = e^\delta$$
- Соотношения у рент с непрерывным начислением процентов образуются путём определения предела в предыдущих формулах при $p \rightarrow \infty$. Данные соотношения получаются из формул эквивалентности между дискретными и непрерывными ставками.

Срочная вечная рента с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$FVA = CF \frac{e^{\delta n} - 1}{p(e^{\delta/p} - 1)} = CF \cdot FVIFA_{n, \delta/p}$$

Годовая вечная рента с непрерывным начислением процентов

$$PVA = CF \frac{1 - e^{-\delta n}}{p(e^{\delta/p} - 1)} = CF \cdot PVIFA_{n, \delta/p}$$

Срочная вечная рента с непрерывным начислением процентов

$$FVA = CF \frac{e^{\delta n} - 1}{e^\delta - 1} = CF \cdot FVIFA_{n, \delta}$$

Текущая величина годовой ренты с непрерывным начислением процентов

$$PVA = CF \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^\delta - 1} = CF \cdot PVIFA_{n, \delta}$$

Текущая величина годовой вечной ренты с непрерывным начислением процентов

$$PVP = \frac{CF}{e^\delta - 1}$$

Текущая величина срочной вечной ренты с непрерывным начислением процентов

$$PVP = \frac{CF}{p(e^{\delta/p} - 1)}$$

5.9. Постоянная непрерывная рента

- В рассмотренных выше примерах предполагалось, что члены потока платежей поступают дискретно, через фиксированные интервалы времени (периоды ренты).
- Но иногда платежи происходят так часто, с такими малыми промежутками между ними, что весь этот процесс воспринимается как *непрерывный*, т.е. принимается, что платежи происходят непрерывно с постоянной интенсивностью. Данный приём увеличивает возможности количественного анализа, особенно при анализе долгосрочных инвестиций.

Наращенная величина ренты с непрерывными платежами и дискретным начислением процентов

$$FVA = CF \frac{(1+r)^n - 1}{\ln(1+r)}$$

Приведённая величина ренты с непрерывными платежами и дискретным начислением процентов

$$PVA = CF \frac{1 - (1+r)^{-n}}{\ln(1+r)}$$

Наращенная величина ренты с непрерывными платежами и начислением процентов

$$FVA = CF \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta} = CF \cdot FVIFA_{n,\delta}$$

Приведённая величина ренты с непрерывными платежами и начислением процентов

$$PVA = CF \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} = CF \cdot PVIFA_{n,\delta}$$

Определение срока непрерывной ренты из её наращенной величины

$$n = \frac{\ln(1 + \delta \cdot FVA / CF)}{\delta}$$

Определение срока непрерывной ренты из её текущей величины

$$n = \frac{\ln(1 - \delta \cdot PVA / CF)}{\delta}$$

5.10. Срочные ренты с периодом платежей больше года

- В предыдущих разделах рассматривались годовые и срочные аннуитеты с периодом платежей не больше года. В случае, если платежи ренты осуществляются с периодом u лет, то платежи с начисляющимися на них в каждый период процентами образуют геометрическую прогрессию, сумма членов которой составит:

$$FVA = CF \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^u - 1} = CF \cdot \frac{s_{n:r}}{s_{u:r}}$$

Наращенная величина срочной постоянной ренты с периодом платежей (u) больше года

$$FVA = CF \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^u - 1} = CF \cdot \frac{FVIFA_{n:r}}{FVIFA_{u:r}}$$

Текущая величина срочной постоянной ренты с периодом платежей (u) больше года

$$PVA = CF \frac{1 - (1+r)^{-n}}{(1+r)^u - 1} = CF \cdot \frac{PVIFA_{n:r}}{PVIFA_{u:r}}$$

Наращенная величина срочной ренты с начислением процентов несколько раз в год

$$FVA = CF \frac{(1 + APR/m)^{nm} - 1}{(1 + APR/m)^{mu} - 1} = CF \cdot \frac{FVIFA_{nm;APR/m}}{FVIFA_{mu;APR/m}}$$

Текущая величина срочной ренты с начислением процентов несколько раз в год

$$PVA = CF \frac{1 - (1 + APR/m)^{-nm}}{(1 + APR/m)^{mu} - 1} = CF \cdot \frac{PVIFA_{nm;APR/m}}{PVIFA_{mu;APR/m}}$$

Наращенная величина срочной ренты с непрерывным начислением процентов

$$FVA = CF \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta u} - 1}$$

Текущая величина срочной ренты с непрерывным начислением процентов

$$PVA = CF \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta u} - 1}$$

5.11. Ренты с постоянным абсолютным изменением платежей

- На практике часто встречаются ситуации, когда величина платежа со временем меняется в ту или иную сторону. Примерами могут быть периодическое увеличение вследствие компенсации инфляции платежей по договору аренды или других постоянных платежей; или изменение размера амортизационных отчислений вследствие изменения стоимости основных фондов.
- Частным случаем такого потока платежей является **переменная рента**, члены которой изменяются по строго определённым законам или условиям развития, а значит, параметры переменной ренты, также как и параметры постоянной ренты, могут быть рассчитаны по формулам.

Наращенная величина годовой переменной обычной ренты

$$FVA = \left(CF + \frac{a}{r} \right) \frac{(1+r)^n - 1}{r} - \frac{n \cdot a}{r} = CF \frac{(1+r)^n - 1}{r} + \frac{a}{r} \left(\frac{(1+r)^n - 1}{r} - n \right)$$

Текущая величина годовой переменной обычной ренты

$$PVA = \left(CF + \frac{a}{r} \right) \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} - \frac{n \cdot a}{r \cdot (1+r)^n} = CF \frac{(1+r)^n - 1}{r} + \frac{a}{r} \left(\frac{(1+r)^n - 1}{r} - \frac{n}{(1+r)^n} \right)$$

FVA годовой переменной ренты с начислением процентов несколько раз в год

$$FVA = CF \frac{(1 + APR/m)^{mn} - 1}{(1 + APR/m)^m - 1} + \frac{a}{(1 + APR/m)^m - 1} \left(\frac{(1 + APR/m)^{mn} - 1}{(1 + APR/m)^m - 1} - n \right)$$

PVA годовой переменной ренты с начислением процентов несколько раз в год

$$PVA = CF \frac{1 - (1 + APR/m)^{-mn}}{(1 + APR/m)^m - 1} + \frac{a}{(1 + APR/m)^m - 1} \left(\frac{1 - (1 + APR/m)^{-mn}}{(1 + APR/m)^m - 1} - \frac{n}{(1 + APR/m)^{mn}} \right)$$

FVA срочной переменной ренты при начислении процентов один раз в год

$$FVA = CF \frac{(1+r)^n - 1}{p((1+r)^{1/p} - 1)} + \frac{a}{(1+r)^{1/p} - 1} \left(\frac{(1+r)^n - 1}{p((1+r)^{1/p} - 1)} - n \right)$$

PVA срочной переменной ренты при начислении процентов один раз в год

$$PVA = CF \frac{1 - (1+r)^{-n}}{p((1+r)^{1/p} - 1)} + \frac{a}{(1+r)^{1/p} - 1} \left(\frac{1 - (1+r)^{-n}}{p((1+r)^{1/p} - 1)} - \frac{n}{(1+r)^n} \right)$$

FVA срочной переменной ренты с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$FVA = CF \frac{(1 + APR/m)^{nm} - 1}{p((1 + APR/m)^{m/p} - 1)} + \frac{a}{(1 + APR/m)^{m/p} - 1} \left(\frac{(1 + APR/m)^{nm} - 1}{p((1 + APR/m)^{m/p} - 1)} - n \right)$$

PVA срочной переменной ренты с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$PVA = CF \frac{1 - (1 + APR/m)^{-nm}}{p((1 + APR/m)^{m/p} - 1)} + \frac{a}{(1 + APR/m)^{m/p} - 1} \left(\frac{1 - (1 + APR/m)^{-nm}}{p((1 + APR/m)^{m/p} - 1)} - \frac{n}{(1 + APR/m)^{nm}} \right)$$

где a – постоянный абсолютный прирост размера платежей равномерно растущей переменной ренты.

5.12. Ренты с постоянным относительным приростом платежей

- В случае, если члены переменной ренты растут с постоянным темпом роста, т.е. по геометрической прогрессии, параметры такой переменной ренты могут быть просчитаны из расчёта суммы членов геометрической прогрессии.

$$PVA = \frac{CF}{r - g} \left(1 - \left(\frac{1 + g}{1 + r} \right)^n \right)$$

$$PVA = \frac{CF}{1 + r} + \frac{CF(1 + g)}{(1 + r)^2} + \dots + \frac{CF(1 + g)^{n-1}}{(1 + r)^n},$$

где g – темп прироста платежей равномерно растущей переменной ренты.

