

М. П. Власов
И. У. Насибуллин

ЭКОНОМЕТРИКА

Практикум

Санкт-Петербург
2026

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики**

**М. П. Власов
И. У. Насибуллин**

ЭКОНОМЕТРИКА

Практикум

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2026

УДК 519.862.6 (07)
ББК 65в631я7
В581

Рецензент:

кандидат экономических наук, доцент, заведующий кафедрой экономики и организации
производства Высшей школы технологии и энергетики
Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна
Е. М. Фрейдкина

Власов, М. П.

В581 Эконометрика: практикум / М. П. Власов, И. У. Насибуллин. — СПб.:
ВШТЭ СПбГУПТД, 2026. — 121 с.

Практикум соответствует программам и учебным планам дисциплины «Эконометрика» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика». Практикум представляет методологию построения эконометрических моделей по статистическим данным.

Цель практикума – предложить обучающимся методы построения, анализа моделей и содержательной интерпретации результатов. Ознакомление с практическим применением эконометрических методов поможет при подготовке курсовых, дипломных и других исследовательских работ.

Практикум предназначен для подготовки бакалавров очной и очно-заочной форм обучения.

УДК 519.862.6 (07)
ББК 65в631я7

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2026
© Власов М. П., Насибуллин И. У., 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ЗАДАНИЕ № 1.....	7
1.1. Методические указания к заданию № 1	7
1.2. Варианты задания.....	10
ЗАДАНИЕ № 2.....	11
2.1. Методические указания к заданию № 2.....	11
2.2. Варианты задания.....	19
ЗАДАНИЕ № 3.....	20
3.1. Эконометрические модели показателя.....	20
3.2. Идентификация, параметризация и сертификация модели	31
3.3. Пример.....	34
3.4. Варианты задания.....	38
ЗАДАНИЕ № 4.....	39
4.1. Регрессионные эконометрические модели показателя.....	39
4.2. Идентификация эконометрической модели.....	40
4.3. Параметризация эконометрической модели.....	49
4.4. Пример расчета эконометрической модели парной регрессии	54
4.5. Сертификация эконометрической модели парной регрессии.....	55
4.6. Варианты задания.....	57
ЗАДАНИЕ № 5.....	58
5.1. Модели множественной корреляции.....	58
5.2. Идентификация эконометрической модели множественной корреляции	60
5.3. Параметризация эконометрической модели множественной корреляции	65
5.4. Сертификация эконометрической модели множественной корреляции ...	67
5.5. Варианты задания.....	70
ЗАДАНИЕ № 6.....	71
6.1. Ряды динамики	71
6.2. Идентификация основной тенденции ряда динамики.....	73
6.3. Параметризация основной тенденции ряда динамики.....	78

6.4. Сертификация основной тенденции ряда динамики	87
6.5. Варианты задания.....	88
ЗАДАНИЕ № 7.....	89
7.1. Эконометрические модели системы одновременных уравнений	89
7.2. Идентифицируемость и идентификация модели системы одновременных уравнений.....	94
7.3. Параметризация эконометрических моделей.....	98
7.4. Спецификация эконометрических систем уравнений.....	100
7.5. Варианты задания.....	101
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	104
ПРИЛОЖЕНИЯ	105

ПРЕДИСЛОВИЕ

Практикум содержит методические указания по созданию эконометрических моделей. Целью данной работы является создание методики формирования статистических моделей.

Моделирование – это процесс создания и использования моделей для изучения объектов, явлений или процессов. Модель представляет упрощенное видение оригинала, которое позволяет исследователям понять его свойства, поведение и закономерности, а также предсказать его развитие. Моделирование используется для прогнозирования экономических тенденций, оценки рисков и принятия инвестиционных решений.

Как объект исследования моделирование может применяться к широкому кругу объектов, включая экономические процессы и социальные явления.

Частным случаем моделирования является эконометрическое моделирование, построенное на применении статистических методов, применяемых для анализа экономических явлений и процессов. Эконометрическое моделирование включает создание, оценку и применение статистических моделей для выявления и изучения взаимосвязей между экономическими переменными, прогнозирования будущих значений и проверки экономических решений. В основе эконометрического моделирования лежит использование реальных данных для количественной оценки экономических отношений и выявления причинно-следственных связей. Основной задачей эконометрики является построение эконометрической модели, оценка адекватности и качества построенной модели и найденных параметров, а также использование представленных моделей для прогнозирования и проведения экономической политики.

Эконометрические модели можно классифицировать по различным признакам, включая степень формализации, характер времени, тип представления информации, тип описания поведения системы, используемый математический аппарат, уровень детализации и степень организованности системы.

Классификация по области применения эконометрических моделей:

- эконометрика финансов: применяется для анализа финансовых рынков, оценки рисков и принятия инвестиционных решений;
- эконометрика труда: используется для анализа рынка труда, определения факторов, влияющих на заработную плату, безработицу и другие;
- эконометрика производства: применяется для анализа производственных процессов, определения факторов, влияющих на эффективность производства;
- эконометрика потребления: используется для анализа потребительского поведения, определения факторов, влияющих на спрос и предложение;
- эконометрика роста: применяется для анализа факторов, влияющих на экономический рост.

К основным аспектам эконометрического моделирования можно отнести различия между эконометрическим моделированием и другими видами моделирования:

– в отличие от математического моделирования эконометрическое моделирование использует статистические данные для формирования, оценки и проверки моделей, в то время как математическое моделирование может основываться на теоретических предположениях;

– в отличие от статистического моделирования эконометрическое моделирование применяет статистические методы для изучения преимущественно экономических явлений и процессов, в то время как статистическое моделирование может применяться в других областях, например, в медицине или биологии.

Примеры эконометрических моделей:

– модели классификации с целью получения однородных статистических совокупностей для создания эконометрических моделей;

– модели поведения экономического показателя;

– парные регрессионные модели используются для анализа взаимосвязи между зависимой переменной и одной независимой переменной;

– модели множественной корреляции используются для анализа взаимосвязи между зависимой переменной и несколькими независимыми переменными;

– модели временных рядов используются для анализа и прогнозирования данных, представленных в виде последовательности значений во времени;

– системы одновременных уравнений используются для моделирования взаимозависимых экономических переменных.

Этапы эконометрического моделирования:

1. Сбор данных: получение информации, необходимой для построения модели.

2. Проведение классификации полученной статистической совокупности, формирование и оценка однородности статистической совокупности для получения адекватной, достоверной эконометрической модели, удовлетворяющей требованиям точности для практического использования.

3. Идентификация и параметризация эконометрической модели (с использованием графических методов), например, линейная регрессия, логистическая регрессия, деревья решений и т. д.

4. Спецификация модели: определение параметров модели по данным предоставленной однородной совокупности.

5. Оценка качества и проверка достоверности, адекватности и точности модели с помощью различных метрик.

6. Применение полученной модели для анализа данных, прогнозирования или принятия решений.

В заключение необходимо отметить, что эконометрическое моделирование является важным инструментом для анализа экономических явлений, позволяющим количественно оценить взаимосвязи между переменными, обосновывать и оценивать управленческие решения, прогнозировать будущие значения и проверять экономические гипотезы.

ЗАДАНИЕ № 1

Задание: создать иерархическую классификацию товаров по атрибутивным (качественным) признакам, используя номинальную шкалу.

Цель: формирование однородных совокупностей по атрибутивным признакам, на основе которых строятся эконометрические модели.

1.1. Методические указания к заданию № 1

Классификация как результат – это упорядоченное разделение множества объектов в соответствии с их общими признаками на подмножества по их сходству или различию в соответствии с принятыми методами. Классификация фиксирует закономерные связи между классами объектов с целью определения места объекта в системе, которое указывает на его свойства. Под объектом понимается любой предмет, процесс, явление материального или нематериального свойства. Система классификации представляет группировку объектов, объединяемых однородными свойствами, что позволяет выделить определенные классы, которые будут характеризоваться рядом общих свойств.

Ступени классификации – это последовательные этапы распределения объектов на группы по определенным признакам, а глубина классификации – это общее количество этих этапов, или ступеней, необходимое для полного разделения всех объектов на наименьшие группы. Глубину определяют исходя из цели классификации, при этом слишком большая глубина затрудняет практическое применение, а недостаточная – не дает необходимой детализации.

Номинальная шкала, также известная как шкала наименований, позволяет разделить объекты на категории, но не предполагает количественных сравнений или операций. На этом уровне измерения используются термины «номинация», «классификация», «нумерация». Измерением в номинальной шкале можно считать любую классификацию, по которой класс получает числовое наименование (например, номер продукции, научной работы). В этой шкале можно лишь посчитать количество объектов в классах – частоту и относительную частоту.

Иерархическая классификация – это метод организации данных, при котором осуществляется последовательное разделение множества объектов на подчиненные классификационные группировки.

Основные характеристики иерархической классификации:

- структурированность: данные представляются в виде дерева, где есть уровни с более общими категориями и более конкретными подкатегориями;
- последовательность (дедукция): процесс перехода от общего к частному, каждый уровень классификации уточняет предыдущий;
- подчиненность: объекты верхнего уровня включают объекты нижнего уровня;
- универсальность: может применяться в различных областях, от каталогов товаров до научных классификаций.

Примеры использования иерархической классификации:

- каталогизация товаров: товары группируются по категориям (например, электроника, одежда, продукты), затем по подкатегориям (например, в электронике: смартфоны, ноутбуки, телевизоры) и так далее;
- организация научных данных: биологические виды классифицируются по царствам, типам, классам, отрядам, семействам, родам и видам;
- структурирование информации в базах данных: классификация позволяет организовать данные для более удобного поиска и анализа.

Преимущества иерархической классификации:

- удобство навигации: позволяет быстро находить нужные объекты, переходя от общих категорий к более конкретным;
- повышение информативности: каждый уровень классификации добавляет новую информацию об объектах;
- улучшение организации данных: помогает структурировать большие объемы информации, делая их более информативными и доступными.

Результаты классификации могут быть представлены в табличном виде, в виде типологической группировки, в виде дерева классификации (решений).

Дерево классификации предназначено для разделения совокупности на меньшие по объему однородные совокупности по заданному критерию с целью выявления закономерностей.

Деревья классификации можно рассматривать как метод, позволяющий предсказывать принадлежность наблюдений или объектов к тому или иному значению атрибутивного признака. При построении иерархической структуры предварительно необходимо располагать упорядоченным (ранжированным) набором атрибутивных признаков и их значений, позволяющим рассматривать получаемые совокупности как однородные по заданному набору атрибутивным признакам. Упорядоченный набор атрибутивных признаков включает все разнообразие их значений.

Дерево решений является структурой, подобной блок-схеме, состоящей из узлов и ветвей (рис. 1.1). На каждом узле разделение совокупности данных выполняется на основе атрибутивного признака (критерия), определяемого набором его значений, генерируя соответствующее число ветвей в качестве выходных данных. В следующих узлах используется значение следующего по значимости (по ранговой шкале) атрибутивного признака, позволяющего детализировать разбиение совокупности на более однородные.

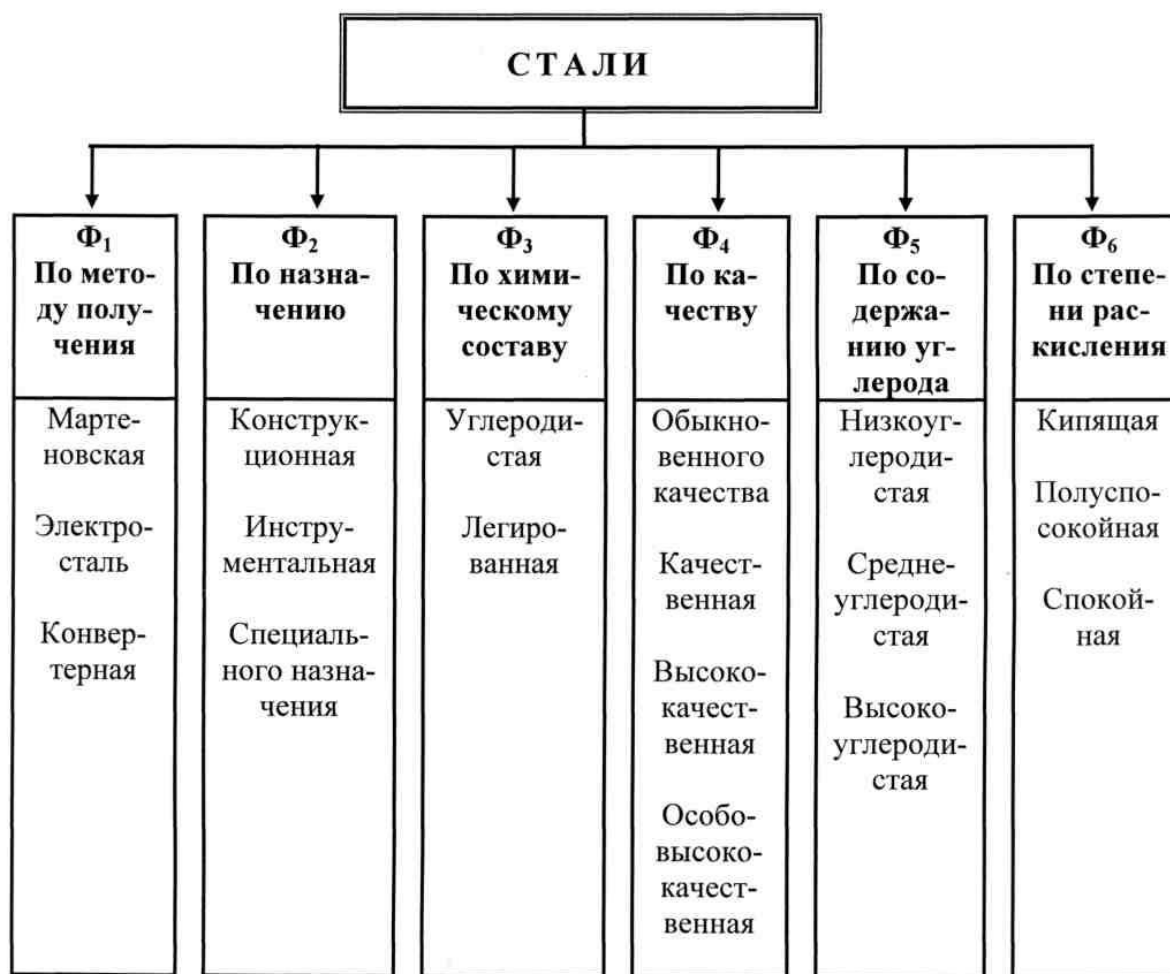


Рисунок 1.1. Пример иерархической классификации

Разделение совокупности исходных данных продолжается до тех пор, пока не будет достигнут уровень иерархии, в котором будет исчерпан упорядоченный набор атрибутивный признак, что позволяет завершить дальнейшее разбиение. Весь этот процесс генерирует древовидную структуру. Первый узел расщепления называется корневым узлом. Конечные узлы называются листьями и связаны с меткой класса. Пути от корня к листу определяются ранжированным списком значений атрибутивных признаков, представляющим правила классификации.

Типологическая группировка – это результат разделения неоднородной статистической совокупности на качественно однородные группы (рис. 1.2).

Продолжение процесса получения однородной совокупности связано с проведением структурной группировки, рассматриваемой как разделение качественно однородной совокупности по какому-либо вариационному признаку.

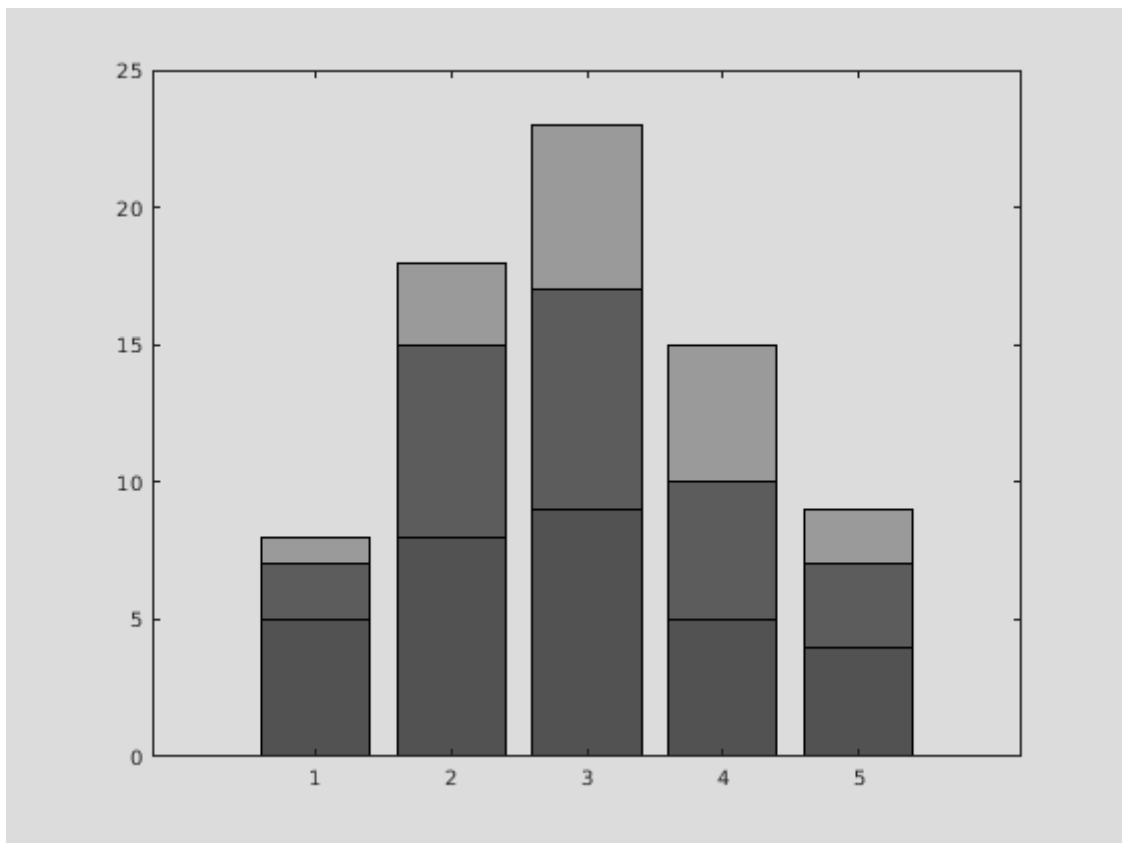


Рисунок 1.2. Пример гистограммы по атрибутивным признакам

1.2. Варианты задания

Создать иерархическую классификацию:

1. Строительных материалов.
2. Продовольственных товаров в универсаме.
3. Товаров мебельных магазинов.
4. Классификация бытовой техники.
5. Классификация бытовой электроники.

Представить результаты классификации в виде таблицы, дерева и структурной группировки.

ЗАДАНИЕ № 2

Задание: провести классификацию объектов по количественному признаку, оценить степень однородности совокупности.

Цель: формирование однородной совокупности на базе количественных признаков, на основе которых строятся эконометрические модели.

2.1. Методические указания к заданию № 2

Классификация качественно однородной совокупности по какому-либо вариационному признаку – это структурная группировка. Такие группировки строятся на основе вариационных рядов, где элементы упорядочены по количественному признаку, что помогает оценить распределение различных значений внутри совокупности.

Среди простых группировок особо выделяют статистические ряды распределения.

Ряд распределения – это группировка, в которой для характеристики групп (упорядоченно расположенных по значению признака, т. е. ранжированных) применяется один показатель – численность группы. Другими словами, это ряд чисел, показывающий, как распределяются единицы некоторой совокупности по изучаемому признаку.

Ряды распределения, построенные по количественному признаку, называются вариационными рядами.

Примером вариационного ряда распределения могут служить распределения населения регионов по возрасту, среднедушевым доходам. Вариационные ряды распределения состоят из двух элементов вариантов и частот.

Вариантами называются упорядоченные значения количественного признака в ряду распределения, они могут быть положительными и отрицательными, абсолютными и относительными.

Частоты – это абсолютные числа, показывающие численность встречающихся вариантов в вариационном ряду (их так же называют весами). Сумма всех частот называется объемом совокупности и определяет число единиц всей совокупности.

Результатом классификации по количественному признаку является получение групп с однородными характеристиками по определенному количественному признаку, что позволяет увидеть его структуру.

В отличие от структурной группировки типологическая группировка использует для разделения атрибутивные (качественные) признаки и направлена на выявление качественно различных типов объектов внутри совокупности.

Структурная группировка представляет разделение выделенных с помощью типологической группировки типов явлений, однородных совокупностей на группы, характеризующие их структуру по какому-либо варьирующему признаку. Структурная группировка дает возможность описать составные части совокупности или строение типов, а также проанализировать

структурные сдвиги. Например, к структурной относится группировка населения по размеру среднедушевого дохода, группировка хозяйств по объему продукции, структура депозитов по сроку их привлечения. С помощью структурных группировок могут быть представлены результаты маркетинговых исследований. Например, объемы продаж товаров в зависимости от их цены, т. е. на оси абсцисс указаны товары, расположенные в порядке увеличения цены, а на оси ординат – частота покупок. Анализ структурных группировок, взятых за ряд периодов или моментов времени, показывает изменение структуры изучаемых явлений, т. е. структурные сдвиги. Кроме того, структурная группировка позволяет оценить тенденцию изменения частоты в зависимости от значения показателя, например, изменение числа покупок в зависимости от цены на товар. В изменении структуры общественных явлений отражаются важнейшие закономерности их развития.

Показатель численности групп представлен либо частотой (количеством единиц в каждой группе), либо частотью (удельным весом каждой группы).

Отношение частоты того или иного варианта к сумме всех частот ряда называется частотью или относительной частотой. Сумма всех частотей вариационного ряда равна единице.

При осуществлении любой группировки решается вопрос об определении числа выделяемых групп. В пределах одной группировки могут применяться несколько показателей и устанавливаться интервалы разной величины. При группировке по количественному показателю вопрос о числе групп решается на основе выделения однородных, близких по значению показателя единиц совокупности. Необходимо, чтобы каждая группа характеризовала существенные типы явления. Число единиц в выделенных группах должно быть достаточным, чтобы характеристики, рассчитанные для отдельных групп, были статистически устойчивыми. Вопрос о числе групп и величине интервалов следует решать с учетом множества обстоятельств. Прежде всего, исходя из целей исследования, значения показателя, объема совокупности. Количество выделяемых групп зависит от вариации показателя, числа наблюдений, а также от количества отдельных возможных значений показателя, т. е. от числа вариантов. Количество групп во многом зависит от того, какой признак служит основанием группировки. Нередко атрибутивные и дискретные признаки предопределяют число групп. Интервалы групп для дискретного признака устанавливаются при значительной колеблемости. При небольшом числе вариантов показателя, положенного в основу группировки, каждая варианта может представлять отдельную группу.

Если число вариантов велико, то значения показателя для отдельных групп группировки указываются в интервалах «от ... до ...». Для этого всю область изменения показателя разбивают на несколько интервалов и определяют число элементов в каждом интервале. Интервалы могут быть равными и неравными, открытыми и закрытыми. Группировку с неравными интервалами надо использовать, если размах вариации показателя в совокупности велик, неравные интервалы применяются как прогрессивно возрастающие или убывающие. В этом случае границы каждого интервала устанавливаются исследователем.

Однако необходимо учесть, что наличие равных интервалов технически значительно облегчает вычисление различных статистических характеристик. Поэтому, как правило, на первом шаге выполняется равноинтервальная группировка, которая является «начальным» этапом. Этот этап позволяет определить наличие тенденции изменения показателя. Целью дальнейшего изменения числа групп и длины интервалов является повышение наглядности выявленной тенденции.

Реализация структурной группировки предполагает три этапа:

- 1) выбирается показатель (основание) группировки;
- 2) устанавливаются или конкретизируются отдельные группы;
- 3) распределяются единицы наблюдения по установленным группам и рассчитываются заданные показатели.

В большинстве случаев статистическая группировка реализуется по количественным показателям.

Итак, структурные группировки могут быть равноинтервальные и неравноинтервальные.

Интервал – разность между верхним и нижним значением показателя в данной группе (табл. 2.1).

Таблица 2.1. Интервалы

Границы		Интервал
Нижняя	Верхняя	
20	50	30
50	200	150
200	500	300

Если о распределении по группам ничего неизвестно, то рекомендуется рассматривать сначала равноинтервальные группировки. Если в результате выполнения этой группировки явно просматривается тенденция изменения показателя, то процесс выполнения группировки на этом завершается. Если же тенденция просматривается, но требует уточнения, то можно попытаться это сделать за счет изменения числа групп или за счет выполнения неравноинтервальной группировки. Неравноинтервальная группировка позволяет уточнить распределение по группам и установить закон распределения, т. е. представить тенденцию изменения показателя в «явном» виде. В роли обобщающей характеристики структурной группировки выступает число единиц наблюдений, попавших в каждую отдельную группу.

Другой итоговой характеристикой является относительный показатель структуры:

$$a_i = \frac{N_i}{N} \cdot 100\%,$$

где N_i – число единиц наблюдения в группе i ;

N – объем совокупности.

Для оценки интенсивности изменения структуры используют различные показатели:

1. Линейный коэффициент структурных различий (сдвигов) изменяется в пределах $0 \leq d \leq 1$.

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |a_{i1} - a_{i2}|}{n},$$

где a_{i1} – относительные показатели структуры элемента i в период 1;

n – число элементов рассматриваемой совокупности или структурных составляющих.

2. Квадратичный коэффициент структурных сдвигов изменяется в пределах $0 \leq \sigma \leq 1$.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (a_{i1} - a_{i2})^2}{n}},$$

если относительные показатели структуры заданы в процентах, то $0 \leq d, \sigma \leq 100$.

3. Интегральный коэффициент К. Гатева изменяется в пределах $0 \leq K_v \leq 1$.

$$K_v = \sqrt{\frac{\sum_i (a_{i1} - a_{i2})^2}{\sum_i a_{i1}^2 + \sum_i a_{i2}^2}}.$$

4. Индекс Салаи изменяется в пределах $0 \leq I \leq 1$.

$$I = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i \left(\frac{a_{i1} - a_{i2}}{a_{i1} + a_{i2}} \right)^2}.$$

Для равноинтервальной группировки границы группы устанавливаются по следующей схеме:

- выбирается показатель группировки;
- исходя из числа объектов (наблюдений) устанавливается первоначальное число групп n .

Основные трудности при построении группировок представляют выбор числа групп и выбор длины каждого интервала. При выборе числа групп следует учитывать, что:

- увеличение их числа приводит к меньшей достоверности результатов, так как в каждый интервал попадает меньше наблюдений;
- уменьшение числа групп приводит к меньшей точности, так как любой группировке сопутствует потеря информации о форме распределения.

Первоначальное число интервалов n составляет величину порядка $n = \sqrt{N} - 1$ ($N > 15$ – объем совокупности). На практике при ограниченном объеме выборки приходится эту величину корректировать. Однако этот результат справедлив при выборе равных интервалов. В дальнейшем при построении неравноинтервальной группировки при «очень большом» числе наблюдений в отдельных интервалах целесообразно эти интервалы разбить на два. При «малом» числе наблюдений в соседних интервалах целесообразно их объединить. Для повышения достоверности результатов при заданном числе интервалов следует стремиться к тому, чтобы в каждом интервале относительный показатель структуры был примерно равен $a_j = \frac{1}{n_j}$, где n_j – число

наблюдений в группе j . Если в рассматриваемой группе концентрируется

большая часть наблюдений, то необходимо эту группу разбить на несколько с интервалами меньшей длины, а в местах «малой» интенсивности – большей. В каждом конкретном случае необходимо руководствоваться методом «проб и ошибок», повторяя построение статистического ряда до получения удовлетворительного результата. При этом величину n следует выбирать не более 10–20 и выполнить следующее:

- Определить величину интервала:

h – величина интервала (в равноинтервальной группировке принимается одинаковой для всех групп):

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n},$$

где $x_{\max}$, $x_{\min}$ – максимальное и минимальное значения показателя.

- Установить границы групп (табл. 2.2).

При определении границ интервалов целесообразно округлять результат до двух, максимум трех значащих цифр. В ряде случаев в группировке могут быть использованы открытые интервалы, например, число путевок

до 200 штук – нижняя граница открыта;

200–300;

300–400;

400 и более – верхняя граница открыта.

Таблица 2.2. Границы групп

№ группы	Границы	
	нижняя	верхняя
1	$x_{\min}$	$x_{\min} + h$
2	$x_{\min} + h$	$x_{\min} + 2h$
3	$x_{\min} + 2h$	$x_{\min} + 3h$
...	...	...
n	$x_{\max} - h$	$x_{\max}$

В этом случае длина первого интервала условно принимается равной длине второго, а длина последнего – длине предпоследнего.

- Распределить единицы наблюдения по установленным группам.

Существует два разных подхода.

1. Последовательный просмотр всех единиц наблюдения с отнесением каждой из них в ту или иную группу (табл. 2.3). Таблица 2.3 является средством для подсчета числа наблюдений в каждой группе при последовательном рассмотрении единиц наблюдения.

Таблица 2.3. Определение частоты

№ группы	Интервалы	Рабочее поле		Число единиц	Структура, %
1	2–5	11111	☒	5	20
2	5–8	11111 11111 11	☒ ☒ ☐	12	48
3	8–11	11111 111	☒ ☐	8	32
...	...	...		...	...

2. Распределение единиц совокупности по группам может быть выполнено с помощью ранжирования, которое представляет собой расположение единиц наблюдения в порядке возрастания или убывания, т. е. предполагается использование ранжированного ряда распределения (табл. 2.4).

Пример. Выполнить структурную группировку. Цель – оценить процесс концентрации случайной величины, т. е. определить распределение марок автомобилей по стоимости. Данные представлены в табл. 2.5.

Таблица 2.4. Ранжированный ряд распределения

Значение показателя	Число единиц
4	10
7	5
10	7
15	4
24	12

Таблица 2.5. Исходные данные: автомобили типа седан (35 наблюдений)

Наблюдения	Цена, долл.
1. «BMW» 316	28 851
2. «BMW» 3181	30 631
3. «BMW» 325	43 000
4. «BMW» 518	35 495
5. «BMW» 525	49 501
6. «BMW» 730	80 000
7. «BMW» 740	95 000
8. «BMW» 850	104 501
9. «Bentley»	165 000
10. «Cadillac-1»	74 000
11. «Cadillac-2»	76 000
12. «Cadillac-3»	93 000
13. «Cadillac-4»	42 500
14. «Fiat»	20 200
15. «Ford-1»	24 000
16. «Ford-2»	14 000
17. «Ford-3»	15 000
18. «Ford-4»	28 730
19. «Lincoln»	47 000
20. «Mersedes-Benz» 190	27 000
21. «Mersedes-Benz» 300	50 000

Наблюдения	Цена, долл.
22. «Mersedes-Benz» 500	60 000
23. «Mersedes-Benz» 560	109 227
24. «Mersedes-Benz» 600	145 000
25. «Mitsubishi-1»	21 000
26. «Mitsubishi-2»	21 414
27. «Mitsubishi-3»	38 800
28. «Nissan»	19 500
29. «Opel»	38 000
30. «Rolls-Roys»	194 000
31. «Saab»	43 000
32. «Volvo-1»	27 000
33. «Volvo-2»	40 000
34. «Volvo-3»	28 000
35. «Volvo-4»	36 950

Равноинтервальная группировка. С ее помощью устанавливается существование тенденции распределения случайной величины. Первоначальное число групп $n = 5$, тогда длина интервала равна $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n} = \frac{194 - 14}{5} = 36$, результаты проведения равноинтервальной группировки представлены в табл. 2.6 и графически на рис. 2.1.

Таблица 2.6. Равноинтервальная структурная группировка

Интервал	Частота
14–50	23
50–86	5
86–122	4
122–158	1
158–194	2

Анализ представленной на рис. 2.1 гистограммы дает возможность сделать вывод о наличии тенденции между значением показателя и частотой. Но предпоследний интервал содержит меньше наблюдений, чем последний. С целью уточнения тенденции и повышения ее наглядности выполняется неравноинтервальная группировка. Неравноинтервальная группировка: с ее помощью уточняется тенденция распределения случайной величины (табл. 2.7, рис. 2.2).

Таблица 2.7. Неравноинтервальная структурная группировка

Интервал значения показателя	Частота
14–45	21
45–86	7
86–122	4
122–170	2
170–194	1

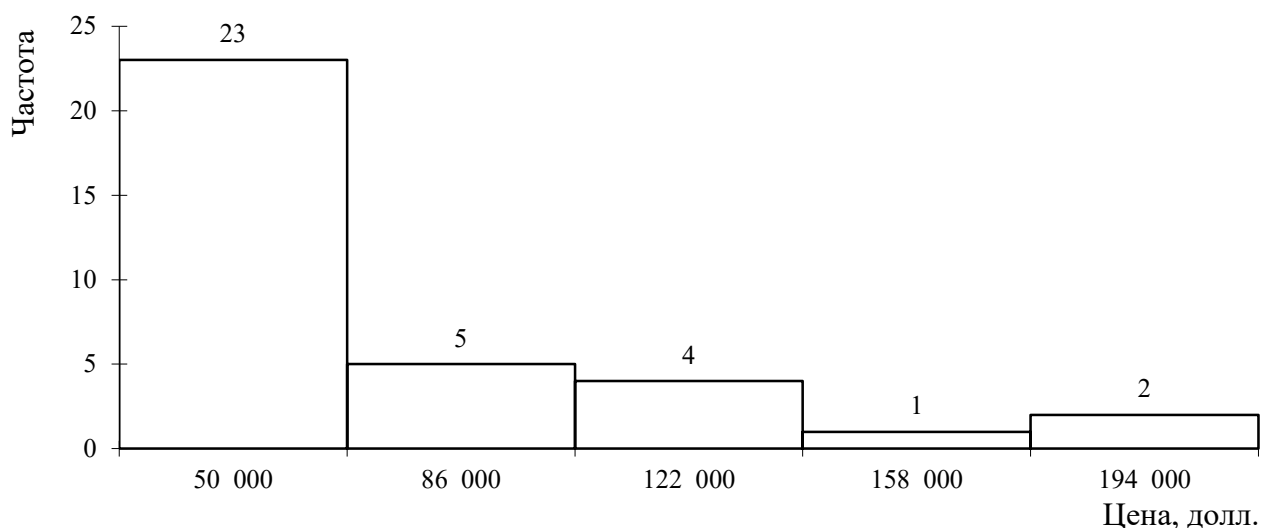


Рисунок 2.1. Графическое представление равноинтервальной структурной группировки

Неравноинтервальная группировка позволила наглядно представить тенденцию изменения рассматриваемого показателя.

