

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»**

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Кафедра высшей математики

Оптимальное управление

ЧАСТЬ 2

Переменные структуры

**Учебно-методическое пособие
для студентов всех форм обучения**

**Санкт-Петербург
2016**

ББК 22.1р
УДК 51(07)
О-627

Оптимальное управление. Часть 2. Переменные структуры: учебно-методическое пособие/ сост.: Н.Л. Белая, Е.Г. Иванова, В.Н. Суриков. ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2016.-54 с.

Приводится теоретический материал с разобранными решениями типичных примеров. Предназначено для студентов технических специальностей всех форм обучения.

Рецензент: профессор кафедры моделирования экономических систем факультета прикладной математики – процессов управления СПбГУ, д-р физ.-мат. наук Смирнов Н.В.

Подготовлено и рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики(протокол №2 от 12.12.2016 г.).

Утверждено к изданию методической комиссией ВШТЭ СПбГУПТД (протокол №1 от 20.12.2016 г.).

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД в качестве учебно-методического пособия.

Редактор и корректор Басова В.А.

Техн. редактор Титова Л.Я.

Темплан 2016 г., поз.70

Подп. к печати 20.12.2016 г. Формат 60х84/16. Бумага тип №1.

Печать офсетная. Объем 3,25 печ.л.; 3,25 уч.-изд.л.

Тираж 70 экз. Изд. № 70.Цена «С». Заказ

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики ВШТЭ
СПбГУПТД, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

©Высшая школа технологии и энергетики
СПбГУПТД, 2016

ВВЕДЕНИЕ

Одно из направлений повышения эффективности в производстве связано с использованием автоматических систем управления (АСУ), что в свою очередь приводит к необходимости изучать оптимальное управление (ОУ). В методическом пособии рассматривается понятие управляемых объектов, ставится задача оптимального быстрогодействия, формулируется принцип максимума Понтрягина. Ставится и решается задача синтеза ОУ. Также даются некоторые понятия теории устойчивости и формулируется общая задача стабилизации ОУ.

Во второй части пособия рассматриваются системы с переменной структурой (СПС). Излагаются методы исследования динамики и синтеза для наиболее простых и изученных кусочно-линейных систем. Изложенные методы исследования СПС применяются для синтеза систем управления технологическими процессами в промышленности, в частности в ЦБП.

Настоящее пособие может быть использовано студентами при подготовке к экзаменам и зачетам по предмету «Оптимальное управление», при курсовом и дипломном проектировании, а также магистрами и специалистами при разработке систем автоматизации ЦБП.

1. Понятие об управляемых объектах

Рассмотрим прямолинейное движение автомобиля. В каждый момент времени состояние автомобиля можно характеризовать двумя числами: пройденным расстоянием S и скоростью движения V . Эти величины меняются с течением времени, но не самопроизвольно, а сообразно воле водителя, который может управлять силой F . Таким образом, мы имеем связанные параметры S, V, F . Если мы будем рассматривать движение автомобиля по плоскости, то фазовых координат будет четыре, а управляющих параметров – два.

Управляемый объект в теории автоматического управления принято изображать схемой:

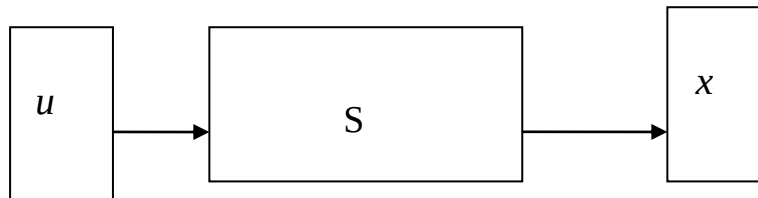


Рис. 1. Управляемый объект

Задача оптимального управления в общем виде может быть описана следующим образом.

1) Дана управляемая система (объект) S , состояние которой в момент времени t выражается величиной x . Эта величина x называется *фазовой координатой*. Предполагается, что к системе

С приложено управляющее воздействие u . Величина u называется *управлением*.