Наращенная величина годовой переменной обычной ренты

$$FVA = CF \left(\frac{(1 + r)^n - (1 + g)^n}{r - g} \right)$$

Текущая величина годовой переменной обычной ренты

$$PVA = \frac{CF}{r - g} \left(1 - \left(\frac{1 + g}{1 + r} \right)^n \right)$$

FVA годовой переменной ренты с начислением процентов несколько раз в год

$$FVA = CF \left(\frac{(1 + APR/m)^{nm} - (1 + g)^n}{(1 + APR/m)^m - g - 1} \right)$$

PVA годовой переменной ренты с начислением процентов несколько раз в год

$$PVA = \frac{CF}{(1 + APR/m)^m - g - 1} \left(1 - \left(\frac{1+g}{(1 + APR/m)^m} \right)^n \right)$$

FVA срочной переменной ренты при начислении процентов один раз в год

$$FVA = CF \left(\frac{(1+r)^n - (1+g)^{kn}}{p((1+r)^{1/p} - (1+g)^{k/p})} \right)$$

PVA срочной переменной ренты при начислении процентов один раз в год

$$PVA = \frac{CF}{p((1+r)^{1/p} - (1+g)^{k/p})} \left(1 - \left(\frac{(1+g)^k}{1+r} \right)^n \right)$$

FVA срочной переменной ренты с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$FVA = CF \left(\frac{(1 + APR/m)^{nm} - (1+g)^{kn}}{p((1 + APR/m)^{m/p} - (1+g)^{k/p})} \right)$$

PVA срочной переменной ренты с неоднократным начислением процентов при $p \neq m$

$$PVA = \frac{CF}{p((1 + APR/m)^{m/p} - (1+g)^{k/p})} \left(1 - \left(\frac{(1+g)^k}{(1 + APR/m)^m} \right)^n \right)$$

5.13. Переменный непрерывный поток платежей

- В обсуждении *постоянной непрерывной ренты* предполагалось, что платежи равномерно и непрерывно распределены в течение года. Но на практике поток платежей может существенно изменяться во времени.
- Переменный непрерывный поток платежей можно описать некоторой функцией $CF_t = f(t)$, а общую сумму платежей определить как

$$s = \int_0^n f(t) dt$$

- В этом случае наращенная сумма переменного непрерывного потока платежей определяется как:

$$FVA = \int_0^n f(t) e^{\delta(n-t)} dt$$

- А приведённая стоимость такого потока определяется в виде:

$$PVA = \int_0^n f(t) e^{-\delta t} dt$$

- Для непрерывного потока платежей, члены которого изменяются строго линейно или экспоненциально, наращенную сумму можно определить по формуле:

$$FVA = CF \cdot e^{\delta n}$$

Наращенная величина непрерывного переменного потока платежей

$$FVA = CF \cdot e^{\delta n}$$

Текущая величина линейно изменяющегося роста платежей ($CF_t = CF_0 + at$)

$$PVA = \left(CF_0 + \frac{a}{\delta} \right) \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta} - 1} - \frac{a}{\delta} n e^{-\delta n}$$

Текущая величина экспоненциального роста платежей ($CF_t = CF \cdot e^{qt}$)

$$PVA = CF \frac{e^{n(q-\delta)} - 1}{q - \delta} \quad q - \delta = \ln \frac{1+k}{1+r}$$

q – непрерывный, k – дискретный темп роста платежей

5.14. Конверсия рент. Объединение рент

- На практике возникают случаи, когда в силу каких-либо причин необходимо изменить условия выплаты платежей, вариантами которых являются: замена ренты разовым платежом (выкуп ренты), замена разового платежа рентой (рассрочка платежа), консолидация (объединение) рент.
- Конверсия рент широко применяется при реструктуризации задолженности. При этом непременно соблюдается принцип финансовой эквивалентности, правда, в смягчённом виде.

- **Выкуп ренты.** Этот вид конверсии сводится к замене потока платежей единовременным платежом. Искомый размер выкупа будет равен современной величине выкупаемой ренты. При этом и *наращенная величина ренты* по оставшимся платежам, и *наращенная величина разового платежа* по сложному проценту от рассчитанной суммы выкупа, будут равны друг другу:

$$FVA = CF \frac{(1+r)^n - 1}{r} = PV(1+r)^n$$

- **Рассрочка платежей.** При решении задачи, обратной выкупу ренты, т.е. при соглашении сторон погасить крупное обязательство частями, в рассрочку, то задолженность удобно погасить постоянными аннуитетными платежами.

- Для решения этой задачи современная стоимость ренты, с помощью которой проводится рассрочка, приравнивается к сумме долга. Искомый размер платежей, вносимых частями вместо *единоразового платежа*, находится по формуле определения члена ренты из полученной современной стоимости ренты.

- **Объединение (консолидация) рент.** При объединении рент (замене в одну) исходя из принципа финансовой эквивалентности должно соблюдаться равенство приведённых стоимостей текущих и заменяющей рент, что соответствует равенству:

$$PVA = \sum PVA_i ,$$

где PVA – современная стоимость заменяющей ренты;
 PVA_i – современная стоимость i -й текущей ренты.

- Объединяемые ренты могут быть любыми: немедленными и отсроченными, годовыми и срочными. Что касается заменяющей ренты, то следует определить ее вид и параметры, кроме одного. В качестве неизвестного параметра, который определяется далее, обычно выступает срок.
- Так, при заданном сроке размер заменяющей ренты определяется как:

$$CF = \frac{\sum PVA_q}{PVIFA_{n,r}}$$

5.15. Изменение параметров рент

- Изменение хотя бы одного параметра существующей ренты по сути означает замену одной ренты другой. Такая замена должна базироваться на принципе финансовой эквивалентности, из чего должно следовать равенство приведённых стоимостей обеих рент.
- Замена немедленной ренты на отсроченную.** При необходимости отсрочить выплаты немедленной ренты с параметрами CF_1, n_1 с процентной ставкой r на срок t дней немедленная рента заменяется на отсроченную с параметрами $CF_2, n_2, t/T$.

$$CF_2 = CF_1 \frac{1 - (1+r)^{-n_1}}{1 - (1+r)^{-n_2}} (1+r)^{t/T}$$

- Замена годовой ренты на срочную.** Если годовая немедленная рента с параметрами CF_1, n_1 заменяется на срочную с параметрами CF_2, n_2, p , то при заданных сроке и периодичности заменяющей ренты размер её платежа будет определяться исходя из условия равенства приведённых стоимостей обеих рент на момент конверсии как:

$$CF_2 = CF_1 \frac{1 - (1+r)^{-n_1}}{1 - (1+r)^{-n_2}} \cdot \frac{p((1+r)^{1/p} - 1)}{r}$$

- В общем случае конверсии,** когда невозможно применить вышеуказанные формулы, например, при нерегулярном потоке платежей, применяется общее правило равенства современных стоимостей обеих потоков на момент конверсии.

Определение размера годового платежа заменяющей годовой ренты

$$CF = \frac{r \cdot \sum PVA_i}{1 - (1+r)^{-n}}$$

Определение размера разового платежа заменяющей срочной ренты

$$\frac{CF}{p} = \frac{((1+r)^{1/p} - 1) \cdot \sum PVA_i}{1 - (1+r)^{-n}}$$

Определение размера разового платежа заменяющей срочной ренты

$$\frac{CF}{p} = \frac{((1 + APR/m)^{m/p} - 1) \cdot \sum PVA_i}{1 - (1 + APR/m)^{-mn}}$$

Определение срока заменяющей годовой ренты

$$n = -\ln \left(1 - r \frac{\sum PVA_t}{CF} \right) / \ln(1+r)$$

Определение срока заменяющей срочной ренты

$$n = -\ln \left(1 - ((1+r)^{1/p} - 1) \frac{\sum PVA_t}{CF} \right) / \ln(1+r)$$

Определение срока заменяющей срочной ренты

$$n = -\ln \left(1 - ((1+APR/m)^{m/p} - 1) \frac{\sum PVA_t}{CF} \right) / \ln(1+APR/m)$$

Контрольные вопросы к теме 5

- 1) Определение и классификация потоков платежей
- 2) Определение и расчет наращенной величины аннуитета
- 3) Определение и расчет приведённой величины аннуитета
- 4) Определение и расчёт рент пренумерандо
- 5) Расчёт отложенных рент и рент с выплатами в течение периода
- 6) Расчёт параметров аннуитета
- 7) Определение и расчёт бессрочного аннуитета
- 8) Расчёт потока платежей с непрерывным начислением процентов

- 9) Определение и расчёт постоянной непрерывной ренты
- 10) Расчёт срочных рент с периодом платежей больше года
- 11) Определение и расчёт переменных рент с постоянным абсолютным приростом платежей
- 12) Расчёт переменных рент с постоянным относительным приростом платежей
- 13) Расчёт переменного непрерывного потока платежей
- 14) Конверсия и объединение рент
- 15) Изменение параметров рент

Задачи по теме 5

1. В страховой фонд средств предприятием ежемесячно перечисляется 35 тыс. руб. На эти средства начисляются сложные проценты по годовой ставке 12 %. Определите сумму через 6 лет при следующих условиях:
 - а) поступление взноса в конце года, начисление процентов 1 раз в год;
 - б) поступление взноса в конце года, начисление процентов - поквартально;
 - в) поступление и начисление процентов по полугодиям; поступление взносов по полугодиям, начисление процентов - поквартально;
 - г) поступление взносов и начисление процентов ежеквартально.

2. Какой необходим срок для накопления 100 млн.руб. при условии, что ежемесячно вносится по 2 млн.руб., а на накопления начисляются проценты по ставке 12% годовых.
3. Предполагается путём ежегодных взносов по 100 млн.руб. в течение пяти лет создать фонд в размере 1 млрд. руб. Какова должна быть требуемая доходность?
4. Платежи в фонд будут выплачиваться ежегодно по 250 тыс. руб. в течение 4 лет с начислением сложных процентов по ставке 8% годовых. Определите современную сумму всех платежей с начисленными процентами.
5. Платежи размером 30 тыс. руб. выплачиваются в конце каждого полугодия при простой ставке 14% годовых в течение одного года. Определите наращенную сумму и современную величину ренты.