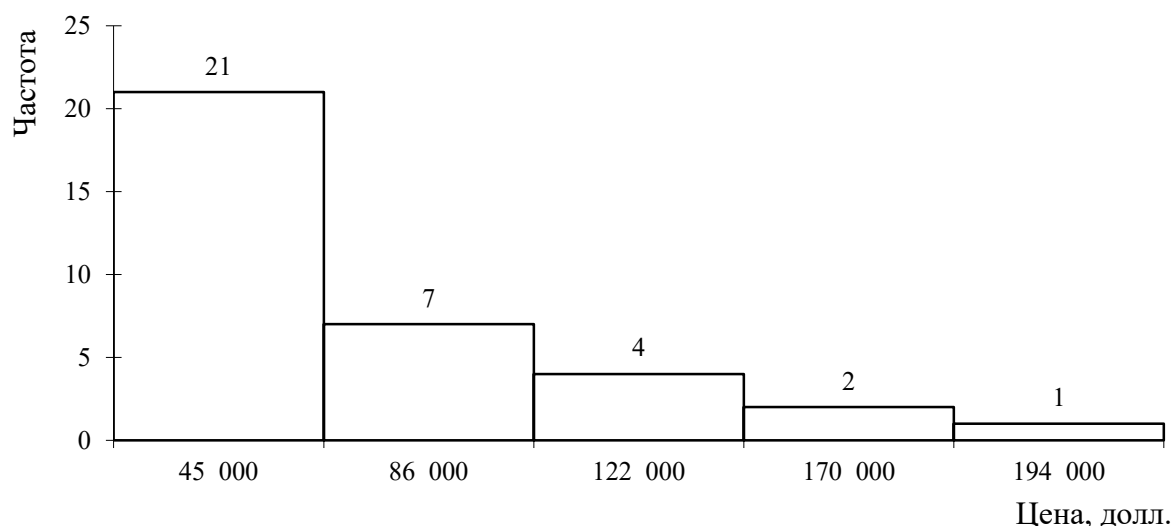


Рисунок 2.2. Графическое представление результатов неравноинтервальной структурной группировки

Вывод по предметной области: большинство фирм концентрируют свои усилия на выпуске марок автомобилей стоимостью до 45 тыс. долл.

Деление группировок на типологические и структурные весьма условно.

Степень однородности совокупности характеризует уровень концентрации показателя, который в дальнейшем фигурирует как центр распределения однородной совокупности. В зависимости от закона распределения в качестве центра распределения может фигурировать среднее, максимальное или минимальное значение, мода, медиана. В случае симметричного одномодального распределения случайной величины основной характеристикой центра распределения является средняя величина, которая служит обобщающей

характеристикой всех значений признака в данной статистической совокупности. Для оценки однородности может использоваться коэффициент вариации:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}},$$

где σ – среднеквадратическое отклонение;

$\bar{x}$ – среднее.

Если случайная величина имеет несимметричное распределение, то для оценки однородности целесообразно воспользоваться показателем:

$$V' = \frac{\sigma}{a},$$

где a – центр распределения.

Это один из показателей, используемых для оценки однородности. Если коэффициент вариации превышает 33 %, то совокупность считается неоднородной, а средняя величина – фиктивной (табл. 2.8).

Таблица 2.8. Шкала однородности совокупности по критерию вариации

Коэффициент вариации V, %	Степень однородности совокупности
До 30	Однородная
30–60	Слабо разнородная
60–90	Умеренно разнородная
Более 90	Высоко разнородная

В представленном выше примере

$$\bar{x} = 52,17$$

$$\sigma^2 = 1617,55$$

$$\sigma = 40,21$$

Так как распределение подчиняется экспоненциальному распределению:

$$f(x, a, b) = b \times \exp(-b(x - a)), x \geq 0, b > 0, b = \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}},$$

то за центр распределения принято максимальное значение $a = 194$.

Коэффициент вариации будет равен 77,09, что в данном случае нельзя рассматривать в качестве показателя степени однородности. Поэтому, приняв в качестве центра распределения максимальное значение показателя 194, оценка однородности оценивается как:

$$V' = 40,21 : 194 = 0,21.$$

Это значение можно принять за оценку степени однородности совокупности по показателю цена.

2.2. Варианты задания

На основе данных, приведенных в Приложении 1, требуется:

1. Выполнить структурную группировку.
2. Оценить степень однородности совокупности.

В качестве исходных данных использовать Приложение 1. Начальные значения (номер варианта) соответствуют последним двум цифрам номера зачетной книжки. Далее необходимо скопировать 50 значений второй колонки. Замена задач не допускается. Номер варианта указывается в самом начале работы.

ЗАДАНИЕ № 3

Задание: определить эконометрическую модель распределения случайной величины.

Цель: формирование эконометрической модели изменения статистического показателя.

3.1. Эконометрические модели показателя

Универсальным способом задания модели распределения статистического показателя, пригодным как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин, является ее функция распределения, обозначаемая $F(x)$.

Определение. Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, которая для любого числа $x \in R$ равна вероятности события $\{X < x\}$.

$$F(x) = P\{X < x\}, \text{ т. е. } F(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\} \quad (3.1)$$

Функция $F(x)$ называют также *интегральной функцией распределения*.

Интегральная функция распределения $F(x_i)$ непрерывной случайной величины x показывает вероятность того, что случайная величина x не превысит некоторое заданное значение, т. е. $F(x_i) = P(x \leq x_i)$. Следовательно, вероятность того, что значение случайной величины заключено между x_1 и x_2 , равна разности значений функции распределения, вычисленной в этих двух точках, т. е.:

$$P(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Геометрически равенство (3.1) можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина X примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x , т. е. случайная точка X попадает в интервал $(-\infty, x)$.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $F(x)$ ограничена, т. е. $0 \leq F(x) \leq 1$.

2. $F(x)$ – неубывающая функция на R , т. е. если $x_2 \geq x_1$, то

$$F(x_2) \geq F(x_1).$$

3. $F(x)$ обращается в ноль на минус бесконечности и равна единице на плюс бесконечности, т. е. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

4. Вероятность попадания случайной величины X в промежуток $[a, b]$ равна приращению ее функции распределения на этом промежутке, т. е.

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a). \quad (3.2)$$

5. $F(x)$ непрерывна слева, т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$.

С помощью функции распределения можно вычислить вероятность события $\{X \geq x\}$:

$$P\{X \geq x\} = 1 - F(x).$$

Можно дать более точное определение непрерывной случайной величины.

Определение. Случайную величину X называют *непрерывной*, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, может быть, отдельных точек.

Часто используют функцию плотности распределения $f(x)$, которая является производной от интегральной функции распределения, т. е.:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \text{ или } f(x) = \frac{d}{dx} F(x).$$

При описании распределения или вида плотности для непрерывных рядов можно использовать следующие функции плотности распределения:

- нормальное распределение;
- полунормальное распределение;
- логарифмическое нормальное распределение;
- распределение Релея;
- экспоненциальное распределение;
- распределение Коши;
- гамма-распределение;
- равномерное распределение;
- распределение экстремальных значений Гумбеля;
- распределение экстремальных значений Вейбулла;
- бета-распределение.

Нормальное, или Гауссово, распределение применяется в том случае если на величину, представленную статистическим рядом, воздействует значительное число (сумма) независимых «небольших» воздействий (факторов). Плотность нормального распределения

$$f(x, a, b) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right),$$

где a и b – параметры, характеризующие центр распределения и его масштаб. В качестве центра распределения используется среднее, а масштаба – среднеквадратическое (табл. 3.1, рис. 3.1).

Таблица 3.1. Значения функции плотности нормального распределения

x	График 1 $\bar{x} = 1, \sigma = 1$	График 2 $\bar{x} = 1, \sigma = 0,5$	График 3 $\bar{x} = 2, \sigma = 0,5$
–4,00	1,4871E–06	1,53931E–22	4,29386E–32
–3,75	5,0308E–06	2,01610E–20	1,52872E–29
–3,50	1,5988E–05	2,05648E–18	4,23871E–27
–3,25	4,7731E–05	1,63366E–16	9,15307E–25
–3,00	0,00013386	1,01071E–14	1,53931E–22
–2,75	0,00035269	4,86988E–13	2,01610E–20

x	График 1 $\bar{x} = 1, \sigma = 1$	График 2 $\bar{x} = 1, \sigma = 0,5$	График 3 $\bar{x} = 2, \sigma = 0,5$
-2,50	0,00087290	1,82741E-11	2,05648E-18
-2,25	0,00202956	5,34047E-10	1,63366E-16
-2,00	0,00443297	1,21548E-08	1,01071E-14
-1,75	0,00909587	2,15450E-07	4,86988E-13
-1,50	0,01753275	2,97419E-06	1,82741E-11
-1,25	0,03174770	3,19756E-05	5,34047E-10
-1,00	0,05400466	0,000267728	1,21548E-08
-0,75	0,08629920	0,001745808	2,15450E-07
-0,50	0,12955044	0,008865944	2,97419E-06
-0,25	0,18269540	0,035065490	3,19756E-05
0	0,24203208	0,108009315	0,000267728
0,25	0,30121379	0,259100876	0,001745808
0,50	0,35215460	0,484064165	0,008865944
0,75	0,38676617	0,704309204	0,035065490
1,00	0,39904344	0,798086884	0,108009315
1,25	0,38676617	0,704309204	0,259100876
1,50	0,35215460	0,484064165	0,484064165
1,75	0,30121379	0,259100876	0,704309204
2,00	0,24203208	0,108009315	0,798086884
2,25	0,18269540	0,035065490	0,704309204
2,50	0,12955044	0,008865944	0,484064165
2,75	0,08629920	0,001745808	0,259100876
3,00	0,05400466	0,000267728	0,108009315
3,25	0,03174770	3,19756E-05	0,035065490
3,50	0,01753275	2,97419E-06	0,008865944
3,75	0,00909587	2,15450E-07	0,001745808
4,00	0,00443297	1,21548E-08	0,000267728

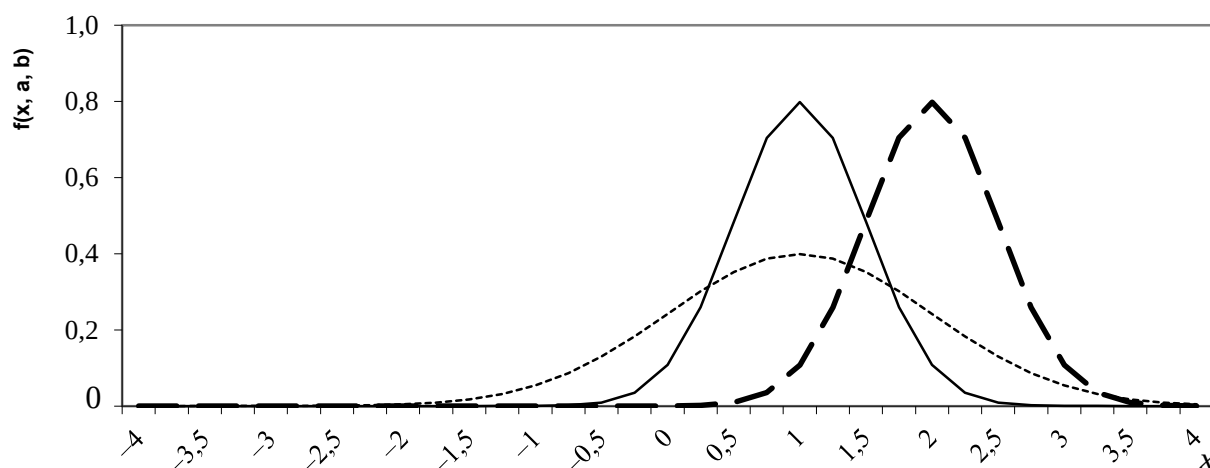


Рисунок 3.1. Графики функции плотности нормального распределения:
 ----- – график 1; ———— – график 2; — — — – график 3

Полунормальное распределение используется для нормально распределенных случайных величин, для которых известны лишь абсолютные отклонения относительно среднего. Если рассматриваются отклонения относительно произвольной точки, то это свернутое нормальное распределение. Функция плотности распределения:

$$f(x, a, b) = \sqrt{\frac{2}{\pi b^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right), \quad x \geq 0, b > 0,$$

где a – центр распределения;

b – параметр масштаба (не равен квадратическому отклонению).

В качестве центра распределения используется мода, а параметр масштаба $a = \sigma^2$, где σ^2 – дисперсия (табл. 3.2, рис. 3.2).

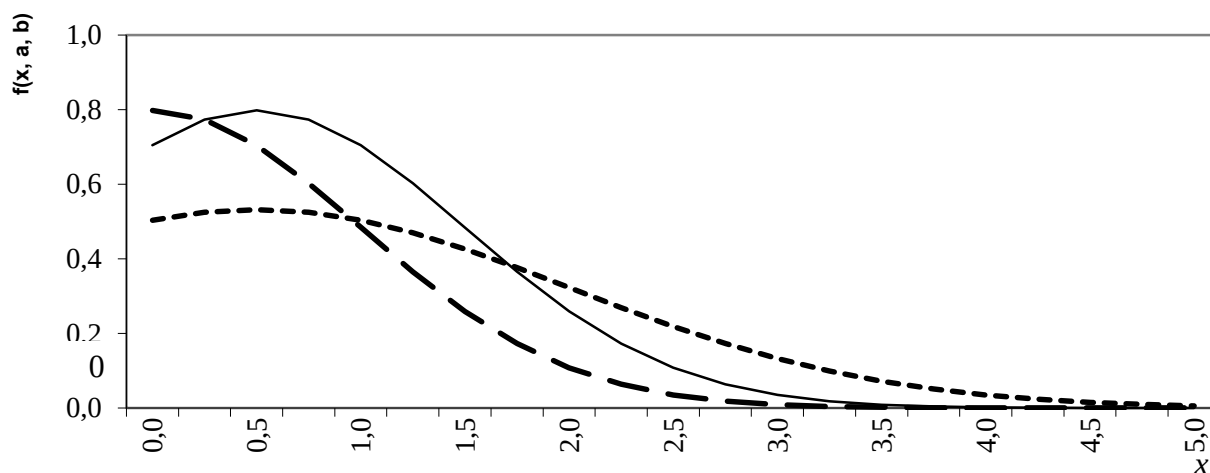


Рисунок 3.2. Графики функции плотности полунормального распределения:

— — — — — график 1; — — — — — график 2; - - - - - график 3

Таблица 3.2. Значения функции плотности полунормального распределения

x	График 1 $\bar{x} = 0, \sigma = 1$	График 2 $\bar{x} = 0,5, \sigma = 1$	График 3 $\bar{x} = 0,5, \sigma = 1,5$
0	0,798087	0,704309	0,503305
0,25	0,773532	0,773532	0,524719
0,50	0,704309	0,798087	0,532058
0,75	0,602428	0,773532	0,524719
1,00	0,484064	0,704309	0,503305
1,25	0,365391	0,602428	0,469539
1,50	0,259101	0,484064	0,426039
1,75	0,172598	0,365391	0,375978
2,00	0,108009	0,259101	0,322709
2,25	0,063495	0,172598	0,269400
2,50	0,035065	0,108009	0,218736

x	График 1 $\bar{x} = 0, \sigma = 1$	График 2 $\bar{x} = 0,5, \sigma = 1$	График 3 $\bar{x} = 0,5, \sigma = 1,5$
2,75	0,018192	0,063495	0,172734
3,00	0,008866	0,035065	0,132670
3,25	0,004059	0,018192	0,099107
3,50	0,001746	0,008866	0,072006
3,75	0,000705	0,004059	0,050883
4,00	0,000268	0,001746	0,034971
4,25	9,55E-05	0,000705	0,023377
4,50	3,20E-05	0,000268	0,015199
4,75	1,01E-05	9,55E-05	0,009611
5,00	2,97E-06	3,20E-05	0,005911

Логарифмически нормальное распределение описывает случайную величину, логарифм которой распределен по нормальному закону с параметрами a и b . Плотность распределения:

$$f(x, a, b) = \frac{1}{bx\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2b^2}(\ln x - a)^2\right),$$

где a – центр распределения;

b – параметр масштаба.

В качестве центра распределения используется максимальная из трех величин: средняя, мода, медиана, а параметр масштаба – среднее квадратическое отклонение (табл. 3.3, рис. 3.3).

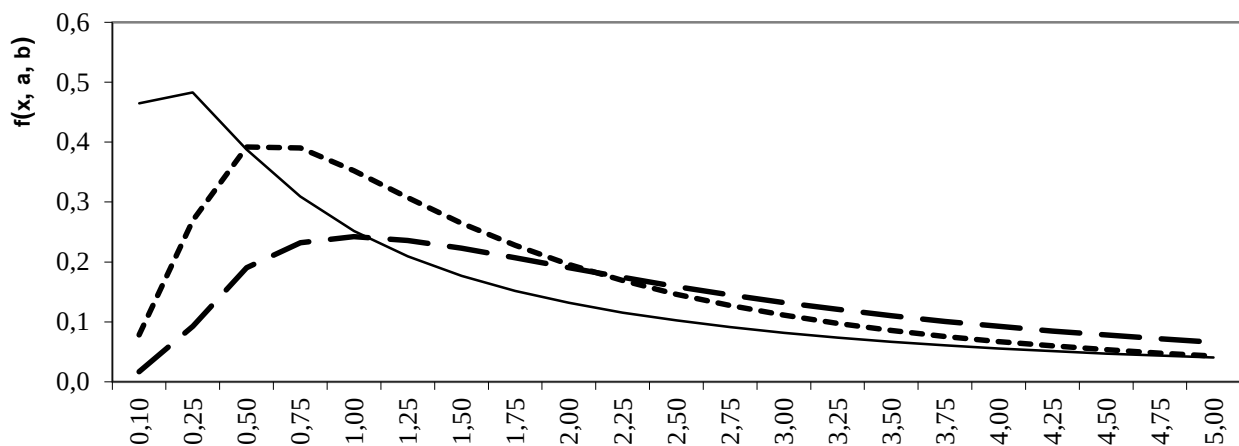


Рисунок 3.3. Функции плотности логарифмически нормального распределения:

— — — — — график 1; · · · · · — — — — — график 2; — — — — — график 3

Таблица 3.3. Функция плотности логарифмически нормального распределения

x	График 1 $\bar{x} = 0, \sigma = 1$	График 2 $\bar{x} = 0,5, \sigma = 1$	График 3 $\bar{x} = 0,5, \sigma = 1,5$
0,10	0,0170836	0,078603	0,464402
0,25	0,0925884	0,269431	0,482610
0,50	0,1903461	0,391669	0,387764
0,75	0,2322211	0,390150	0,309022
1,00	0,2420321	0,352155	0,251653
1,25	0,2360807	0,307232	0,209229
1,50	0,2229326	0,264843	0,177001
1,75	0,2069517	0,227620	0,151897
2,00	0,1903461	0,195835	0,131916
2,25	0,1742109	0,168984	0,115722
2,50	0,1590591	0,146369	0,102392
2,75	0,1450969	0,127307	0,091272
3,00	0,1323693	0,111195	0,081889
3,25	0,1208387	0,097527	0,073892
3,50	0,1104279	0,085883	0,067015
3,75	0,1010435	0,075919	0,061056
4,00	0,0925884	0,067358	0,055855
4,25	0,0849687	0,059969	0,051287
4,50	0,0780965	0,053566	0,047252
4,75	0,0718919	0,047995	0,043669
5,00	0,0662824	0,043129	0,040473

Распределение Релея используется для описания влияния факторов, оказывающих влияние как на частоту, так и на значение статистического ряда. При этом ошибки независимы и распределены по нормальному закону с одинаковой дисперсией и нулевым математическим ожиданием. Это распределение содержит только параметр масштаба b , к тому же a – параметр, показывающий смещение относительно начала координат:

$$f(x, a, b) = \frac{x - a}{b} \exp\left(-\frac{(x - a)^2}{2b}\right).$$

В качестве центра распределения используется минимальное значение признака, а параметр масштаба – дисперсия (табл. 3.4, рис. 3.4).

Таблица 3.4. Значения функции плотности распределения Релея

x	График 1 $\bar{x} = 0, \sigma = 1$	График 2 $\bar{x} = -1, \sigma = 1$	График 3 $\bar{x} = -1, \sigma = 1,5$
0	0	0,606531	0
0,25	0,242308	0,572292	0,109579
0,50	0,441248	0,486979	0,210213
0,75	0,56613	0,378464	0,294166
1,00	0,606531	0,270671	0,355883
1,25	0,572292	0,179009	0,392582

x	График 1 $\bar{x} = 0, \sigma = 1$	График 2 $\bar{x} = -1, \sigma = 1$	График 3 $\bar{x} = -1, \sigma = 1,5$
1,50	0,486979	0,109842	0,404354
1,75	0,378464	0,062684	0,393817
2,00	0,270671	0,033327	0,365433
2,25	0,179009	0,016530	0,324652
2,50	0,109842	0,007656	0,277058
2,75	0,062684	0,003314	0,227664
3,00	0,033327	0,001342	0,180447
3,25	0,016530	0,000508	0,138139
3,50	0,007656	0,000180	0,102244
3,75	0,003314	5,99E-05	0,073228
4,00	0,001342	1,86E-05	0,050783
4,25	0,000508	5,43E-06	0,034119
4,50	0,000180	1,48E-06	0,022218
4,75	5,99E-05	3,80E-07	0,014028
5,00	1,86E-05	9,14E-08	0,008591

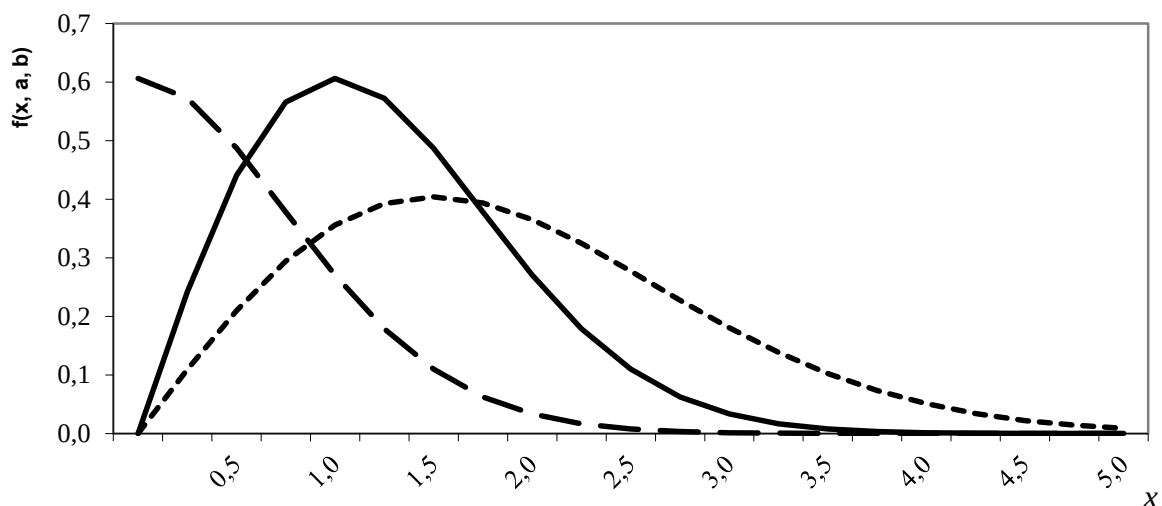


Рисунок 3.4. Графики функции плотности распределения Релея:

— — — — — график 1; — — — — — график 2; — — — — — график 3

Экспоненциальное распределение, частный случай гамма-распределения, используется в качестве статистической модели для времени безотказной работы для системы с большим числом последовательно соединенных компонентов, каждый из которых не оказывает очень большого влияния на вероятность выхода из строя всей системы. Это относится и к определению времени безотказной работы систем, в которых каждый неисправный элемент немедленно заменяется другим, исправным элементом. Плотность распределения:

$$f(x, a, b) = b \exp(-b(x - a)), \quad x \geq 0, \quad b > 0, \quad b = \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}},$$

где a – центр распределения;

b – параметр масштаба.

В качестве центра распределения используется максимальное значение признака, а формула для параметра масштаба приведена выше, где σ^2 – дисперсия (табл. 3.5, рис. 3.5).

Таблица 3.5. Значения функции плотности экспоненциального распределения

x	График 1 $\bar{x} = 0, \sigma = 1$	График 2 $\bar{x} = -1, \sigma = 1$	График 3 $\bar{x} = -1, \sigma = 1,5$
0,00	1	0,367879	0,148753
0,25	0,939413	0,209611	0,063978
0,50	0,778801	0,105399	0,022812
0,75	0,569783	0,046771	0,006743
1,00	0,367879	0,018316	0,001653
1,25	0,209611	0,006330	0,000336
1,50	0,105399	0,001930	5,65E-05
1,75	0,046771	0,000520	7,90E-06
2,00	0,018316	0,000123	9,14E-07
2,25	0,006330	2,59E-05	8,77E-08
2,50	0,001930	4,79E-06	6,98E-09
2,75	0,000520	7,81E-07	4,60E-10
3,00	0,000123	1,13E-07	2,52E-11
3,25	2,59E-05	1,43E-08	1,14E-12
3,50	4,79E-06	1,61E-09	4,29E-14
3,75	7,81E-07	1,59E-10	1,34E-15
4,00	1,13E-07	1,39E-11	3,45E-17
4,25	1,43E-08	1,07E-12	7,39E-19
4,50	1,61E-09	7,29E-14	1,31E-20
4,75	1,59E-10	4,38E-15	1,93E-22
5,00	1,39E-11	2,32E-16	2,36E-24

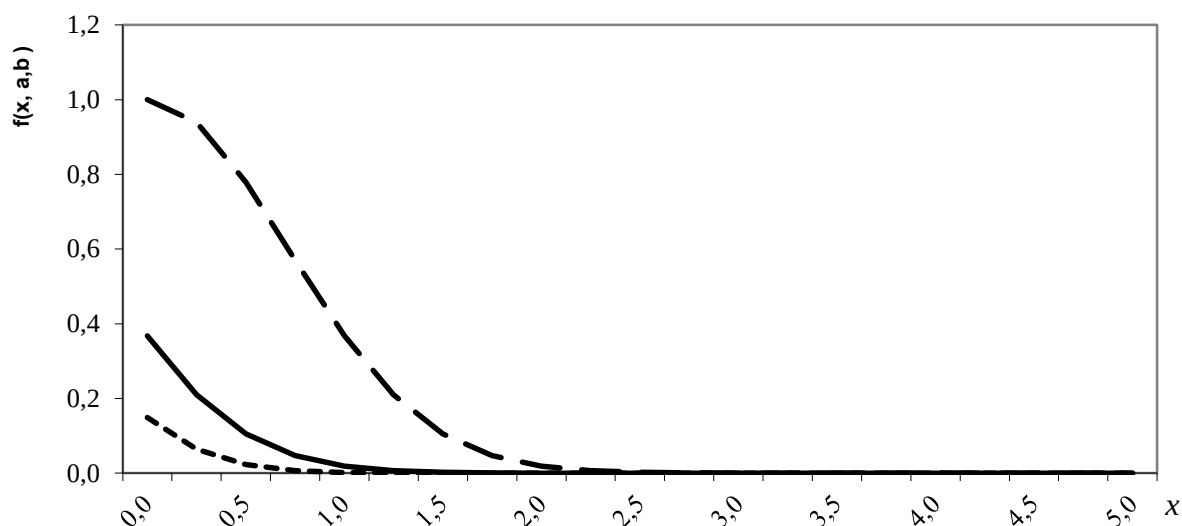


Рисунок 3.5. Графики функции плотности экспоненциального распределения
 — — — — — график 1; — — — — — график 2; - - - - - график 3

Распределение Коши используется для описания отношения двух

независимых случайных величин, распределенных по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием. Это распределение является симметричным с длинным «хвостом» и используется для описания случайных величин, для которых могут быть получены значения, отстоящие очень далеко от центра распределения в любом направлении. Это распределение не имеет конечных моментов. По этой причине в качестве параметра центра распределения (a) используется медиана, а параметр масштаба (b) – среднеквадратичное отклонение (табл. 3.6, рис. 3.6). Плотность распределения

$$f(x, a, b) = \frac{1}{\pi b} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(x - a)^2}{b^2}}.$$

Таблица 3.6. Значения функции плотности распределения Коши

x	График 1 $\bar{x} = 3, \sigma = 1$	График 2 $\bar{x} = 4, \sigma = 1$	График 3 $\bar{x} = 3, \sigma = 1,5$
0	0,031847	0,018734	0,047771
0,25	0,037194	0,021143	0,055791
0,50	0,043927	0,024036	0,065891
0,75	0,052531	0,027543	0,078797
1,00	0,063694	0,031847	0,095541
1,25	0,078393	0,037194	0,117589
1,50	0,097991	0,043927	0,146987
1,75	0,124281	0,052531	0,186422
2,00	0,159236	0,063694	0,238854
2,25	0,203822	0,078393	0,305732
2,50	0,254777	0,097991	0,382166
2,75	0,299738	0,124281	0,449607
3,00	0,318471	0,159236	0,477707
3,25	0,299738	0,203822	0,449607
3,50	0,254777	0,254777	0,382166
3,75	0,203822	0,299738	0,305732
4,00	0,159236	0,318471	0,238854
4,25	0,124281	0,299738	0,186422
4,50	0,097991	0,254777	0,146987
4,75	0,078393	0,203822	0,117589
5,00	0,063694	0,159236	0,095541

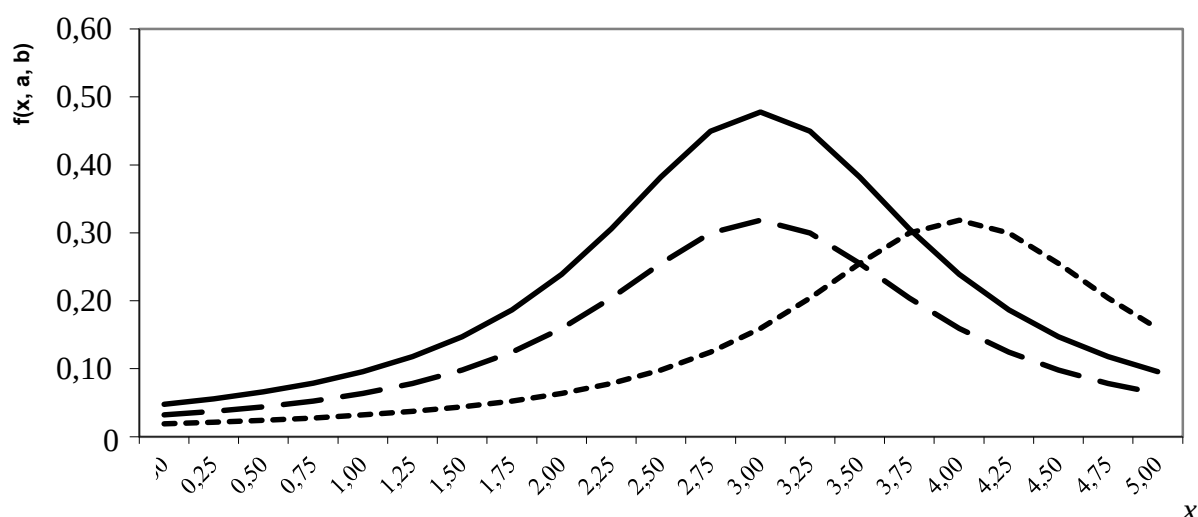


Рисунок 3.6. Графики функции плотности распределения Коши:
 — — — — — график 1; - - - - - график 2; ———— — график 3

Гамма-распределение используется для случайных величин, ограниченных с одной стороны, и описывает время, необходимое для появления ровно c независимых событий, если эти события происходят с постоянной интенсивностью b . Например, это распределение хорошо описывает время безотказной работы системы, распределение размеров доходов семей. Параметр c – это параметр формы и в данном случае является целочисленным ($0 < c < 25$). Для этого частного случая это распределение Эрланга. Параметр масштаба b – отношение разности между средним и минимальным значениями признака и дисперсией, а центр распределения a – минимальное значение признака. Плотность распределения:

$$f(x, a, b, c) = \frac{b^c}{(c-1)!} (x-a)^{c-1} \exp(-b(x-a)).$$

Равномерное распределение описывает появление события, которое с равной вероятностью может появиться в любой момент данного интервала. Плотность распределения:

$$f(x, a_1, a_2) = \frac{1}{a_2 - a_1},$$

где a_1, a_2 – начало и конец интервала.

Распределение экстремальных значений Гумбеля (максимальных) позволяет оценить распределение максимального числа независимых случайных величин, имеющих исходное распределение, «правый хвост» которого неограничен и имеет вид экспоненты. Используется для описания времени безотказной работы системы, состоящей из параллельно соединенных элементов. К таким процессам можно отнести длительность вымирания популяций, максимальные индексы фондовой биржи за год. Плотность распределения:

$$f(x, a, b) = \frac{1}{b} e^{\left(\frac{-1}{b}(x-a) - e^{\frac{-1}{b}(x-a)}\right)}.$$

В качестве центра распределения (a) используется минимальное значение признака, а параметра масштаба (b) – среднеквадратическое отклонение.

Распределение экстремальных значений Вейбулла (минимальных) позволяет оценить распределение минимального числа независимых случайных величин, имеющих исходное распределение вида экспоненты, и не ограничено «слева». Интенсивность отказов с течением времени возрастает как экспоненциальная функция. Плотность распределения:

$$f(x, a, b) = \frac{1}{b} e^{\left(\frac{-1}{b}(x-a) - e^{\frac{-1}{b}(x-a)}\right)}.$$

В качестве центра распределения (a) используется максимальное значение признака, а параметра масштаба (b) – среднеквадратическое отклонение.

Распределение Вейбулла моделирует время безотказной работы системы при изменении интенсивности отказов с течением времени. Интенсивность отказов меняется по следующему закону:

$$h(t) = \frac{c}{b} \left(\frac{t}{b}\right)^{c-1}.$$

Плотность распределения:

$$f(x, a, b, c) = \frac{c}{b} \left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c},$$

где a – центр распределения (минимальное значение признака);
 b – параметр масштаба (среднеквадратическое отклонение);
 c – параметр формы.