2) Дано уравнение, связывающее переменные x , u , t и описывающее динамику системы. Указан промежуток времени, на котором рассматривается уравнение.

В типичном случае это обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (1.1)$$

с заранее оговоренными свойствами функции f (часто требуют, например, непрерывности f по t , x , u ; непрерывной дифференцируемости по x и т.д.).

Считаем, что t — независимая переменная. Фазовая координата x является n -мерным вектором

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

управление u является k -мерным вектором

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix},$$

а $f(t, x, u)$ (правая часть уравнения) является n -мерной функцией

$$f(t, x, u) = \begin{pmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{pmatrix}.$$

Кроме того, введём следующие множества:

X — множество допустимых состояний $x \in X$,

U — множество допустимых управлений, $u \in U$.

Полагаем, что начальным состоянием нашей системы в момент времени t_0 является $x(t_0) = x_0$, конечным состоянием - $x(T) = x_1$, где T - время.

3) Известен характер информации, которая может быть использована для формирования управляющих воздействий (например, в каждый момент времени или в заранее предписанные моменты становятся известными доступные измерению величины - значения фазовых координат системы (1.1) или функций от этих координат). Оговорен класс функций, описывающих управления, допускаемые к рассмотрению: множество кусочно-непрерывных функций, линейных по переменной x .

4) Установлены ограничения на процесс, подлежащий реализации. Прежде всего это условия, определяющие цель управления (например, для системы (1.1) это попадание в заданную точку или на заданное множество фазового пространства R^n , требование стабилизации решений около заданного движения и т. д.). Кроме того, ограничения могут быть наложены на величины управляющих воздействий и (или)

координат состояния x , на функции от этих величин, на функции от их реализаций и т. д. В системе (1.1), например, возможны ограничения на параметры управления и на координаты.

5) Задан показатель (критерий) качества процесса, подлежащего реализации.

Условия, описанные в п.п.1-4, необходимо дополнить требованием оптимальности процесса. Оптимальность понимается исходя из требований конкретной задачи - минимума, максимума, минимакса и т. д.

Пару векторных функций $(u(t), x(t))$ мы будем называть в дальнейшем *процессом управления* или просто *процессом*.

2. Задача об оптимальном быстродействии

В начальный момент времени t_0 объект находится в фазовом состоянии x_0 . Нам требуется выбрать такое управление $u(t)$, которое переведет объект в заранее заданное конечное фазовое состояние x_1 (отличное от x_0) за минимальное время. Такие процессы называются *оптимальными в смысле быстродействия*.

Определение: процесс, в результате которого объект переходит из точки x_0 в точку x_1 , называется оптимальным в смысле быстродействия, если не существует процесса, переводящего объект из x_0 в x_1 за меньшее время.

3. Метод динамического программирования

Для управляемого объекта, описанного ранее, мы рассмотрим задачу об оптимальном переходе — в смысле быстрогодействия — из фазового состояния x_0 в фазовое состояние x_1 . При этом конечную фазовую точку x_1 будем считать *фиксированной*, а в качестве начальной точки x_0 будем рассматривать *различные* точки фазового пространства. Мы будем предполагать, что для рассматриваемого управляемого объекта выполняются следующие гипотезы:

Гипотеза 1. Какова бы ни была отличная от x_2 точка x фазового пространства, существует оптимальный (в смысле быстрогодействия) процесс перехода из точки x_0 в точку x_1 .

Время, в течение которого осуществляется этот оптимальный переход, обозначим через $T(x)$.