6. Для создания фонда ежегодно выделяются 30 тыс. руб. На эти средства начисляются сложные проценты по годовой ставке 12%. Определите сумму средств фонда через 3 года при следующих условиях:
 - а) поступление взноса в конце года, начисление процентов 1 раз в год;
 - б) поступление взноса в конце года, начисление процентов - поквартально;
 - в) поступление, начисление процентов по полугодиям;
 - г) поступление взносов по полугодиям, начисление процентов - поквартально;
 - д) поступление взносов и начисление процентов ежеквартально.

7. К концу третьего года необходимо создать фонд, равный 100 тыс. руб. Фонд создаётся равномерными взносами в конце каждого полугодия. На взносы 4 раза в год начисляются проценты по номинальной ставке, равной 15 % годовых. Какой должен быть разовый взнос?
8. Организация создаёт страховой фонд в 800 тыс. руб. Планируется создать его в течение 6 лет. Взносы вносятся в конце года под процентную ставку 12% годовых. Определите размер разового взноса. На какую величину можно уменьшить разовый взнос, если делать его в начале года?

9. Господин Иванов инвестировал 800 тыс. руб. в пенсионный договор. На основе анализа таблиц смертности страховая компания предложила условия, согласно которым определенная сумма будет выплачиваться ежегодно в течение 15 лет, исходя из ставки 13% годовых. Какую сумму ежегодно будет получать господин Иванов?
10. Господин Сидоров собирается положить в банк на счет своего сына 180 тыс. руб., чтобы тот в течение 5 лет учебы в университете мог снимать в конце каждого года со счета 40 тыс. руб., исчерпав весь вклад к концу учебы. Какова должна быть процентная ставка банка?

11. Определить современную величину ренты, ежегодные выплаты по которой в размере 100 тыс. руб. осуществляются в течение 2 лет при следующих условиях:
- а) ежегодные выплаты в начале периода, начисление процентов по сложной процентной ставке 15 % годовых по полугодиям;
 - б) ежемесячные выплаты в начале месяца, начисление процентов по сложной процентной ставке 15 % годовых.
12. На взносы в фонд предприятия, вносимые ежегодно в конце года, будут начисляться сложные проценты по ставке 15 % годовых. Определить размер ежегодных взносов, необходимых для накопления в течение 3 лет суммы 200 тыс. руб.

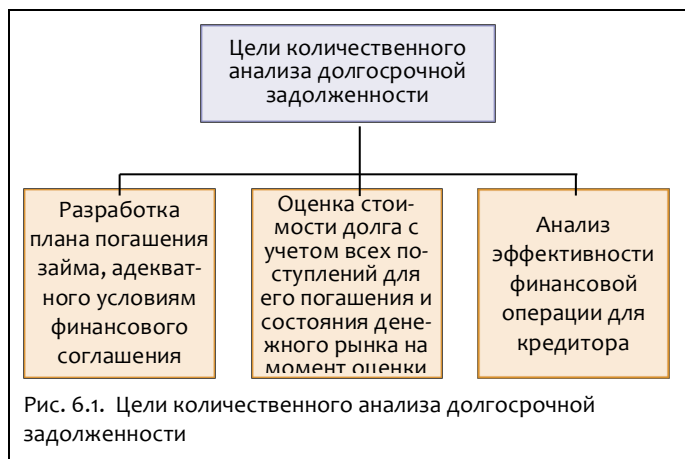
6. КРЕДИТНЫЕ РАСЧЁТЫ

- 6.1. Количественный анализ задолженности
- 6.2. Погашение основной суммы долга единовременным платежом с постоянной выплатой процентов
- 6.3. Погашение основной суммы долга и процентов по нему единовременным платежом в конце срока ссуды
- 6.4. Погашение основной суммы долга равными частями (дифференцированные платежи)

- 6.5. Погашение долга равными срочными платежами (аннуитетные платежи)
- 6.6. Погашение долга равномерно растущими платежами
- 6.7. Потребительский кредит
- 6.8. Лизинговые платежи
- 6.9. Ипотечные ссуды
- 6.10. Льготные кредиты и займы
- 6.11. Реструктурирование займа

6.1. Количественный анализ задолженности

- Количественный анализ долгосрочной задолженности (займа) применяется для достижения сбалансированности, т.е. адекватности его параметров принятым условиям финансового соглашения, путем планирования погашения долга.
- Разработка плана погашения долга заключается в составлении графика (расписании) периодических платежей должника.
- Текущие расходы должника по уплате долга обычно называют **срочными платежами** или расходами по займу.
- В каждую срочную уплату входят текущие процентные платежи и расходы на погашение основного долга.



- Размеры срочных уплат зависят от условий займа: срока, уровня *процентной ставки*, способа погашения кредита (основной суммы долга и выплаты *процентов*), наличия льготных условий.
- Для кредитной схемы в качестве исходных параметров выступают:
 - D – величина займа (debt);
 - R – расходы по погашению основного долга;
 - n – срок его погашения;
 - r – ставка процента по кредиту;
 - PMT – величина срочной уплаты по погашению долга.

6.2. Погашение основной суммы долга единовременным платежом с постоянной выплатой процентов

- В простейшем случае, когда вся сумма долга погашается в конце срока единовременным платежом, его размер определяется по формуле *наращения сложных процентов*:

$$PMT = D (1 + r)^n$$
- При значительной сумме долга разовый платеж требует создания **фонда погашения (sinking fund)** с накоплением средств должника на специальном счете в банке. Средства данного фонда направляются на погашение задолженности по кредиту.

- В случае постоянных взносов в фонд погашения такие платежи по своей сути являются *финансовой рентой (аннуитетом)*. В случае накопления фонда путем регулярных взносов R , на которые начисляются сложные проценты по ставке j , величина срочной уплаты составит:

$$PMT = D \cdot r + R$$

- Поскольку регулярные взносы образуют *ренту постнумерандо*, то с учётом этого размер годовой срочной уплаты находится как:

$$PMT = D \cdot r + \frac{D \cdot q}{(1+q)^n - 1}$$

где r – процентная ставка по кредиту;

q – процентная ставка в фонде погашения.

- Размер регулярных взносов в фонд накопления определяется исходя из коэффициента наращивания ($FVIFA_{n,q}$) платежей в этот фонд.
- В большинстве своем, платежи по процентам и в фонд накопления являются не годовыми, а выплачиваются ежемесячно или несколько раз в год. В таком случае в формуле разового платежа (PMT) процентная часть делится на количество платежей в год, а размер срочной уплаты определяется по формулам платежа срочной ренты, приведённым в п. 5.6.

6.3. Погашение основной суммы долга и процентов по нему единовременным платежом в конце срока ссуды

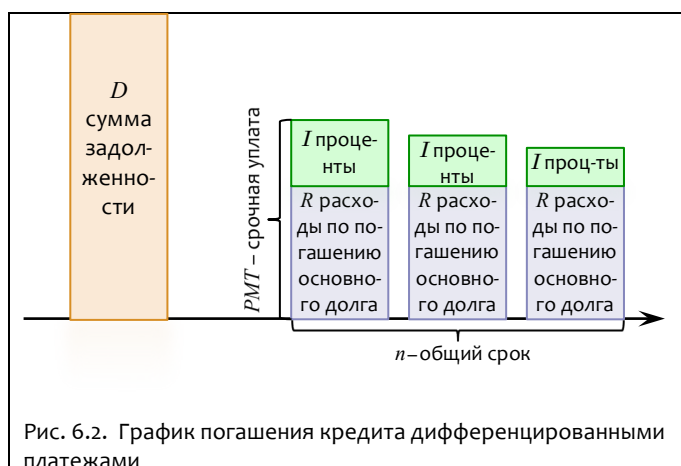
- Если условия контракта предусматривают присоединение процентов к сумме основного долга, то в этом случае величина срочной уплаты будет представлять собой *рентный платёж*, размер которого можно определить по формуле определения члена ренты:

$$PMT = D(1+r)^n \frac{q}{(1+q)^n - 1} = \frac{D \cdot q(1+r)^n}{(1+q)^n - 1}$$

- Создание погасительного фонда выгодно должнику в том случае, если его *процентная ставка* (q) будет выше *процентной ставки* по кредиту (r). Только в этом случае должник на аккумулируемые в погасительном фонде средства получает больше процентов, чем сам выплачивает по кредиту.
- Чем больше разность между ставками ($q - r$), тем больше экономия средств должника, направляемая на покрытие своего долга. В случае совпадения *процентных ставок* ($q = r$), преимущество создания фонда пропадает.

6.4. Погашение основной суммы долга равными частями (дифференцированные платежи)

- В практической деятельности при значительных суммах задолженности, долг обычно погашается в рассрочку частями. Такой метод погашения называется **амортизацией долга**. Условия кредитного контракта могут предусматривать погашение долга равными *срочными платежами* в конце каждого расчётного периода.
- При погашении долга в сумме D в течение n лет сумма ежегодных платежей, идущих на погашение *основного долга* (R), составит $d = D / n$. Проценты начисляются на уменьшаемую сумму основного долга и образуют убывающую арифметическую прогрессию с первым членом $D \cdot r$.