Бета-распределение – модель для случайных величин, ограниченных конечным интервалом. Применяется для оценки продолжительности работ. Плотность распределения:

$$f(x, c, d, x_{\min}, x_{\max}) = \frac{1}{x_{\max} - x_{\min}} \cdot \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \cdot \left(\frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}\right)^{c-1} \cdot \left(1 - \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}\right)^{d-1},$$

где c, d – параметры формы;

$x_{\min}, x_{\max}$ – минимальное и максимальное значения признака, $\Gamma(c) = (c-1)!$.

Частный случай – равномерное распределение. Перечень приведенных непрерывных распределений плотности далеко не исчерпан, но для знакомства с формами распределения его можно считать достаточным.

3.2. Идентификация, параметризация и сертификация модели

Идентификация эконометрической модели показателя означает установление соответствия между представлением ранжированных рядов результатов статистических наблюдений в виде структурной группировки и функцией плотности распределения показателя.

Параметризации эконометрической модели означает определение значений параметров выбранной функции плотности распределения:

- центра распределения;
- масштаба распределения.

Степень однородности совокупности характеризует уровень концентрации показателя, который в дальнейшем фигурирует как центр распределения однородной совокупности. В зависимости от закона распределения в качестве центра распределения может фигурировать среднее, максимальное или минимальное значение, мода, медиана.

Масштаб распределения характеризует вариация значения показателя в пределах совокупности. Абсолютная и относительная вариация, характеризующая колеблемость значений варьирующего показателя, позволяют, в частности, измерить степень связи и взаимозависимости, оценить степень однородности совокупности, типичности и устойчивости относительно центра распределения, определить величину возможной погрешности.

Характеристикой вариации является дисперсия, которая представляет средний квадрат отклонений вариантов показателя от центра распределения. Часто для характеристики рассеяния показателя удобнее использовать не дисперсию, а среднее квадратическое отклонение – корень второй степени из дисперсии (в литературе – стандарт $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$). Эта величина выражается в тех же единицах измерения, что и значения показателя. Последнее обстоятельство означает, что для того, чтобы вычислить среднее квадратическое отклонение, необходимо сначала определить дисперсию:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n},$$

где n – число наблюдений;

$\bar{x}$ – среднее значение показателя.

Сертификация модели означает оценку и подтверждение соответствия определенным критериям.

При выборе и оценке степени совпадения эмпирического и выбранного аналитического распределения используются критерии согласия.

Одним из наиболее часто употребляемых критериев согласия является критерий χ^2 , предложенный К. Пирсоном:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(y_i^o - y_i^t)^2}{y_i^t},$$

где в данном случае y_i^t – частота или частость, определенная по выбранной формуле плотности распределения;

y_i^0 – эмпирическая частота или частость, полученная при группировке наблюдений.

Чем больше разность между эмпирическими и расчетными значениями, тем больше величина критерия Пирсона. Чтобы отличить существенные значения χ^2 от значений, которые могут возникать из-за случайности выборки, рассчитанное значение критерия сравнивается с приведенным в таблице при соответствующем уровне значимости (вероятности) и числе степеней свободы. Уровень значимости α выбирается таким образом, чтобы $P(\chi^2 > \chi_{\text{tab}}^2) = \alpha$, где χ_{tab}^2 – значение из таблицы, обычно α принимается равным 0,05 или 0,01.

Определив значение критерия Пирсона для заданной совокупности, можно встретиться со следующими вариантами:

1) $\chi^2 > \chi_{\text{tab}}^2$, т. е. χ^2 попадает в критическую область, что означает существенность расхождений между эмпирическими и теоретическими частотами, которые нельзя объяснить случайными колебаниями данных. В таком случае гипотеза о близости эмпирического распределения к выбранному отвергается;

2) $\chi^2 \leq \chi_{\text{tab}}^2$, т. е. рассчитанный критерий не превышает максимально возможную величину расхождений эмпирических и расчетных частот. В этом случае гипотеза не отвергается.

Табличное значение критерия Пирсона (табл. 3.7) определяется при фиксированном уровне значимости и соответствующем числе степеней свободы. Число степеней свободы равно $(k - l - 1)$, где k – число групп, l – число выполненных условий при вычислении параметров распределения (обычно два условия – центр распределения и параметр масштаба или, иначе, оценка генеральной средней и дисперсия). Поэтому обычно число степеней свободы полагается равным $(k - 3)$, так как при вычислении теоретических частот нормального распределения в качестве оценок средней и дисперсии используются характеристики, полученные по данным результатов выборки.

Таблица 3.7. Значения критерия Пирсона

Число степеней свободы	Вероятность							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,7	0,5	0,3
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,8	11,6	12,3	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	13,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3

Число степеней свободы	Вероятность							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,7	0,5	0,3
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,0	34,0	36,1
15	19,3	23,5	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,0	37,0	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,0	40,0	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3
22	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5	46,0	48,3
24	29,63	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,5	51,2
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,0	51,5	54,1
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,5	56,9
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	54,0	57,5	59,7

Пример. Оценить, насколько соответствуют эмпирические данные нормальному закону распределения (табл. 3.8).

$\chi^2 = 4,05$, число степеней свободы $7 - 3 = 4$. При уровне значимости (вероятности) 0,95 и числе степеней свободы 4 $\chi^2_{\text{таб}} = 9,5$. Таким образом, расчетное значение критерия не превышает табличное, т. е. не опровергается гипотеза о распределении.

Таблица 3.8. Данные и расчет

Номер интервала	Частоты		$(y_i^o - y_i^t)^2$	$\frac{(y_i^o - y_i^t)^2}{y_i^t}$
	эмпирические	расчетные		
1	5	6	1	0,17
2	12	8	16	2,00
3	12	13	1	0,08
4	15	15	0	0,00
5	9	13	16	0,00
6	9	9	0	0,00
7	9	7	4	0,57
Итого	71	71	—	4,05

При расчете критерия Пирсона необходимо соблюдать следующие условия.

1. Число наблюдений должно быть достаточно велико, во всяком случае, $n \geq 50$.
2. Если теоретические частоты в некоторых интервалах менее 5, то такие интервалы объединяют так, чтобы они были более 5.

3.3. Пример

На первом этапе исследования статистического показателя производится упорядочение ряда распределения и производится анализ полученной информации.

В качестве исходных данных рассмотрим распределение скоростей по ряду автомобилей (табл. 3.9).

Таблица 3.9. Распределение скоростей по маркам автомобилей

№	Наблюдения	Скорость (км/час)
1	BMW 316	191
2	BMW 3181	198
3	BMW325	217
4	BMW 518	194
5	BMW 525	230
6	BMW 730	222
7	BMW 740	240
8	BMW 850	250
9	BENTLEY	230
10	CADILAC 1	200
11	CADILAC 2	210
12	CADILAC 3	185
13	CADILAC 4	170
14	FIAT	175
15	FORD1	199
16	FORD2	190
17	FORD3	190
18	FORD4	180
19	LINCOLN	180
20	«Mercedes-Benz» 190	212
21	«Mercedes-Benz» 300	204
22	«Mercedes-Benz» 500	250
23	«Mercedes-Benz» 560	220
24	«Mercedes-Benz» 600	255
25	MITSUBBISHI 1	175
26	MITSUBBISHI 2	190
27	MITSUBBISHI 3	230
28	NISSAN	180
29	OPEL	200
30	Rolls-Roys	220
31	SAAB	235
32	VOLVO 1	200
33	VOLVO 2	215
34	VOLVO 3	190
35	VOLVO 4	210
36	FORD FOCUS	198
37	AUDI A4	212
38	MERCEDES 230K	240
39	BMW 525i	232
40	MERCEDES C270	224
41	NISSAN TINO	165
42	CHRYSLER VOYA	185
43	FORD_EXCURSIO	220

На первом этапе исследования статистического показателя производится упорядочение ряда распределения и производится анализ полученной информации (табл. 3.10).

Таблица 3.10. Упорядоченный по возрастанию вариационный ряд

Наблюдения	Скорость (км/час)
NISSAN TINO	165
CADILAC 4	170
FIAT	175
MITSUBBISHI 1	175
FORD4	180
LINCOLN	180
NISSAN	180
CADILAC 3	185
CHRYSLER VOYA	185
FORD2	190
FORD3	190
MITSUBBISHI 2	190
VOLVO 3	190
BMW 316	191
BMW 518	194
BMW 3181	198
FORD FOCUS	198
FORD1	199
CADILAC 1	200
OPEL	200
VOLVO 1	200
«Mercedes-Benz» 300	204
CADILAC 2	210
VOLVO 4	210
«Mercedes-Benz» 190	212
AUDI A4	212
VOLVO 2	215
BMW325	217
«Mercedes-Benz» 560	220
Rolls-Roys	220
FORD_EXCURSIO	220
BMW 730	222
MERCEDES C270	224
BMW 525	230
BENTLEY	230
MITSUBBISHI 3	230
BMW 525i	232
SAAB	235
BMW 740	240
MERCEDES 230K	240
BMW 850	250
«Mercedes-Benz» 500	250
«Mercedes-Benz» 600	255

Результатом анализа являются:

- минимальное и максимальное значение показателя;
- частота появления одних и тех же значений показателя;
- размах вариации.

После первого этапа исследования, естественно, следует второй, на котором рассчитываются характеристики ряда:

- средняя величина ряда 207;
- мода 190;
- медиана 204;
- минимальное значение 165
- максимальное значение 255
- дисперсия 258;
- среднее квадратическое отклонение 22,988
- размах вариации 90;
- среднее линейное отклонение 19,58;
- коэффициент вариации 11,09.

На следующем этапе производится выполнение структурной группировки, сначала равноинтервальной (рис. 3.7). А при необходимости уточнения тенденций изменения статистического показателя выполняется и неравноинтервальная группировка (рис. 3.8).

Очередной этап статистического исследования связан с выбором закона распределения статистического показателя. Во многих случаях при выборе закона распределения статистического ряда существуют рекомендации, которые в конкретных случаях не всегда соответствуют действительности.

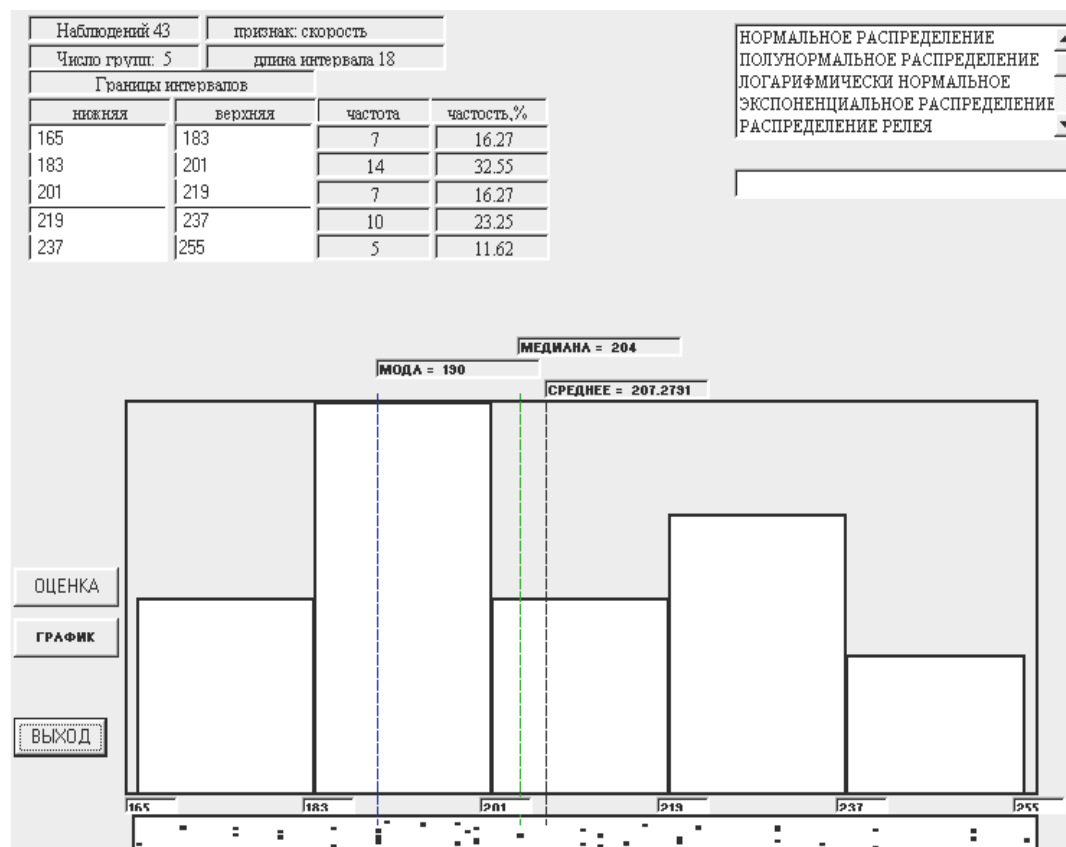


Рисунок 3.7. Структурная равноинтервальная группировка

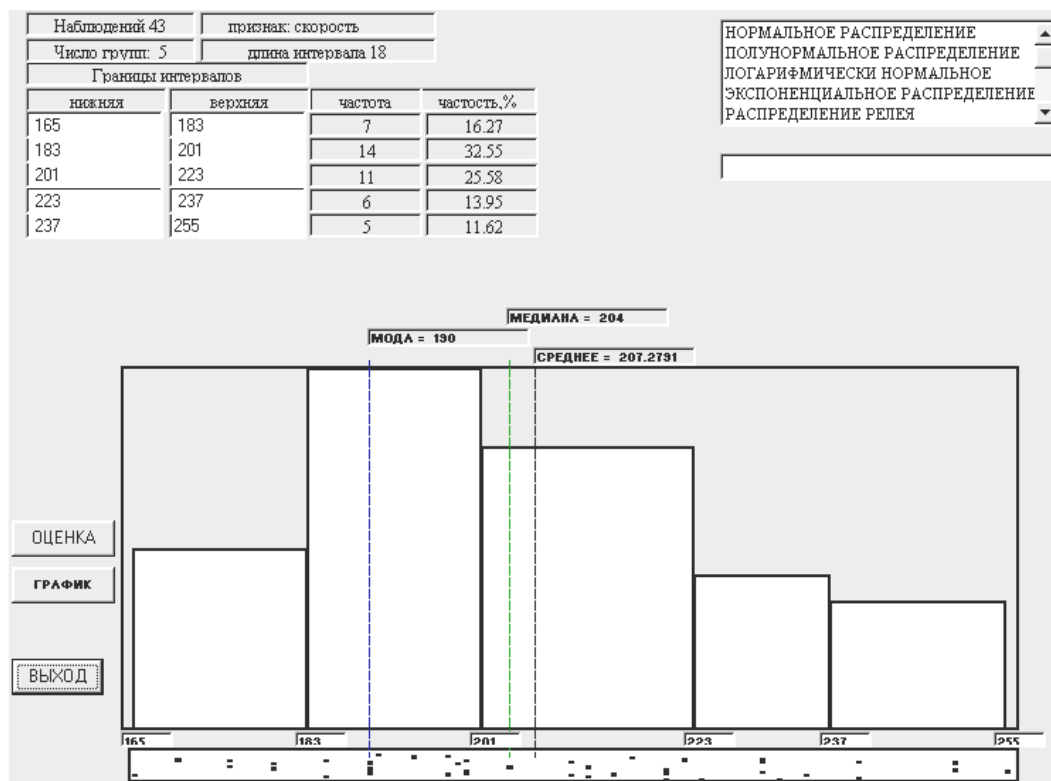


Рисунок 3.8. Структурная неравноинтервальная группировка

При выборе закона распределения статистического показателя необходимо руководствоваться не только критериями согласия (Пирсон, Колмогоров, Романовский), но и визуально анализировать распределение частот и частостей (рис. 3.9, 3.10), хотя критерии согласия как раз и дают численную оценку степени расхождения эмпирических и теоретических частостей. В рассматриваемом примере конкурируют два распределения:

- нормальное (рис. 3.9);
- Коши (рис. 3.10).

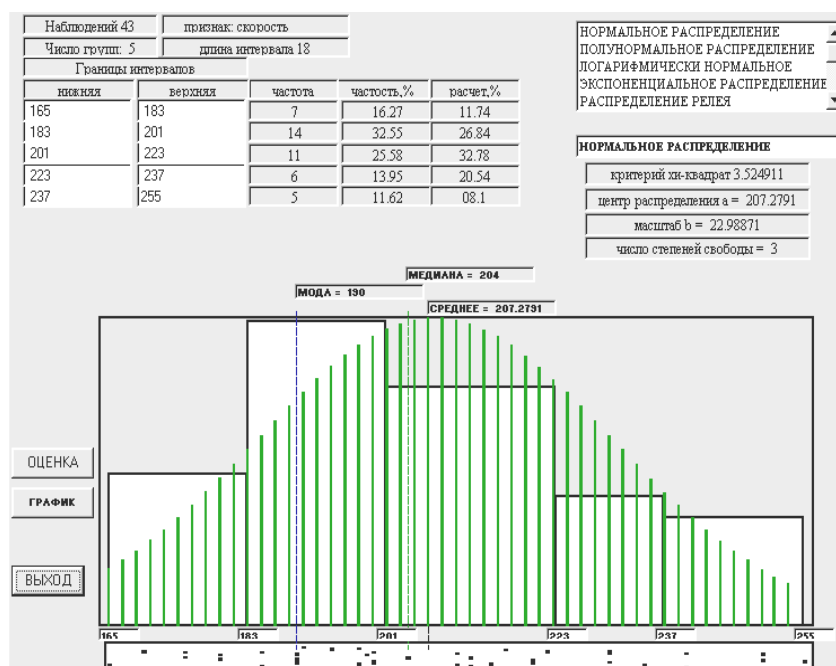


Рисунок 3.9. Нормальный закон распределения показателя ($\chi^2 = 3,52$)

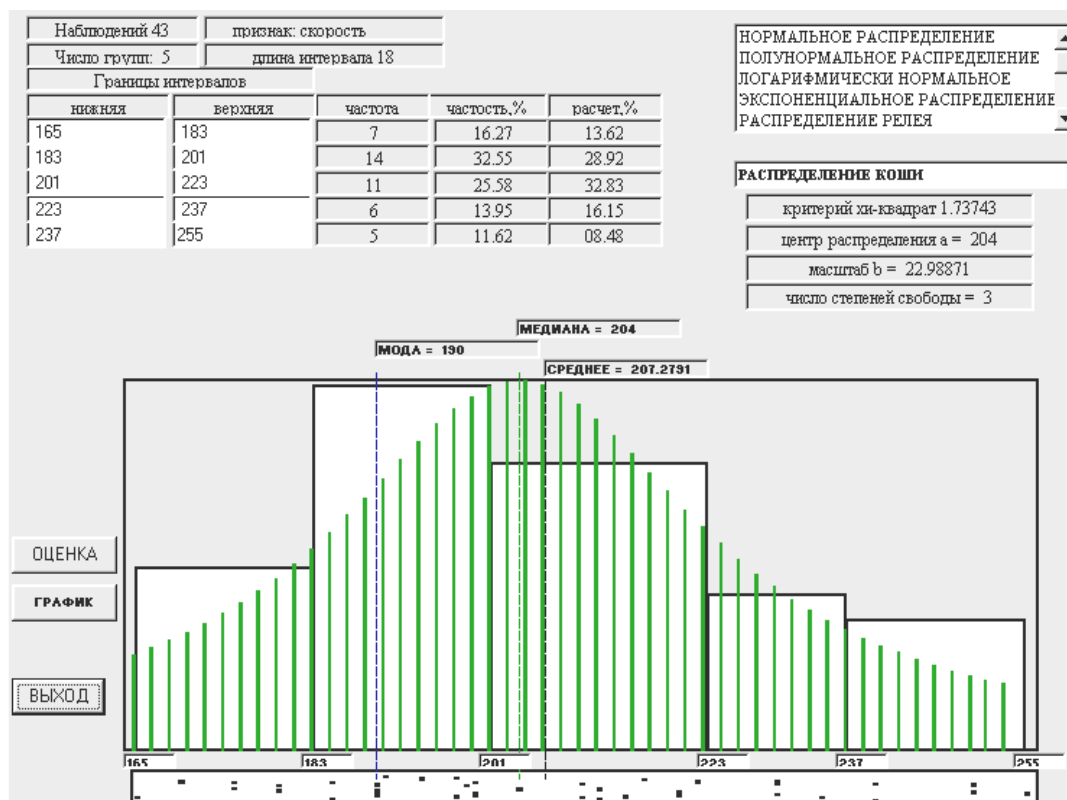


Рисунок 3.10. Закон распределения Коши ($\chi^2 = 1,737$)

Эти два распределения могут быть приняты в качестве исходного, так как при одинаковом числе степеней свободы (равном 3) по критерию Пирсона соответствующая вероятность равна 0,99 (при теоретическом значении критерия $\chi^2 = 4,64$).

Могут быть рассмотрены на этом этапе и другие характеристики, например, показатели асимметрии, эксцесс. Приведенный перечень показателей не является полным и зависит от цели исследования.

3.4. Варианты задания

На основе данных, приведенных в Приложении 1, требуется:

1. Провести идентификацию эконометрической модели (не менее двух вариантов).
2. Провести параметризацию выбранных эконометрических моделей.
3. Провести сертификацию эконометрических моделей.
4. Сделать вывод какая из рассмотренных эконометрических моделей более пригодна для практических целей.

В качестве исходных данных использовать Приложение 1. Начальные значения (номер варианта) соответствуют последним двум цифрам номера зачетной книжки. Далее необходимо скопировать 50 значений второй колонки. Замена задач не допускается. Номер варианта указывается в самом начале работы.

ЗАДАНИЕ № 4

Задание: определить регрессионную эконометрическую модель.

Цель: формирование эконометрической модели взаимодействия детерминированного и статистического показателей.

4.1. Регрессионные эконометрические модели показателя

В качестве эконометрических моделей на практике наиболее часто используются следующие функции:

1. Множество всех линейных зависимостей (парабола первого порядка): $y = a_0 + a_1 x$.

2. Множество всех квадратичных трехчленов (парабола второго порядка): $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

3. Множество всех полиномов определенной степени (параболы более высоких порядков): $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$.

4. Множество всех гиперболических зависимостей вида:

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x}.$$

5. Множество всех показательных зависимостей: $y = a_0 a_1^x$.

6. Множество всех степенных зависимостей: $y = a_0 x^{a_1}$.

7. Множество логарифмических зависимостей: $y = a_0 + a_1 \log x$.

Кроме названных, могут использоваться аналитические зависимости:

$$y = a_0 + a_1 \log(x);$$

$$y = \frac{a_0}{a_1 + x};$$

$$y = a_0 \exp\left(\frac{a_1}{x}\right);$$

$$y = a_0 \cdot a_1^x;$$

$$y = a_0 + a_1 x^n;$$

$$y = \frac{1}{a_0 + a_1 \exp(x)}$$
$$y = a_0 x^{a_1}$$

$$y = \frac{1}{a_0 + a_1 \log(x)};$$

$$y = \frac{a_0 x}{a_1 + x};$$

$$y = a_0 \cdot a_1^{\frac{1}{x}};$$

$$y = \frac{1}{a_0 + a_1 x};$$

$$y = \frac{x}{a_0 + a_1 x};$$

$$y = a_0 \exp(a_1 x);$$

$$y = \frac{1}{a_0 + a_1 \exp(-x)}.$$

4.2. Идентификация эконометрической модели

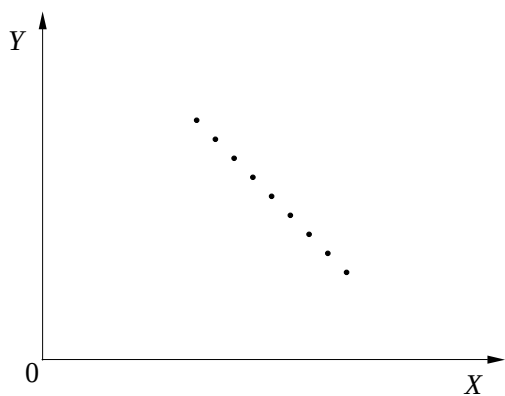
Для идентификации регрессионной эконометрической модели необходимо:

- а) на основе анализа имеющихся данных установить существование какой-либо зависимости между рассматриваемыми показателями;
- б) установить форму, характер зависимости и меру тесноты связи;
- в) выбрать функцию, в наибольшей степени соответствующую форме и характеру зависимости.

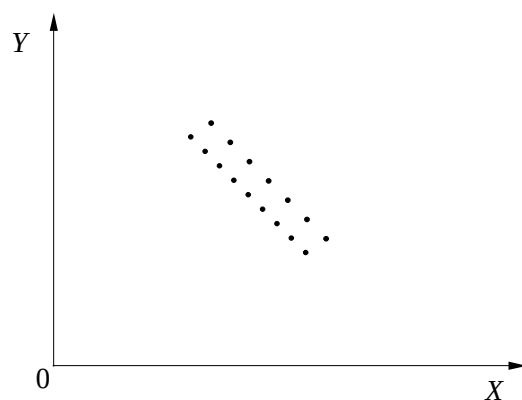
Затем перейти к параметризации (определить параметры выбранной функции). Для определения вида уравнения регрессии необходим анализ конкретных данных о наличии зависимости.

Для предварительного выявления наличия связи и раскрытия ее характера, для выбора формы зависимости, а в известной мере, и для оценки тесноты связи применяют графический метод. Проведение статистического исследования целесообразно начинать с построения аналитической группировки, которая позволяет визуально определить наличие зависимости между факторами.

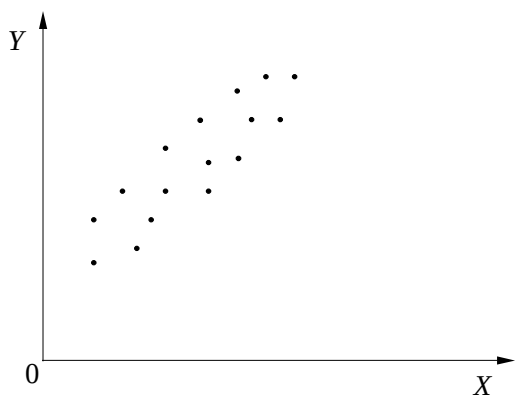
Имея численные оценки факторного и результативного признаков для каждой единицы совокупности, ее можно отобразить точкой в декартовой системе координат. Причем ось абсцисс традиционно выбирается шкалой факторного признака, а ось ординат – результативного. Полученная совокупность точек получила название корреляционного поля, или поля корреляции, и позволяет визуально оценить наличие корреляционной связи, ее вид (линейная или нелинейная), интенсивность (слабая или сильная). Наиболее типичные для корреляционного поля случаи представлены на рис. 4.1.



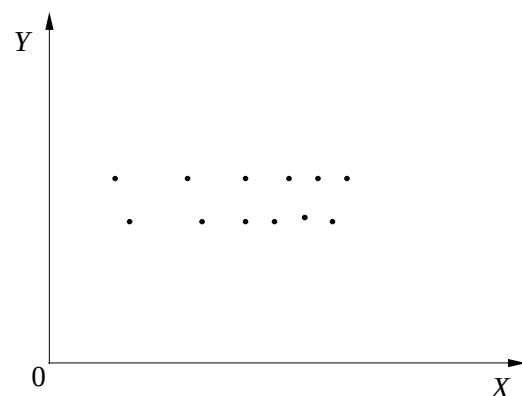
a



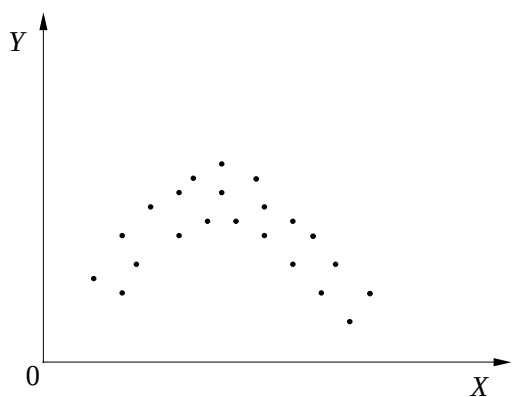
б



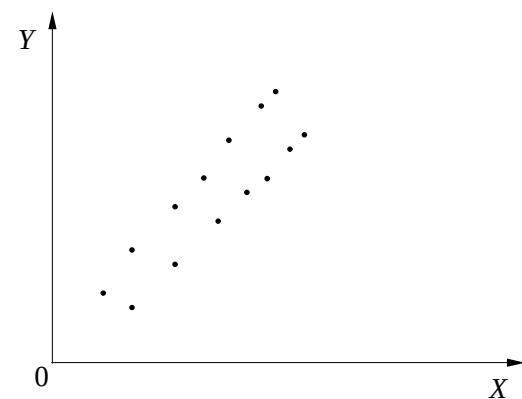
в



г



д



е

Рисунок 4.1. Примеры поля корреляции

На рисунке: *a* – полная связь. Можно предполагать, что существует линейная детерминированная (функциональная или полная) зависимость между показателями; *б* – сильная (обратная) корреляция. Можно предполагать, что существует линейная статистическая (вероятностная или стохастическая) зависимость между показателями; *в* – можно предполагать наличие слабой

корреляционной прямой связи между показателями; c – можно предполагать отсутствие связи между показателями; d – можно предполагать наличие сильной нелинейной корреляционной связи между показателями; e – можно предполагать наличие сильной прямой корреляционной связи между показателями.

Одной из важнейших характеристик распределения по количественному признаку является среднее значение, поэтому весьма важные выводы о характере, классе, взаимосвязи между явлениями можно получить путем сопоставления средних значений результирующего признака с определенными значениями признака-фактора, так как одинаковым распределениям должны соответствовать одинаковые средние значения. В аналитической группировке каждому интервалу значений признака-фактора соответствует среднее значение признака-результата. Различия групповых средних величин результативного признака позволяют утверждать, что признаки взаимосвязаны. Тенденция изменения средних величин признака-результата при переходе от одной группы к другой может предполагать класс зависимости (линейная, нелинейная). Если при этом группы оказываются достаточно многочисленными, то групповые средние являются статистически устойчивыми. Таким образом, соединяя групповые средние ломаной линией, можно наметить аналитическое выражение, наиболее полно характеризующее зависимость между показателями. Эта ломаная, соединяющая групповые средние величины, получила название эмпирической линии регрессии¹ и отражает главную тенденцию рассматриваемой зависимости (рис. 4.2).

Таким образом, процесс построения эмпирической регрессии подразделяется на следующие этапы:

- 1) определяется, исходя из объема статистической совокупности, число групп по формуле или правилу – это эмпирическое правило для определения числа интервалов (K) при построении гистограммы по выборке данных (N). Формула выглядит как:

$$K \approx 1 + 3,322 \log_{10}(N),$$

где N – количество наблюдений в выборке,

K – число интервалов, которое обычно округляют до ближайшего целого числа.

Сначала строится равноинтервальная группировка, а в случае необходимости – неравноинтервальная. Для лучшего выявления тенденции изменения вариационного ряда число интервалов может быть пересмотрено;

- 2) исходя из объема статистической совокупности, определяется количественное значение понятия статистически-устойчивой группы (сколько значений должно быть в каждой группе, чтобы среднее значение было достоверно);

¹Термин «регрессия» был введен биологом Ф. Гальтоном. Регрессия по латыни означает движение назад. Гальтон, исследуя соотношение между ростом отцов и сыновей, заметил, что колеблемость роста сыновей меньше, чем у отцов, т. е. рост сыновей имеет тенденцию регрессировать к среднему росту, т. е. возвращаться, приближаться к нему. Несмотря на то, что эта теория не подтвердилась, термин «регрессия» сохранился в статистике.

- 3) строится частотный ряд по признаку-фактору с числом наблюдений в каждом варианте, определенном в п. 1;
- 4) по каждой группе рассчитываются средние значения признака-результата y'_i и признака-фактора $\bar{x}_i$;
- 5) графически изображаются корреляционное поле и групповые средние, соединенные ломаной линией.

Аналитическая группировка, как и структурная, может представляться в виде равноинтервальной, а затем для уточнения тенденции возможно перейти к неравноинтервальной группировке.

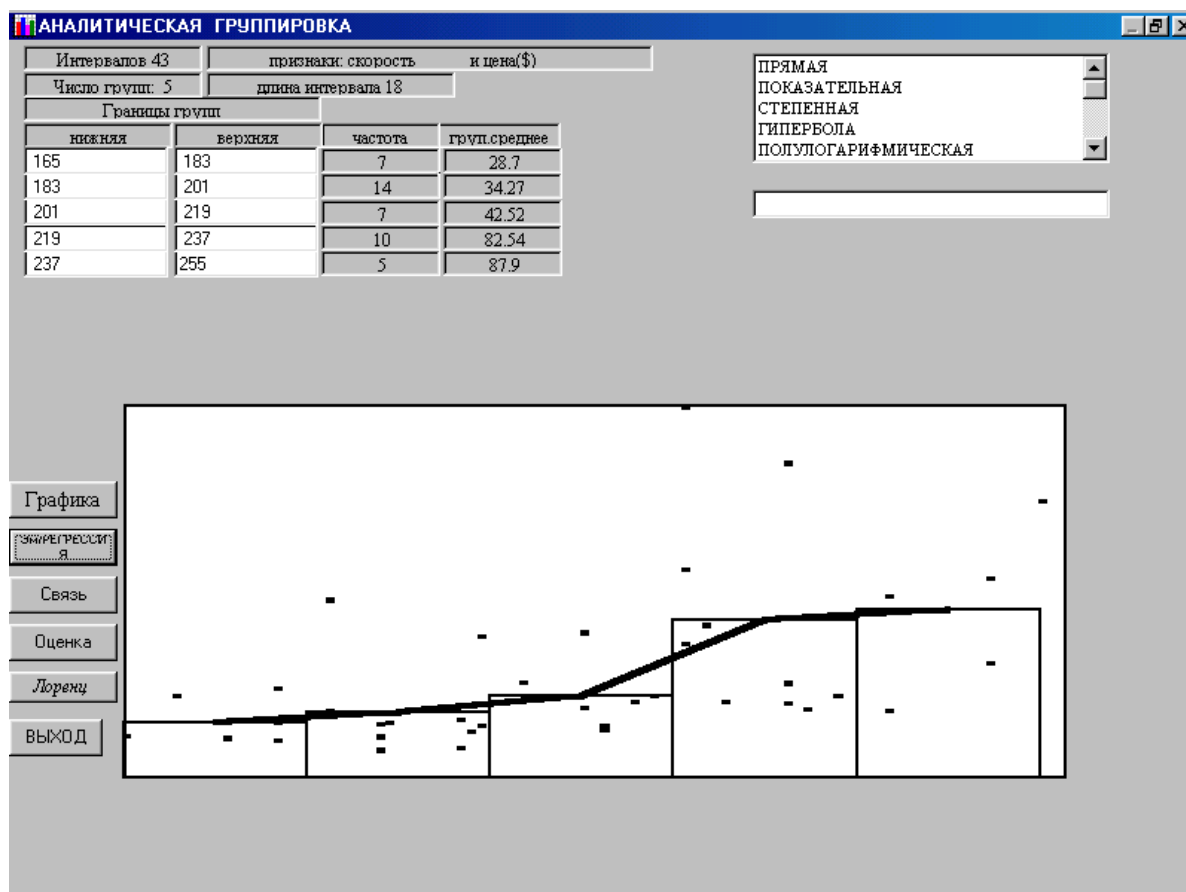


Рисунок 4.2. Аналитическая группировка, поле регрессии и эмпирическая линия регрессии

Аналитическая группировка дает возможность:

- оценить влияние на результативный фактор только признака, положенного в ее основание, и исключает влияние всех остальных;
- сделать предварительные выводы о существовании связи между признаками, оценить характер зависимости.