В дальнейших рассуждениях будет удобно вместо $T(x)$ ввести функцию $\omega(x)$, отличающуюся от нее знаком:

$$\omega(x) = -T(x).$$

Заметим, что $\omega(x)$ является n -мерной функцией. Поэтому имеет смысл говорить о *непрерывности* этой функции (по совокупности переменных x_i) и о *дифференцируемости* этой функции по каждому из переменных x_i . Мы будем также предполагать, что для рассматриваемого управляемого объекта выполняется следующая гипотеза:

Гипотеза 2. Функция $\omega(x)$ непрерывна и всюду, кроме точки x_1 , имеет непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial x_n}.$$

В условиях этих гипотез верна теорема:

Теорема 1. Если для управляемого объекта, выполнены гипотезы 1 и 2, то для введённой в рассмотрение функции

$$B(x, u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u)$$

верно:

- 1) $B(x, u) \leq 1$ для всех точек $x \neq x_1$ и u ;
- 2) $B(x(t), u(t)) = 1$ для любого оптимального процесса (оптимальность понимается в смысле быстроедействия).

Эта теорема и составляет сущность метода динамического программирования для рассматриваемой задачи.

Гипотеза 3. Функция $\omega(x)$ имеет при $x \neq x_1$ вторые непрерывные производные $\frac{\partial^2 \omega(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, а функции

$f_i(x, u)$ - первые непрерывные производные $\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_i}$,

$i, j = 1, 2, \dots, n$.

Метод динамического программирования содержит некоторую информацию об оптимальных процессах и потому может быть использован для их разыскания. Однако он имеет ряд недостатков, самым главным из которых является предположение о выполнении гипотез 1 и 2.

Полагаем, что выполняются гипотезы 1 и 2 и справедлива гипотеза 3. Тогда верна теорема, которая носит название *принципа максимума*.

4. Принцип максимума

Теорема 2.. Предположим, что для рассматриваемого управляемого объекта, описываемого уравнением (в векторной форме)

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (4.1)$$

и предписанного конечного состояния x_1 выполнены гипотезы 1, 2 и 3. Пусть $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ — некоторый процесс, переводящий объект из начального состояния x_0 в состояние x_1 . Введем в рассмотрение функцию

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(x, u). \quad (4.2)$$

С помощью этой функции H запишем следующую систему дифференциальных уравнений для вспомогательных переменных:

$$\dot{\psi}_k = -\frac{\partial H(\psi, x(t), u(t))}{\partial x_k}, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

где $(x(t), u(t))$ - рассматриваемый процесс. Тогда, если он является оптимальным, то существует такое нетривиальное решение последней системы, что для него выполнено условие максимума:

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \max_u H(\psi(t), x(t), u) \quad (4.4)$$

и условие:

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = 1.$$

Эта теорема значительно удобнее для отыскания оптимальных процессов, чем метод динамического программирования.

5. Задача синтеза

Мы рассмотрим материальную точку массы $m=1$. Она свободно и без трения движется по горизонтальной прямой и снабжена двигателем. Он развивает силу u , где $|u| \leq 1$. Уравнения движения этого объекта имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} . \quad (5.1)$$

Для этого объекта рассмотрим задачу о быстрейшем попадании в начало координат $(0, 0)$ из заданного начального состояния $x_0 = (x_{01}, x_{02})$.

Функция H из (4.2) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_1 u .$$

Для вспомогательных переменных ψ_1, ψ_2 мы получаем систему уравнений (см. (4.3))

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \end{cases} .$$

Решая систему, получим:

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2 ,$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Далее, в силу соотношения максимума (4.4), мы находим:

$$u(t) = +1, \quad \text{если} \quad \psi_2(t) > 0 ,$$

$$u(t) = -1, \text{ если } \psi_2(t) < 0.$$

Отсюда следует, что *каждое оптимальное управление является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения ± 1 и имеющей не более двух интервалов постоянства.*

Для отрезка времени, на котором $u(t) = +1$, мы имеем

$$\frac{dx_1}{dx_2} = x_2,$$

откуда находим, что $x_1 = \frac{1}{2}(x_2)^2 + C$.

Таким образом, кусок фазовой траектории, для которого $u(t) = +1$, представляет собой дугу параболы. Семейство парабол показано на рис. 2. Они получаются друг из друга сдвигом по оси x_1 .