- Тогда общий размер срочной уплаты (PMT) определяется как сумма платежей по погашению основного долга (R) и погашению процентов (I):

$$PMT = R + I$$

- Размер долга последовательно сокращается: $D, D - d, D - 2d$ и т.д. Таким же образом уменьшаются и выплачиваемые проценты, т.к. Они начисляются на остаток долга. Процентные платежи образуют убывающую арифметическую прогрессию с первым членом $D \cdot r$ и шагом $-d \cdot r$.

- Размер срочной уплаты в конце первого года составит:

$$PMT_1 = R + I_1 = d + D \cdot r$$

- Для года t размер срочной уплаты составит:

$$PMT_t = R + I_t = D/n + D_{t-1} \cdot r$$

- Если долг погашается p раз в году *постнумерандо* и столько же раз в году погашаются проценты, то сумма срочной уплаты составит:

$$PMT_t = \frac{D}{p \cdot n} + \frac{D_{t-1} \cdot r}{p} = \frac{D + D_{t-1} \cdot r \cdot n}{p \cdot n}$$

- Остаток задолженности каждого года можно определить последовательно как:

$$D_t = D_{t-1} \frac{n-1}{n}$$

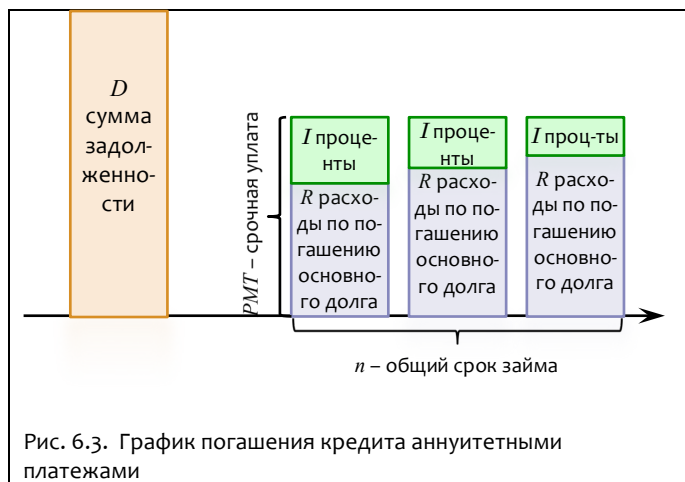
- А при многократном погашении кредита и процентов в течение года остаток задолженности будет:

$$D_t = D_{t-1} \frac{pn-1}{pn}$$

6.5. Погашение долга равными срочными платежами (аннуитетные платежи)

- По этому методу погашения кредита размер срочных уплат постоянен на протяжении всего периода погашения. Поскольку с погашением долга его величина последовательно сокращается, то процентные платежи, определяемые от оставшейся суммы долга, последовательно сокращаются.
- Ввиду этого при постоянном размере общих платежей растет сумма, идущая на погашение основного долга, ввиду чего этот метод погашения называется называется прогрессивным.

$$PMT_t = D_t + I_t = const$$



- Поскольку величина срочных уплат постоянна, то их последовательность представляет собой финансовую ренту, приведённое значение которой должно быть равно сумме долга.
- Из формулы определения размера платежей годовой постоянной обычной ренты размер срочной уплаты определяется как:

$$PMT_t = \frac{D \cdot r}{1 - (1 + r)^{-n}} = \frac{D}{PVIFA_{n,r}},$$

где PMT_t – величина срочной уплаты;
 D – первоначальная сумма долга;
 r – процентная ставка на сумму долга;
 $PVIFA_{n,r}$ – коэффициент приведения годовой ренты со ставкой r и сроком n .

- Данная формула применима только для годовых платежей. На практике, как правило кредит погашается платежами несколько раз в год, чаще всего, ежемесячно. В этом случае размер разового платежа по погашению кредита будет определяться из коэффициента приведения ($PVIFA$) срочной ренты по формулам, приведённым в п.5.6.

- Сумма, идущая на погашение первого погасительного платежа, определяется по следующей формуле:

$$R_1 = PMT - d \cdot I,$$

где $d = D / n$ – величина разового платежа

- Все последующие суммы, идущие на погашение основного долга, растут в геометрической прогрессии с коэффициентом, равным множителю наращивания сложных процентов при ставке r :

$$d_t = d_{t-1} (1 + r)$$

- В связи с чем данный метод погашения платежей называют прогрессивным.
- Платежи по погашению основного долга образуют ряд $d_1, d_1(1 + r), d_1(1 + r)^2, \dots, d_1(1 + r)^{n-1}$.
- По этим данным можно определить сумму погашенной задолженности на конец года t после очередной оплаты:

$$W_t = \sum_{k=0}^{t-1} d_1 (1 + r)^k = d_1 \cdot FVIFA_{t,r}$$

6.6. Погашение долга равномерно растущими платежами

- Платежи по займу не всегда могут быть постоянными. Например, погашение долга может быть связано с поступлением средств или индексироваться на уровень инфляции. В этом случае размер срочных уплат или составляется заранее графиком погашения, или должен подчиняться какому-либо формальному закону (функции, прогрессии).
- В случае равномерно растущих платежей ряд срочных уплат представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем g .

- Этот ряд можно записать в виде членов переменной равномерно растущей (п. 5.12) ренты $PMT, PMT \cdot g, PMT \cdot g^2, \dots, PMT \cdot g^{n-1}$

- Приравняв текущую стоимость этой ренты к сумме первоначального долга, получим:

$$PMT = D \frac{g - (1 + r)}{(g/(1 + r))^n - 1}$$

где r – процентная ставка по займу;

g – заданный годовой темп роста платежей.

- Далее по функции определяются все остальные срочные платежи и составляется график платежей этого кредита.

6.7. Потребительский кредит

- В **потребительском кредите** проценты начисляются сразу на всю сумму кредита, присоединяются к основному долгу уже в момент открытия кредита и равномерно погашаются на протяжении всего срока ссуды.
- Из сказанного следует, что проценты в **потребительском кредите** начисляются сразу на всю сумму долга по *простой процентной ставке*:
$$I = D \cdot n \cdot r$$
- Общая сумма расходов по погашению кредита складывается из погашения основного долга и выплаты процентов:

$$\Sigma PMT_i = D + I$$

- Сумма срочной уплаты определяется по формуле:

$$\Sigma PMT_i = \frac{D + I}{n \cdot m} = \frac{D(1 + nr)}{n \cdot m}$$

- В связи с тем, что проценты здесь постоянно начисляются на первоначальную сумму долга, а не на остаток задолженности после погашения долга, как на других схемах погашения кредитов, фактическая нагрузка процентных платежей будет заметно превышать ставку, указанную в договоре.
- Рассчитанная по **потребительскому кредиту** сумма процентных платежей с каждым погасительным платежом ложится всё большей нагрузкой на заёмщика. Если бы использовалось *прогрессивное погашение*, т.е. начисление процентов на остаток долга, то это было бы заметно дешевле для должника.

- Для разбиения в **потребительском кредите** величины срочной уплаты на сумму, идущую на погашение основной суммы долга и на процентные платежи, в мировой практике используется «**метод 78**». Название этого метода связано с тем, что в нём используются порядковые номера месяцев, которые затем складываются, а сумма порядковых номеров месяцев годового кредита равна 78.
- Согласно этому методу сумма последовательных номеров выплат рассчитывается по правилам суммы членов арифметической прогрессии:

$$N = m \cdot n(m \cdot n + 1) / 2$$

- Величина *процентного платежа* определяется как:
$$I_i = I \cdot (t / N)$$
- Сумма погашения основного долга определяется разницей срочной уплаты (они постоянны) и процентного платежа:
$$R_i = PMT_i - I_i$$

6.8. Лизинговые платежи

- Для всех лизинговых схем исходным требованием является равенство *приведённой стоимости* лизинговых платежей затратам на приобретение оборудования, т.е. предусматривается *финансовая эквивалентность* всех сторон контракта. В общем случае уравнение *финансовой эквивалентности* можно записать в виде равенства:

$$K = \sum_t PV(PMT_t),$$

где K – стоимость имущества лизингодателя;

PMT_t – платежи по лизингу.

- Если поток лизинговых платежей постоянен и представляет собой финансовую ренту, то размер каждого отдельного платежа можно получить из *коэффициента приведения ренты*:

$$PMT = \frac{K}{PVIFA_{n,r}} = \frac{K \cdot r}{1 - (1 + r)^{-n}}$$

* - при условии годовой постоянной обычной ренты.

- При лизинговых платежах с равными долями (суммами) погашения долга платежи по лизингу в конце периода t определяются как:

$$PMT_t = D_{t-1} \cdot r + d,$$

где $d = D / n = \text{const}$ – единовременная сумма погашения основного долга

PMT_t – размер лизингового платежа

6.9. Ипотечные ссуды

- Поскольку погасительные ипотечные платежи (взносы) представляют собой постоянную ренту, то для решения задачи определения размера платежей применим тот же принцип, что и при разработке плана погашения долгосрочного долга равными срочными уплатами (п. 6.5). Для этого приравняем современную стоимость срочных уплат величине ссуды. Для месячных взносов постнумерандо получим:

$$D = PMT \cdot PVIFA_{12n; APR/12} = PMT \frac{1 - (1 + APR/12)^{-12n}}{APR/12},$$

где PMT – месячная сумма взносов;

$APR/12$ – ежемесячная процентная ставка.