Приблизительное представление о линии связи можно также получить на основе эмпирической линии регрессии (линии групповых средних, которая строится на основании аналитической группировки). Так как ряд значений признака-фактора $\bar{x}$ и относящихся к ним групповых средних признака-

результата $\bar{y}$ показывает характер зависимости, то таким образом в табличной форме выражается эмпирическая регрессия функции. Если в системе координат, где по оси ординат (y) указываются значения признака-результата, а по оси абсцисс (x) – значения признака-фактора, отметить групповые средние и соединить их прямолинейными отрезками, то полученная ломаная будет графически представлять ту же функцию. Эта линия называется эмпирической линией регрессии, которая отражает главную тенденцию рассматриваемой зависимости.

Даже в случае хорошо наблюдаемой зависимости между признаками эмпирическая регрессия представляет ломаную линию, так как влияние неучтенных факторов на среднюю групповую не полностью погашается в силу недостаточно большого числа наблюдений в каждой группе.

Построение эмпирической регрессии позволяет определить наличие, направление и класс взаимосвязи, но обладает рядом недостатков:

- а) для получения статистически устойчивых средних требуется, чтобы численность групп была достаточно большой;
- б) результаты анализа, представленные в табличной или графической форме, очень грубо аппроксимируют (поэтому требуется интерполяция² или экстраполяция³) значения результирующего признака между точками групповых средних;
- в) содержательный анализ исследуемого явления зачастую требует описания взаимосвязи в виде аналитически заданной функции, так как без количественной оценки закономерности связи невозможно доводить результаты экономических разработок до такого уровня, чтобы они могли использоваться для практических целей.

Пример

По данным корреляционной таблицы (табл. 4.1) рассчитать среднюю численность работников по каждой из семи групп фирм, выделенных по числу маршрутов.

Таблица 4.1. Корреляционная таблица

Количество работников y , чел.	Количество маршрутов, обслуживаемых одной туристической фирмой, x							Итого
	5–7	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17	17–19	
10–15	<u>7</u>	4		2	1			14
15–20	3	<u>8</u>	5	4				20
20–25		2	<u>11</u>	8		2		23

²Интерполяция – приближенный расчет недостающего значения внутри статистического ряда при известных соседних значениях.

³Экстраполяция – приближенный расчет недостающего значения статистического ряда при известном одном соседнем значении. Для ранжированных по возрастанию рядов выделяют перспективную экстраполяцию, если известно максимальное значение ряда, и ретроспективную – если известно минимальное.

Количество работников y , чел.	Количество маршрутов, обслуживаемых одной туристической фирмой, x							
	5–7	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17	17–19	Итого
25–30			5	<u>13</u>	7	1		26
30–35				1	<u>16</u>	3		20
35–40				2	6	<u>19</u>	3	30
40–45					3	7	<u>18</u>	28
Итого	10	14	31	30	33	32	21	161

Обозначим эти средние значения через y' и произведем расчеты, результаты которых представлены в табл. 4.2.

Таблица 4.2. Групповые средние

y_1'	y_2'	y_3'	y_4'	y_5'	y_6'	y_7'
14,0	16,79	22,51	24,67	32,65	36,88	41,79

Данные таблицы, аналитической группировки, поле корреляции и эмпирической регрессии представлены на рис. 4.3.

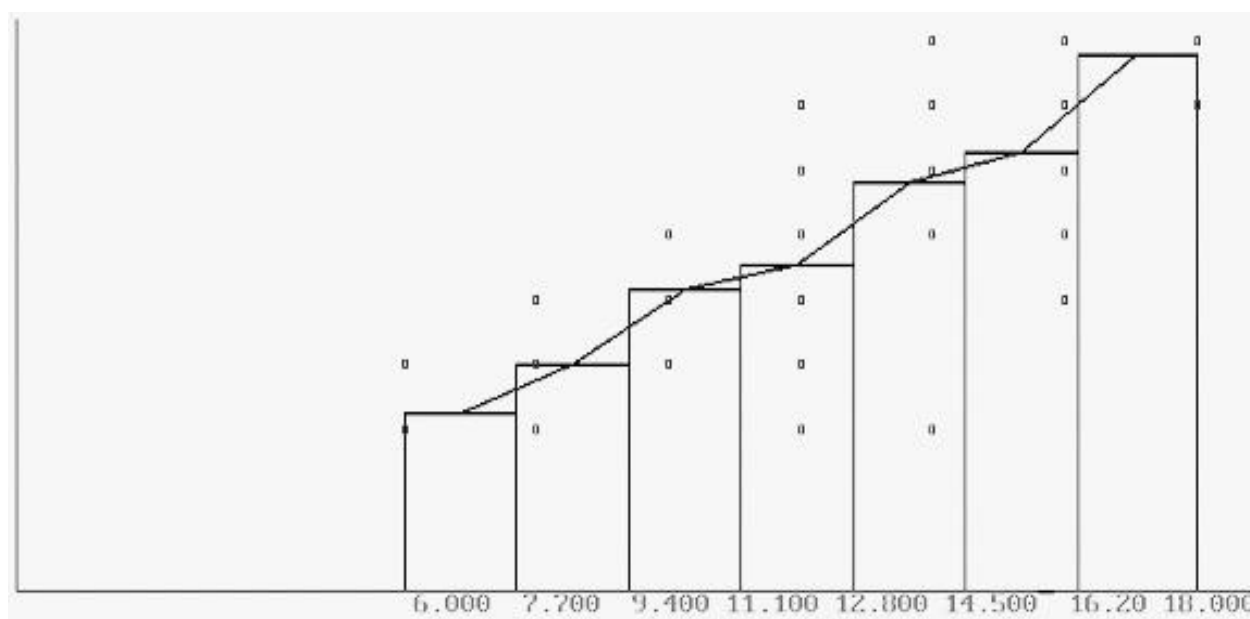


Рисунок 4.3. Поле корреляции, аналитическая группировка и эмпирическая линия регрессии

Ломаная линия на графике (линия значений y_i') является эмпирической линией регрессии.

Для оценки меры тесноты связи используется коэффициент, количественно оценивающий степень зависимости между переменными. Наиболее распространен линейный коэффициент корреляции ($r_{x,y}$), который измеряет тесноту и направление в случае предполагаемой линейной связи между двумя

количественными переменными. Значения варьируются от -1 до 1. Близость к 1 указывает на сильную положительную связь, к -1 – на сильную отрицательную, а к 0 – на отсутствие линейной связи.

$$r_{x,y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \times \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где $\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times y_i}{n}$;

$\bar{x}, \bar{y}$ – среднее значение признаков x и y соответственно;

σ_x, σ_y – среднее квадратичное отклонение для признаков x и y соответственно.

Для качественной оценки тесноты связи между признаками используется шкала Чеддока, представленная в табл. 4.3.

Таблица 4.3. Шкала Чеддока

Показания тесноты связи	0,1–0,3	0,3–0,5	0,5–0,7	0,7–0,9	0,9–0,99
Характеристика тесноты связи	Слабая	Умеренная	Заметная	Высокая	Весьма высокая

Значимость линейного коэффициента корреляции проверяется на основе критерия Стьюдента:

$$t_p = \sqrt{\frac{r_{x,y}^2}{(1 - r_{x,y}^2)}} (n - 2).$$

При большом числе наблюдений ($n \geq 100$) используется следующая формула t -критерия Стьюдента (табл. 4.4.).

$$t_p = \frac{|r_{x,y}|}{\sqrt{(1 - r_{x,y}^2)}} \cdot \sqrt{n}.$$

Если расчетное значение $t_p > t_{кр}$ (табличное), то это свидетельствует о значимости линейных коэффициентов корреляции, следовательно, и о статистической существенности зависимости между параметрами.

Таблица 4.4. Таблица распределения Стьюдента, n – объем совокупности

Число степеней свободы $f = n - 1$	n	Доверительная вероятность			
		0,90	0,95	0,99	0,999
1	2	6,3137515148	12,7062047364	63,6567411629	636,619249432
2	3	2,91998558036	4,30265272991	9,92484320092	31,599054577

Продолжение табл. 4.4

Число степеней свободы $f = n - 1$	n	Доверительная вероятность			
		0,90	0,95	0,99	0,90
3	4	2,3533634348	3,18244630528	5,84090929976	12,9239786366
4	5	2,13184678134	2,7764451052	4,60409487142	8,61030158138
5	6	2,01504837267	2,57058183661	4,03214298356	6,86882663987
6	7	1,94318028039	2,44691184879	3,70742802132	5,95881617993
7	8	1,89457860506	2,36462425101	3,49948329735	5,40788252098
8	9	1,85954803752	2,30600413503	3,35538733133	5,04130543339
9	10	1,83311293265	2,26215716274	3,24983554402	4,78091258593
10	11	1,81246112281	2,22813885196	3,16927266718	4,5868938587
11	12	1,7958848187	2,20098516008	3,10580651322	4,43697933823
12	13	1,78228755565	2,17881282966	3,05453958834	4,31779128361
13	14	1,77093339599	2,16036865646	3,01227583821	4,22083172771
14	15	1,76131013577	2,14478668792	2,97684273411	4,14045411274
15	16	1,75305035569	2,13144954556	2,94671288334	4,0727651959
16	17	1,74588367628	2,11990529922	2,92078162235	4,0149963326
17	18	1,73960672608	2,10981557783	2,89823051963	3,96512626361
18	19	1,73406360662	2,10092204024	2,87844047271	3,92164582001
19	20	1,72913281152	2,09302405441	2,86093460645	3,88340584948
20	21	1,72471824292	2,08596344727	2,84533970978	3,84951627298
21	22	1,72074290281	2,07961384473	2,83135955802	3,81927716303
22	23	1,71714437438	2,0738730679	2,8187560606	3,79213067089
23	24	1,71387152775	2,06865761042	2,80733568377	3,76762680377
24	25	1,71088207991	2,06389856163	2,79693950477	3,74539861893
25	26	1,70814076125	2,05953855275	2,78743581368	3,72514394948
26	27	1,70561791976	2,05552943864	2,77871453333	3,70661174331
27	28	1,70328844572	2,05183051648	2,77068295712	3,68959171334
28	29	1,70113093427	2,0484071418	2,76326245546	3,67390640062
29	30	1,69912702653	2,04522964213	2,75638590367	3,6594050194
30	31	1,69726089436	2,0422724563	2,74999565357	3,645958635
40	41	1,68385101139	2,021075383	2,70445926743	3,55096576086
60	61	1,67064886465	2,00029782106	2,66028303115	3,4602004692
120	121	1,65765089935	1,97993040505	2,61742114477	3,37345376507
999999,0	1000000,0	1,64485515072	1,95996635682	2,57583422011	3,29053646126

В случае предполагаемой нелинейной зависимости между признаком-фактором и признаком-результатом используется эмпирическое корреляционное отношение.

При наличии нелинейной зависимости он «недооценивает» степень тесноты связи и даже может быть равен нулю. Поэтому в таких случаях рекомендуется в качестве показателя степени тесноты связи использовать эмпирическое корреляционное отношение η , которое было предложено К. Пирсоном в 1896 году.

Расчет этого показателя основан на использовании изложенной выше теоремы сложения дисперсий:

$$\sigma^2 = \delta^2 + \bar{\sigma}^2,$$

где общая дисперсия σ^2 равна межгрупповой дисперсии (δ^2) плюс средней из

частных (внутригрупповых) дисперсий ($\bar{\sigma}^2$).

Дисперсии рассчитываются на основании аналитической группировки, в которой, естественно, определены результативный и факторный признаки.

Первая составляющая – межгрупповая дисперсия характеризует ту часть колеблемости результативного признака, которая обусловлена изменением признака-фактора (положенного в основание группировки).

Вторая составляющая – средняя из внутригрупповых дисперсий, оценивает ту часть вариации результативного признака, которая обусловлена действием всех факторов, за исключением признака-фактора.

Эмпирическое корреляционное отношение определяется соотношением межгрупповой и общей дисперсии в степени 0,5, т. е.:

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}} \text{ или } \eta = \pm \sqrt{1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma^2}}.$$

Величина эмпирического корреляционного отношения будет равна нулю в случае отсутствия вариации средних в выделенных группах (аналитической группировки). В тех случаях, когда средняя из внутригрупповых дисперсий близка к нулю, т. е. практически вся вариация результативного признака обусловлена действием признака-фактора, величина эмпирического корреляционного отношения близка к единице. Направление связи устанавливается по графическому представлению аналитической группировки или по данным корреляционной таблицы.

Пример. Рассчитать эмпирическое корреляционное отношение по данным о числе деталей и продолжительности сборки узлов, представленным в табл. 4.5.

Таблица 4.5. Данные о числе узлов и средней продолжительности сборки

Число деталей	Число узлов	Средняя продолжительность сборки y_j	$y_j - \bar{y}$	$(y_j - \bar{y})^2$	$(y_j - \bar{y})^2 n_j$
3	3	11,8	-2,6	6,76	20,28
4	5	12,4	-2,0	4,00	20,00
5	7	13,7	-0,7	0,49	3,43
6	3	17,0	2,6	6,76	20,28
7	2	21,4	7,0	49,00	98,00
Итого	20	$\bar{y} = 14,4$	–	–	161,99

$$\text{Межгрупповая дисперсия } \delta^2 = \frac{161,99}{20} = 8,1.$$

$$\text{Общая дисперсия } \sigma^2 = 10,31.$$

Тогда эмпирическое корреляционное отношение для рассматриваемой зависимости составляет:

$$\eta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{8,1}{10,31}} = 0,89.$$

Таким образом, для данного производства можно отметить довольно тесную связь между продолжительностью сборки и числом деталей.

4.3. Параметризация эконометрической модели

Статистическая зависимость, выбираемая в качестве уравнения парной (аналитической) регрессии, должна удовлетворять следующим требованиям:

- находиться в соответствии с опытными данными;
- быть, по возможности, обоснована, т. е. опираться на вероятностные схемы, отражающие существо изучаемого явления;
- характеризоваться возможно более простым уравнением и иметь минимальное число параметров.

Целью получения такой функции и ее параметров является выравнивание статистического распределения.

В уравнении парной регрессии $y = a_0 + a_1 x$ параметр a_0 показывает усредненное влияние на результативный признак не выделенных для исследования факторов. Параметр a_1 – коэффициент регрессии показывает изменение в среднем значения результативного признака при увеличении факторного на единицу. На основе этого параметра вычисляются коэффициенты эластичности, которые показывают изменение результативного признака в процентах в зависимости от изменения факторного признака на 1 %:

$$A = a_1 \frac{\bar{x}}{\bar{y}}.$$

По значениям коэффициента регрессии a_1 в уравнении регрессии $\bar{y} = a_0 + a_1 x$ можно сделать вывод о том, насколько в среднем изменится y (потребление) при изменении x (дохода) на одну единицу в пределах фактической вариации данного фактора x . Поэтому параметр a_1 в этом уравнении называют коэффициентом регрессии. Величина коэффициента регрессии может быть получена при помощи формулы:

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2},$$

$$\text{где } \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n}.$$

Тогда параметр a_0 рассчитывается на основе уравнения $a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$.

Для параметризации эконометрической модели используются традиционные методы корреляционно-регрессионного анализа, позволяющие не только оценить тесноту связи, но и выразить эту связь аналитически. Применению корреляционно-регрессионного анализа должен предшествовать качественный теоретический анализ исследуемого социально-экономического явления или процесса.

Так как исследуемая связь не является функциональной, то от искомого уравнения $f(x)$ не требуется, чтобы ему удовлетворяли все точки корреляционного поля. Требуется лишь, чтобы функция $f(x)$ была в некотором смысле близка ко всей корреляционной зависимости. При решении этой

проблемы большое распространение получил метод наименьших квадратов, суть которого состоит в определении таких параметров заданной функции $f(x)$, при которых суммарное расстояние между функцией и множеством точек корреляционного поля было бы минимально. При этом существенным является способ измерения расстояния между множеством точек исследуемой совокупности и функцией $f(x)$.

Для любого элемента совокупности может быть определено отклонение фактического значения признака y_i от соответствующего значения $f(x)$. Мерой расстояния в методе наименьших квадратов принят средний квадрат отклонений значений результирующего признака от соответствующих значений $f(x)$. Задача отыскания функции $f(x)$ принимает следующий вид:

$$E = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)]^2 \rightarrow \min_{a_0, a_1, \dots, a_n}.$$

Если считать, что класс функции определен, то для общего вида функции $f(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ необходимо рассчитать коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Задача определения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ формулируется следующим образом: требуется определить значения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ при выполнении условия $E \rightarrow \min$. Так как все параметры $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ должны выбираться независимо друг от друга и могут принимать произвольные значения, условием минимума функции E является одновременное равенство нулю частных производных этой функции по всем параметрам $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. В результате формируется система линейных нормальных уравнений, причем число уравнений равно числу неизвестных параметров. Полученный в результате решения системы линейных уравнений набор параметров определяет единственную функцию в рассматриваемом классе – функцию регрессии, ближайшую к рассматриваемой зависимости. Например, для линейной зависимости $y = a_0 + a_1x$ задача отыскания параметров функции $f(a_0, a_1)$ принимает следующий вид:

$$f(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i)]^2 \rightarrow \min.$$

Для определения параметров a_0, a_1 , при которых функция $f(a_0, a_1)$ принимает минимальное значение, частные производные этой функции приравняем к нулю и преобразуем получаемые уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{df}{da_0} &= 2(\sum_{i=1}^n y_i - a_0 - a_1x_i)(-1) = 0, \\ \frac{df}{da_1} &= 2(\sum_{i=1}^n y_i - a_0 - a_1x_i)(-x_i) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда система линейных нормальных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i; \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \end{cases}$$

где n – число точек корреляционного поля;

x_i, y_i – координаты точки i корреляционного поля.

Для решения системы линейных уравнений, т. е. определения параметров a_0, a_1 обычно рекомендуется применять формулы:

$$a_0 = \frac{\sum y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \cdot \sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}; \quad a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Но на практике для получения неизвестных параметров лучше использовать метод итераций, для которого, например, система трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

приводится к виду:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3); \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3); \\ x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) \end{cases}$$

и при начальных решениях:

$$x_1^0 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad x_2^0 = \frac{b_2}{a_{22}}, \quad x_3^0 = \frac{b_3}{a_{33}}$$

находятся неизвестные параметры x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{aligned} x_1^n &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{n-1} - a_{13}x_3^{n-1}); \\ x_2^n &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{n-1} - a_{23}x_3^{n-1}); \\ x_3^n &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{n-1} - a_{32}x_2^{n-1}). \end{aligned}$$

Здесь n – номер итерации.

Для определения параметров уравнения показательной функции $y = a_0 a_1^x$ сначала производится логарифмирование $\lg y_x = \lg a_0 + x \lg a_1$, а затем составляется следующая система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} n \lg a_0 + \lg a_1 \sum_i x_i = \sum_i \lg y_i; \\ \lg a_0 \sum_i x_i + \lg a_1 \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i \lg y_i. \end{cases}$$

Для определения параметров уравнения степенной функции $y = a_0 x^{a_1}$ сначала производится логарифмирование $\lg y_x = \lg a_0 + a_1 \lg x$, а затем составляется следующая система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} n \lg a_0 + a_1 \sum_i \lg x_i = \sum_i \lg y_i; \\ \lg a_0 \sum_i \lg x_i + a_1 \sum_i (\lg x_i)^2 = \sum_i \lg x_i \lg y_i. \end{cases}$$

Для определения параметров уравнения параболы второго порядка $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ составляется следующая система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_i x_i + a_2 \sum_i x_i^2 = \sum_i y_i; \\ a_0 \sum_i x_i + a_1 \sum_i x_i^2 + a_2 \sum_i x_i^3 = \sum_i x_i y_i; \\ a_0 \sum_i x_i^2 + a_1 \sum_i x_i^3 + a_2 \sum_i x_i^4 = \sum_i y_i x_i^2. \end{cases}$$

Для определения параметров уравнения параболы третьего порядка $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ составляется следующая система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_i x_i + a_2 \sum_i x_i^2 + a_3 \sum_i x_i^3 = \sum_i y_i; \\ a_0 \sum_i x_i + a_1 \sum_i x_i^2 + a_2 \sum_i x_i^3 + a_3 \sum_i x_i^4 = \sum_i x_i y_i; \\ a_0 \sum_i x_i^2 + a_1 \sum_i x_i^3 + a_2 \sum_i x_i^4 + a_3 \sum_i x_i^5 = \sum_i y_i x_i^2; \\ a_0 \sum_i x_i^3 + a_1 \sum_i x_i^4 + a_2 \sum_i x_i^5 + a_3 \sum_i x_i^6 = \sum_i y_i x_i^3. \end{cases}$$

Для определения параметров уравнения гиперболы $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$ составляется следующая система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_i \frac{1}{x_i} = \sum_i y_i; \\ a_0 \sum_i \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_i \left(\frac{1}{x_i} \right)^2 = \sum_i \frac{1}{x_i} y_i. \end{cases}$$

Для других функций достаточно произвести следующие преобразования, чтобы использовать для получения параметров представленные выше системы линейных уравнений.

Для определения параметров уравнения дробно-линейной функции $y = \frac{1}{a + bx}$ преобразование имеет следующий вид:

$$\frac{1}{y} = a + bx.$$

Для определения параметров уравнения дробно-полулогарифмической

функции $y = \frac{1}{a + b \log(x)}$ преобразование имеет следующий вид:

$$\frac{1}{y} = a + b \log(x).$$

Для определения параметров уравнения дробно-параболической 2-й степени функции $y = \frac{1}{a + bx + cx^2}$ преобразование имеет следующий вид:

$$\frac{1}{y} = a + bx + cx^2.$$

Для определения параметров уравнения логистической функции $y = \frac{1}{a + b \exp(x)}$ преобразование имеет следующий вид:

$$\frac{1}{y} = a + b \exp\left(\frac{x}{x_{\max}}\right).$$

Для определения параметров уравнения функции экспоненты вида $y = a \exp(bx)$ преобразование имеет следующий вид:

$$\log(y) = \log(a) + bx.$$

Для определения параметров уравнения функции экспоненты $y = a \exp\left(\frac{b}{x}\right)$ преобразование имеет следующий вид:

$$\log(y) = \log(a) + \frac{b}{x}.$$

Для определения параметров уравнения линейно-дробной функции $y = \frac{x}{a + bx}$ преобразование имеет следующий вид:

$$\frac{1}{y} = \frac{a}{x} + b.$$

Для определения параметров уравнения показательно-дробной функции $y = ab^{\frac{1}{x}}$ преобразование имеет следующий вид:

$$\log(y) = \log(a) + \frac{\log b}{x}.$$

Аналогично определяются параметры для многих других уравнений, например:

$$y = a_0 + a_1 x^{0,25};$$

$$y = a_0 + a_1 x^{0,1}.$$

4.4. Пример расчета эконометрической модели парной регрессии

Определить уравнения связи и тесноту связи между стоимостью основного капитала и объемом продаж за период. Связь предполагается линейной. Применяя для этой связи уравнение прямой линии, определим параметры на основе метода наименьших квадратов, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x = \sum y; \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 = \sum yx. \end{cases}$$

Расчеты указанных в системе уравнений сумм производятся в табл. 4.6.

Таблица 4.6. Расчет параметров системы линейных уравнений

Стоимость основного капитала x , млн руб.	Объем продаж y , млн руб.	xy	x^2	y^2	$\bar{y}_x = a_0 + a_1x$
1	20	20	1	400	19,4
2	25	50	4	625	25,0
3	31	93	9	961	30,6
4	31	124	16	961	36,2
5	40	200	25	1 600	41,8
6	56	336	36	3 136	47,4
7	52	364	49	2 704	53,0
8	60	480	64	3 600	58,6
9	60	540	81	3 600	64,2
10	70	700	100	4 900	69,8
Итого 55	445	2 907	385	22 487	446,0

$$10a_0 + 55a_1 = 445;$$

$$55a_0 + 385a_1 = 2\,907;$$

$$a_0 = 13,8; a_1 = 5,6;$$

$$y = 13,8 + 5,6x.$$

Следовательно, с увеличением основного капитала на 1 млн руб. объем продаж увеличивается в среднем на 5,6 млн руб., или с увеличением стоимости основного капитала на 1 % объем продаж увеличивается на 0,69 %. Определим:

1) коэффициент эластичности

$$A = a_1 \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = 5,6 \frac{5,5}{44,5} = 0,69;$$

2) линейный коэффициент корреляции

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y},$$

$$r = \frac{\frac{2\,907}{10} - \frac{55}{10} \cdot \frac{445}{10}}{\sqrt{\left(\frac{22\,487}{10} - \left(\frac{445}{10}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{385}{10} - \left(\frac{55}{10}\right)^2\right)}} = 0,98.$$

Расчет коэффициентов регрессии несколько осложняется, если ряды по исследуемым факторам сгруппированы, а связь криволинейная.

4.5. Сертификация эконометрической модели парной регрессии

Сертификация эконометрической модели парной регрессии – это набор процедур для оценки ее качества и адекватности. Для этого используют:

- коэффициент детерминации (R^2), чтобы понять, насколько хорошо модель объясняет зависимую переменную (чем ближе к 1, тем лучше);
- статистические критерии значимости коэффициентов модели (например, t -статистика), оценивающие прогнозную способность модели, чтобы убедиться, насколько модель соответствует данным и корректно описывает реальные экономические связи.

Коэффициент детерминации (R^2) является статистической мерой согласия, с помощью которой можно определить, насколько модель линейной регрессии соответствует данным, на которых она построена:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

где y_i – значения наблюдаемой переменной;

$\hat{y}_i$ – модельные значения, построенные по оцененным параметрам;

$\bar{y}$ – среднее значение по экспериментальным (наблюдаемым) данным;

Это коэффициент измеряет долю вариации (изменчивости) зависимой переменной, объясняемую независимыми переменными в линейной регрессионной модели. Значение (R^2) лежит в диапазоне от 0 до 1. Чем оно ближе к 1, тем лучше модель регрессии соответствует данным. Коэффициент детерминации показывает, насколько хорошо модель соответствует данным: чем ближе R^2 к 1 (или 100 %), тем лучше модель объясняет данные:

Если $R^2 = 1$, то можно предполагать, что модель парной регрессии идеально объясняет все данные, то есть нет необъясненной вариации.

Если $R^2 = 0$, то можно предполагать, что модель не объясняет ни одного процента вариации зависимой переменной. Это происходит при отсутствии связи между переменными.

Например, если $R^2 = 0,85$, это значит, что 85 % изменчивости зависимой переменной можно объяснить с помощью независимых переменных модели.

В модели парной линейной регрессии коэффициент детерминации равен квадрату коэффициента корреляции между зависимой и независимой переменными.

Коэффициент детерминации (R^2) помогает оценить качество линейной регрессионной модели, показывая ее предсказательную силу. Значение R^2 выше 0,8 указывает на хорошее соответствие модели данным, в то время как низкое значение (менее 0,5) может свидетельствовать о сомнительной полезности модели.

Существуют аналоги коэффициента детерминации и для других типов моделей.

Статистическая значимость коэффициентов модели оценивается с помощью t -статистики. Если значение t -статистики выше критического или p -значение меньше уровня значимости (например, 0,05), то коэффициент считается статистически значимым.

Тестирование на устойчивость модели заключается в использовании тестовых наборов данных или перекрестной проверки для оценки того, насколько устойчивы результаты модели в различных условиях.

Экономическая интерпретация заключается в оценке того, соответствуют ли полученные коэффициенты и их знаки экономическим теориям и здравому смыслу.

Применительно к совокупностям ($n \leq 30$) для проверки типичности параметров уравнения регрессии используется критерий Стьюдента:

- для параметра a_0 вычисляется $t_{a_0} = a_0 \frac{\sqrt{n-2}}{\sigma_y}$,
- для параметра a_1 вычисляется $t_{a_1} = a_1 \frac{\sigma_x \sqrt{n-2}}{\sigma_y}$,

где σ_y – среднее квадратическое отклонение результативного признака y_i от вычисленных с использованием уравнения регрессии значений $y(x_i)$:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - y(x_i))^2}{n}}.$$

В данном случае эта величина является остаточной дисперсией, отображающей вариацию результативного признака y от всех прочих, кроме x , факторов. А отклонение $y_i - y(x_i)$ характеризует колеблемость эмпирических (фактических) значений результативного признака от их расчетных значений;

$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ – среднее квадратическое отклонение факторного признака x_i от общей средней $\bar{x}$.

Полученные значения t_{a_0} , t_{a_1} сравниваются с критическим t_k , которое получают по таблице Стьюдента (табл. 4.7) с учетом принятого уровня значимости α и числа степеней свободы k . Полученные при анализе корреляционной связи параметры уравнения регрессии признаются типичными, если расчетное значение больше критического, т. е. $t_{a_0} > t_k, t_{a_1} > t_k$.

Таблица 4.7. Значение t -критерия Стьюдента

Степень свободы n	$p = 0,9$	$p = 0,8$	$p = 0,7$	$p = 0,6$	$p = 0,5$	$p = 0,4$
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,841

Если зависимость между факторами соответствует нелинейной функции, то теснота связи может характеризоваться коэффициентом (индексом) детерминации (причинности) $\eta^2 = \frac{\delta^2}{\sigma^2}$, где δ^2 – межгрупповая дисперсия, равная $\delta^2 = \frac{\sum(\bar{y}_j - \bar{y})^2}{m-1}$. Здесь $\bar{y}_j, \bar{y}$ – среднее значение результативного признака по группе j и по совокупности, m – число групп.

На основе коэффициента детерминации определяется эмпирическое корреляционное отношение (индекс корреляции) $\eta = \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}}$. В этой формуле знак определяет направление зависимости (прямую зависимость в случае увеличения результативного признака при увеличении факторного и обратную – в случае уменьшения), а полученное значение характеризует тесноту связи $|\eta| \leq 1$. Чем ближе к единице значение показателя η , тем более тесной предполагается связь, а при значении, равном единице, можно предполагать наличие полной (иначе функциональной) связи. Для выводов о тесноте связи используется шкала Чеддока (см. табл. 4.8)

Таблица 4.8. Шкала Чеддока

Показатели тесноты связи	0,1–0,3	0,3–0,5	0,5–0,7	0,7–0,9	0,9–0,99
Характеристика «силы связи»	слабая	умеренная	заметная	высокая	весьма высокая

Для оценки адекватности уравнения регрессии используется показатель средней ошибки аппроксимации.

4.6. Варианты задания

На основе данных, приведенных в Приложении 1, требуется:

1. Провести идентификацию эконометрической модели (не менее двух вариантов).
2. Провести параметризацию выбранных эконометрических моделей.
3. Провести сертификацию эконометрических моделей.
4. Сделать вывод, какая из рассмотренных эконометрических моделей более пригодна для практических целей.

В качестве исходных данных использовать Приложение 1. Начальные значения (номер варианта) соответствуют последним двум цифрам номера зачетной книжки. Далее необходимо скопировать 50 значений второй и третьей колонки. Замена задач не допускается. Номер варианта указывается в самом начале работы.

ЗАДАНИЕ № 5

Задание: определить эконометрическую модель множественной корреляции.

Цель: формирование эконометрической модели взаимодействия выбранного статистического показателей с несколькими «независимыми» показателями.

5.1. Модели множественной корреляции

Все рассматриваемые до сих пор задачи анализа взаимосвязи имели общую черту. В них исследовалась зависимость результативного признака от одного факторного признака. В реальной действительности чаще изменение изучаемого показателя зависит от действия нескольких причин. В таких случаях изучение корреляционной связи не может ограничиваться парными зависимостями, и в анализ необходимо включать другие признаки-факторы, существенно влияющие на изучаемую переменную. Одновременное изучение корреляции нескольких переменных проводится на основе использования методов множественной корреляции. Для исследования в генеральной совокупности используется корреляционный анализ, который устанавливает взаимозависимости признаков, являющихся случайными величинами, распределение которых подчиняется нормальному многомерному закону. Корреляционный анализ позволяет получить аналитическое представление зависимости между признаками (т. е. эконометрическую корреляционную модель), оценить и осуществить проверку значимости параметров этой зависимости. В дальнейшем зависимость между тремя и более факторами будем называть множественной, или многофакторной, корреляционной зависимостью.

Наиболее часто рассматривается линейная связь между тремя и более факторами, которая для трех показателей выражается уравнением:

$$\bar{y} = a_0 + a_1x + a_2z.$$

В общем случае многофакторная линейная регрессия имеет вид:

$$\bar{y}_x = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

где $\bar{y}_x$ – расчетное значение признака-результата при фиксированном значении признака-фактора $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. При фиксированном x_i вариация бесчисленного множества остальных факторов (неучтенных) в частном измерении может приводить к отличиям $\bar{y}_x$ от y .