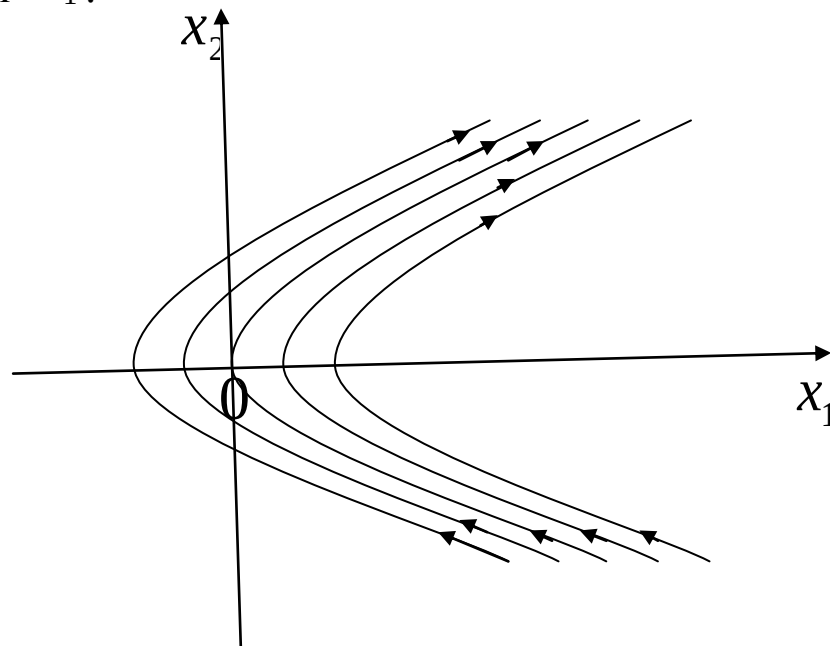


Рис. 2. Фазовые траектории при $u(t) = +1$

По этим параболам фазовые точки движутся снизу вверх (так как $\dot{x}_2 = u = 1$). Аналогично для отрезка времени, на котором $u(t) = -1$, мы имеем рис. 3:

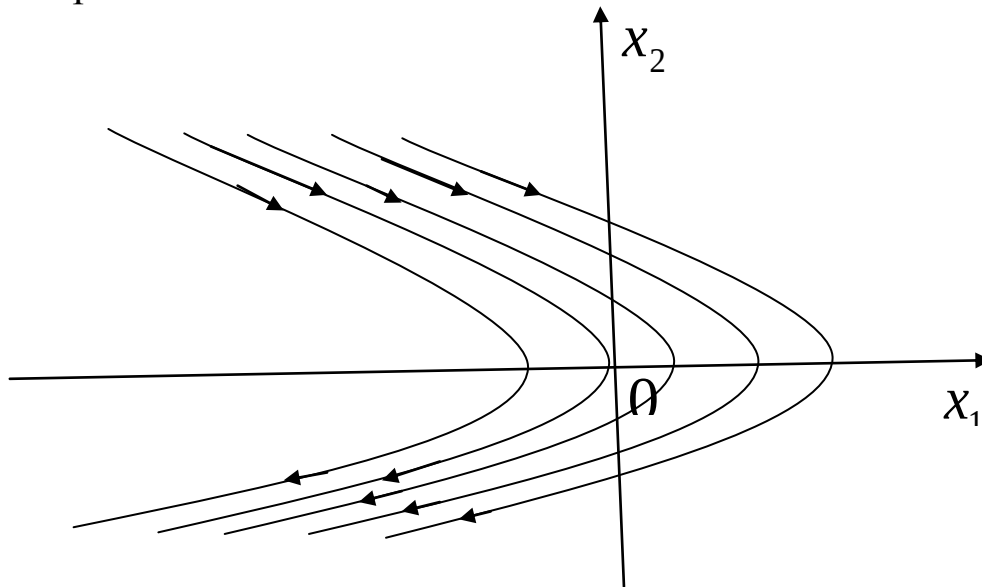


Рис. 3. Фазовые траектории при $u(t) = -1$.

По параболам фазовые точки движутся сверху вниз (так как $\dot{x}_2 = u = -1$).