- Отсюда искомая величина ежемесячного ипотечного взноса составит:

$$PMT = \frac{D}{PVIFA_{12n; APR/12}} = \frac{D \cdot APR/12}{1 - (1 + APR/12)^{-12n}}$$

- Величина, обратная коэффициенту приведения постоянной ренты ипотечного платежа, носит название коэффициента рассрочки.
- Последовательные суммы погашения долга (W_t) представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом d_1 (погашение в 1-й месяц) и темпом роста $(1 + r)$. Ежемесячное погашение основной части долга определяется как:

$$d_t = PMT_t - D_t \cdot APR / 12$$

- Сумму погашения долга за определённое число месяцев (t) можно определить по сумме членов этой прогрессии от начала погашения долга до искомого времени t :

$$W_t = d_1 \cdot FVIFA_{t; APR/12} = d_1 \frac{(1 + APR/12)^t - 1}{APR/12}$$

- Остаток долга на начало каждого месяца можно определить как:

$$D_{t+1} = D_t - W_t$$

6.10. Льготные кредиты и займы

- В случае предоставления дотаций и льгот или реструктуризации кредитного долга кредиты могут предоставляться заёмщику на льготных условиях по ставке значительно ниже обычной. В этих условиях заёмщик фактически получает субсидию, а кредитор – теряет определённую сумму в результате предоставления льготного кредита.
- Грант-элемент (grant element)** – это условная потеря кредитора, связанная с применением более низкой процентной ставки. Грант-элемент определяется в двух видах: в виде абсолютной и относительной величины.

- Абсолютный *грант-элемент* определяется разностью суммы кредита и *приведённой величины платежей*, определённой по реальной рыночной (а не льготной) ставке:

$$GE = D - \sum_{k=1}^n \frac{PMT_k}{(1+r)^k}$$

- Относительный *грант-элемент* характеризует отношение абсолютного грант-элемента к сумме кредита:

$$w = \frac{GE}{D} = 1 - \frac{G}{D}$$

- Значения *абсолютного* и *относительного грант-элемента* можно определить при условии выплаты долга постоянными платежами.

- При выплате в течение n лет по льготному кредиту процентов по *льготной ставке* g при отсутствии льготного периода *срочная уплата* составит:

$$PMT = \frac{D}{PVIFA_{n;g}}$$

- А современная величина всех выплат должника равна $PMT \cdot PVIFA_{n;g}$. Из этого следует:

$$GE = D - PMT \cdot PVIFA_{n;g} = D \left(1 - \frac{PVIFA_{n;r}}{PVIFA_{n;g}} \right)$$

$$w = 1 - \frac{PVIFA_{n;r}}{PVIFA_{n;g}},$$

где $PVIFA_{n;g}$ и $PVIFA_{n;r}$ – коэффициенты приведения постоянных годовых рент по льготной и рыночной ставкам

6.11. Реструктурирование займа

- Под **реструктурированием займа (restructuring loan)** понимают пересмотр его действующих условий в связи с неплатежеспособностью заёмщика и невозможностью его платить по этим условиям.
- При реструктурировании займа применяют такие приёмы, как:
 - прямое сокращение суммы долга;
 - уменьшение процентной ставки;
 - пересмотр сроков и порядка выплат.
- В любом варианте реструктурирования займа кредитор, также как и при предоставлении льготного кредита, терпит убыток.

- В данном случае не действует принцип финансовой эквивалентности, а именно, не соблюдается равенство приведённых стоимостей платежей до и после реструктурирования займа. Понятно, что при реструктурировании приведённая стоимость платежей уменьшается.
- Для заёмщика наивыгодным будет вариант реструктуризации долга с наибольшим сокращением его приведённой стоимости, банку наоборот – вариант с наименьшим сокращением.

Контрольные вопросы к теме 6

- 1) Количественный анализ задолженности займа
- 2) Погашение основной суммы долга единовременным платежом с постоянной выплатой процентов
- 3) Погашение основной суммы долга и процентов по нему единовременным платежом в конце срока ссуды
- 4) Погашение долга в рассрочку дифференцированными платежами
- 5) Погашение долга в рассрочку равными платежами
- 6) Погашение долга в рассрочку равномерно растущими платежами
- 7) Потребительский кредит

- 8) Расчёт сумм платежей по лизингу
- 9) Расчёт сумм платежей по ипотечным ссудам
- 10) Льготные кредиты и займы
- 11) Реструктуризация займа

Задачи по теме 6

1. Долг 500 тыс. долларов выдан под 10% годовых на 3 года, с ежегодной выплатой процентов по долгу. Для погашения суммы долга единовременным платежом создается фонд, куда ежегодно вносятся равные суммы, на которые начисляются проценты по ставке 11%. Найти ежегодные расходы должника.
2. Определите ежегодные расходы должника по условиям предыдущей задачи, если погашение будет осуществляться единовременным платежом, как суммы основного долга, так и выплаты процентов.

3. Долг в сумме 10 млн.руб. выдан на 5 лет под 14% годовых. Для его погашения создан погасительный фонд, взносы в который производятся равными суммами ежегодно в конце каждого года под 16% годовых. Определите ежегодные расходы должника.
4. Долг в сумме 1 млн. руб. необходимо погасить последовательными равными платежами за 5 лет под 18% годовых. Определите величину срочной уплаты при погашении долга равными срочными уплатами: а) ежегодно; б) ежемесячно.
5. Сумма 500 тыс. долл. выдана под 10% на 5 лет. Определите величину срочной уплаты при погашении основной суммы долга равными ежегодными уплатами.

6. Долг суммой в 1 млн. руб. выдан под 18% годовых. Для его погашения предполагается ежегодно платить порядка 200 тыс.руб. в год. Определите величину срока, необходимого для погашения задолженности.
7. Льготный кредит выдан на 5 лет под 6% годовых с условием погашения долга равными ежегодными уплатами. Рыночная ставка кредита для такого вида займа составляет 18% годовых. Определите потери кредитора в абсолютном и относительном выражении от предоставления льготного кредита.

8. Долг суммой 1 млн. руб. сроком уплаты 5 лет под 18% годовых реструктурируется с обсуждением двух вариантов:
- а) увеличение срока долга до семи лет, снижение платы за кредит до 11%;
 - б) увеличение срока долга до 10 лет, введение льготного периода 3 лет, снижение платы за кредит до 13%.
- Найдите предпочтительный вариант для должника и кредитора.
9. Под залог недвижимости на 10 лет выдана ипотечная ссуда в размере 200 млн.руб. Погашение ежемесячное постнумерандо с начислением процентов по номинальной годовой ставке 14% годовых. Составьте план погашения долга.

10. Гражданин Иванов в течение 5 лет должен был ежеквартально выплачивать 50 тыс. руб., погашая взятую ссуду. В связи с неотложными обстоятельствами он попросил через два года пересчитать величину платежей, чтобы успеть рассчитаться.
11. В магазине был взят потребительский кредит на 50 тыс.руб. на 5 лет под 20% годовых. Условия погашения – ежеквартально. Определите размер разового платежа и общую сумму платежей.
12. Заём 10 000 д.е. взят на 10 лет под 18% годовых. Определите размер уплаты, если кредит будет погашаться ежегодными равными уплатами.

13. Потребительский кредит на сумму 100 тыс. руб. выдан на 3 года под 20% годовых. Погасительные платежи выплачиваются ежемесячно. Определите величину ежемесячных выплат и полную доходность кредитора.
14. Потребительский кредит на сумму 100 тыс. руб. выдан на 2 года под 20% годовых. Погасительные платежи выплачиваются ежемесячно по “правилу 78” с равномерно уменьшающимися суммами процентных платежей. Составьте график платежей и определите полную доходность кредитора.

7. ДОХОДНОСТЬ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ И ИНВЕСТИЦИЙ

- 7.1. Эффективность долгосрочных ссуд
- 7.2. Измерение доходности облигаций
- 7.3. Характеристики эффективности инвестиций
- 7.4. Чистый приведённый доход

- 7.5. Внутренняя норма доходности
- 7.6. Дисконтируемый срок окупаемости
- 7.7. Индекс доходности

7.1. Эффективность долгосрочных ссуд

- В случае, если комиссионные по ссудам не выплачиваются, то доходность ссуд равна годовой ставке сложных процентов, эквивалентной применяемой в сделке условиям (частота начислений процентов, выплат платежей и др.). В случае, если кроме процентов кредитор еще получает и комиссионные по ставке g , то должнику с учётом комиссионных выдаётся ссуда в размере $D(1 - g)$.
- Уравнение эквивалентности, полученное дисконтированием всех платежей, примет вид:

$$D(1 - g) - \left(Dr \sum_{j=1}^n v^j + Dv^n \right) = 0 \quad ,$$

где $v = (1 + r)^{-t}$
 $\Sigma v^r = PVIFA_{n,r}$

- Это уравнение можно представить в виде функции от r следующим образом:

$$f(r_g) = (1 + r_g)^{-n} + (1 - (1 + r_g)^{-n})r / r_g - (1 - g) = 0$$

- Если проценты выплачиваются p раз в году, то:

$$f(r_g) = (1 + r_g)^{-n} + \frac{APR}{m} \cdot \frac{1 - (1 + APR_g/m)^{-nm}}{(1 + APR_g/m)^m - 1} - (1 - g) = 0$$

- Задача решается в нахождении корня функции методом Ньютона-Рафсона или простым подбором.