Для получения параметров нелинейных корреляционных уравнений иногда достаточно осуществить замену переменной, а затем, получив систему линейных уравнений, определить неизвестные параметры.

Для полулогарифмической многофакторной корреляционной зависимости:

$$y = a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln z,$$

чтобы определить значения параметров искомого корреляционного уравнения,

достаточно заменить переменные $x' = \ln x, z' = \ln z$.

Аналогичная ситуация возникает и во многих других случаях:

1. Для гиперболической многофакторной корреляционной зависимости (между тремя факторами):

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{z}$$

осуществляется замена переменной $x' = \frac{1}{x}, z' = \frac{1}{z}$.

2. Для показательной многофакторной корреляционной зависимости:

$$y = a_0 a_1^x a_2^z$$

сначала производится процедура логарифмирования, т. е. для определения параметров корреляционное уравнение преобразуется к виду:

$$\log y = \log a_0 + x \log a_1 + z \log a_2.$$

3. Аналогично степенная многофакторная корреляционная зависимость

$$y = a_0 x^{a_1} z^{a_2}$$

для определения параметров приводится к виду:

$$\log y = \log a_0 + a_1 \log x + a_2 \log z.$$

4. Для параболической многофакторной корреляционной зависимости (между тремя факторами):

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 z + a_3 x^2 + a_4 z^2.$$

Для того чтобы получить корреляционную модель, целесообразно придерживаться определенной последовательности этапов. Для обоснованного выбора аналитического описания заданного признака-результата необходимо одновременно из множества признаков и различных уравнений выбрать такие, которые удовлетворяют, с одной стороны, критерию достоверности, а с другой – точности, т. е. обеспечивают минимальную погрешность. Таким образом, общая задача корреляционного анализа заключается в выборе для заданного признака-результата наилучшей аналитической зависимости с таким составом признаков-факторов, который обеспечивает одновременно и точность, и достоверность.

Сформулированное требование является противоречивым, так как при повышении точности уменьшается достоверность. Поэтому выбранная корреляционная модель должна быть некоторым компромиссом. Это возможно в одном из двух вариантов:

- 1) при заданной точности обеспечивается максимальная достоверность;
- 2) при заданной достоверности обеспечивается максимальная точность (минимальная погрешность).

Но чтобы достичь поставленной цели, необходимо осуществить довольно значительный объем перебора вариантов.

5.2. Идентификация эконометрической модели множественной корреляции

Для обоснования выбора признаков-факторов в линейной модели используются линейные (парные) коэффициенты корреляции, которые позволяют определить знак и степень тесноты связи соответствующих пар признаков:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Для расчета указанных коэффициентов корреляции необходимо кроме средних уровней самих признаков и их произведений знать среднеквадратические отклонения этих признаков. Чем ближе коэффициент корреляции по модулю к единице, тем ближе связь двух признаков к линейной функциональной зависимости. При функциональной линейной связи признака-результата и признака-фактора каждому значению признака-фактора соответствует единственное значение результативного признака. Для статистической связи одному уровню определенного фактора соответствует область различных значений признака-результата, на который оказывают влияние и другие факторы. Для достаточно большого числа наблюдений статистическая связь между признаком-фактором X и признаком-результатом Y проявляется «в среднем». Это означает, что при данном X можно с помощью корреляционного уравнения предсказывать, каким в среднем будет значение признака-результата Y при всем возможном многообразии неучтенных факторов. Чем больше по модулю коэффициент корреляции конкретных факторов, тем в большей мере они могут претендовать на включение в корреляционную модель.

Рассчитанные коэффициенты корреляции сводятся в корреляционную матрицу (табл. 5.1). Анализ корреляционной матрицы позволяет отбирать в регрессионную многофакторную модель признаки-факторы, предположительно оказывающие существенное влияние на признак-результат.

Предположим, что задан признак-результат и в распоряжении статистика некоторая совокупность наблюдений. Рассмотрим процесс идентификации эконометрической модели на следующих данных (табл. 5.2).

Таблица 5.1. Матрица коэффициентов корреляции

	Y	y_1	y_2	y_3	...	y_n
X	1	r_{yx1}	r_{yx2}	r_{yx3}	...	r_{yxn}
x_1	r_{x1y}	1	r_{x1x2}	r_{x1x3}	...	r_{x1xn}
x_2	r_{x2y}	r_{x2x1}	1	r_{x2x3}	...	r_{x2xn}
x_3	r_{x3y}	r_{x3x1}	r_{x3x2}	1	...	r_{x3xn}
...	...	...	...	...	...	...
x_n	r_{xny}	r_{xnx1}	r_{xnx2}	r_{xnx3}	...	1

Таблица 5.2. Данные по моделям автомобилей

№	Наблюдения	Объем двигателя, см ³	Мощность, л. с.	Скорость, км/час	Цена, (\$)
1	BMW 316	1600	99	191	28850
2	BMW 3181	1800	113	198	30631
3	BMW325	2500	192	217	43000
4	BMW 518	1800	113	194	35493
5	BMW 525	2500	192	230	49500
6	BMW 730	3000	188	222	80000
7	BMW 740	4000	286	240	95000
8	BMW 850	5000	300	250	104500
9	BENTLEY	6750	350	230	165000
10	CADILAC 1	4900	200	200	74000
11	CADILAC 2	5700	260	210	76000
12	CADILAC 3	4900	204	185	93000
13	CADILAC 4	3800	152	170	42500
14	FIAT	1600	86	175	20200
15	FORD1	1800	115	199	24000
16	FORD2	2400	129	190	14000
17	FORD3	2400	129	190	15000
18	FORD4	3800	142	180	28729
19	LINCOLN	4600	193	180	47000
20	«Mersedes-Benz» 190	2600	160	212	27000
21	«Mersedes-Benz» 300	3000	180	204	50000
22	«Mersedes-Benz» 500	5000	326	250	60000
23	«Mersedes-Benz» 560	5500	272	220	109224
24	«Mersedes-Benz» 600	6000	394	255	145000
25	MITSUBBISHI 1	1800	92	175	21000
26	MITSUBBISHI 2	1600	113	190	21413
27	MITSUBBISHI 3	3000	205	230	38798
28	NISSAN	1600	90	180	19500
29	OPEL	2000	150	200	38000
30	Rolls-Roys	6750	350	220	194000
31	SAAB	2300	195	235	43000
32	VOLVO 1	2000	182	200	27000
33	VOLVO 2	2500	170	215	40000
34	VOLVO 3	2300	131	190	28000
35	VOLVO 4	3000	201	210	36950
36	FORD FOCUS	1800	115	198	15399
37	AUDI A4	1984	131	212	24700
38	MERCEDES 230K	2295	197	240	35000
39	BMW 525i	2500	188	232	36000
40	MERCEDES C270	2685	170	224	40000
41	NISSAN TINO	1998	135	165	22000
42	CHRYSLER VOYA	3301	180	185	35000
43	FORD EXCURSIO	6800	310	220	69900

Для получения корреляционной модели на первом этапе для результативного признака рассчитываются статистические характеристики (рис. 5.1).

среднее	52.1695	дисперсия	1617.5553
мода	27.0000	среднеквадратичное	40.2188
медиана	38.0000	размах	180.0000
минимальное значение	14.0000	среднее линейное	29.7484
максимальное значение	194.0000	вариация, %	77.0927

Рисунок 5.1. Характеристики результирующего признака

Далее для выбора первоначального набора признаков-факторов формируется матрица коэффициентов корреляции (рис. 5.2). При выборе признаков-факторов с использованием корреляционной матрицы следует учитывать, что, с одной стороны, должна быть тесная связь выбираемых признаков-факторов с результирующим признаком. А с другой стороны – выбранные факторные признаки не должны дублировать друг друга, но в то же время они должны дополнять друг друга по степени и характеру влияния.

	двигатель	мощность	скорость	цена(\$)
двигатель	1.00	0.883	0.407	0.846
мощность	0.883	1.00	0.728	0.863
скорость	0.407	0.728	1.00	0.516
цена(\$)	0.846	0.863	0.516	1.00

Рисунок 5.2. Матрица коэффициентов корреляции

Наиболее простой способ – это выбрать один признак-фактор с наибольшим коэффициентом корреляции между ним и признаком-результатом. Другой признак-фактор должен иметь минимальный коэффициент корреляции с первым выбранным признаком-фактором. И даже в этом случае не обеспечивается обоснованный выбор набора признаков-факторов. Таким образом, возникает необходимость в переборе вариантов наборов признаков-факторов. При этом предполагается, что во всех вариантах одинаковое число признаков-факторов. В противном случае задача еще более усложняется. Обычно число признаков-факторов в заданной совокупности наблюдений не превышает 3–4. Тем не менее, осуществив формирование набора признаков-факторов, рассчитываются их характеристики, перечень которых уже был представлен на рис. 5.2.

На следующем этапе проводится качественный анализ заданного набора

признаков-факторов по методу приведения параллельных данных (рис. 5.3). В данном методе графически отображается изменение каждого признака-фактора по мере возрастания признака-результата. Анализируя поведение всего набора признаков-факторов, претендующих на включение в корреляционную модель, можно отметить, насколько синхронно они изменяются. «Большая» синхронность изменения признаков-факторов может привести к выводу, что второй признак-фактор вносит весьма малую лепту в поведение признака-результата. Одновременно с графическим представлением поведения признаков-факторов рассчитываются коэффициенты корреляции, включая совокупный и частные. Уже на этом этапе могут быть сделаны выводы о целесообразности использования в корреляционной модели данного набора признаков-факторов. Существует несколько методов отбора факторных признаков для построения статистической модели. Один из методов – метод экспертных оценок – основан на интуитивно-логических предположениях, содержательном качественном анализе. Наиболее приемлемым способом отбора является шаговая регрессия. Сущность метода заключается в последовательном отборе факторов в уравнение и последующей проверке их значимости.

Сложность и взаимное переплетение отдельных факторов, обуславливающих экономическое явление, могут проявляться в так называемой мультиколлинеарности, под которой понимается тесная зависимость между факторными признаками, включенными в модель. Одним из индикаторов определения наличия мультиколлинеарности между признаками является превышение парным коэффициентом корреляции величины 0,8.

Устранение мультиколлинеарности может реализовываться путем исключения из модели линейно-связанных факторных признаков.

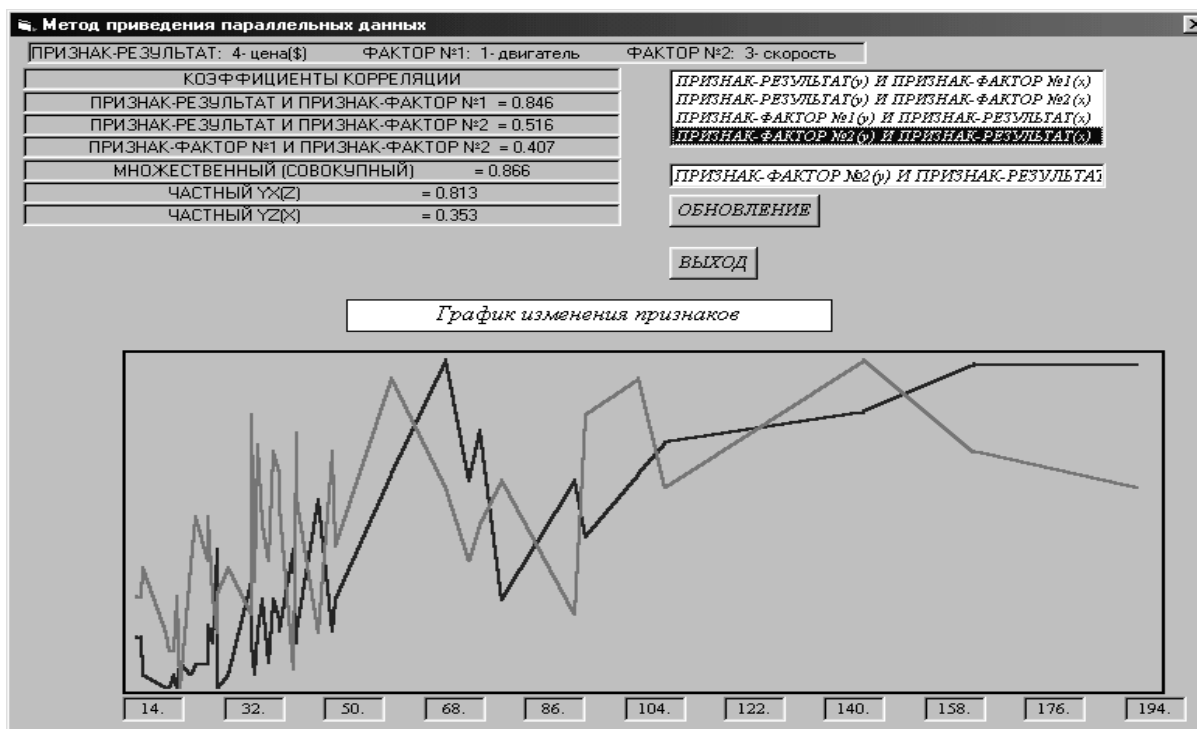


Рисунок 5.3. Метод приведения параллельных данных

На следующем этапе переходят непосредственно к выбору аналитического представления. На данном этапе решается задача выбора наилучшего аналитического описания для заданного набора признаков-факторов (рис. 5.4). Выбор вида аналитического представления затрудняется тем, что, используя математический аппарат, теоретическая зависимость между показателями может быть выражена большим числом различных функций.

Выбор типа уравнения осложнен тем, что для любой формы зависимости выбирается целый ряд уравнений. Наиболее приемлемым способом определения вида уравнения является метод перебора различных уравнений. Сущность метода заключается в том, что большое число уравнений рассматривается на пригодность использования исходя из компромисса «точность–достоверность». Достоверность оценивается на основе критериев Стьюдента и Фишера на стадии сертификации эконометрической модели.

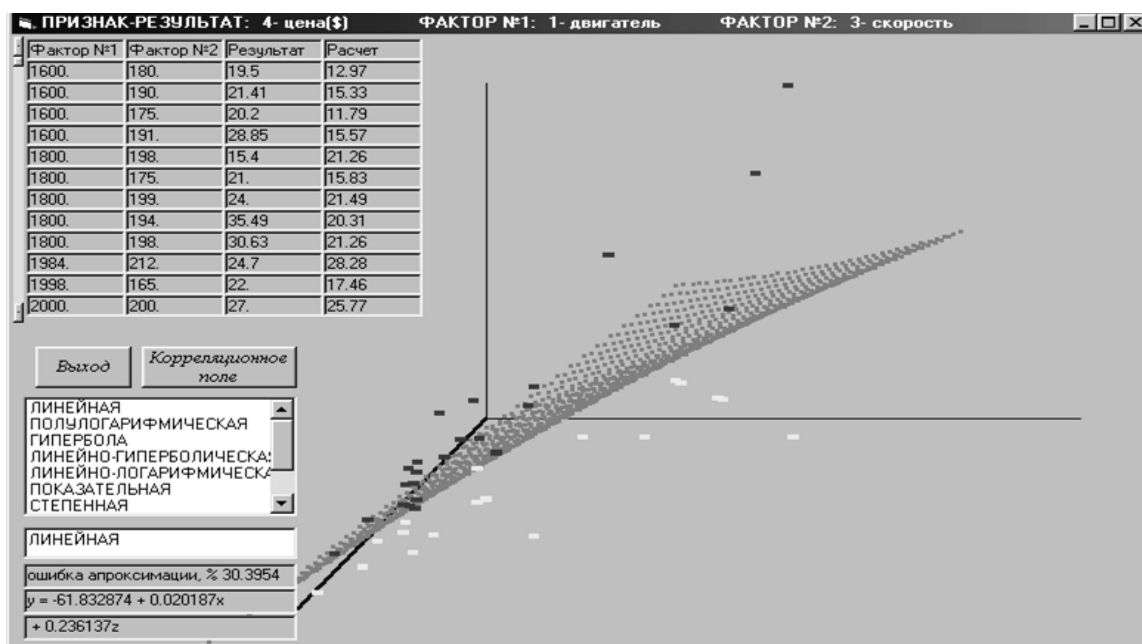


Рисунок 5.4. Линейная корреляционная модель
(темные точки – выше плоскости, светлые – ниже плоскости)

Выбор того или иного аналитического представления может осуществляться по критерию точности (выбор аналитического представления с минимальной ошибкой аппроксимации). В дальнейшем полученные параметры корреляционной модели могут оцениваться на типичность и устойчивость (т. е. достоверность) по критерию Стьюдента. В качестве альтернативы линейной корреляционной модели:

$$y = -61,83 + 0,0219 \cdot x + 0,2361 \cdot z \text{ (рис. 5.4)}$$

в данных иллюстрациях представлена линейно-логарифмическая модель вида:

$$y = -58,4 + 0,021 \cdot x + 7,7605 \cdot \ln z \text{ (рис. 5.5).}$$

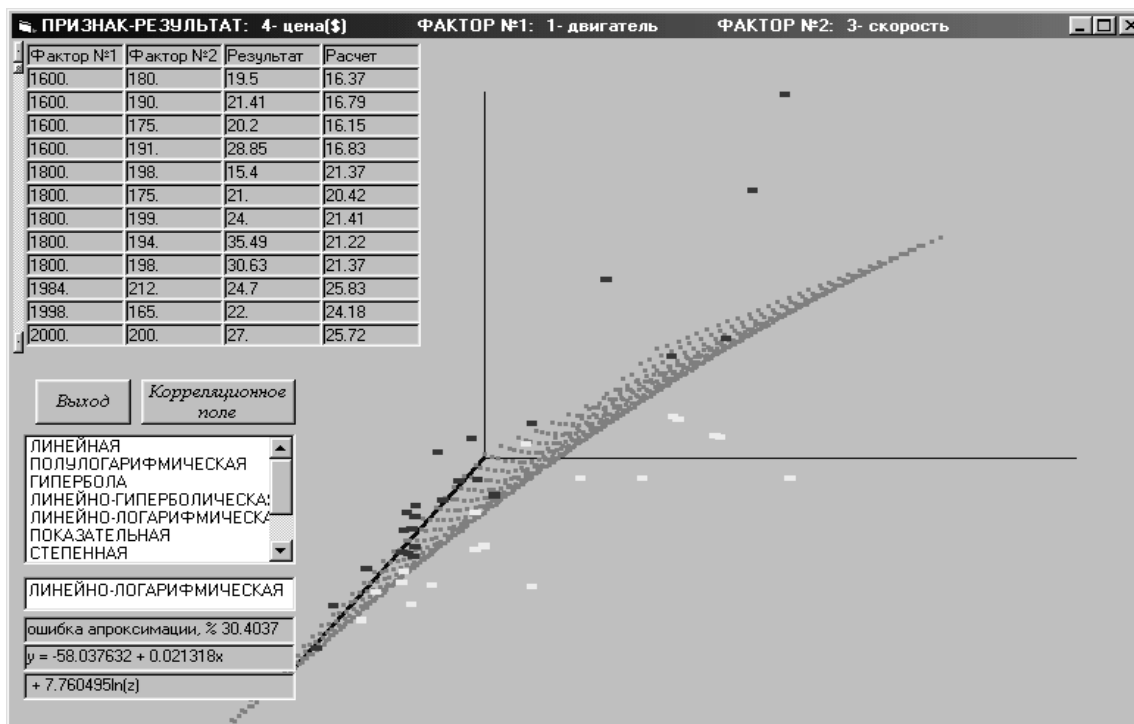


Рисунок 5.5. Линейно-логарифмическая корреляционная модель

При практически одинаковой ошибке аппроксимации (в линейной модели ошибка аппроксимации равна 30,3954 %, а в линейно-логарифмической – 30,4037) выбор модели будет осуществляться по критерию достоверности.

5.3. Параметризация эконометрической модели множественной корреляции

Для уравнения $\bar{y} = a_0 + a_1x + a_2z$ определение параметров a_0, a_1, a_2 , также как и для случая аналитической парной регрессии, используется метод наименьших квадратов. Для определения неизвестных параметров этот метод предполагает использование системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n y_i; \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n z_i x_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i; \\ a_0 \sum_{i=1}^n z_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i z_i + a_2 \sum_{i=1}^n z_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i z_i. \end{cases}$$

Здесь n – объем совокупности.

Для составления линейной корреляционной модели необходимо рассчитать параметры многофакторного регрессионного уравнения:

$$\bar{y}_x = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Коэффициент a_0 находится следующим образом:

$$a_0 = \bar{y} - \sum_i a_i \bar{x}_i,$$

где $a_i = \beta_i \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}}$.

В свою очередь, коэффициенты β_i определяются решением системы линейных уравнений с коэффициентами, равными найденным коэффициентам корреляции:

[illegible]

Для получения параметров нелинейных корреляционных уравнений иногда достаточно осуществить замену переменной, а затем, получив систему линейных уравнений, определить неизвестные параметры.

Для полулогарифмической многофакторной корреляционной зависимости

$$y = a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln z,$$

чтобы определить значения параметров искомого корреляционного уравнения, достаточно заменить переменные $x' = \ln x, z' = \ln z$.

Аналогичная ситуация возникает и во многих других случаях:

1. Для гиперболической многофакторной корреляционной зависимости (между тремя факторами):

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{z}$$

осуществляется замена переменной $x' = \frac{1}{x}, z' = \frac{1}{z}$.

2. Для показательной многофакторной корреляционной зависимости:

$$y = a_0 a_1^x a_2^z$$

сначала производится процедура логарифмирования, т. е. для определения параметров корреляционное уравнение преобразуется к виду:

$$\log y = \log a_0 + x \log a_1 + z \log a_2.$$

3. Аналогично степенная многофакторная корреляционная зависимость:

$$y = a_0 x^{a_1} z^{a_2}$$

для определения параметров приводится к виду:

$$\log y = \log a_0 + a_1 \log x + a_2 \log z.$$

4. Для параболической многофакторной корреляционной зависимости (между тремя факторами):

$$y = a_0 + a_1x + a_2z + a_3x^2 + a_4z^2$$

система нормальных уравнений для определения параметров a_0, a_1, a_2, a_3, a_4

имеет вид:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum z + a_3 \sum x^2 + a_4 \sum z^2 = \sum y; \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum zx + a_3 \sum x^3 + a_4 \sum xz^2 = \sum yx; \\ a_0 \sum z + a_1 \sum xz + a_2 \sum z^2 + a_3 \sum x^2 z + a_4 \sum z^3 = \sum yz; \\ a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum zx^2 + a_3 \sum x^4 + a_4 \sum z^2 x^2 = \sum x^2 y; \\ a_0 \sum z^2 + a_1 \sum xz^2 + a_2 \sum z^3 + a_3 \sum x^2 z^2 + a_4 \sum z^4 = \sum z^2 y. \end{cases}$$

5.4. Сертификация эконометрической модели множественной корреляции

Проверка адекватности всей модели (общей статистической значимости всего уравнения множественной корреляции) осуществляется с помощью расчета F -критерия Фишера и величины средней ошибки аппроксимации $\bar{E}$.

Значение F -критерия Фишера определяется по формуле:

$$F_p = \frac{\frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^n \bar{y}_j^2}{\frac{1}{n-k-1} \cdot \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y}_j)^2},$$

где $\bar{y}_j$ – теоретические значения результативного признака, полученные при расчете уравнения регрессии;

n – объем исследуемой совокупности;

k – число факторных признаков в модели.

Значение F -критерия Фишера-Снедекора может быть получено и другим способом:

$$F_p = \frac{\frac{1}{2} R^2}{\frac{1}{n-3} (1-R^2)}.$$

где R^2 – множественный (совокупный) коэффициент корреляции, измеряющий теснота связи между тремя факторами измеряется с помощью:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 + r_{yz}^2 - 2r_{yx}r_{yz}r_{xz}}{1 - r_{xz}^2}},$$

где r_{ij} – парные коэффициенты корреляции между факторами i и j .

В множественной регрессии F -критерий оценивает общую значимость уравнения регрессии, проверяя, являются ли коэффициенты значимыми, или же все они равны нулю. Для этого используются две степени свободы:

k_1 – число независимых переменных (число регрессоров) в уравнении корреляции

$k_2 = n - k_1 - 1$ – это число наблюдений (n) минус число регрессоров (k_1) минус один (для свободного члена в уравнении регрессии)

Если $F_p > F_{кр}$ (табличное, Приложение 2), это свидетельствует о значимости коэффициента множественной корреляции.

Для проведения более углубленного анализа вычисляются частные коэффициенты корреляции:

$$r_{yx(z)} = \frac{r_{xy} - r_{yz}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{yz}^2)(1-r_{xz}^2)}};$$

$$r_{yz(x)} = \frac{r_{yz} - r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{xz}^2)}}.$$

Тем не менее проверку адекватности моделей рекомендуется начинать с проверки значимости каждого параметра модели. Значимость коэффициентов регрессии осуществляется с помощью t -критерия Стьюдента:

$$t_p = \frac{|a_i|}{\sqrt{\sigma_{a_i}^2}},$$

где $\sigma_{a_i}^2$ – дисперсия коэффициента регрессии.

Параметр модели признается статистически значимым, если

$$t_p > t_k(\alpha, (n-k-1)),$$

где α – уровень значимости статистической существенности связи;

$(n-k-1)$ – число степеней свободы, которое характеризует число свободно варьирующих элементов совокупности.

Наиболее сложным в этом выражении является определение дисперсии, которая может быть рассчитана двояким способом:

$$1) \text{ приближенная оценка: } \sigma_{a_i}^2 = \frac{\sigma_y^2}{k},$$

где σ_y^2 – дисперсия результативного признака;

k – число факторных признаков в уравнении;

$$2) \text{ более точная оценка: } \sigma_{a_i} = \frac{\sigma_y \sqrt{1-R^2}}{\sigma_{x_i} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{1-R_i}},$$

где R_i – величина множественного коэффициента корреляции по фактору x_i с остальными факторами.

Если $F_p > F_\alpha$ при $\alpha = 0,05$ или $\alpha = 0,01$, то можно предполагать, что уравнение регрессии соответствует или адекватно эмпирическим данным. Величина F_α определяется по специальным таблицам на основании величины $\alpha = 0.05$ или $\alpha = 0.01$ и числа степеней свободы $k+1$, $n-k-1$, где n – число наблюдений, k – число факторных признаков.

Значение средней ошибки аппроксимации:

$$\bar{E} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{|y_j - \bar{y}_j|}{|\bar{y}_j|} \cdot 100$$

не должно превышать 12–15 %, что может быть признано за достаточный уровень точности.

Применение в корреляционном анализе линейных моделей (как и любых

других) необходимо обосновывать. Линейные модели широко применяются для аналитического описания зависимостей признаков (при допустимой их точности). Иногда переход к линейным методам анализа взаимосвязей обеспечивается использованием качественно обоснованных нелинейных преобразований исходных переменных.

Оценить адекватность корреляционного уравнения также позволяет коэффициент множественной корреляции R , рассчитываемый как:

$$R = \sqrt{r_{yx_1} \beta_1 + r_{yx_2} \beta_2 + \dots + r_{yx_n} \beta_n}.$$

Этот показатель тесноты связи признаков-факторов и признака-результата всегда положителен ($0 \leq R \leq 1$). При $R \rightarrow 0$ корреляционное уравнение характеризует несущественную, слабую связь. В этом случае ошибка (среднеквадратическая) уравнения определяется как:

$$E = \sigma_y \sqrt{1 - R^2}.$$

При анализе адекватности уравнения регрессии исследуемому процессу возможны следующие варианты:

- 1) если построенная модель после проверки по F -критерию Фишера в целом адекватна и все коэффициенты регрессии значимы, то она может быть использована для осуществления прогнозов;
- 2) если построенная модель после проверки по F -критерию Фишера адекватна, но часть коэффициентов регрессии незначима, то она пригодна для принятия некоторых решений, но не пригодна для осуществления прогнозов;
- 3) если построенная модель после проверки по F -критерию Фишера адекватна, но все коэффициенты регрессии незначимы, то модель считается неадекватной и ее нельзя использовать для принятия решений и осуществления прогнозов.

С целью расширения возможности анализа используется частный коэффициент эластичности:

$$A_{x_i} = a_i - \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}},$$

где $\bar{x}_i$ – среднее значение соответствующего факторного признака;

$\bar{y}$ – среднее значение результативного признака;

a_i – коэффициент регрессии при соответствующем факторном признаке.

Коэффициент эластичности показывает на сколько процентов в среднем изменится значение результативного признака при изменении факторного признака на 1 %.

5.5. Варианты задания

На основе данных, приведенных в Приложении 1, требуется:

1. Провести идентификацию эконометрической модели (не менее двух вариантов).
2. Провести параметризацию выбранных эконометрических моделей.
3. Провести сертификацию эконометрических моделей.
4. Сделать вывод какая из рассмотренных эконометрических моделей более пригодна для практических целей.

В качестве исходных данных использовать Приложение 1. В качестве результативного признака использовать показатель «Балансовая прибыль, млн руб.». Для корреляционной модели использовать 2 наиболее существенных признака-фактора, которые необходимо выбрать на стадии идентификации модели.

При выполнении задания необходимо осуществить выбор из двух альтернативных вариантов модели (уравнений множественной корреляции).

Начальные значения (номер варианта) соответствуют последним двум цифрам номера зачетной книжки. Далее необходимо скопировать 50 значений всех колонок. Замена задач не допускается. Номер варианта указывается в самом начале работы.

ЗАДАНИЕ № 6

Задание: определить эконометрическую модель основной тенденции ряда динамики.

Цель: формирование эконометрической модели тренда с помощью метода аналитического выравнивания.

6.1. Ряды динамики

Экономическая деятельность фирм развивается во времени. Поэтому время можно рассматривать как признак-фактор, определяющий развитие социально-экономических процессов. Следовательно, для выявления статистических закономерностей необходимо знать характеристики изменения и тенденции их развития. Это достигается при построении, анализе и расчете аналитических показателей соответствующих рядов динамики.

Ряд динамики (динамический ряд, временной ряд) – это статистическое описание изменения явлений во времени. Более точно: динамическим рядом называют ряд числовых характеристик изучаемого явления за последовательно взятые отрезки или моменты времени.

Выбор соответствующих приемов представления и способов анализа таких рядов определяется характером исходных данных и зависит от задач исследования. Поэтому отнесение ряда динамики к тому или иному виду имеет важное значение. Каждый ряд динамики содержит:

- 1) показатель времени;
- 2) уровень развития явления.

В качестве показателей времени используют либо определенные даты (моменты) времени, либо отдельные периоды (годы, кварталы, сутки и т. д.), которые характеризуют последовательность изменения значений показателя, фиксирующего состояние явления или процесса. Статистические показатели, характеризующие изучаемый объект во временном аспекте, называются уровнями ряда, т. е. уровни ряда отображают значение показателя явления, соответствующее определенному времени.

В зависимости от способа выражения уровней (в виде абсолютных, относительных или средних величин) ряды динамики подразделяются на ряды абсолютных, относительных или средних величин.

В зависимости от того, выражают ли уровни ряда состояние явления на определенные моменты времени (на начало месяца, квартала, года и т. п.) или его величину за определенные интервалы времени (например, за сутки, месяц, год и т. п.), различают моментные, или интервальные, ряды.

Ряды динамики могут быть с равноотстоящими (по времени) уровнями и с неравноотстоящими (по времени) уровнями.

Статистическое отображение развития процесса во времени может быть представлено в виде ряда динамики с нарастающими итогами. Такое представление позволяет отобразить результаты развития не только за текущий, но и за предшествующие периоды времени (табл. 6.1).

Таблица 6.1. Данные об объемах продаж товаров в регионе

Год	2019	2020	2021	2022	2023
тыс. руб.	223,7	195,7	237,4	179,2	189,1

Это интервальный ряд динамики абсолютных величин с равноотстоящими по времени уровнями. Его уровни характеризуют суммарный итог за определенный отрезок времени – за каждый год. Уровни интервального ряда могут суммироваться, так как не содержат элементов повторного счета, например, доходы фирмы за ряд лет.

Примером моментного ряда абсолютных величин с неравноотстоящими (по времени) уровнями может служить ряд динамики, показывающий число фирм в стране (на конец года) (табл. 6.2).

Таблица 6.2. Число фирм в регионе (на 31.12 каждого года)

Год	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Число фирм, тыс.	33,0	28,5	25,9	25,9	25,9	26,6

Уровни этого ряда – обобщенные итоги учета числа фирм по состоянию на определенную дату (конец каждого года). Отдельные уровни моментного ряда содержат элементы повторного счета, так как отдельные фирмы, учитываемые в 1990 году, существовали и в 2002 году, являясь единицами совокупности. Это делает бессмысленным суммирование уровней моментных рядов динамики.

Примером интервального ряда динамики средних величин с неравноотстоящими уровнями (по времени) может служить ряд динамики средней месячной денежной заработной платы лиц наемного труда страны (табл. 6.3).

Таблица 6.3. Средняя месячная заработная плата работников предприятия

Год	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Зарплата, тыс. руб.	116,9	122,0	145,8	168,9	172,5	177,3	184,8

Его уровни относятся к годичным интервалам времени, но суммирование их самостоятельного значения не имеет.

Примером моментного ряда динамики относительных величин с равноотстоящими уровнями по времени может служить ряд динамики, характеризующий удельный вес городского населения в общей численности населения на начало года (табл. 6.4).

Таблица 6.4. Удельный вес городского населения на начало года

Период	Население региона, %		
	Общее количество	Городское	Сельское
1	100	63,0	37,0
2	100	64,0	36,0
3	100	64,4	35,6
4	100	64,8	35,2
5	100	65,2	34,7

Суммирование уровней данного ряда не имеет смысла.

С помощью рядов динамики решаются вопросы:

- характеристики уровней развития процессов во времени;
- измерения динамики изучаемых процессов с помощью системы показателей;
- выявления и количественной оценки основной тенденции развития;
- изучения периодических колебаний;
- прогнозирования с помощью экстраполяции (продолжения) рядов динамики.

6.2. Идентификация основной тенденции ряда динамики

За колебаниями уровней в отдельные годы может не просматриваться закономерность изменения величины. Она может быть выявлена статистическими методами. Уровни ряда динамики формируются под влиянием множества длительно и кратковременно действующих факторов. Выявление основной закономерности (тенденции) изменения уровней ряда предполагает ее количественное измерение, в известной мере свободное от случайных воздействий.