Если сначала, в течение некоторого времени, $u(t) = -1$, а затем $u(t) = +1$, то фазовая траектория состоит из двух кусков парабол, примыкающих друг к другу. При этом второй из кусков лежит на той из парабол, которая проходит через начало координат (так как искомая траектория должна вести в начало координат).

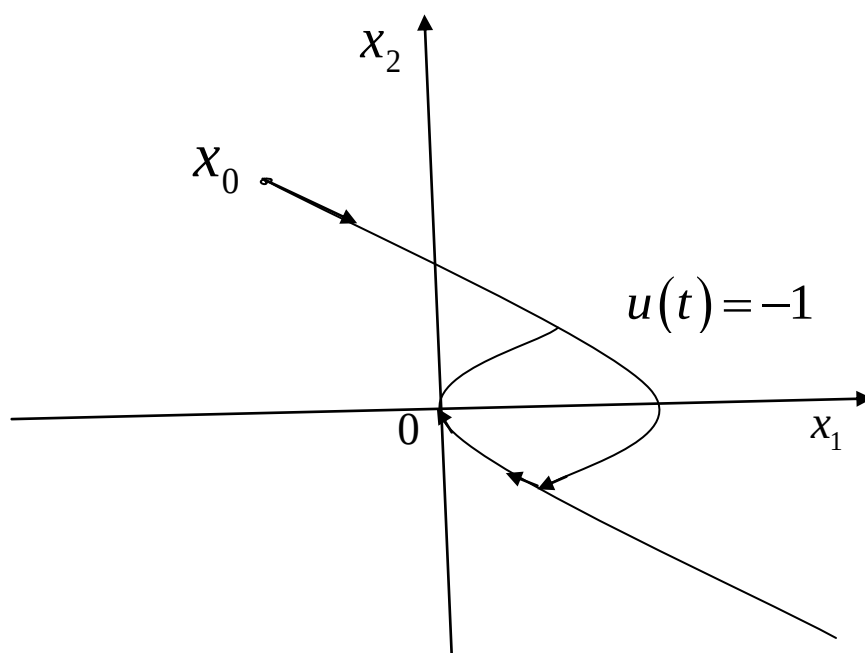


Рис. 4. Траектория и точка переключения при начальном $u(t) = -1$

Если же, наоборот, сначала $u(t) = -1$, а затем $u(t) = +1$, то мы получаем другую фазовую траекторию.

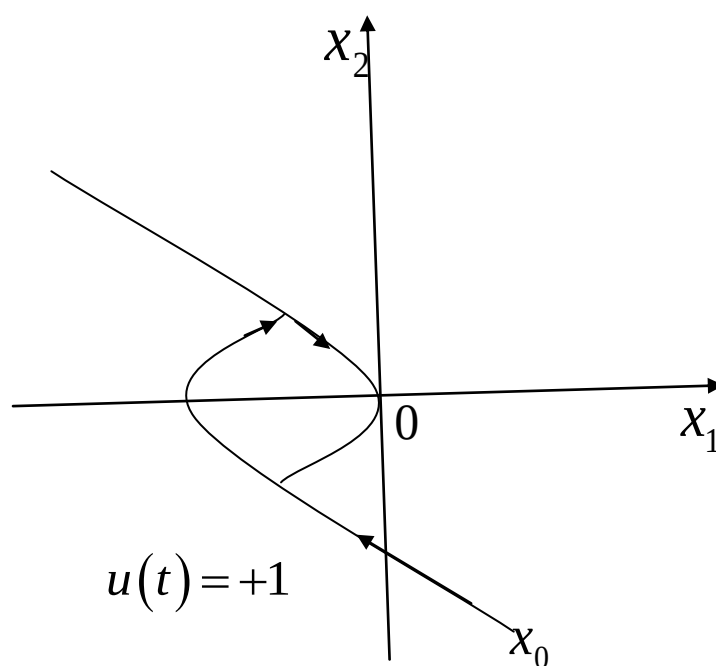


Рис. 5. Траектория и точка переключения при начальном $u(t) = +1$

Суммируя оба случая, получаем:

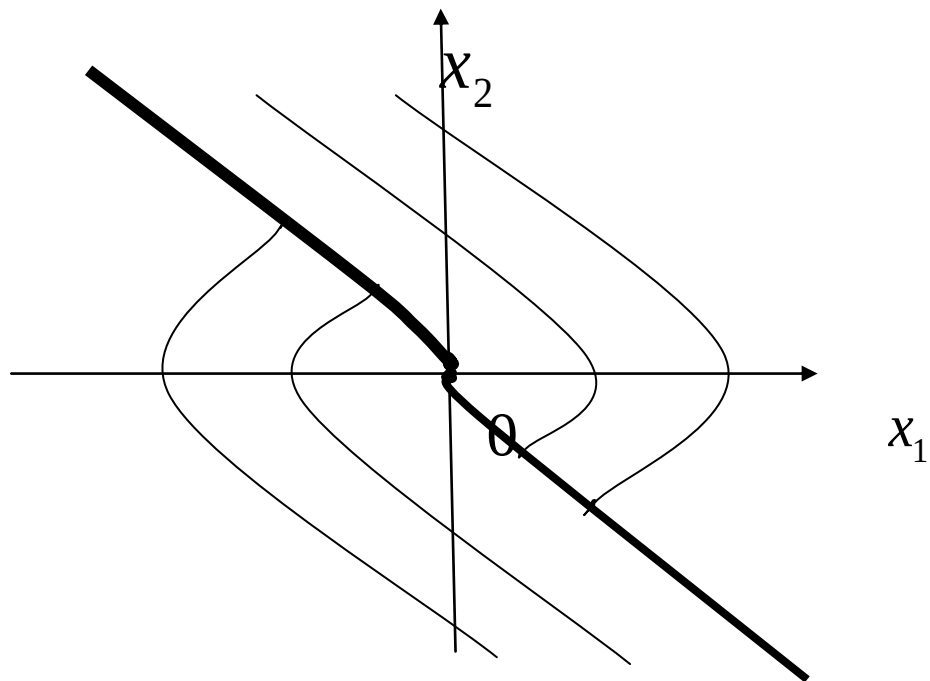


Рис. 6 Траектория и точка переключения в общем случае

6. Основы теории устойчивости

В дальнейшем нам потребуется понятие устойчивости. Техническое понятие устойчивости систем автоматического управления отражает свойство технической системы не только стабильно работать в нормальных режимах, но и "не уходить вразнос" при отклонении всевозможных параметров системы от номинала и влиянии на систему дестабилизирующих воздействий. Другими словами, речь идет о способности системы возвращаться к равновесному состоянию, из которого она выводится возмущающими или управляющими воздействиями. Устойчивость системы - техническое требование в ряду более

сложных требований, связанных с показателями качества и точности САУ.

Только устойчивая система является работоспособной. Основы строгой теории устойчивости динамических систем были разработаны академиком А.М. Ляпуновым. Понятия об устойчивости, вытекающие из его работ, заключаются в следующем. Если система описывается линейным дифференциальным уравнением, то ее устойчивость не зависит от величины возмущения. Линейная система, устойчивая при малых возмущениях, будет устойчива и при больших. Нелинейные системы могут быть устойчивы при малых и неустойчивы при больших возмущениях. Наглядное представление о системах, устойчивых при малых и неустойчивых при больших возмущениях, дает поведение шара во впадине. При малых воздействиях на шар и его малых отклонениях не выше края впадины шар возвращается в исходное положение и система шар - поверхность устойчива. При больших воздействиях с отклонением за край впадины шар не возвращается в исходное положение - система неустойчива. Поэтому устойчивость систем исследуется отдельно для случая малых и больших возмущений.

Имеем систему (1.1):

$$\dot{x} = f(x, u, t).$$

Решение этой системы $x = \tilde{x}(t)$ называется *устойчивым по*

Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что как только

$$|x(t_0) - \tilde{x}(t_0)| < \delta,$$

так сразу выполняется неравенство

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon$$

для всех $t > t_0$.