7.2. Измерение доходности облигаций

- Доходность облигаций характеризуется несколькими показателями. Различают **купонную (coupon rate)**, **текущую (current rate)** и **полную доходность (yield to maturity)** облигаций.
- Купонная доходность определена при выпуске облигаций и поэтому нет необходимости её рассчитывать. Текущая доходность характеризует отношение поступлений по купонам к цене покупки облигации. Эта доходность не учитывает получение номинала или выкупной цены облигации в конце срока. У облигаций с нулевым купоном текущая доходность равна нулю. Поэтому эту доходность нельзя применять для сравнения различных видов облигаций.

- Полная доходность учитывает оба источника дохода. И именно полная доходность отражает реальную эффективность инвестиций в облигации для инвестора.
- **Облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов.**

- Текущая доходность для такого типа облигаций определяется по формуле:

$$r_t = gN / P = g / K \cdot 100 ,$$

где g – купонная ставка процента;

r_t – текущая доходность;

N – номинал облигации;

P – цена погашения;

K – курс облигации.

- **Облигации с выплатой процентов и номинала в конце срока.**
- Проценты здесь начисляются за весь срок и выплачиваются одной суммой вместе с номиналом. Купонного дохода нет. Текущая доходность нулевая, поскольку проценты получают лишь в конце срока. Полная доходность (YTM) определяется путем приравнивания современной стоимости дохода к цене облигации:

$$YTM = \sqrt[n]{K/100} - 1$$
- **Облигации с периодической выплатой процентов и погашением номинала в конце срока.**
- Для такой облигации необходимо считать все 3 доходности – текущую, купонную и полную.

- Текущая доходность определяется также, как и у облигаций без обязательного погашения. Для расчёта полной доходности необходимо приравнять современную стоимость всех поступлений цене облигации. Поскольку поступления по купонам представляют собой постоянную ренту постнумерандо с каждым членом gN , то её современная стоимость составит $gN \cdot PVIFA_{n,r}$, если купоны оплачиваются ежегодно и $gN \cdot PVIFA_{n,r}^{(p)}$, если купоны оплачиваются p раз в году.
- Рыночный курс составит:

$$K / 100 = (1 + r)^{-n} + g \cdot PVIFA_{n,r}$$
 если купоны оплачиваются ежегодно

$$K / 100 = (1 + r)^{-n} + g \cdot PVIFA_{n,r}^{(p)}$$
 если купоны оплачиваются несколько раз в год

7.3. Характеристика эффективности инвестиций

- Применяемые в финансовом анализе методики и критерии можно разбить на 2 большие группы по признаку учета фактора времени. Первые – бухгалтерские – учитывают результаты без дисконтирования денежных сумм.
- Вторые – дисконтные – предполагают обязательный учет фактора времени и принципа финансовой эквивалентности, приводя распределенные в разные моменты времени денежные потоки к одному (обычно первоначальному) моменту времени.
- В дальнейшем в этом разделе внимание будет сосредоточено именно на дисконтных методах анализа эффективности.

- В анализе эффективности используют, в основном, следующие показатели, основанные на дисконтировании:
 - **чистый приведенный доход** (*net present value*, - показывает разность дисконтированных стоимостей чистого дохода и инвестиционных затрат);
 - **внутренняя норма доходности** (*internal rate of return*, отражает такую норму доходности, расчет проекта по которой уравнивает инвестиции с доходами);
 - **дисконтированный срок окупаемости** (*discounted payback method*, срок при котором нарастающий итог дисконтированных поступлений от проекта сравняется с нарастающим итогом дисконтированных затрат)
 - **индекс доходности** (*profitability index*).

7.4. Чистый приведенный доход

- Любой поток платежей представлен как из положительных членов, представляющих денежные поступления, так и из отрицательных, включающих инвестиционные и текущие затраты.
- Поскольку все эти члены потока платежей, как правило, неравномерно распределены во времени, то результирующий показатель всех денежных потоков определяется путем приведения их стоимостей к определенному (как правило, начальному) моменту времени.

- Показатель NPV , как уже было отмечено, отражает текущую приведенную стоимость денежных потоков за вычетом первоначальных инвестиций.
- Поскольку потоки денежных поступлений носят долговременный характер, то они дисконтируются по установленной в проекте ставке дисконтирования. Что касается инвестиций, то расчет NPV зависит от их характера.
- При разовых инвестициях их сумма вычитается из последующего дисконтированного потока:

$$NPV = \sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+r)^k} - IC, \quad ,$$

где IC – стартовые инвестиции;

CF_k – денежный поток в году k в течение n лет.

- В случае, когда инвестиционный проект предполагает не разовую инвестицию, а последовательное инвестирование финансовых ресурсов несколькими этапами в течение длительного срока, то формула расчета NPV выглядит следующим образом:

$$NPV = \sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+r)^k} - \sum_{j=1}^m \frac{IC_j}{(1+r)^j},$$

где m и n – продолжительность инвестирования финансовых ресурсов и жизни проекта соответственно.

- Показатель NPV отражает приведенное значение абсолютного прироста, показывающего насколько денежные поступления превышают денежные инвестиции, т.е. является дисконтированным аналогом бухгалтерской прибыли, в расчете которой не учитывается фактор времени.
- По значению NPV принимается решение о дальнейшей судьбе инвестиционного проекта:
 - при $NPV > 0$ проект принимается;
 - при $NPV \leq 0$ проект может быть как отвергнут, если инвестором движет чисто спекулятивный интерес, так и принят с корректировкой параметров проекта (снижение нормы доходности, пересмотр сроков и т.д.) и дальнейшим пересчетом NPV , если к проекту у инвестора деловой интерес

NPV проектов с разовым (1) и долговременным (2) инвестированием

$$NPV = \sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+r)^k} - IC \quad NPV = \sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+r)^k} - \sum_{j=1}^m \frac{IC_j}{(1+r)^j}$$

NPV с платежами, возрастающими постоянными темпами прироста (g)

$$NPV = \frac{CF}{1+r} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^k - IC$$

NPV с платежами, возрастающими постоянными темпами прироста при инвестициях (L) в недвижимость

$$NPV = \frac{CF}{1+r} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^k + \frac{L}{(1+r)^n} - IC$$

7.5. Внутренняя норма доходности

- Не менее важным показателем для анализа инвестиций, чем NPV , является *внутренняя норма доходности* (IRR), под которой понимают такой размер ставки дисконтирования, при которой приведенные по этой ставке доходы и инвестиции будут равны друг другу.
- Иначе говоря, IRR отражает ставку, при которой понесенные инвестиции только лишь окупятся в течение всего срока жизни инвестиционного проекта.

- Чем выше эта норма, тем тем больше эффективность инвестиционного проекта. Значение IRR может быть как положительным, так и отрицательным. Последнее означает, что инвестиции не окупаются.
- Особое значение имеет сравнение IRR с *процентной ставкой* привлеченных финансовых ресурсов:
 - если $IRR > r$, то проект принимается;
 - если $IRR \leq r$, то проект может быть как отвергнут, если потенциальный инвестор ищет проекты лишь для лучшего варианта использования своих средств; так и принят с корректировкой параметров проекта (снижение нормы доходности, пересмотр сроков и т.д.) и дальнейшим пересчетом NPV , если у инвестора к проекту деловой интерес.

- Расчет искомой ставки IRR базируется на основе формулы определения NPV путём приравнивания NPV к 0 и подбору соответствующей ставки, удовлетворяющей этому равенству:

$$\sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+r)^k} - \sum_{j=1}^m \frac{IC_j}{(1+r)^j} = 0$$

- Применение данного метода чаще всего сводится к последовательной итерации (повторения) ставок, пока не будет обеспечено равенство $NPV = 0$. В более серьезных случаях применяют математические и статистические методы, такие как *метод Ньютона-Рафсона* или *метод секущей*.

7.6. Дисконтированный срок окупаемости

- Срок окупаемости, как уже было сказано выше, характеризует срок, необходимый для возмещения стартовых инвестиций. При этом срок окупаемости определяется двумя методами:
 - упрощённо, не дисконтируя денежные потоки доходов и инвестиций;
 - дисконтируя денежные потоки, и определяя таким образом срок с учетом фактора времени и принципа финансовой эквивалентности.

- В случаях, когда денежный поток носит нерегулярный характер с разными суммами поступлений и платежей или с разными временными интервалами между платежами, то рассчитать дисконтированный срок окупаемости посредством формул в этом случае невозможно, и остается лишь пошаговое дисконтирование денежных потоков и поиск срока, в котором NPV станет равна 0.
- Но в случае, если денежные потоки будут постоянны, то срок окупаемости можно определить из формулы определения срока ренты:

$$DPP = \frac{-\ln(1 - r \cdot IC/CF)}{\ln(1 + r)}$$

7.7. Индекс доходности

- Рентабельность инвестиций также может быть определена бухгалтерским способом и с учетом фактора времени, дисконтируя потоки платежей. В любом случае, доход сопоставляется с размером инвестиций. В первом случае – бухгалтерском подходе – этот индекс совпадает с показателем рентабельности инвестиций.
- При дисконтировании денежного потока расчет индекса доходности сводится к выбору того или иного способа расчета в зависимости от того, какой характер носят капиталовложения данного проекта.