Тренд – это основная тенденция уровней ряда динамики, а ее выявление называется выравниванием временного ряда, методы выявления тренда называются методами выравнивания. Методы выравнивания рядов динамики заключаются в замене фактических уровней ряда динамики расчетными значениями, отражающими основную тенденцию развития процесса во времени. При изучении в рядах динамики основной тенденции развития (тренда) решаются две взаимосвязанные задачи:

- 1) выявление в изучаемом процессе наличия тренда с описанием его качественных особенностей;
- 2) измерение выявленного тренда, т. е. получение обобщающей количественной оценки основной тенденции развития.

Наиболее распространенными методами статистического изучения тренда являются:

- 3) укрупнение интервалов (этап идентификации);
- 4) сглаживание скользящей средней (этап идентификации);
- 5) аналитическое выравнивание (этап параметризации).

Существуют и другие методы, которые можно рассматривать как разновидность перечисленных выше, например:

- метод экспоненциального сглаживания, который аналогичен методу сглаживания скользящей средней, но вместо простых (арифметических) средних величин, используются экспоненциальные средние;
- экспоненциальное сглаживание временных рядов – модификация метода аналитического выравнивания, в котором более поздним наблюдениям придается больший вес, иными словами, веса точек ряда убывают (экспоненциально) по мере удаления в прошлое.

Одним из наиболее простых методов выявления основной тенденции является *метод укрупнения интервалов*. Этот способ основан на укрупнении периодов времени, к которым относятся уровни ряда. Метод применяется для выявления тренда в рядах динамики, в которых колебания уровней не позволяют определить основную тенденцию развития. Суть метода заключается в преобразовании первоначального ряда динамики в ряд с более продолжительными периодами. Например, ежемесячный объем продаж заменяется рядом объема продаж за квартал (рис. 6.1).

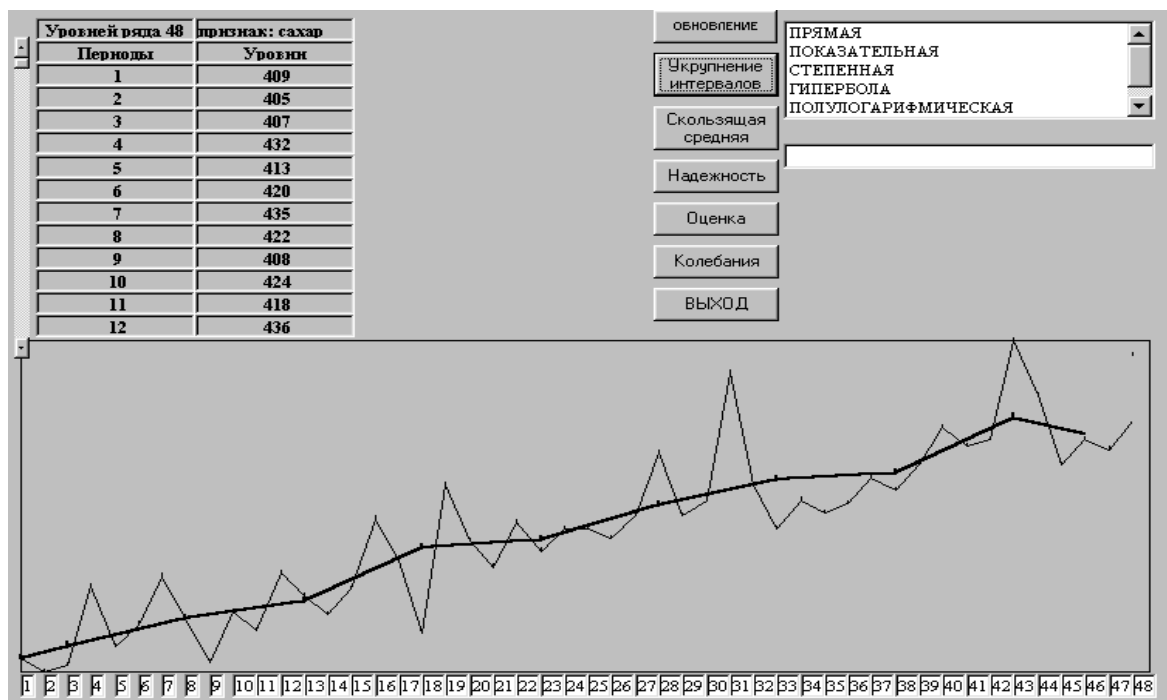


Рисунок 6.1. Определение тенденции динамического ряда

Другой метод – *метод скользящей средней*, суть которого состоит в замене исходных уровней их средними арифметическими величинами за определенные периоды. Расчет средних величин ведется способом скольжения, т. е. постепенным исключением из принятого периода скольжения первого уровня и включением следующего. Допустим, что $y_1, y_2, \dots, y_n$ исходный ряд динамики. Тогда для каждых m соседних уровней может быть рассчитано среднее арифметическое значение:

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=k}^{i=k+m-1} y_i; \quad k = 1, 2, \dots, n - m + 1,$$

где m – величина интервала сглаживания.

Например, если дан ряд ежегодных уровней: $x_1, x_2, \dots, x_9$, то трехлетняя скользящая средняя выглядит следующим образом:

$$\text{для первого интервала } \bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3};$$

для второго интервала $\bar{y}_2 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}$;

для третьего интервала $\bar{y}_3 = \frac{y_3 + y_4 + y_5}{3}$ и т. д.

В результате сглаживания получается ряд динамики, количество уровней которого на два меньше, чем у исходного (теряются два крайних значения) (рис. 6.2). В случае если m нечетное число, то рассчитанным на основе приведенной формы значением заменяют уровень ряда, находящийся в середине интервала сглаживания. В основу метода положено определение по исходным уровням ряда теоретических уровней, в которых случайные колебания погашаются, а основная тенденция выражается в виде некоторой более плавной линии. Для выявления основной тенденции методом скользящей средней, прежде всего, устанавливается число уровней исходного ряда, которые будут заменяться их средней величиной. Обычно рекомендуется использовать нечетное число уровней исходного ряда динамики, заменяемых на среднюю величину.

Пример. На основе данных об объеме продаж изделий за 15 дней месяца произвести сглаживание ряда методом пятичленной скользящей средней.

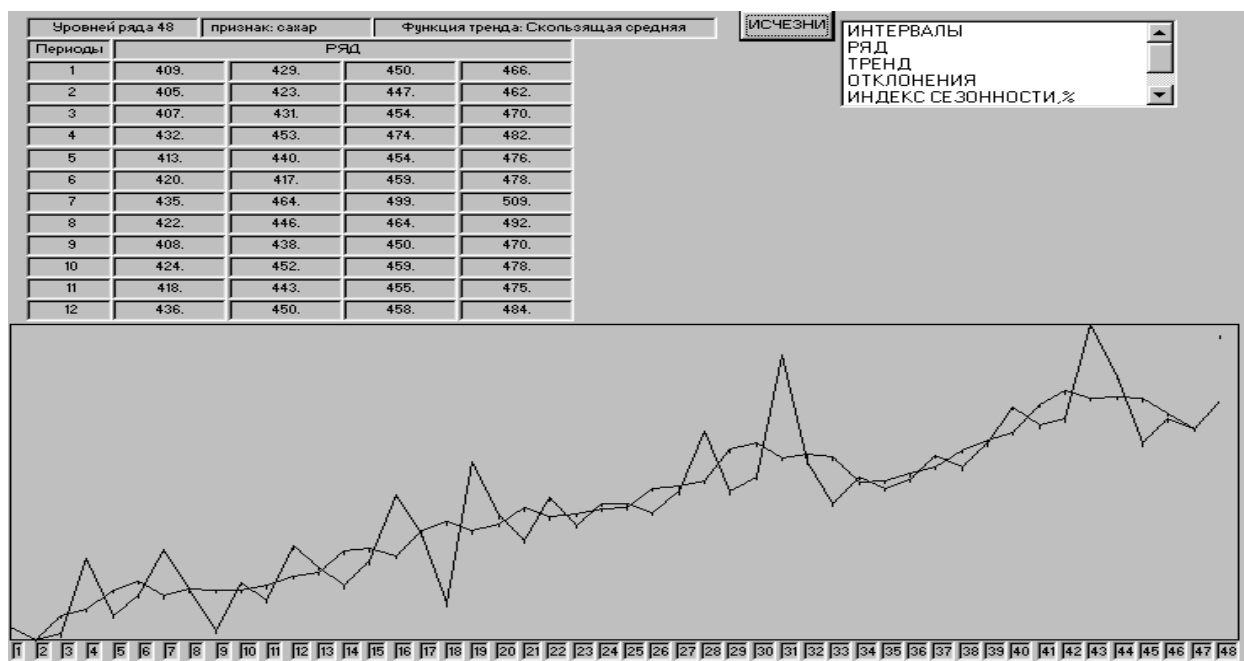


Рисунок 6.2. Применение метода скользящей средней

Таблица 6.5. Сглаживание ряда методом пятичленной скользящей средней

День месяца	Объем продаж, шт.	Пяти- дневные скользящие суммы	Пятид- невные сколь- зящие средние $\bar{y}_i$	День месяца	Объем продаж, шт.	Пятид- невные сколь- зящие суммы	Пятид- невные скользящие средние $\bar{y}_i$
1	30	–	–	9	33	156	31,6
2	31	–	–	10	31	157	31,8
3	31	–	30,8	11	31	158	32,0
4	32	–	30,8	12	33	159	32,0
5	30	154	31,0	13	32	160	32,6
6	30	154	31,0	14	33	160	–
7	32	155	31,2	15	34	163	–
8	31	155	31,4				

Взяв данные за первые 5 дней, исчислим пятидневные суммы, а затем среднюю величину.

$$\bar{y}_1 = \frac{30 + 31 + 31 + 32 + 30}{5} = \frac{154}{5} = 30,8;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{31 + 31 + 32 + 30 + 30}{5} = \frac{154}{5} = 30,8 \quad \text{и т. д.}$$

Интервал скользящего можно брать четный, но в этом случае определение скользящей средней по четному числу членов осложняется, так как средняя величина может быть отнесена только к середине между двумя периодами. Чтобы ликвидировать этот сдвиг, применяется центрирование, т. е. нахождение средней из средних величин для отнесения полученного уровня к определенному периоду. При четном интервале скользящего необходимо также находить скользящие суммы, скользящие средние по этим суммам и средние из средних. Если при сглаживании рядов динамики скользящая средняя составляется из нечетного числа уровней, то необходимость в центрировании отпадает.

Интервал сглаживания должен быть достаточно большим для погашения случайных колебаний уровней ряда, чаще всего это 5–10 периодов. Недостатком метода является то, что число выравненных уровней меньше исходного их числа на величину $(m - 1)$.

В случае использования взвешенных скользящих средних каждому из уровней при усреднении придается определенный вес. Способ задания весов зависит от целей анализа. Если степень важности информации возрастает в хронологическом порядке, то более поздним наблюдениям придается больший вес.

При использовании метода экспоненциального сглаживания средние величины рассчитываются по следующей формуле:

$$\bar{y}_t = \sum_{i=k}^{k+n} \alpha_i y_{t-i} \quad \text{для} \quad \forall t,$$

где $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, n – период скользящего, принимается нечетный.

Если период скользящего $n = 3$, то выравненный ряд начинается со второго уровня, как это показано на примере, представленном в табл. 6.6. (рис. 6.3.).

Таблица 6.6. Выравнивание ряда по методу экспоненциального сглаживания

Период t	Уровень ряда y_t	Выравненный уровень ряда $\bar{y}_t = 0,4y_{t+1} + 0,3y_t + 0,3y_{t-1}$
1	30	
2	31	30,7
3	31	31,4
4	32	30,9
5	30	30,6
6	30	30,8
7	32	31,0
8	31	32,1
9	33	31,6
10	31	31,6
11	31	31,8
12	33	32,0
13	32	32,7
14	33	33,1
15	34	

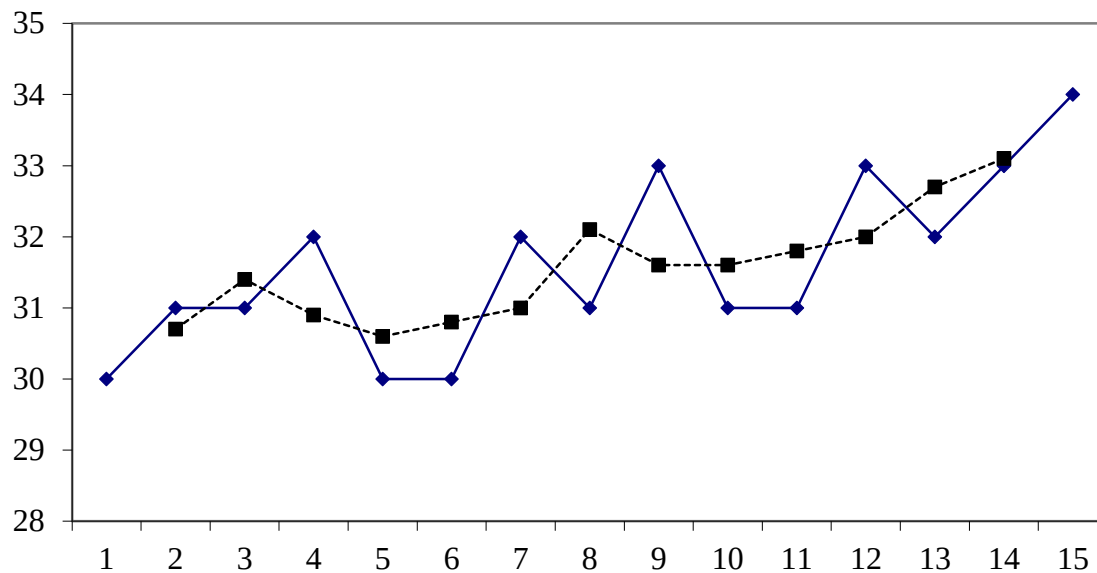


Рисунок 6.3. Применение метода экспоненциального сглаживания:

—◆— уровень ряда
 - -■- - выравненный уровень ряда

6.3. Параметризация основной тенденции ряда динамики

Применение методов укрупнения интервалов и скользящей средней позволяет выявить тренд. Но получить обобщенную статистическую оценку тренда при использовании этих методов невозможно. Для решения задачи измерения тренда используется *метод аналитического выравнивания*. При использовании этого метода уровни ряда динамики выражаются в виде функции времени: $\bar{y}_t = f(t)$.

Определение теоретических (расчетных) уровней $\bar{y}_t = f(t)$ производится на основе так называемой адекватной математической функции, которая наилучшим образом отображает основную тенденцию ряда динамики. Выбор функции, характеризующей форму основной тенденции, может осуществляться на основе анализа по методу укрупнения интервалов.

Расчет параметров выбранной «адекватной» функции осуществляется методом наименьших квадратов, для которого формальным критерием выбора параметров является минимум остаточной дисперсии отклонения выравненных уровней ряда $\bar{y}_t$ от полученных в результате наблюдений y_i :

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_{ti})^2 = \min.$$

Аналитическое выравнивание может быть осуществлено по любому рациональному многочлену. Выбор функции производится на основе анализа характера закономерностей динамики данного ряда.

В качестве уравнения тренда могут быть использованы разные функции. Наиболее часто рассматриваются полиномы разных степеней. В качестве примера рассмотрим полином первой и второй степени.

Наиболее часто рассматривается полином первой степени, т. е. уравнение прямой $y_t = a_0 + a_1 t$, где a_0, a_1 – неизвестные параметры. Для определения параметров уравнения тренда ряда динамики с равноотстоящими по времени уровнями может быть использован метод конечных разностей. Для линейного уравнения схема использования метода конечных разностей базируется на том, что:

- первые разности являются постоянными, т. е.

$$\Delta'_t = y_t - y_{t-1} = \text{const} \quad \text{для } \forall t;$$

- вторые разности равны нулю, т. е.

$$\Delta''_t = \Delta'_t - \Delta'_{t-1} = 0.$$

Постоянство первых разностей и равенство нулю вторых разностей при вычислении по фактическим данным должно выполняться для всего ряда динамики. Для уравнения прямой схема конечных разностей представлена в табл. 6.7.

Таблица 6.7. Схема конечных разностей для линейного уравнения

t	Уровни ряда	Первые разности	Вторые разности
$t = 0$	$y_0 = a_0$		
$t = 1$	$y_1 = a_0 + a_1$	$\Delta'_1 = y_1 - y_0 = a_1$	$\Delta''_1 = \Delta'_2 - \Delta'_1 = 0$
$t = 2$	$y_2 = a_0 + 2a_1$	$\Delta'_2 = y_2 - y_1 = a_1$	$\Delta''_2 = \Delta'_3 - \Delta'_2 = 0$
$t = 3$	$y_3 = a_0 + 3a_1$	$\Delta'_3 = y_3 - y_2 = a_1$	

Для полинома второй степени, т. е. параболы $y_t = a_0 + a_1t + a_2t^2$, постоянными являются вторые разности, а равными нулю – третьи (табл. 6.8).

Таблица 6.8. Схема конечных разностей для уравнения параболы

t	Уровни ряда	Первые разности	Вторые разности	Третьи разности
$t = 0$				
$t = 1$	$y_1 = a_0 + a_1 + a_2$	$\Delta'_1 = a_1 + a_2$	$\Delta''_1 = \Delta'_2 - \Delta'_1 = 2a_2$	$\Delta'''_1 = 0$
$t = 2$	$y_2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2$	$\Delta'_2 = a_1 + 3a_2$	$\Delta''_2 = \Delta'_3 - \Delta'_2 = 2a_2$	$\Delta'''_2 = 0$
$t = 3$	$y_3 = a_0 + 3a_1 + 9a_2$	$\Delta'_3 = a_1 + 5a_2$	$\Delta''_3 = \Delta'_4 - \Delta'_3 = 2a_2$	
$t = 4$	$y_4 = a_0 + 4a_1 + 16a_2$	$\Delta'_4 = a_1 + 7a_2$		

Кроме определения параметров метод конечных разностей может быть использован для выбора формы уравнения тренда и оценки погрешности выбранной формы. Порядок равных конечных разностей определяет выбор степени полинома, который наилучшим образом может быть использован в качестве уравнения тренда.

Для выбора формы уравнения тренда могут быть использованы и другие критерии:

- если темпы роста колеблются мало, то для уравнения тренда подходит показательная функция;
- если первые конечные разности имеют тенденцию уменьшаться с постоянным темпом, то целесообразно использовать модифицированную экспоненту;
- если первые конечные разности обратных значений средних уровней изменяются на один и тот же процент, то можно использовать логистическую функцию.

Таким образом, сделать вывод о наличии устойчивой тенденции развития и обосновать выбор формы уравнения тренда можно на основе анализа скорости роста, темпа роста, пунктов роста и других показателей ряда динамики. Если анализ показателей ряда динамики выявил, что поведение уровней ряда обусловлено изменением условий протекания рассматриваемого процесса, то этот процесс разбивается на ряд характерных в поведенческом отношении этапов. Каждый этап может иметь свое аналитическое представление. Анализ рядов динамики обычно преследует две цели:

- 1) выявление основных причин и степени влияния основных факторов, оказывающих существенное влияние на поведение экономического объекта;
- 2) прогнозирование поведения объекта.

Если выявленная тенденция поведения объекта может быть представлена аналитическим представлением за весь имеющийся в распоряжении исследователя период, то возможно воспользоваться уравнением тренда для прогнозирования. В том случае, если приходится процесс представить совокупностью этапов, характерных в поведении объекта, то для прогнозирования используется только одно уравнение тренда (по одному из этапов), представляющее, по предположению, то же повторяющееся поведение объекта в будущем.

При выборе формы уравнения тренда следует учитывать объем имеющийся информации. Чем больше параметров в уравнении тренда, тем больше требуется уровней ряда динамики для одной и той же степени надежности. Выбор формы уравнения тренда может осуществляться и на основе формального критерия. В качестве такого критерия часто используется сумма квадратов отклонений, полученных при расчете уравнения тренда, от фактических уровней ряда. В целях удобства выбора различают следующие типичные случаи социально-экономических процессов:

- 1) равномерное развитие;
- 2) равноускоренное развитие;
- 3) развитие с переменным ускорением;
- 4) развитие со стабильными темпами роста;
- 5) развитие с замедлением роста в конце периода.

Равномерное развитие характеризуется практически постоянными абсолютными приростами: $\Delta = y_i - y_{i-1} \cong \text{const}$ для $\forall i$.

Основная тенденция развития в рядах динамики с постоянными абсолютными приростами отображается линейным уравнением

$$y_t = a_0 + a_1 t,$$

где a_0, a_1 – неизвестные параметры, для определения которых составляется следующая система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_i t_i = \sum_i y_i; \\ a_0 \sum_i t_i + a_1 \sum_i t_i^2 = \sum_i t_i y_i. \end{cases}$$

Пример. Определить уравнение тренда по данным, представленным в табл. 6.9.

Таблица 6.9. Динамика затрат на производство с 1999 по 2003 г.

Год	Объем затрат, тыс. руб.	t	t^2	ty	$\bar{y}_t = a_0 + a_1 T$	$y - \bar{y}_t$	$(y - \bar{y}_t)^2$
1999	15,5	-2	4	-31	15,18	0,3	0,09
2000	15,1	-1	1	-15,1	15,31	-0,21	0,044
2001	15,2	0	0	0	15,44	-0,2	0,04
2002	15,4	1	1	15,4	15,57	-0,2	0,04
2003	16,0	2	4	32	15,7	-0,3	0,09
Итого	77,2	-	10	1,3	-	-	0,3

Для выравнивания ряда динамики используется линейное уравнение:

$$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t.$$

Для расчета параметров a_0 и a_1 по способу наименьших квадратов необходимо решить систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{t=1}^n t = \sum_{t=1}^n y_t; \\ a_0 \sum_{t=1}^n t + a_1 \sum_{t=1}^n t^2 = \sum_{t=1}^n t y_t, \end{cases}$$

где y_t – исходные уровни ряда динамики;

n – число членов ряда;

t – показатель времени, который обозначается порядковыми номерами, как это представлено в табл. 6.10.

Таблица 6.10. Представление показателя времени

Год	1989	1990	1991	1992	1993
t	1	2	3	4	5

Решение системы дает следующее выражение для a_0 и a_1 :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\sum_t t^2 \sum_t y_t - \sum_t t \sum_t t y_t}{n \sum_t t^2 - \sum_t t \sum_t t}; \\ a_1 = \frac{n \sum_t t y_t - \sum_t t \sum_t y_t}{n \sum_t t^2 - \sum_t t \sum_t t}. \end{cases}$$

В рядах динамики техника расчета параметров уравнения может быть упрощена. Для этой цели показателям времени придают такие значения, чтобы их сумма была равна нулю, т. е. $\sum t = 0$. При этом уравнения примут вид:

$$a_0 n = \sum_t y_t;$$

$$a_1 \sum_t t^2 = \sum_t t y_t,$$

откуда $a_0 = \frac{\sum y_t}{n}$ представляет собой средний уровень динамики ряда ($\bar{y}$);

параметр $a_1 = \frac{\sum t y_t}{\sum t^2}$ является коэффициентом регрессии, определяющим

направление и темпы развития. Если $a_1 > 0$, то уровни выравненного ряда динамики равномерно возрастают, а при $a_1 < 0$ происходит равномерное снижение.

По итоговым данным нашего примера (см. табл. 6.9) получим:

$$a_0 = 77,2 : 5 = 15,44;$$

$$a_1 = 1,3 : 10 = 0,13.$$

уравнение основной тенденции за 1989–1993 годы.

$$\bar{y}_t = 15,44 + 0,13t.$$

Подставляя в уравнение принятые значения t , получим:

$$1989 \text{ год} - \bar{y}_t = 15,44 + 0,13(-2) = 15,18;$$

$$1990 \text{ год} - \bar{y}_t = 15,44 + 0,13(-1) = 15,31 \text{ и т. д.}$$

Целесообразно полученные результаты изобразить графически (рис. 6.4).

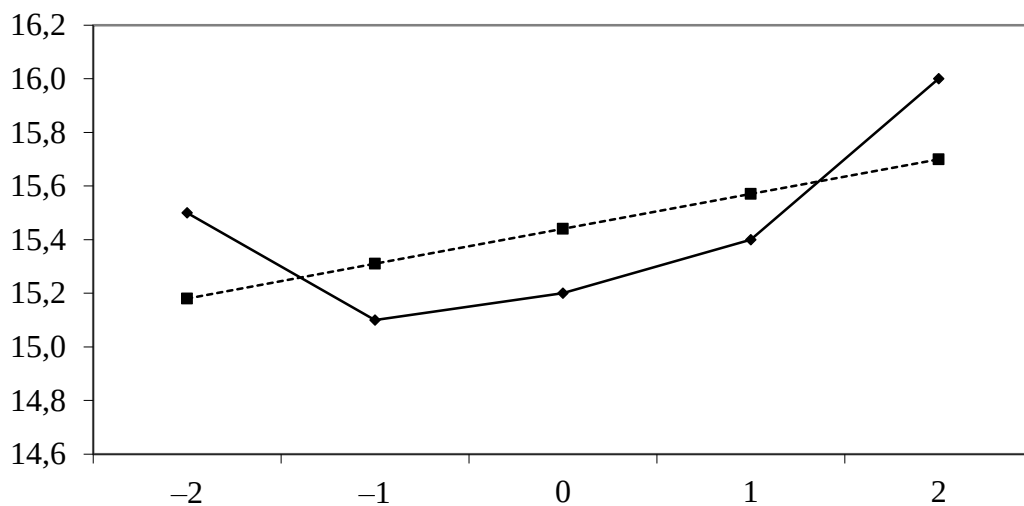


Рисунок 6.4. Исходный ряд и уравнение тренда:

—◆— исходный ряд,
 ----■---- уравнение тренда

Если число уровней в ряду динамики — четное, то условное обозначение показателя времени может принимать вид, представленный в табл. 6.11.

Таблица 6.11. Представление показателя времени

Год	1978	1979	1980	1981	1982	1983
t	-5	-3	-1	1	3	5

Этот прием позволяет вести расчет по полугодиям.

Величину $\sum t^2$ определяют по формулам:

- при нечетном числе уровней:

$$\sum t^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{12};$$

- при четном числе уровней:

$$\sum t^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Равноускоренному (равнозамедленному) типу процессов свойственно постоянное во времени увеличение (замедление) развития. Уровни таких рядов изменяются с постоянными темпами прироста:

$$T_{\text{пр}} = \frac{\Delta}{y_{i-1}} \cdot 100.$$

Основная тенденция развития в рядах динамики со стабильными темпами прироста отображается функцией параболы второй степени:

$$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2.$$

В этом уравнении значения параметров a_0 и a_1 идентичны параметрам, используемым в формуле линейного тренда. Параметр a_2 характеризует постоянное изменение интенсивности развития в единицу времени. При $a_2 > 0$ происходит ускорение развития, а при $a_2 < 0$, соответственно, замедление. Параметр a_1 может быть с любым знаком. Для определения параметров составляется следующая система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_t t + a_2 \sum_t t^2 = \sum_t y_t; \\ a_0 \sum_t t + a_1 \sum_t t^2 + a_2 \sum_t t^3 = \sum_t ty_t; \\ a_0 \sum_t t^2 + a_1 \sum_t t^3 + a_2 \sum_t t^4 = \sum_t y_t t^2. \end{cases}$$

Развитие с переменным ускорением (замедлением) выражается уравнением параболы третьей степени:

$$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

В этом уравнении параметр a_3 показывает изменение ускорения. При $a_3 > 0$ ускорение увеличивается, а при $a_3 < 0$ ускорение замедляется. Для определения параметров составляется следующая система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_t t + a_2 \sum_t t^2 + a_3 \sum_t t^3 = \sum_t y_t; \\ a_0 \sum_t t + a_1 \sum_t t^2 + a_2 \sum_t t^3 + a_3 \sum_t t^4 = \sum_t ty_t; \\ a_0 \sum_t t^2 + a_1 \sum_t t^3 + a_2 \sum_t t^4 + a_3 \sum_t t^5 = \sum_t y_t t^2; \\ a_0 \sum_t t^3 + a_1 \sum_t t^4 + a_2 \sum_t t^5 + a_3 \sum_t t^6 = \sum_t y_t t^3. \end{cases}$$

Развитие со стабильными темпами роста (развитие по экспоненте) соответствует практически постоянному показателю темпов роста

$$T_p = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100.$$

В этом случае основная тенденция развития отображается показательной функцией $\bar{y}_t = a_0 a_1^t$, в которой для определения параметров a_0, a_1 сначала производится логарифмирование $\lg y_t = \lg a_0 + t \lg a_1$, а затем составляется следующая система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} n \lg a_0 + \lg a_1 \sum_t t = \sum_t \lg y_t; \\ \lg a_0 \sum_t t + \lg a_1 \sum_t t^2 = \sum_t t \lg y_t. \end{cases}$$

В этих уравнениях параметр a_1 – темп роста (снижения) изучаемого процесса в единицу времени, т. е. интенсивность развития. Встречаются попытки использовать модифицированную экспоненту:

$$\bar{y}_t = a_0 + a_1 a_2^t.$$

Развитие с замедлением роста в конце периода характеризуется показателем цепного абсолютного прироста, величина которого в конце периода имеет тенденцию к уменьшению:

$$\Delta = y_i - y_{i-1} \xrightarrow{i \rightarrow n} 0.$$

Основная тенденция развития в таких рядах динамики отображается полулогарифмической функцией:

$$\bar{y}_t = a_0 + a_1 \lg t.$$

Для получения неизвестных параметров a_0, a_1 составляется следующая система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_t \lg t = \sum_t y_t; \\ a_0 \sum_t \lg t + a_1 \sum_t (\lg t)^2 = \sum_t y_t \lg t. \end{cases}$$

В действительности порой невозможно однозначно решить, к какому типу развития относится анализируемый процесс, а использованные для классификации значения показателей ряда динамики имеют такой диапазон изменения, который встречается реже, чем этого бы хотелось. Совокупное действие постоянных, периодических и случайных факторов обуславливает такое изменение уровней ряда динамики, которое часто не согласуется с приведенными выше типовыми случаями. Поэтому выбору уравнения тренда должен предшествовать качественный анализ процесса, который должен быть представлен графически. На основе этого анализа может быть выдвинута

гипотеза. Но даже в этой ситуации невозможно однозначно выбрать тип аналитического представления основной тенденции. Поэтому проблема определения наилучшего уравнения тренда может решаться прямым перебором из заданного числа типов уравнений, которые отличаются значительным разнообразием. Кроме типичных случаев для получения уравнения тренда используются и другие функции:

- **степенная функция:**

$$\bar{y}_t = a_0 t^{a_1},$$

для определения параметров которой сначала производится логарифмирование $\lg y_t = \lg a_0 + a_1 \lg t$, а затем составляется следующая система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} n \lg a_0 + a_1 \sum_t \lg t = \sum_t \lg y_t; \\ \lg a_0 \sum_t \lg t + a_1 \sum_t (\lg t)^2 = \sum_t \lg t \lg y_t. \end{cases}$$

При $a_1 = 1$ уравнение тренда является линейным, при $a_1 = 2$ – параболическим. Степенная форма гибкая, пригодная для отображения изменений с малой мерой пропорциональности. «Жестким» условием является обязательное прохождение через начало координат: при $t = 0 \rightarrow \bar{y}_t = 0$. При усложнении уравнения $\bar{y}_t = a_0 + a_1 t^{a_2}$ могут возникнуть некоторые сложности;

- **гипербола:**

$$y_t = a_0 + a_1 \frac{1}{t},$$

для определения параметров которой составляется следующая система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_t \left(\frac{1}{t} \right) = \sum_t y_t; \\ a_0 \sum_t \left(\frac{1}{t} \right) + a_1 \sum_t \left(\frac{1}{t} \right)^2 = \sum_t \left(\frac{y_t}{t} \right). \end{cases}$$

Если $a_1 > 0$, гиперболический тренд выражает тенденцию замедляющегося снижения уровня, стремящегося к пределу a_0 . Эта форма тренда подходит для отображения процессов, ограниченных предельным значением уровня. Существует несколько разновидностей гиперболы, обладающих разными свойствами:

- **равносторонняя гипербола, асимптотическая к линии, параллельной оси t :**

$$y = \frac{1}{a_0 + a_1 t};$$

- **равносторонняя гипербола, асимптотическая к линии, параллельной оси y :**

$$y = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{t} \right);$$

- **равносторонняя гипербола, асимптотическая к линиям,**

параллельным обеим осям:

$$\frac{1}{y} = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{t} \right);$$

– логистическая функция:

$$\bar{y} = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{1 + e^{a_0 + a_1 t}} + y_{\min},$$

где $y_{\max}, y_{\min}$ – максимальное и минимальное значения уровней ряда динамики;

a_0, a_1 – неизвестные параметры уравнения тренда.

Данная функция имеет две точки перегиба: от ускоряющегося роста к равномерному (вогнутость) и от равномерного роста к замедляющемуся (рис. 6.5, табл. 6.12).