- В случае разовых капитальных инвестиций, когда все они могут быть приведены к одной сумме, *индекс доходности* рассчитывается как:

$$DPI = \frac{\sum_{k=1}^n CF_k / (1+r)^k}{IC}$$

- Если капитальные затраты распределены во времени и носят поэтапный характер, то *индекс доходности* определяется по формуле:

$$DPI = \frac{\sum_{k=1}^n CF_k / (1+r)^k}{\sum_{j=1}^m IC_j / (1+r)^j}$$

Контрольные вопросы к теме 7

- 1) Расчёт эффективности долгосрочных ссуд с удержанием комиссионных
- 2) Виды облигаций, их особенности и расчёт доходности по каждому из них
- 3) Виды доходности облигаций и формулы их расчёта по различным видам облигаций
- 4) Характеристика и показатели эффективности инвестиций
- 5) Расчёт и обоснование величины чистого приведённого дохода
- 6) Расчёт и обоснование значения внутренней нормы доходности
- 7) Расчёт и обоснование значения срока окупаемости
- 8) Расчёт индекса доходности

Задачи по теме 7

1. Корпорация выпустила облигации с нулевым купоном со сроком погашения через 5 лет. Курс реализации равен 40. Какова доходность облигаций на дату погашения?
2. Облигация, приносящая 10% годовых относительно номинала, куплена по курсу 70, срок погашения 3 года. Какова доходность облигации, если номинал и проценты выплачиваются в конце срока?
3. Облигация со сроком 5 лет, проценты по которой выплачиваются раз в году по норме 8%, куплена по курсу 60. Какова текущая и полная доходности облигации?

4. При выдаче ссуды на 180 дней под 10% годовых кредитором удержана комиссия в размере 0,5% стоимости кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов?
5. Насколько удержание комиссионных в размере 1% стоимости кредита увеличит эффективность ссуды для кредитора при 5-летнем и 10-летнем сроке?
6. Вексель учтён по учётной ставке 10% за 180 дней до его оплаты. При выполнении операции с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5%. Какова доходность операции при временной базе в 360 дней?

7. На строительство объекта в течение первого года необходимо потратить около \$10000, затем в течение 10 лет объект будет приносить доход \$3000 в год. Определите характеристики проекта.
8. Сравниваются по финансовой эффективности два варианта инвестиций. Выберите наилучший вариант инвестирования при ставке сравнения (дисконтирования) 10% годовых:

А	-100	-150	50	120	200	300	-
Б	-200	-60	60	90	120	180	300

9. Проект предполагают реализовать за три года. Планируются следующие сроки и суммы инвестиций: в начале первого года – единовременные затраты 500 тыс. руб., во втором году равномерные расходы суммой 1 млн. руб., в конце третьего года – единовременные затраты 250 тыс. руб. отдача от проекта планируется в течение 15 лет, в течение первых трёх лет по 250 тыс. руб., далее с ежегодным увеличением на 10%. Определите показатели эффективности проекта при ставке дисконтирования 10%.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Табл. 1. Порядковые номера дней в не високосном году

	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	217	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	213	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Табл. 2. Множители наращения по сложным процентам

Число периодов	Ставка процентов за период, %						
	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00	40,00
1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,4
2	1,1025	1,21	1,3225	1,44	1,5625	1,69	1,96
3	1,157625	1,331	1,520875	1,728	1,953125	2,197	2,744
4	1,215506	1,4641	1,749006	2,0736	2,441406	2,8561	3,8416
5	1,276282	1,61051	2,011357	2,48832	3,051758	3,71293	5,37824
6	1,340096	1,771561	2,313061	2,985984	3,814697	4,826809	7,529536
7	1,4071	1,948717	2,66002	3,583181	4,768372	6,274852	10,54135
8	1,477455	2,143589	3,059023	4,299817	5,960464	8,157307	14,75789
9	1,551328	2,357948	3,517876	5,15978	7,450581	10,6045	20,66105
10	1,628895	2,593742	4,045558	6,191736	9,313226	13,78585	28,92547
11	1,710339	2,853117	4,652391	7,430084	11,64153	17,9216	40,49565
12	1,795856	3,138428	5,35025	8,9161	14,55192	23,29809	56,69391
13	1,885649	3,452271	6,152788	10,69932	18,18989	30,28751	79,37148
14	1,979932	3,797498	7,075706	12,83918	22,73737	39,37376	111,1201
15	2,078928	4,177248	8,137062	15,40702	28,42171	51,18589	155,5681
16	2,182875	4,594973	9,357621	18,48843	35,52714	66,54166	217,7953
17	2,292018	5,05447	10,76126	22,18611	44,40892	86,50416	304,9135
18	2,406619	5,559917	12,37545	26,62333	55,51115	112,4554	426,8789
19	2,52695	6,115909	14,23177	31,948	69,38894	146,192	597,6304
20	2,653298	6,7275	16,36654	38,3376	86,73617	190,0496	836,6826
21	2,785963	7,40025	18,82152	46,00512	108,4202	247,0645	1171,356
22	2,925261	8,140275	21,64475	55,20614	135,5253	321,1839	1639,898
23	3,071524	8,954302	24,89146	66,24737	169,4066	417,5391	2295,857
24	3,2251	9,849733	28,62518	79,49685	211,7582	542,8008	3214,2
25	3,386355	10,83471	32,91895	95,39622	264,6978	705,641	4499,88

Табл. 3. Множители дисконтирования по сложным процентам

Число периодов	Ставка процентов за период, %						
	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00	40,00
1	0,952381	0,909091	0,869565	0,833333	0,8	0,769231	0,714286
2	0,907029	0,826446	0,756144	0,694444	0,64	0,591716	0,510204
3	0,863838	0,751315	0,657516	0,578704	0,512	0,455166	0,364431
4	0,822702	0,683013	0,571753	0,482253	0,4096	0,350128	0,260308
5	0,783526	0,620921	0,497177	0,401878	0,32768	0,269329	0,185934
6	0,746215	0,564474	0,432328	0,334898	0,262144	0,207176	0,13281
7	0,710681	0,513158	0,375937	0,279082	0,209715	0,159366	0,094865
8	0,676839	0,466507	0,326902	0,232568	0,167772	0,122589	0,06776
9	0,644609	0,424098	0,284262	0,193807	0,134218	0,0943	0,0484
10	0,613913	0,385543	0,247185	0,161506	0,107374	0,072538	0,034572
11	0,584679	0,350494	0,214943	0,134588	0,085899	0,055799	0,024694
12	0,556837	0,318631	0,186907	0,112157	0,068719	0,042922	0,017639
13	0,530321	0,289664	0,162528	0,093464	0,054976	0,033017	0,012599
14	0,505068	0,263331	0,141329	0,077887	0,04398	0,025398	0,008999
15	0,481017	0,239392	0,122894	0,064905	0,035184	0,019537	0,006428
16	0,458112	0,217629	0,106865	0,054088	0,028147	0,015028	0,004591
17	0,436297	0,197845	0,092926	0,045073	0,022518	0,01156	0,00328
18	0,415521	0,179859	0,080805	0,037561	0,018014	0,008892	0,002343
19	0,395734	0,163508	0,070265	0,031301	0,014412	0,00684	0,001673
20	0,376889	0,148644	0,0611	0,026084	0,011529	0,005262	0,001195
21	0,358942	0,135131	0,053131	0,021737	0,009223	0,004048	0,000854
22	0,34185	0,122846	0,046201	0,018114	0,007379	0,003113	0,00061
23	0,325571	0,111678	0,040174	0,015095	0,005903	0,002395	0,000436
24	0,310068	0,101526	0,034934	0,012579	0,004722	0,001842	0,000311
25	0,295303	0,092296	0,030378	0,010483	0,003778	0,001417	0,000222

Табл. 4. Множители наращения аннуитета

Число периодов	Ставка процентов за период, %						
	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00	40,00
1	2,05	2,1	2,15	2,2	2,25	2,3	2,4
2	3,1525	3,31	3,4725	3,64	3,8125	3,99	4,36
3	4,310125	4,641	4,993375	5,368	5,765625	6,187	7,104
4	5,525631	6,1051	6,742381	7,4416	8,207031	9,0431	10,9456
5	6,801913	7,71561	8,753738	9,92992	11,25879	12,75603	16,32384
6	8,142008	9,487171	11,0668	12,9159	15,07349	17,58284	23,85338
7	9,549109	11,43589	13,72682	16,49908	19,84186	23,85769	34,39473
8	11,02656	13,57948	16,78584	20,7989	25,80232	32,015	49,15262
9	12,57789	15,93742	20,30372	25,95868	33,2529	42,6195	69,81366
10	14,20679	18,53117	24,34928	32,15042	42,56613	56,40535	98,73913
11	15,91713	21,38428	29,00167	39,5805	54,20766	74,32695	139,2348
12	17,71298	24,52271	34,35192	48,4966	68,75958	97,62504	195,9287
13	19,59863	27,97498	40,50471	59,19592	86,94947	127,9125	275,3002
14	21,57856	31,77248	47,58041	72,03511	109,6868	167,2863	386,4202
15	23,65749	35,94973	55,71747	87,44213	138,1085	218,4722	541,9883
16	25,84037	40,5447	65,07509	105,9306	173,6357	285,0139	759,7837
17	28,13238	45,59917	75,83636	128,1167	218,0446	371,518	1064,697
18	30,539	51,15909	88,21181	154,74	273,5558	483,9734	1491,576
19	33,06595	57,275	102,4436	186,688	342,9447	630,1655	2089,206
20	35,71925	64,0025	118,8101	225,0256	429,6809	820,2151	2925,889
21	38,50521	71,40275	137,6316	271,0307	538,1011	1067,28	4097,245
22	41,43048	79,54302	159,2764	326,2369	673,6264	1388,464	5737,142
23	44,502	88,49733	184,1678	392,4842	843,0329	1806,003	8032,999
24	47,7271	98,34706	212,793	471,9811	1054,791	2348,803	11247,2

Табл. 5. Дисконтные множители аннуитета

Число периодов	Ставка процентов за период, %						
	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00	40,00
1	0,952381	0,909091	0,869565	0,833333	0,8	0,769231	0,714286
2	1,85941	1,735537	1,625709	1,527778	1,44	1,360947	1,22449
3	2,723248	2,486852	2,283225	2,106481	1,952	1,816113	1,588921
4	3,545951	3,169865	2,854978	2,588735	2,3616	2,166241	1,849229
5	4,329477	3,790787	3,352155	2,990612	2,68928	2,43557	2,035164
6	5,075692	4,355261	3,784483	3,32551	2,951424	2,642746	2,167974
7	5,786373	4,868419	4,16042	3,604592	3,161139	2,802112	2,262839
8	6,463213	5,334926	4,487322	3,83716	3,328911	2,924702	2,330599
9	7,107822	5,759024	4,771584	4,030967	3,463129	3,019001	2,378999
10	7,721735	6,144567	5,018769	4,192472	3,570503	3,091539	2,413571
11	8,306414	6,495061	5,233712	4,32706	3,656403	3,147338	2,438265
12	8,863252	6,813692	5,420619	4,439217	3,725122	3,19026	2,455904
13	9,393573	7,103356	5,583147	4,532681	3,780098	3,223277	2,468503
14	9,898641	7,366687	5,724476	4,610567	3,824078	3,248675	2,477502
15	10,37966	7,60608	5,84737	4,675473	3,859263	3,268211	2,48393
16	10,83777	7,823709	5,954235	4,729561	3,88741	3,283239	2,488521
17	11,27407	8,021553	6,047161	4,774634	3,909928	3,2948	2,491801
18	11,68959	8,201412	6,127966	4,812195	3,927942	3,303692	2,494144
19	12,08532	8,36492	6,198231	4,843496	3,942354	3,310532	2,495817
20	12,46221	8,513564	6,259331	4,86958	3,953883	3,315794	2,497012
21	12,82115	8,648694	6,312462	4,891316	3,963107	3,319842	2,497866
22	13,163	8,77154	6,358663	4,90943	3,970485	3,322955	2,498476
23	13,48857	8,883218	6,398837	4,924525	3,976388	3,32535	2,498911
24	13,79864	8,984744	6,433771	4,937104	3,981111	3,327192	2,499222
25	14,09394	9,07704	6,464149	4,947587	3,984888	3,328609	2,499444

Табл. 6. Англоязычные термины

Англ. аббре- виатура	Англоязычные термины	Русский перевод
1	2	3
	Amortized Loans	амортизация долга
APR	Annual Percentage Rate	номинальная ставка процентов
APY	Annual Percentage Yield	эффективная ставка процентов
	Annuity	аннуитет, финансовая рента
	Annuity due	рента пренумерандо
	Annuity method	аннуитетный метод
	base interest rate	базовая процентная ставка
	Base period	базовый период
CF	Cash Flow	денежный поток
CAGR	Compound Annual Growth Rate	средняя годовая ставка по сложным переменным процентным ставкам
	Compound Interest	сложные проценты
	Compounding	наращение
	Constant-Growth Annuity	переменная рента с постоянным темпом роста
	Constant-Growth Perpetuity	переменная вечная рента с постоянным темпом роста
CPI	Consumer Price Index	индекс потребительских цен
	Debt	долг
	Decreasing Annuity	переменная рента с постоянно уменьшающимися платежами
	Deferred Annuity	отсроченная рента
	Discount period	период дисконтирования
	Discount rate	учётная ставка
DCF	Discounted Cash Flows	дисконтированный денежный поток
DPV	Discounted Present Value	дисконтированная приведённая стоимость
	Discounting	дисконтирование
EAR	Effective annual rate	эффективная ставка процентов
	Effective annual rate of Discount	эффективная учётная ставка
EAY	Effective annual yield	эффективная ставка
	Fixed annuities	постоянная рента
	Floating rate	плавающая ставка
	Force of Discount	сила дисконта
	Force of Interest	сила роста
FV	Future Value	наращенная сумма
FVA	Future Value of Annuity	наращенная сумма аннуитета
FVGA	Future Value of Growing Annuity	наращенная сумма растущей ренты
	Grace Period	льготный период уплаты процентов по кредиту
	Grant	субсидия, дотация, безвозвратная сумма
	Grant-element	грант-элемент (потери от льготного кредита)
	Growing Annuity	равномерно растущая в геометрической прогрессии переменная рента
	Growing Perpetuity	равномерно растущая в геометрической прогрессии вечная рента

1	2	3
	Increasing Annuity	переменная рента с постоянно растущими платежами
IAO	Installment of Amortize One	погашение долга равными срочными платежами
	interest rate	процентная ставка
IRR	Internal rate of return	внутренняя норма доходности
	Level Annuity	постоянная рента
	Level Perpetuity	постоянная вечная рента
NPV	Net Present Value	чистая текущая стоимость
	nominal interest rate	брутто-ставка
	nominal rate	номинальная ставка
	ordinary annuity	обычная рента (постнумерандо)
	perpetual annuity	вечная (бессрочная) рента
	Perpetuity	вечная (бессрочная) рента
PV	Present Value	текущая (приведённая) стоимость
PVA	Present Value of Annuity	приведенная величина аннуитета
PVG A	Present Value of Growing Annuity	приведенная величина растущей ренты
PVP	Present Value of Perpetuity	приведенная величина вечной ренты
	principal	основная сумма, номинал
PPI	Producer Price Index	индекс цен производителей
	Rate of interest	ставка процента
	rate of return	норма доходности
	real interest rate	нетто-ставка, реальная ставка
	Simple Interest	простые проценты
SFF	Sinking Fund Factor	периодический взнос в фонд накопления
	Time value of money	стоимость денег во времени
	Variable annuities	переменная рента
	Weighted rate	средневзвешенная ставка
YTM	Yield to maturity	доходность к погашению, полная доходность

Библиографический список

- Четыркин, Е.М. Финансовая математика: учебник / Е.М. Четыркин. – 10-е изд. – М.: Дело РАНХиГС, 2011. – 392 с.
- Криничанский, К.В. Финансовая математика: учеб. пособие / К.В. Криничанский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Дело и сервис, 2011. – 336 с.
- Лукашин, Ю.П. Финансовая математика: учебно-методический комплекс / Ю.П. Лукашин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: МЭСИ, 2013. – 191 с.
- Блау, С.Л. Финансовая математика: Практикум: учеб. пос. для студ. учреждений сред. проф. образования / С.Л. Блау. – М.: ИЦ Академия, 2011. – 208 с.
- Блау, С.Л. Финансовая математика: учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования / С.Л. Блау, С.Г. Григорьев. – М.: ИЦ Академия, 2013. – 192 с.
- Брусов, П.Н. Финансовая математика: учеб. пособие / П.Н. Брусов, П.П. Брусов, Н.П. Орехова. – М.: КноРус, 2013. – 224 с.
- Брусов, П.Н., Филатова, Т.В. Финансовая математика: учеб. пособие / П.Н. Брусов, Т.В. Филатова. – М.: ИНФРА-М, 2014. – 480 с.
- Касимов, Ю.Ф. Финансовая математика: учебник для бакалавров / Ю.Ф. Касимов. – М.: Юрайт, 2012. – 335 с.
- Самаров, К.Л. Финансовая математика: сборник задач с решениями: учеб. пособие / К.Л. Самаров. – М.: Альфа-М, ИНФРА-М, 2011. – 80 с.
- Чуйко, А.С. Финансовая математика: учеб. пособие / А.С. Чуйко, В.Г. Шершнева. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 160 с.
- Малыхин, В.И. Финансовая математика: учеб. пособие / В.И. Малыхин. – М.: Юнити-Дана, 2012. – 236 с.
- Недосекин, А.О., Абдулаева, З.И. Финансовая математика: учеб. пособие / А.О. Недосекин, З.И. Абдулаева. – СПб.: СПбГПУ, 2013. – 220 с.
- Чернов, В.П. Финансовая математика: учеб. пособие / В.П. Чернов. – СПб.: СПбГУЭФ, 2012. – 220 с.
- Монахов, И.А. Основы финансовой математики: учеб. пособие / И.А. Монахов. – М.: МГОУ, 2011. – 68 с.

Содержание

Введение.....	3
Руководство к пользованию рабочей тетрадью.....	4
Рабочая программа курса «Финансовая математика»	5
1. Основы финансовых вычислений.....	8
2. Простые проценты.....	15
3. Сложные проценты.....	32
4. Производные процентные расчёты.....	51
5. Потоки платежей и финансовые ренты.....	68
6. Кредитные расчёты.....	91
7. Доходность финансовых инструментов и инвестиций.....	105
Приложения.....	114
Библиографический список.....	121

Корректор Т.А. Смирнова
Техн. редактор Л.Я. Титова

Темплан 2014 г., поз. 64

Подп. к печати 28.05.2014. Бумага тип №1.

Печать офсетная. 7,75 уч.-изд.л.; 7,75 печ.л.

Тираж 50 экз. Изд № 64. Цена «С». Заказ

Ризограф Санкт-Петербургского государственного технологического университета
растительных полимеров, 198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4