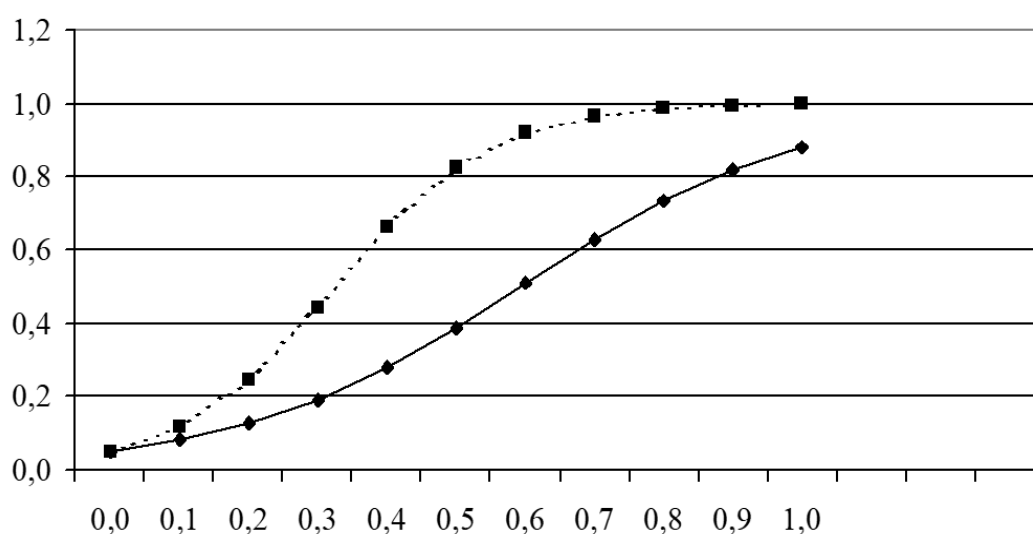


Рисунок 6.5. Графики логистических кривых:

—◆— 1-я логиста
 ---■--- 2-я логиста

Таблица 6.12. Данные по графикам рис. 6.5

t	1-я логиста	2-я логиста
	$\bar{y}_t = \frac{1}{1 + \exp(2,9 - 4,9t)}$	$\bar{y}_t = \frac{1}{1 + \exp(2,9 - 8,9t)}$
0,0	0,052154	0,052154
0,1	0,082413	0,118157
0,2	0,127862	0,246011
0,3	0,193099	0,442752
0,4	0,280900	0,659260
0,5	0,389361	0,824914
0,6	0,509999	0,919827
0,7	0,629483	0,965444
0,8	0,734973	0,985514
0,9	0,819061	0,994000
1,0	0,880797	0,997527

Данная функция может отображать процесс развития в течение

длительного периода, проходя все фазы насыщения рынка товарами: сначала медленный, но все ускоряющийся рост доли потребителей, затем равномерный (от 30–40 до 70–80 %), а в заключение замедляющийся по мере приближения к 100 %. Если $y_{\min} = 0$, $y_{\max} = 100\%$, уравнение упрощается до формы:

$$\bar{y}_t = \frac{1}{1 + \exp(a_0 + a_1 t)};$$

– кривая Гомперца:

$$\bar{y}_t = a_0 a_1^{a_2^t};$$

логарифмическая парабола:

$$\bar{y}_t = a_0 a_1^t a_2 t.$$

При выборе формы уравнения тренда существенное значение имеет объем информации. Чем больше параметров содержит уравнение тренда, тем больше должно быть наблюдений при одной и той же степени надежности оценивания.

6.4. Сертификация основной тенденции ряда динамики

Основная тенденция (тренд) показывает, как воздействуют систематические факторы на уровень ряда динамики, а колеблемость уровней около тренда служит мерой воздействия остаточных факторов. Ее можно найти по формуле среднего квадратического отклонения:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_t (y_t - \bar{y}_t)^2}{n}},$$

где y_t – исходный уровень ряда;

$\bar{y}_t$ – выравненный уровень ряда.

Этот показатель является оценкой адекватности статистической модели и называется стандартизированной ошибкой аппроксимации. Относительной мерой колеблемости является коэффициент вариации:

$$V = \frac{\sigma_t}{\bar{y}},$$

где $\bar{y}$ – средний уровень ряда.

Для выбора типа уравнения тренда выше было предложено использовать показатели ряда динамики. Для проверки постоянства того или иного показателя ряда динамики целесообразно использовать статистические гипотезы.

Для проверки статистической значимости всей модели или отдельных ее коэффициентов используется критерий Фишера (F-тест). Этот критерий:

$$F_p = \frac{(n-k) \sum (\hat{y}_t - \bar{y})^2}{(k-1) \sum (\hat{y}_t - y_t)^2},$$

где n – число уровней ряда;

k – число параметров уравнения тренда;

y_t – заданный уровень ряда;

$\hat{y}_t$ – вычисленные уровни ряда по уравнению тренда;

$\bar{y}$ – среднее значение уровня ряда.

Если расчетное значение критерия больше табличного ($F_p > F_t$), то расхождения между показателями ряда могут считаться существенными (F_t – Приложение 2).

Критерий Фишера оценивает статистическую значимость уравнения тренда, но не его точность. Для оценки точности замены ряда динамики уравнением тренда используется оценка погрешности, которая определяется по формуле:

$$S = \frac{1}{\bar{y}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m}},$$

где y_i и $\hat{y}_i$ – фактические и расчетные значения уровней ряда динамики;

n – число уровней ряда;

m – число параметров в уравнении тренда;

$\bar{y}$ – среднее значение уровня ряда.

6.5. Варианты задания

На основе данных, приведенных в Приложении 3, требуется в соответствии с исходными данными:

1. Провести идентификацию эконометрической модели ряда динамики – тренда (не менее двух вариантов).
2. Провести параметризацию выбранных эконометрических моделей.
3. Провести сертификацию эконометрических моделей (уравнения тренда).
4. Сделать вывод какая из рассмотренных эконометрических моделей более пригодна для практических целей.

В качестве исходных данных использовать Приложение 3. Начальные значения (номер варианта) соответствуют месяцу и году рождения студента – первое значение уровня ряда динамики. Далее необходимо скопировать 30 значений третьей колонки. Замена данных не допускается. Вариант указывается в самом начале работы.

ЗАДАНИЕ № 7

Задание: определить эконометрическую модель системы одновременных уравнений.

Цель: формирование эконометрической модели системы одновременных уравнений.

7.1. Эконометрические модели системы одновременных уравнений

Описать адекватно сложное социально-экономическое явление не всегда получается с помощью только одного соотношения (уравнения). Кроме того, некоторые переменные могут оказывать взаимные воздействия и трудно однозначно определить, какая из них является зависимой, а какая независимой переменной. Поэтому при построении эконометрической модели прибегают к системам уравнений.

Система одновременных уравнений – это система взаимосвязанных регрессионных уравнений и тождеств, в которых одни и те же переменные в различных регрессионных уравнениях могут одновременно выступать и в роли результирующих показателей, и в роли объясняющих переменных. Тем самым подчеркивается, что в системе одни и те же переменные одновременно рассматриваются как зависимые в одних уравнениях и как независимые в других. В эконометрике эта система уравнений называется также *структурной формой модели*. В отличие от предыдущих моделей каждое уравнение системы одновременных уравнений не может рассматриваться самостоятельно, и для нахождения его параметров традиционный МНК неприменим. С этой целью используются специальные приемы оценивания.

Примером системы одновременных уравнений может служить следующая гипотетическая модель:

$$\begin{cases} Y_1 = a_0 + a_1 Y_2 + a_2 X_1 + \varepsilon_1 \\ Y_2 = b_0 + b_1 Y_1 + b_2 X_2 + \varepsilon_2 \end{cases},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – случайные ошибки.

В любой эконометрической модели в зависимости от конечных прикладных целей ее использования все участвующие в ней переменные подразделяются на:

- Экзогенные (независимые) – значения которых задаются «извне», автономно, в определенной степени они являются управляемыми (планируемыми) (X);
- Эндогенные (зависимые) – значения которых определяются внутри модели, или взаимозависимые (Y).
- Лаговые – экзогенные или эндогенные переменные эконометрической модели, датированные предыдущими моментами времени и находящиеся в уравнении с текущими переменными. Например:
 y_t – текущая эндогенная переменная;

y_{t-1} – лаговая эндогенная переменная (отстоящая от текущей на 1 период назад);

y_{t-2} – тоже лаговая эндогенная переменная (отстоящая от текущей на 2 периода).

- Предопределенные переменные – переменные, определяемые вне модели. К ним относятся лаговые и текущие экзогенные переменные (x_t, x_{t-1}), а также лаговые эндогенные переменные (y_{t-1}).

Все эконометрические модели предназначены для объяснения текущих значений эндогенных переменных по значениям предопределенных переменных.

В дальнейшем для простоты будем рассматривать в качестве предопределенных переменных только текущие экзогенные переменные (x).

С математической точки зрения, главное отличие между экзогенными и эндогенными переменными заключается в том, что экзогенные переменные не коррелируют с ошибками регрессии, между тем как эндогенные могут коррелировать (и, как правило, коррелируют). Естественно предположить, что, например, схожие случайные факторы действуют как на цену равновесия, так и на спрос на товар. Причинная зависимость между переменными и приводит, очевидно, к коррелированности их со случайными членами.

Структурная форма модели – это система уравнений, отражающая взаимосвязь между переменными в соответствии с положениями экономической теории и характеризующая структуру экономики или ее сектора.

Параметры структурной формы модели называют структурными параметрами.

Если модель содержит тождества, то их можно назвать уравнениями, в которых структурные параметры при переменных равны 1.

Таким образом структурная форма модели или система одновременных уравнений – это система уравнений, в каждом из которых помимо объясняющих (независимых переменных) могут содержаться объясняемые (зависимые переменные) из других уравнений. Уравнения, составляющие исходную модель, называются структурными уравнениями модели.

Простейшая структурная форма модели имеет вид:

$$y_1 = \alpha_1 + \beta_{12}y_2 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \varepsilon_1,$$

$$y_2 = \alpha_2 + \beta_{21}y_1 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \varepsilon_2,$$

где y_1, y_2 и x_1, x_2 – зависимые и независимые переменные;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – случайные члены;

$\alpha_1, \beta_{12}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2, \beta_{21}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ – параметры модели.

Параметры структурной формы модели называются структурными коэффициентами.

Структурная форма модели включает в систему не только уравнения, отражающие взаимосвязи между отдельными переменными, но и уравнения, отражающие тенденцию развития явления – функции времени, а также разного рода уравнения-тождества. Тождества не содержат каких-либо подлежащих оценке параметров, а также не включают случайных членов.

Структурные коэффициенты можно однозначно выражать через приведенные коэффициенты, или они могут иметь несколько разных оценок, но совсем не выражаться через них.

Простейшая макроэкономическая (кейнсианская) модель:

$$\begin{cases} C_t = a + bY_t + \varepsilon_t \\ Y_t = C_t + I_t \end{cases}.$$

Здесь C и Y – потребление (потребительские расходы) и доход – эндогенные переменные модели;

I – инвестиции – экзогенная переменная модели;

b – предельная склонность к потреблению

Приведенная форма модели имеет вид:

$$\begin{cases} C_t = a/(1-b) + b/(1-b)I_t + \varepsilon_t/(1-b) = c_0 + (m-1)I_t + u_t = \pi_{11} + \pi_{12}I_t + u_t \\ Y_t = a/(1-b) + 1/(1-b)I_t + \varepsilon_t/(1-b) = c_0 + mI_t + u_t = \pi_{21} + \pi_{22}I_t + u_t \end{cases}.$$

Величина $m = \frac{1}{1-b}$ называется мультипликатором инвестиций (единица увеличения инвестиций приводит к существенно большему изменению дохода).

Следующим примером является одновременное формирование спроса Q^d и предложения Q^s товара в зависимости от его цены P :

$$\begin{cases} Q^d = \beta_1 + \beta_2 P + \beta_3 I + \varepsilon_1 \\ Q^s = \beta_4 + \beta_5 P + \varepsilon_2 \end{cases}. \quad (7.1)$$

Здесь I – доход.

Если предположить, что рынок находится в состоянии равновесия, то в равенствах (7.1) следует положить $Q^d = Q^s = Q$. В этом случае наблюдаемое значение P – это цена равновесия, которая формируется одновременно со спросом и предложением. Таким образом, можно считать P и Q объясняемыми переменными, а величину дохода I – объясняющей переменной.

Разделение ролей между переменными в системе одновременных уравнений может быть проинтерпретировано следующим образом: переменные Q и P формируют свои значения, подчиняясь уравнениям (7.1), т. е. внутри модели. Такие переменные называются эндогенными. Между тем переменная I считается в уравнениях (7.1) заданной, ее значения формируются вне модели. Такие переменные называются экзогенными.

Рассмотрим широко известную модель спроса и предложения:

$$\begin{cases} Q_D(t) = \beta_1 + \beta_2 \cdot P(t) + \beta_3 \cdot Y(t) + u_t, \\ Q_S(t) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot P(t) + \alpha_3 \cdot P(t-1) + \varepsilon_t, \\ Q_S(t) = Q_D(t), \end{cases}$$

где $Q_D(t)$ – спрос на товар в момент времени t ;

$Q_S(t)$ – предложение товара в момент времени t ;

$P(t)$ – цена товара в момент времени t ;

$Y(t)$ – доход в момент времени t .

Первое из приведенных уравнений системы называют уравнением спроса, второе – уравнением предложения, третье – уравнением равновесия. Цена товара $P(t)$ и спрос на товар:

$$Q(t) = Q_D(t) = Q_S(t)$$

определяются из уравнений системы (т. е. являются эндогенными переменными). Предопределенными переменными являются доход $Y(t)$ и значение цены товара в предыдущий момент времени $P(t-1)$.

Другим примером может служить вариант эконометрической модели Клейна, которая описывается следующими уравнениями и тождествами.

Уравнения поведения:

1. Функция потребления

$$C(t) = a_1 + a_2[W_1(t) + W_2(t)] + a_3P(t) + a_4P(t-1) + u_1(t).$$

2. Функция инвестиций

$$I(t) = b_1 + b_2P(t) + b_3P(t-1) + b_4K(t-1) + u_2(t).$$

3. Функция спроса на рабочую силу

$$W_1(t) = c_1 + c_2[Y(t) + T(t) - W_2(t)] + \\ + c_3[Y(t-1) + T(t-1) - W_2(t-1)] + c_4t + u_3(t).$$

Тождества:

1. Уравнение национального дохода

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t) - T(t).$$

2. Уравнение прибыли

$$P(t) = Y(t) - [W_1(t) + W_2(t)].$$

3. Уравнение изменения капитала

$$K(t) = K(t-1) + I(t),$$

где

эндогенные переменные:

$C(t)$ – потребление на t -ом отрезке времени;

$I(t)$ – инвестиции на t -ом отрезке времени;

$Y(t)$ – национальный доход на t -ом отрезке времени;

$P(t)$ – прибыль на t -ом отрезке времени;

$W_1(t)$ – фонд заработной платы в частном секторе на t -ом отрезке времени;

$K(t)$ – основной капитал в конце t -го отрезка времени.

экзогенные (управляющие) переменные:

$G(t)$ – правительственные заказы на t -ом отрезке времени;

$W_2(t)$ – правительственный фонд заработной платы на t -ом отрезке времени;

$T(t)$ – налог на деловую активность на t -ом отрезке времени.

Переменные u_1, u_2, u_3 – случайные возмущения модели (тоже экзогенные переменные); a, b, c – структурные параметры модели.

Эконометрическая версия модели Самуэльсона–Хикса описывается следующими уравнениями:

$$C(t) = c_1Y(t-1) + c_2Y(t-2) + e_1(t),$$

$$I(t) = b[Y(t-1) - Y(t-2)] + e_2(t),$$

$$G(t) = gY(t - 1),$$

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t),$$

где $C(t)$ – потребление;

$I(t)$ – инвестиции;

$Y(t)$ – национальный доход;

$G(t)$ – правительственные затраты;

t – текущий момент времени;

c_1 – предельная склонность к потреблению на интервале $t - 1$;

c_2 – предельная склонность к потреблению на интервале $t - 2$;

b – коэффициент акселерации;

g – коэффициент правительственных затрат, это структурные параметры модели;

e_1, e_2 – случайные возмущения.

Следует также отметить модель прогнозирования процентных ставок.

Система уравнений в эконометрических исследованиях может быть представлена по-разному. Выделяют следующие 3 вида систем уравнений.

1. Система независимых уравнений, когда каждая зависимая переменная (y) рассматривается как функция только от предопределенных переменных (x):

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + u_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + u_2 \\ \dots \\ y_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{km}x_m + u_k \end{cases}$$

2. Система рекурсивных уравнений, когда в каждом последующем уравнении системы зависимая переменная представляет функцию от зависимых и предопределенных переменных предшествующих уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + u_1 \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + u_2 \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3m}x_m + u_3 \\ \dots \\ y_k = b_{k1}y_1 + b_{k2}y_2 + \dots + b_{kk-1}y_{k-1} + a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{km}x_m + u_k \end{cases}$$

В рассмотренных 2-ух видах систем каждое уравнение может рассматриваться самостоятельно, и его параметры можно определить с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

3. Система взаимозависимых (совместных, одновременных) уравнений, когда зависимые переменные в одних уравнениях входят в левую часть (т.е. выступают в роли признаков-результатов), а в других уравнениях – в правую часть системы (т. е. выступают в роли признаков-факторов) одновременно:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + \dots + b_{1k}y_k + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + u_1 \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + \dots + b_{2k}y_k + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + u_2 \\ \dots \\ y_k = b_{k1}y_1 + b_{k2}y_2 + \dots + b_{kk-1}y_{k-1} + a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{km}x_m + u_k \end{cases}$$

Название «система одновременных уравнений» подчеркивает тот факт, что в системе одни и те же переменные одновременно рассматриваются как зависимые в одних уравнениях и как независимые в других.

7.2. Идентифицируемость и идентификация модели системы одновременных уравнений

При анализе эконометрической модели, представленной уравнением или системой уравнений, исследователя в конечном счете интересует, прежде всего, поведение экзогенных переменных. Экзогенные переменные являются по своей природе случайными величинами, поведение которых определяется внутренней структурой модели, а именно элементами и природой случайных остатков.

Идентифицируемость – это свойство, которому должна удовлетворять модель для возможности точного вывода, т. е. с минимальными случайными остатками. Остатки для регрессионных моделей находятся путем вычитания теоретического значения, предсказанного регрессионной моделью, из наблюдаемого значения для каждой записи данных. Стюдентизированный остаток вычисляется как остаток в регрессии, деленный на ее скорректированную стандартную ошибку. Модель идентифицируема, если теоретически возможно узнать истинные значения базовых параметров этой модели после получения бесконечного числа наблюдений из нее. Таким образом, под идентифицируемостью эконометрической модели понимается идентифицируемость ее параметров, ситуация, при которой все структурные параметры эконометрической модели можно определить однозначным образом на основе используемых эконометрических методов и имеющихся статистических данных. Идентифицируемость нельзя смешивать с проблемой идентификации модели, заключающейся в выборе и реализации методов статистического оценивания ее неизвестных параметров.

Идентифицируемость связана с представлением эконометрической модели в структурной или приведенной форме.

В эконометрической теории приняты следующие определения, связанные с проблемой идентифицируемости:

1. Уравнение структурной формы эконометрической модели называется точно идентифицируемым, если все участвующие в нем неизвестные (т. е. априори не заданные) коэффициенты однозначно восстанавливаются по коэффициентам приведенной формы без каких-либо ограничений на значения последних.
2. Эконометрическая модель называется точно идентифицируемой, если все уравнения ее структурной формы являются точно идентифицируемыми.
3. Уравнение структурной формы называется сверхидентифицируемым, если все участвующие в нем неизвестные коэффициенты восстанавливаются по коэффициентам приведенной формы, причем некоторые из его коэффициентов могут принимать одновременно

несколько (более одного) числовых значений, соответствующих одной и той же приведенной форме.

4. Уравнение структурной формы называется неидентифицируемым, если хотя бы один из участвующих в нем неизвестных коэффициентов не может быть восстановлен по коэффициентам приведенной формы. Соответственно модель называется неидентифицируемой, если хотя бы один из коэффициентов структурной формы является неидентифицируемым.

Пусть система одновременных уравнений включает N уравнений относительно N эндогенных переменных. Пусть в системе имеется M экзогенных (либо предопределенных) переменных. Пусть количество эндогенных и экзогенных переменных в проверяемом на идентифицируемость уравнении равно n и m соответственно. Переменные, не входящие в данное уравнение, но входящие в другие уравнения системы, назовем *исключенными переменными* (из данного уравнения). Их количество равно $N-n$ для эндогенных и $M-m$ для экзогенных переменных соответственно.

Тогда первое необходимое условие идентифицируемости – уравнение идентифицируемо, если оно исключает, по крайней мере, $N - 1$ переменную (эндогенную или экзогенную), присутствующую в модели:

$$(N - n) + (M - m) \geq N - 1.$$

Второе необходимое условие идентифицируемости – уравнение идентифицируемо, если количество исключенных из уравнения экзогенных переменных не меньше количества эндогенных переменных в этом уравнении, уменьшенном на единицу:

$$M - m \geq n - 1.$$

Знаки равенства в обоих необходимых условиях соответствуют точной идентификации уравнения. Знак «меньше» соответствует случаю неидентифицируемости, знак «больше» – сверхидентифицируемости.

Идентифицируемость модели следует начать с анализа поведения эндогенных переменных, и с этой точки зрения может показаться несущественной, более того, надуманной проблема «однозначного возврата» от приведенной формы к структурной. В эконометрике идентификация – это единственность соответствия между приведенной и структурной формами модели. С позиции идентифицируемости структурные модели можно подразделить на три вида:

- 1) идентифицируемые;
- 2) неидентифицируемые;
- 3) сверхидентифицируемые.

Модель *идентифицируема*, если все структурные ее коэффициенты определяются однозначно, единственным образом по коэффициентам приведенной формы модели, т. е. если число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели. В этом случае структурные коэффициенты модели оцениваются через параметры приведенной формы модели и модель идентифицируема.

Модель *неидентифицируема*, если число приведенных коэффициентов меньше числа структурных коэффициентов, и в результате структурные коэффициенты не могут быть оценены через коэффициенты приведенной формы модели.

Модель *сверхидентифицируема*, если число приведенных коэффициентов больше числа структурных коэффициентов. В этом случае на основе коэффициентов приведенной формы можно получить два или более значений одного структурного коэффициента. В этой модели число структурных коэффициентов меньше числа коэффициентов приведенной формы. Сверхидентифицируемая модель в отличие от неидентифицируемой модели практически решается, но требует для этого специальных методов исчисления параметров.

Структурная модель всегда представляет систему совместных уравнений, каждое из которых требуется проверять на идентификацию. Модель считается идентифицируемой, если каждое уравнение системы идентифицируемо. Если хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо, то и вся модель считается неидентифицируемой. Сверхидентифицируемая модель содержит хотя бы одно сверхидентифицируемое уравнение. Чтобы уравнение системы было идентифицируемо, необходимо, чтобы число предопределенных переменных, отсутствующих в данном уравнении, но присутствующих в системе, было равно числу эндогенных переменных в данном уравнении без одного.

Если обозначить число эндогенных переменных в уравнении i системы через H , а число экзогенных (предопределенных) переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение, – через D , то условие идентифицируемости модели может быть записано в виде следующего счетного правила:

Таблица 7.1. Счетное правило

$D + 1 = H$	уравнение идентифицируемо
$D + 1 < H$	уравнение неидентифицируемо
$D + 1 > H$	уравнение сверхидентифицируемо

Для оценки параметров структурной модели система должна быть идентифицируема или сверхидентифицируема.

Необходимое и достаточное условие идентифицируемости для модели выполняется тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из исключенных из данных уравнений переменных, но входящих в другие уравнения системы, равен $N - 1$, если в модели содержится N уравнений относительно N эндогенных переменных.

Однако в действительности исследователя могут интересовать оценочные значения коэффициентов именно структурной формы как имеющие прозрачную экономическую интерпретацию (различные эластичности, мультипликаторы и т. п.). Именно поэтому проблема идентифицируемости крайне важна с позиций выработки предложений по решению проблемы идентификации

эконометрической модели, т. е. проблемы выбора и реализации методов статистического оценивания участвующих в ней неизвестных параметров.

Идентификация модели. Идентификация – это получение математического описания или модели объекта управления. Это определение неизвестных параметров модели по исходным статистическим данным.

В зависимости от типа объекта существуют различные методы идентификации (для линейных и нелинейных, дискретных и непрерывных, стационарных и нестационарных).

Процедура идентификации

1. Классификация объекта.
2. Выбрать для определенного класса объекта настраиваемую модель, то есть модель, структуру и параметры которой можно менять в процессе идентификации.
3. Выбрать критерий (оценку) качества идентификации, характеризующий в виде функционала доступных для наблюдения переменных.
4. Выбрать алгоритм идентификации (механизм настройки модели), обеспечивающий сходимость процесса идентификации, минимум критерия качества идентификации.

Методы идентификации принято разделять на две группы:

- активная идентификация – идентификация вне контура управления;
- пассивная идентификация – идентификация в контуре управления.

При активной идентификации объект исследования выводится из условий нормальной окружающей среды (нормальный режим эксплуатации, номинальные параметры рабочего режима и т. п.). Исследования проводятся в специализированных лабораторных условиях. На входы объекта (рабочие и дополнительные) подаются тестовые сигналы специального вида. Это могут быть:

- ступенчатые и импульсные временные сигналы;
- гармонические сигналы;
- случайные воздействия с заданными параметрами.

Активную идентификацию используют при разработке новых технологий применительно к действующим промышленным объектам, в изучении новых явлений, в первоначальной разработке математической модели.

При пассивной идентификации объект функционирует в контуре управления, находится в процессе нормальной эксплуатации. На его входы поступают только естественные сигналы управления. Пассивную идентификацию используют для уточнения математической модели, для слежения за изменениями в объекте. Информация оперативно используется в системе управления объектом.

Модель не является описанием, а имитирует существенные свойства реального объекта. Решение проблемы идентификации предусматривает «настройку» записанной в общей структурной форме модели на реальные статистические данные. Другими словами, речь идет о выборе и реализации методов статистического оценивания неизвестных параметров модели по исходным статистическим данным.

7.3. Параметризация эконометрических моделей

Параметризация эконометрических моделей – это процесс определения числовых значений коэффициентов, которые описывают связь между переменными, и оценка формы связи. Если идентификация включает выбор функциональной формы (линейная, нелинейная) и определение структуры модели, то параметризация содержит оценку параметров (коэффициентов) по данным с помощью статистических методов. Этот процесс необходим для построения математического аналога реальной экономической системы.

Параметры – это числовые коэффициенты в модели, которые показывают, как изменение одной переменной влияет на другую. Оценка параметров – это процесс нахождения наилучших числовых значений для параметров модели, которые наилучшим образом соответствуют наблюдаемым данным.

Для решения идентифицируемого уравнения применяется косвенный метод наименьших квадратов, а для решения сверхидентифицированных – двухшаговый метод наименьших квадратов.

Косвенный МНК состоит в следующем:

– составляют приведенную форму модели:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + u_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + u_2 \\ \dots \\ y_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{km}x_m + u_k \end{cases}$$

и определяют численные значения параметров каждого ее уравнения обычным МНК;

– путем алгебраических преобразований переходят от приведенной формы к уравнениям структурной формы модели:

$$\begin{cases} y_1 = b_{1,2}y_2 + b_{1,3}y_3 + \dots + b_{1,k}y_k + a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m \\ y_2 = b_{2,1}y_1 + b_{2,3}y_3 + \dots + b_{2,k}y_k + a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m \\ \dots \\ y_k = b_{k,1}y_1 + b_{k,2}y_2 + \dots + b_{k,k-1}y_{k-1} + a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \dots + a_{k,m}x_m \end{cases}$$

получая тем самым численные оценки структурных параметров.

Структурная форма модели позволяет увидеть влияние изменений любой экзогенной переменной на значения эндогенной переменной.

Структурная форма модели в правой части содержит при эндогенных переменных коэффициенты $b_{i,k}$ и экзогенных переменных – коэффициенты $a_{i,j}$, которые называются структурными коэффициентами модели. Все переменные в модели выражены в отклонениях от среднего уровня, т. е. под x подразумевается $x - \bar{x}$, а под y – соответственно $y - \bar{y}$. Поэтому свободный член в каждом уравнении системы отсутствует.

Двухшаговый МНК заключается в следующем:

- 1) составление приведенной формы модели;
- 2) применение обычного МНК к каждому уравнению приведенной формы и получение численных оценок приведенных параметров;

- 3) определение расчетных значений эндогенных переменных, которые фигурируют в качестве факторов в структурной форме модели;
- 4) определение структурных параметров каждого уравнения в отдельности обычным МНК, используя в качестве факторов входящие в это уравнение предопределенные переменные и расчетные значения эндогенных переменных, полученные на шаге 1.

Рассмотрим пример.

Пусть имеется система:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u_1 \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + u_2 \\ y_3 = b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{33}x_3 + u_3 \end{cases}$$

Требуется составить приведенную форму модели, проверить каждое уравнение структурной модели на идентификацию, и предложить способ оценки параметров структурной формы модели.

Решение:

В этой системе y_1, y_2, y_3 – эндогенные переменные ($K = 3$);

x_1, x_2, x_3 – предопределенные переменные ($M = 3$).

$K - 1 = 2$; $K + M = 6$.

Составим приведенную форму модели:

$$\begin{cases} y_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + U_1 \\ y_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + U_2 \\ y_3 = A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + U_3 \end{cases}$$

Проверим, как выполняется необходимое условие идентификации для каждого уравнения.

Для 1-го уравнения имеем: $k_1 = 3$; $m_1 = 2$;

$M - m_1 = 1 < k_1 - 1 = 2$, следовательно, 1-е уравнение неидентифицировано.

Для 2-го уравнения имеем: $k_2 = 2$; $m_2 = 1$;

$M - m_2 = 2 > k_2 - 1 = 1$, следовательно, 2-е уравнение сверхидентифицировано.

Для 3-го уравнения имеем: $k_3 = 2$; $m_3 = 2$;

$M - m_3 = 1 = k_3 - 1 = 1$, следовательно, 3-е уравнение точно идентифицировано.

Рассмотрим, как выполняется достаточное условие идентификации для каждого уравнения системы. Для того, чтобы оно выполнялось необходимо, чтобы определитель матрицы A (матрицы коэффициентов при переменных, не входящих в это уравнение) был равен $K - 1 = 2$.

Составим матрицу A для 1-го уравнения системы. В 1-м уравнении отсутствует лишь одна переменная системы x_3 . Поэтому матрица A будет иметь вид:

x_3
 0 – во 2-м уравнении
 a_{33} – в 3-м уравнении

Ранг данной матрицы равен 1, что меньше $K - 1 = 2$, следовательно, 1-е уравнение модели неидентифицировано.

Составим матрицу A для 2-го уравнения системы. Во 2-м уравнении отсутствуют переменные y_3, x_2, x_3 :

$$\begin{array}{ccc} y_3 & x_2 & x_3 \\ b_{13} & a_{13} & 0 \quad - \text{ в 1-м уравнении} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \quad - \text{ в 3-м уравнении} \end{array}$$

Ранг данной матрицы равен 2, что равно $K - 1 = 2$, следовательно, 2-е уравнение модели точно идентифицировано.

Составим матрицу A для 3-го уравнения системы. В 3-м уравнении отсутствуют переменные y_1, x_2 :

$$\begin{array}{ccc} y_1 & x_2 \\ 1 & a_{12} \quad - \text{ в 1-м уравнении} \\ b_{21} & 0 \quad - \text{ во 2-м уравнении} \end{array}$$

Ранг данной матрицы равен 1, что меньше $K - 1 = 2$, следовательно, 3-е уравнение модели неидентифицировано.

Сделаем выводы: 1-е и 3-е уравнения системы неидентифицированы (т. к. не выполняются достаточные условия идентификации, а в случае 1-го уравнения и необходимое условие также). 2-е уравнение системы сверхидентифицировано. Следовательно, система в целом является неидентифицируемой.

Для оценки параметров 2-го уравнения можно применить двухшаговый МНК. Параметры 1-го и 3-го уравнений определить по коэффициентам приведенной формы нельзя. Поэтому модель должна быть модифицирована.

7.4. Спецификация эконометрических систем уравнений

Спецификация эконометрических систем уравнений – это процесс выбора и определения формы (вида) этих уравнений, которые моделируют взаимосвязи между экономическими переменными. Она включает в себя: выбор функциональной формы (линейная или нелинейная), определение набора зависимых и независимых переменных, а также формулирование статистической взаимосвязи, соответствующей экономической теории. Спецификация такой модели представляет отбор факторов, включаемых в модель, и выбор вида уравнения регрессии.

Ключевые аспекты спецификации

1. Экономическая теория: спецификация основывается на экономической теории, которая определяет, какие переменные должны быть включены в модель и какую структуру они должны иметь.
2. Выбор переменных: определение зависимых (определяемых) и независимых (факторных) переменных для построения модели.
3. Выбор функциональной формы: выбор модели (линейной или нелинейной), а также конкретной функциональной формы, например, полиномиальные или логарифмические.
4. Статистическая взаимосвязь: моделирование случайные и неучтенные факторы, влияющие на экономические процессы, за счет включения в

спецификацию статистических элементов, таких как случайные ошибки.

5. Количественный анализ: проведение количественного анализа, чтобы оценить параметры модели, минимизируя целевую функцию и проверяя статистическую значимость коэффициентов.
6. Сложность системы: эконометрическая система уравнений, включая несколько взаимозависимых уравнений, позволяет более системно моделировать экономические явления и взаимосвязи между ними.

Спецификация эконометрических систем уравнений – это процесс определения взаимосвязей между несколькими экономическими переменными, которые влияют друг на друга одновременно. В отличие от одноуравненных моделей, где зависимая переменная определяется только независимыми факторами, в системах уравнений эндогенные (объясняемые) переменные могут выступать в качестве объясняющих для других эндогенных переменных.

Принципы спецификации эконометрических моделей:

- 1) эконометрические утверждения и закономерности должны быть формализованы (представлены в виде уравнений, формул), а спецификация – это результат математической формализации экономических закономерностей;
- 2) количество эндогенных переменных в эконометрической модели должно быть равно числу уравнений;
- 3) датирование экономических переменных, т. е. переменные должны быть привязаны к определенному периоду времени (датированы);
- 4) включение случайных возмущений (величин), т. е. модель должна включать параметр случайной ошибки для характеристики влияния случайных факторов.

7.5. Варианты задания

На основе данных, приведенных в таблице 7.2 и соответствующих Вашему варианту (таблица 7.3), провести идентификацию модели и описать процедуру оценивания параметров уравнений структурной формы модели.

Таблица 7.2

Уравнение	Вариант уравнения	Коэффициенты перед регрессорами				
		y2	y3	x1	x2	x3
y1	1	0	0	a ₁₁	a ₂₁	a ₃₁
	2	0	b ₃₁	0	a ₂₁	a ₃₁
	3	0	b ₃₁	a ₁₁	a ₂₁	0
	4	0	b ₃₁	a ₁₁	0	a ₃₁
	5	b ₂₁	b ₃₁	a ₁₁	0	a ₃₁

Уравнение	Вариант уравнения	Коэффициенты перед регрессорами				
		y1	y3	x1	x2	x3
y2	1	b ₁₂	b ₃₂	0	0	a ₃₂
	2	b ₁₂	0	a ₁₂	a ₂₂	0
	3	0	b ₃₂	a ₁₂	a ₂₂	a ₃₂
	4	b ₁₂	b ₃₂	a ₁₂	a ₂₂	0
	5	b ₁₂	b ₃₂	0	a ₂₂	a ₃₂
		y1	y2	x1	x2	x3
y3	1	b ₁₃	b ₂₃	a ₁₃	0	0
	2	b ₁₃	0	0	a ₂₃	a ₃₃
	3	b ₁₃	0	a ₁₃	0	a ₃₃
	4	b ₁₃	0	a ₁₃	a ₂₃	a ₃₃

Таблица 7.3

№ варианта контрольной работы	Уравнение			№ варианта контрольной работы	Уравнение		
	y1	y2	y3		y1	y2	y3
1	2	3	4	5	6	7	8
0	y11	y21	y31	50	y13	y23	y33
1	y11	y21	y32	51	y13	y23	y34
2	y11	y21	y33	52	y13	y24	y31
3	y11	y21	y34	53	y13	y24	y32
4	y11	y22	y31	54	y13	y24	y33
5	y11	y22	y32	55	y13	y24	y34
6	y11	y22	y33	56	y13	y25	y31
7	y11	y22	y34	57	y13	y25	y32
8	y11	y23	y31	58	y13	y25	y33
9	y11	y23	y32	59	y13	y25	y34
10	y11	y23	y33	60	y14	y21	y31
11	y11	y23	y34	61	y14	y21	y32
12	y11	y24	y31	62	y14	y21	y33
13	y11	y24	y32	63	y14	y21	y34
14	y11	y24	y33	64	y14	y22	y31
15	y11	y24	y34	65	y14	y22	y32
16	y11	y25	y31	66	y14	y22	y33
17	y11	y25	y32	67	y14	y22	y34
18	y11	y25	y33	68	y14	y23	y31
19	y11	y25	y34	69	y14	y23	y32
20	y12	y21	y31	70	y14	y23	y33
21	y12	y21	y32	71	y14	y23	y34
22	y12	y21	y33	72	y14	y24	y31
23	y12	y21	y34	73	y14	y24	y32
24	y12	y22	y31	74	y14	y24	y33
25	y12	y22	y32	75	y14	y24	y34
26	y12	y22	y33	76	y14	y25	y31
27	y12	y22	y34	77	y14	y25	y32

1	2	3	4	5	6	7	8
28	y12	y23	y31	78	y14	y25	y33
29	y12	y23	y32	79	y14	y25	y34
30	y12	y23	y33	80	y15	y21	y31
31	y12	y23	y34	81	y15	y21	y32
32	y12	y24	y31	82	y15	y21	y33
33	y12	y24	y32	83	y15	y21	y34
34	y12	y24	y33	84	y15	y22	y31
35	y12	y24	y34	85	y15	y22	y32
36	y12	y25	y31	86	y15	y22	y33
37	y12	y25	y32	87	y15	y22	y34
38	y12	y25	y33	88	y15	y23	y31
39	y12	y25	y34	89	y15	y23	y32
40	y13	y21	y31	90	y15	y23	y33
41	y13	y21	y32	91	y15	y23	y34
42	y13	y21	y33	92	y15	y24	y31
43	y13	y21	y34	93	y15	y24	y32
44	y13	y22	y31	94	y15	y24	y33
45	y13	y22	y32	95	y15	y24	y34
46	y13	y22	y33	96	y15	y25	y31
47	y13	y22	y34	97	y15	y25	y32
48	y13	y23	y31	98	y15	y25	y33
49	y13	y23	y32	99	y15	y25	y34

Эконометрическая модель содержит три уравнения. Количество эндогенных переменных (y), экзогенных переменных (x) и вид уравнения определяются вариантом контрольной работы (таблицы 7.2 и 7.3).

Например, для варианта № 1 (номер зачетной книжки заканчивается на 01) формируется система уравнений, содержащая уравнения y_{11} (1-й вариант, соответствующий уравнению y_1), y_{21} (1-й вариант, соответствующий уравнению y_2), y_{32} (2-й вариант, соответствующий уравнению y_3) (см. таблицу 7.2). В результате из таблицы 7.2 формируем новую таблицу 7.4 коэффициентов при переменных, в соответствии с вариантом.

Таблица 7.4

	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3
y_{11}	0	0	a_{11}	a_{21}	a_{31}
	y_1	y_3	x_1	x_2	x_3
y_{21}	b_{12}	b_{32}	0	0	a_{32}
	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3
y_{32}	b_{13}	0	0	a_{23}	a_{33}

Таким образом, окончательно система уравнений, соответствующая варианту 01, примет вид:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{21} \cdot x_2 + a_{31} \cdot x_3 \\
 y_2 &= b_{12} \cdot y_1 + b_{32} \cdot y_3 + a_{32} \cdot x_3 \\
 y_3 &= b_{13} \cdot y_1 + a_{23} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3.
 \end{aligned}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная:

1. Доугерти, К. Введение в эконометрику / К. Доугерти; пер. с англ. Е. Н. Лукаш и др. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 401 с.
2. Практикум по эконометрике / И. И. Елисеева, С. В. Курышева, Н. М. Гордеенко и др.; под ред. И. И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 192 с.
3. Эконометрика: учеб. для студентов вузов / Под ред. И. И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 574 с.

Дополнительная:

4. Айвазян, С. А. Прикладная статистика и эконометрика: учебник для вузов / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
5. Эконометрика: сборник задач / Н. В. Добрынина, И. Н. Ниमेंья, Л. И. Курова. – СПб: Изд-во СПбГИЭУ, 2007. – 107 с.
6. Шимко, П. Д. Статистика: учеб. пособие / П. Д. Шимко, М. П. Власов. – Ростов н/Д, 2003. – 448 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Показатели деятельности предприятий за 20... год

№ наблюдений	Собственные оборотные средства, млн руб.	Балансовая прибыль, млн руб.	Дебиторская задолженность, млн руб.	Дивиденды, начисленные по результатам деятельности, млн руб.	Курсовая цена акции, руб.
<i>A</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
1	1011	107	37	20,33	92
2	799	102	64	20,04	83
3	995	107	71	19,87	95
4	1243	122	26	20,48	124
5	1507	108	51	20,13	96
6	947	108	41	20,26	106
7	1015	97	78	19,89	70
8	1169	109	43	19,92	97
9	1051	101	68	19,78	76
10	1372	116	34	20,23	112
11	1463	113	49	20,46	113
12	684	112	40	20,07	109
13	1251	106	56	20,23	91
14	1376	111	45	20,26	95
15	1193	113	44	20,28	115
16	1386	122	40	20,52	114
17	1631	118	47	20,28	133
18	1735	119	47	19,97	116
19	1181	102	49	19,97	85
20	922	100	65	19,57	91
21	1281	103	54	19,94	82
22	1333	113	59	20,29	105
23	1632	124	36	20,83	124
24	635	95	70	19,59	70
25	949	102	64	19,76	84
26	788	112	48	20,19	106
27	1728	124	30	20,66	128
28	1773	116	58	19,95	105
29	1679	118	48	20,61	121
30	1085	100	69	20,03	79
31	1214	99	58	19,78	82
32	1422	107	49	20,22	80
33	523	87	76	19,78	37
34	1025	109	59	20,09	101
35	1083	106	74	20,13	98

<i>A</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
36	1466	113	54	20,56	98
37	1642	123	36	20,51	134
38	387	82	75	19,71	39
39	704	104	51	20,10	88
40	1177	112	35	20,32	108
41	1792	116	47	20,37	112
42	2072	106	33	20,03	80
43	1178	120	28	20,65	120
44	1304	105	58	20,19	88
45	1308	114	32	20,24	104
46	1416	107	58	20,27	94
47	1185	115	44	20,69	107
48	1220	96	68	19,85	82
49	1311	104	64	19,87	84
50	1288	108	25	20,20	101
51	918	102	54	20,33	98
52	809	102	70	20,20	89
53	1188	120	19	20,46	118
54	1394	106	28	20,17	90
55	1435	114	54	20,62	123
56	1514	112	48	19,79	107
57	1577	112	44	20,34	97
58	1579	122	39	20,51	126
59	1210	122	26	20,04	147
60	1448	108	58	20,39	88
61	1468	114	28	20,27	111
62	1661	113	47	20,06	121
63	989	108	58	20,39	104
64	1007	102	62	19,94	63
65	1030	112	62	19,95	99
66	1099	113	42	20,23	114
67	1197	110	67	20,49	99
68	1386	107	72	20,61	94
69	1498	117	45	20,56	124
70	1672	120	35	20,42	117
71	484	93	69	19,73	64
72	1060	89	62	19,42	52
73	1612	118	36	20,17	114
74	1120	103	42	19,87	78
75	947	98	52	20,26	85

<i>A</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
76	1102	95	56	20,04	57
77	1302	106	66	20,34	98
78	1477	123	32	20,63	119
79	820	110	68	20,32	94
80	1231	104	47	20,06	94
81	1311	103	59	20,04	83
82	1843	122	29	20,62	118
83	1215	114	36	20,53	116
84	1284	112	57	20,18	96
85	1336	115	54	20,40	117
86	1412	109	60	20,26	93
87	1447	108	45	19,79	81
88	1593	114	54	20,33	103
89	1663	107	49	20,24	86
90	1114	98	81	19,83	79
91	863	104	61	19,97	92
92	932	107	49	20,10	85
93	978	105	68	20,01	89
94	1621	123	53	20,21	121
95	1199	119	39	20,40	125
96	999	95	49	19,66	69
97	935	93	76	19,37	61
98	1494	120	48	20,25	116
99	817	98	72	19,82	82

Приложение 2

Значение критерия Фишера при уровне значимости $P = 0,05$
для числа степеней свободы K_1 и K_2

K_2	K_1											
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	>50
1	161,40	199,50	215,70	224,60	230,20	234,00	238,90	243,90	246,50	249,00	251,80	254,30
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,23
8	5,32	4,48	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,02	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,29	2,19	2,08	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,25	2,15	2,04	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,21	2,11	2,00	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,08	1,96	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,15	2,05	1,93	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,13	2,03	1,91	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,11	2,00	1,88	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	2,09	1,98	1,86	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	2,07	1,96	1,84	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	2,05	1,95	1,82	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	2,03	1,93	1,80	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	2,02	1,91	1,78	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	2,00	1,90	1,77	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,94	1,83	1,70	1,57
40	4,08	5,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,51

45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,87	1,76	1,63	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,81	1,70	1,56	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,79	1,67	1,53	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,77	1,65	1,51	1,32
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,76	1,64	1,49	1,30
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,28
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,72	1,60	1,45	1,25
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,71	1,59	1,44	1,22
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,69	1,57	1,42	1,19
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,68	1,55	1,39	1,15
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,67	1,54	1,38	1,13
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,66	1,54	1,38	1,11
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,65	1,53	1,36	1,08
>1000	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

Приложение № 3

Цена золота по годам за грамм и тройскую унцию на бирже в \$

Период, месяц, год	Средняя цена золота за месяц	
	за тр. унцию, \$	за грамм, \$
01.10.2025	3 961,65	127,37
01.09.2025	3 873,20	124,53
01.08.2025	3 502,80	112,62
01.07.2025	3 321,10	106,78
01.06.2025	3 322,30	106,82
01.05.2025	3 330,10	107,07
01.04.2025	3 374,70	108,50
01.03.2025	3 135,60	100,81
01.02.2025	2 862,20	92,02
01.01.2025	2 835,00	91,73
01.12.2024	2 653,30	84,91
01.11.2024	2 681,00	86,20
01.10.2024	2 761,60	88,78
01.09.2024	2 659,40	85,50
01.08.2024	2 516,00	80,89
01.07.2024	2 449,30	78,76
01.06.2024	2 350,90	75,59
01.05.2024	2 333,90	75,05
01.04.2024	2 302,90	74,05
01.03.2024	2 227,10	71,61
01.02.2024	2 054,70	66,15
01.01.2024	2 057,40	66,15
01.12.2023	2 071,80	66,62
01.11.2023	2 038,10	63,23
01.10.2023	1 994,40	64,13
01.09.2023	1 885,40	60,62
01.08.2023	1 965,90	63,21
01.07.2023	2 009,20	64,60
01.06.2023	1 929,40	62,04
01.05.2023	1 982,10	63,73
01.04.2023	2 018,30	64,90
01.03.2023	2 004,10	64,44
01.02.2023	1 853,20	59,59
01.01.2023	1 962,20	63,09
01.12.2022	1 842,20	59,23
01.11.2022	1 775,10	57,08
01.10.2022	1 640,70	52,76
01.09.2022	1 672,00	53,76
01.08.2022	1 721,40	55,35
01.07.2022	1 771,50	56,96
01.06.2022	1 812,00	58,26
01.05.2022	1 848,40	59,43
01.04.2022	1 915,10	61,58
01.03.2022	1 954,00	62,83
01.02.2022	1 902,20	61,16
01.01.2022	1 796,40	57,76

01.12.2021	1 829,70	58,83
01.11.2021	1 776,50	57,12
01.10.2021	1 784,90	57,39
01.09.2021	1 757,00	56,50
01.08.2021	1 816,90	58,42
01.07.2021	1 814,50	58,34
01.06.2021	1 772,40	56,99
01.05.2021	1 905,30	61,26
01.04.2021	1 768,60	56,87
01.03.2021	1 715,60	55,16
01.02.2021	1 730,10	55,63
01.01.2021	1 850,30	59,50
01.12.2020	1 897,30	61,01
01.11.2020	1 780,90	57,26
01.10.2020	1 883,50	60,56
01.09.2020	1 895,50	60,95
01.08.2020	1 974,50	63,49
01.07.2020	1 973,90	63,47
01.06.2020	1 805,20	58,05
01.05.2020	1 751,70	56,32
01.04.2020	1 697,10	54,57
01.03.2020	1 596,60	51,34
01.02.2020	1 569,30	50,46
01.01.2020	1 587,90	51,06
01.12.2019	1 526,50	49,08
01.11.2019	1 472,70	47,35
01.10.2019	1 518,30	48,82
01.09.2019	1 472,90	47,36
01.08.2019	1 526,20	49,07
01.07.2019	1 431,80	46,04
01.06.2019	1 416,70	45,55
01.05.2019	1 311,10	42,16
01.04.2019	1 288,60	41,43
01.03.2019	1 298,50	41,75
01.02.2019	1 319,40	42,42
01.01.2019	1 325,20	42,61
01.12.2018	1 284,50	41,30
01.11.2018	1 226,00	39,42
01.10.2018	1 218,00	39,16
01.09.2018	1 196,20	38,46
01.08.2018	1 204,10	38,72
01.07.2018	1 228,50	39,50
01.06.2018	1 257,30	40,43
01.05.2018	1 304,70	41,95
01.04.2018	1 322,30	42,52
01.03.2018	1 327,30	42,68
01.02.2018	1 320,60	42,46
01.01.2018	1 343,10	43,19
01.12.2017	1 311,40	42,17
01.11.2017	1 276,70	41,05
01.10.2017	1 272,40	40,91

01.09.2017	1 284,80	41,31
01.08.2017	1 320,40	42,46
01.07.2017	1 270,10	40,84
01.06.2017	1 244,10	40,00
01.05.2017	1 275,40	41,01
01.04.2017	1 270,00	40,84
01.03.2017	1 251,20	40,23
01.02.2017	1 255,40	40,37
01.01.2017	1 211,40	38,95
01.12.2016	1 152,90	37,07
01.11.2016	1 173,90	37,75
01.10.2016	1 275,10	41,00
01.09.2016	1 317,10	42,35
01.08.2016	1 309,60	42,11
01.07.2016	1 353,10	43,51
01.06.2016	1 322,00	42,51
01.05.2016	1 217,50	39,15
01.04.2016	1 291,50	41,53
01.03.2016	1 235,60	39,73
01.02.2016	1 234,70	39,70
01.01.2016	1 116,40	35,90
01.12.2015	1 060,50	34,10
01.11.2015	1 065,30	34,25
01.10.2015	1 141,80	36,71
01.09.2015	1 115,20	35,86
01.08.2015	1 132,20	36,41
01.07.2015	1 094,70	35,20
01.06.2015	1 172,30	37,69
01.05.2015	1 189,80	38,26
01.04.2015	1 182,90	38,04
01.03.2015	1 183,20	38,05
01.02.2015	1 213,50	39,02
01.01.2015	1 279,20	41,13
01.12.2014	1 184,50	38,09
01.11.2014	1 175,50	37,80
01.10.2014	1 172,00	37,68
01.09.2014	1 211,60	38,96
01.08.2014	1 287,20	41,39
01.07.2014	1 281,90	41,22
01.06.2014	1 322,10	42,51
01.05.2014	1 246,00	40,06
01.04.2014	1 296,00	41,67
01.03.2014	1 283,80	41,28
01.02.2014	1 321,70	42,50
01.01.2014	1 239,80	39,86
01.12.2013	1 202,60	38,67
01.11.2013	1 250,40	40,21
01.10.2013	1 324,10	42,58
01.09.2013	1 327,00	42,67
01.08.2013	1 395,90	44,88
01.07.2013	1 312,60	42,21

01.06.2013	1 224,20	39,36
01.05.2013	1 393,00	44,79
01.04.2013	1 472,70	47,35
01.03.2013	1 595,70	51,31
01.02.2013	1 578,90	50,77
01.01.2013	1 662,00	53,44
01.12.2012	1 676,90	53,92
01.11.2012	1 712,70	55,07
01.10.2012	1 720,20	55,31
01.09.2012	1 773,90	57,04
01.08.2012	1 686,40	54,23
01.07.2012	1 612,40	51,85
01.06.2012	1 605,30	51,62
01.05.2012	1 564,20	50,30
01.04.2012	1 665,30	53,55
01.03.2012	1 671,90	53,76
01.02.2012	1 712,60	55,07
01.01.2012	1 740,40	55,96
01.12.2011	1 568,00	50,42
01.11.2011	1 750,30	56,28
01.10.2011	1 726,20	55,50
01.09.2011	1 622,30	52,16
01.08.2011	1 830,30	58,85
01.07.2011	1 629,90	52,41
01.06.2011	1 503,30	48,34
01.05.2011	1 536,80	49,41
01.04.2011	1 557,00	50,06
01.03.2011	1 439,90	46,30
01.02.2011	1 410,60	45,36
01.01.2011	1 334,50	42,91
01.12.2010	1 422,50	45,74
01.11.2010	1 386,10	44,57
01.10.2010	1 358,70	43,69
01.09.2010	1 309,60	42,11
01.08.2010	1 249,60	40,18
01.07.2010	1 182,40	38,02
01.06.2010	1 246,90	40,09
01.05.2010	1 215,00	39,07
01.04.2010	1 181,40	37,99
01.03.2010	1 114,50	35,84
01.02.2010	1 119,50	36,00
01.01.2010	1 083,80	34,85
01.12.2009	1 096,90	35,27
01.11.2009	1 182,30	38,02
01.10.2009	1 040,90	33,47
01.09.2009	1 009,30	32,45
01.08.2009	952,80	30,64
01.07.2009	954,50	30,69
01.06.2009	928,10	29,84
01.05.2009	980,30	31,52
01.04.2009	892,00	28,68

01.03.2009	925,00	29,74
01.02.2009	943,50	30,34
01.01.2009	928,40	29,85
01.12.2008	884,80	28,45
01.11.2008	819,00	26,33
01.10.2008	718,90	23,12
01.09.2008	880,80	28,32
01.08.2008	833,20	26,79
01.07.2008	918,00	29,52
01.06.2008	930,60	29,92
01.05.2008	891,50	28,67
01.04.2008	867,20	27,88
01.03.2008	921,50	29,63
01.02.2008	977,50	31,43
01.01.2008	928,00	29,84
01.12.2007	841,20	27,05
01.11.2007	789,10	25,37
01.10.2007	798,50	25,68
01.09.2007	750,00	24,12
01.08.2007	678,80	21,83
01.07.2007	673,00	21,64
01.06.2007	653,90	21,03
01.05.2007	666,70	21,44
01.04.2007	686,70	22,08
01.03.2007	669,00	21,51
01.02.2007	675,60	21,72
01.01.2007	657,90	21,15
01.12.2006	641,10	20,61
01.11.2006	652,90	20,99
01.10.2006	609,80	19,61
01.09.2006	604,20	19,43
01.08.2006	631,20	20,30
01.07.2006	640,40	20,59
01.06.2006	619,30	19,91
01.05.2006	649,00	20,87
01.04.2006	657,70	21,15
01.03.2006	586,70	18,86
01.02.2006	566,50	18,22
01.01.2006	575,50	18,50
01.12.2005	521,20	16,76
01.11.2005	498,70	16,04
01.10.2005	468,80	15,07
01.09.2005	472,30	15,19
01.08.2005	436,60	14,04
01.07.2005	432,80	13,92
01.06.2005	438,60	14,10
01.05.2005	418,90	13,47
01.04.2005	437,40	14,06
01.03.2005	431,10	13,86
01.02.2005	438,80	14,11
01.01.2005	424,10	13,64

01.12.2004	439,40	14,13
01.11.2004	453,20	14,57
01.10.2004	430,30	13,84
01.09.2004	420,40	13,52
01.08.2004	411,70	13,24
01.07.2004	392,40	12,62
01.06.2004	393,60	12,66
01.05.2004	394,90	12,70
01.04.2004	388,00	12,48
01.03.2004	428,30	13,77
01.02.2004	397,30	12,77
01.01.2004	402,90	12,95
01.12.2003	416,60	13,40
01.11.2003	398,00	12,80
01.10.2003	385,10	12,38
01.09.2003	386,10	12,41
01.08.2003	376,30	12,10
01.07.2003	355,00	11,41
01.06.2003	346,70	11,15
01.05.2003	365,60	11,76
01.04.2003	339,80	10,93
01.03.2003	336,90	10,83
01.02.2003	350,70	11,28
01.01.2003	369,10	11,87
01.12.2002	348,60	11,21
01.11.2002	317,80	10,22
01.10.2002	318,80	10,25
01.09.2002	325,20	10,46
01.08.2002	313,30	10,07
01.07.2002	304,20	9,78
01.06.2002	314,40	10,11
01.05.2002	327,50	10,53
01.04.2002	309,80	9,96
01.03.2002	303,70	9,77
01.02.2002	297,60	9,57
01.01.2002	282,90	9,10
01.12.2001	279,30	8,98
01.11.2001	274,90	8,84
01.10.2001	280,80	9,03
01.09.2001	294,00	9,45
01.08.2001	275,80	8,87
01.07.2001	267,90	8,61
01.06.2001	272,00	8,75
01.05.2001	266,90	8,58
01.04.2001	264,90	8,52
01.03.2001	259,20	8,33
01.02.2001	268,90	8,65
01.01.2001	268,00	8,62
01.12.2000	274,90	8,84
01.11.2000	273,30	8,79
01.10.2000	267,70	8,61

01.09.2000	276,90	8,90
01.08.2000	280,80	9,03
01.07.2000	280,20	9,01
01.06.2000	293,00	9,42
01.05.2000	274,80	8,84
01.04.2000	276,00	8,87
01.03.2000	281,40	9,05
01.02.2000	295,40	9,50
01.01.2000	286,20	9,20
01.12.1999	290,70	9,35
01.11.1999	293,00	9,42
01.10.1999	301,00	9,68
01.09.1999	299,50	9,63
01.08.1999	257,00	8,26
01.07.1999	257,60	8,28
01.06.1999	264,30	8,50
01.05.1999	272,00	8,75
01.04.1999	288,70	9,28
01.03.1999	281,90	9,06
01.02.1999	289,20	9,30
01.01.1999	288,20	9,27
01.12.1998	290,20	9,33
01.11.1998	295,10	9,49
01.10.1998	294,70	9,48
01.09.1998	299,00	9,61
01.08.1998	277,60	8,93
01.07.1998	288,40	9,27
01.06.1998	299,20	9,62
01.05.1998	295,10	9,49
01.04.1998	309,00	9,94
01.03.1998	303,30	9,75
01.02.1998	301,00	9,68
01.01.1998	304,60	9,79
01.12.1997	290,70	9,35
01.11.1997	298,60	9,60
01.10.1997	313,20	10,07
01.09.1997	336,90	10,83
01.08.1997	326,40	10,50
01.07.1997	326,50	10,50
01.06.1997	336,50	10,82
01.05.1997	347,50	11,17
01.04.1997	342,40	11,01
01.03.1997	354,00	11,38
01.02.1997	366,20	11,77
01.01.1997	346,00	11,13
01.12.1996	370,30	11,91
01.11.1996	375,00	12,06
01.10.1996	380,10	12,22
01.09.1996	380,50	12,23
01.08.1996	391,30	12,58
01.07.1996	390,50	12,56

01.06.1996	382,90	12,31
01.05.1996	394,40	12,68
01.04.1996	394,70	12,69
01.03.1996	398,40	12,81
01.02.1996	402,50	12,94
01.01.1996	408,50	13,14
01.12.1995	389,10	12,51
01.11.1995	388,60	12,50
01.10.1995	385,30	12,39
01.09.1995	386,50	12,43
01.08.1995	385,50	12,40
01.07.1995	385,40	12,39
01.06.1995	387,30	12,45
01.05.1995	387,60	12,46
01.04.1995	390,10	12,54
01.03.1995	394,30	12,68
01.02.1995	379,80	12,21
01.01.1995	377,70	12,14
01.12.1994	386,40	12,42
01.11.1994	384,50	12,36
01.10.1994	386,60	12,43
01.09.1994	397,60	12,78
01.08.1994	389,30	12,52
01.07.1994	386,10	12,41
01.06.1994	388,80	12,50
01.05.1994	390,00	12,54
01.04.1994	379,10	12,19
01.03.1994	394,30	12,68
01.02.1994	383,50	12,33
01.01.1994	383,60	12,33
01.12.1993	392,80	12,63
01.11.1993	371,90	11,96
01.10.1993	370,50	11,91
01.09.1993	357,10	11,48
01.08.1993	374,80	12,05
01.07.1993	409,20	13,16
01.06.1993	380,20	12,23
01.05.1993	380,30	12,23
01.04.1993	357,90	11,51
01.03.1993	339,30	10,91
01.02.1993	331,20	10,65
01.01.1993	330,70	10,63
01.12.1992	333,60	10,73
01.11.1992	335,50	10,79
01.10.1992	340,80	10,96
01.09.1992	349,40	11,23
01.08.1992	344,40	11,07
01.07.1992	359,40	11,56
01.06.1992	345,30	11,10
01.05.1992	338,40	10,88
01.04.1992	338,80	10,89

01.03.1992	345,50	11,11
01.02.1992	355,20	11,42
01.01.1992	358,90	11,54
01.12.1991	356,30	11,46
01.11.1991	371,10	11,93
01.10.1991	360,90	11,60
01.09.1991	357,30	11,49
01.08.1991	351,30	11,30
01.07.1991	367,20	11,81
01.06.1991	371,70	11,95
01.05.1991	364,80	11,73
01.04.1991	359,50	11,56
01.03.1991	359,40	11,56
01.02.1991	370,70	11,92
01.01.1991	368,50	11,85
01.12.1990	397,80	12,79
01.11.1990	385,70	12,40
01.10.1990	383,30	12,32
01.09.1990	408,10	13,12
01.08.1990	386,90	12,44
01.07.1990	374,60	12,05
01.06.1990	362,00	11,64
01.05.1990	368,60	11,85
01.04.1990	373,80	12,02
01.03.1990	375,00	12,06
01.02.1990	411,80	13,24
01.01.1990	417,80	13,43
01.12.1989	407,60	13,11
01.11.1989	417,50	13,42
01.10.1989	379,70	12,21
01.09.1989	372,00	11,96
01.08.1989	363,60	11,69
01.07.1989	374,70	12,05
01.06.1989	379,30	12,20
01.05.1989	366,50	11,78
01.04.1989	382,70	12,31
01.03.1989	390,00	12,54
01.02.1989	392,90	12,63
01.01.1989	395,80	12,73
01.12.1988	414,80	13,34
01.11.1988	429,60	13,81
01.10.1988	417,60	13,43
01.09.1988	399,20	12,84
01.08.1988	437,00	14,05
01.07.1988	441,70	14,20
01.06.1988	440,20	14,15
01.05.1988	459,80	14,78
01.04.1988	457,00	14,69
01.03.1988	457,90	14,72
01.02.1988	435,80	14,01
01.01.1988	458,50	14,74

01.12.1987	488,90	15,72
01.11.1987	497,20	15,99
01.10.1987	477,20	15,34
01.09.1987	458,80	14,75
01.08.1987	456,00	14,66
01.07.1987	469,50	15,10
01.06.1987	454,80	14,62
01.05.1987	456,00	14,66
01.04.1987	459,20	14,77
01.03.1987	422,70	13,59
01.02.1987	409,40	13,16
01.01.1987	408,90	13,15
01.12.1986	408,00	13,12
01.11.1986	394,80	12,69
01.10.1986	407,10	13,09
01.09.1986	429,80	13,82
01.08.1986	393,30	12,65
01.07.1986	366,30	11,78
01.06.1986	350,70	11,28
01.05.1986	347,10	11,16
01.04.1986	349,70	11,24
01.03.1986	334,80	10,77
01.02.1986	342,80	11,02
01.01.1986	352,90	11,35
01.12.1985	332,90	10,70
01.11.1985	327,30	10,52
01.10.1985	328,70	10,57
01.09.1985	327,10	10,52
01.08.1985	337,60	10,86
01.07.1985	331,00	10,64
01.06.1985	321,30	10,33
01.05.1985	319,50	10,27
01.04.1985	320,70	10,31
01.03.1985	334,10	10,74
01.02.1985	290,80	9,35
01.01.1985	307,40	9,88
01.12.1984	311,70	10,02
01.11.1984	333,50	10,72
01.10.1984	338,80	10,89
01.09.1984	351,30	11,30
01.08.1984	351,20	11,29
01.07.1984	343,50	11,05
01.06.1984	379,80	12,21
01.05.1984	393,60	12,66
01.04.1984	383,30	12,32
01.03.1984	394,30	12,68
01.02.1984	402,10	12,93
01.01.1984	379,20	12,19
01.12.1983	391,30	12,58
01.11.1983	409,00	13,15
01.10.1983	382,00	12,28

01.09.1983	407,80	13,11
01.08.1983	421,20	13,54
01.07.1983	420,00	13,50
01.06.1983	421,90	13,57
01.05.1983	418,50	13,46
01.04.1983	436,80	14,05
01.03.1983	422,00	13,57
01.02.1983	427,10	13,73
01.01.1983	518,20	16,66
01.12.1982	456,30	14,67
01.11.1982	449,00	14,44
01.10.1982	429,50	13,81
01.09.1982	404,80	13,02
01.08.1982	418,50	13,46
01.07.1982	348,60	11,21
01.06.1982	321,70	10,34
01.05.1982	329,00	10,58
01.04.1982	354,20	11,39
01.03.1982	334,20	10,75
01.02.1982	368,50	11,85
01.01.1982	391,80	12,60
01.12.1981	406,60	13,07
01.11.1981	413,30	13,29
01.10.1981	436,30	14,03
01.09.1981	443,00	14,24
01.08.1981	437,30	14,06
01.07.1981	413,00	13,28
01.06.1981	433,80	13,95
01.05.1981	492,50	15,84
01.04.1981	495,00	15,92
01.03.1981	525,50	16,90
01.02.1981	493,00	15,85
01.01.1981	512,50	16,48
01.12.1980	607,80	19,54
01.11.1980	644,50	20,72
01.10.1980	650,50	20,92
01.09.1980	688,50	22,14
01.08.1980	648,80	20,86
01.07.1980	629,50	20,24
01.06.1980	660,20	21,23
01.05.1980	555,00	17,85
01.04.1980	513,20	16,50
01.03.1980	519,00	16,69
01.02.1980	651,00	20,93
01.01.1980	704,00	22,64
01.12.1979	549,40	17,67
01.11.1979	430,50	13,84
01.10.1979	395,50	12,72
01.09.1979	420,90	13,53
01.08.1979	338,60	10,89
01.07.1979	308,20	9,91

01.06.1979	302,50	9,73
01.05.1979	300,30	9,66
01.04.1979	271,20	8,72
01.03.1979	265,40	8,53
01.02.1979	281,20	9,04
01.01.1979	261,80	8,42
01.12.1978	258,60	8,32
01.11.1978	222,50	7,15
01.10.1978	276,40	8,89
01.09.1978	250,80	8,06
01.08.1978	237,80	7,65
01.07.1978	237,30	7,63
01.06.1978	214,20	6,89
01.05.1978	217,40	6,99
01.04.1978	170,60	5,49
01.03.1978	186,20	5,99
01.02.1978	184,40	5,93
01.01.1978	178,90	5,75
01.12.1977	167,50	5,39
01.11.1977	162,30	5,22
01.10.1977	162,70	5,23
01.09.1977	156,40	5,03
01.08.1977	148,10	4,76
01.07.1977	147,10	4,73
01.06.1977	143,60	4,62
01.05.1977	144,30	4,64
01.04.1977	148,00	4,76
01.03.1977	151,00	4,86
01.02.1977	144,60	4,65
01.01.1977	134,00	4,31
01.12.1976	135,70	4,36
01.11.1976	132,60	4,26
01.10.1976	123,80	3,98
01.09.1976	116,10	3,73
01.08.1976	103,20	3,32
01.07.1976	114,20	3,67
01.06.1976	123,90	3,98
01.05.1976	127,30	4,09
01.04.1976	128,90	4,14
01.03.1976	129,70	4,17
01.02.1976	132,60	4,26
01.01.1976	129,00	4,15
01.12.1975	141,00	4,53
01.11.1975	138,80	4,46
01.10.1975	142,80	4,59
01.09.1975	142,20	4,57
01.08.1975	162,80	5,23
01.07.1975	173,40	5,58
01.06.1975	167,80	5,40
01.05.1975	169,00	5,43
01.04.1975	166,80	5,36
01.03.1975	179,50	5,77
01.02.1975	183,00	5,88

Учебное издание

**Власов Марк Павлович
Насибуллин Искандер Уралович**

Эконометрика

Практикум

Редактор и корректор А. А. Чернышева
Техн. редактор М. Д. Баранова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 26.03.2026 г. Рег. № 5259/25

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.