Иначе говоря, условие устойчивости системы по Ляпунову формулируется так: *в устойчивой системе свободная составляющая решения уравнения динамики должна стремиться к нулю, то есть затухать.*

Линейная система будет устойчива, если все вещественные корни и все вещественные части комплексных корней характеристического уравнения, соответствующего исходному дифференциальному уравнению свободного движения системы, будут отрицательными, что даст затухающие по экспоненте решения. Если имеются чисто мнимые корни, то в переходном процессе будут гармонические незатухающие компоненты.

Таким образом, исследование устойчивости системы сводится к определению знаков вещественных частей корней характеристического уравнения системы.

7. Общая постановка задачи стабилизации

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = g(t, y, v), \quad (7.1)$$

описывающая движение некоторого управляемого объекта.

Здесь y – n -мерный вектор фазового состояния системы,

v – r -мерный вектор управлений,

g – n -мерная вектор-функция, удовлетворяющая условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.

Предположим, что для системы (7.1) решена задача построения программного управления. Это означает, что для заданных начальных данных $y(t_0) = y_0$ найдено управление $v = v_p(t)$, называемое *программным*, такое, что замкнутая система

$$\dot{y} = g(t, y, v_p(t))$$

имеет программное движение $y_p(t) = y(t, y_0, t_0, v_p(t))$. Это движение может быть построено из различных соображений. В частности, программное управление $v_p(t)$ и соответствующее ему программное движение $y_p(t)$ могут быть оптимальными в том или ином смысле. В качестве частного примера, имеющего большое прикладное значение, можно привести задачу о программном переводе системы (6.1) из одного заданного состояния y_0 в другое y_1 за время T .

Далее возникает вопрос об асимптотической устойчивости по Ляпунову программного движения $y_p(t)$. Для исследования этого вопроса используется подход теории устойчивости. А именно, для невозмущенного движения, которым в нашем случае является программное движение $y_p(t)$, и для программного управления $v_p(t)$ строится система в отклонениях.

В системе (7.1) сделаем замену искомым функций и управлений по формулам

$$x = y - y_p(t), \quad u = v - v_p(t), \quad (7.2)$$

где x – n -мерный вектор отклонений от программного движения, а u – r -мерный вектор отклонений от программного управления.

В результате (7.1) примет вид

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (7.3)$$

где $f(t, x, u) = g(t, y_p(t) + x, v_p(t) + u) - g(t, y_p(t), v_p(t))$.

Система (7.3) называется *системой в отклонениях*.

Замечание. По построению $f(t, 0, 0) = 0$, т.е. система (7.3) всегда имеет нулевое решение $x = 0$ при нулевом управлении $u = 0$, соответствующее программному движению $y_p(t)$ и программному управлению $v_p(t)$ исходной системы (7.1).

В дальнейшем нас будут интересовать следующие вопросы:

1. Существуют ли управления $u = (u_1, \dots, u_r)^T$, при которых нулевое решение системы (7.3) асимптотически устойчиво по Ляпунову?

2. Если такие управления существуют, то как их построить?

3. Пусть такие управления можно построить не единственным образом. Как из их множества выбрать оптимальное в том или ином смысле?

Все эти вопросы представляют собой общую постановку задачи стабилизации программных движений, причем последний, третий вопрос является самостоятельным разделом теории управления, так называемой *задачей оптимальной стабилизации*.

В заключение отметим, что управление $u = (u_1, \dots, u_r)^T$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (6.3) (или программного движения $y_p(t)$ системы (6.1)), принято называть *стабилизирующим управлением*. Оно представляет собой некоторую добавку к программному управлению $v_p(t)$. Если найдены условия существования и построено стабилизирующее управление $u = u_s$, то из (7.2) получим управление $v = v_p(t) + u_s$, обладающее следующим свойством: если его подставить в систему (7.1), то она будет иметь программное движение $y_p(t)$, асимптотически устойчивое по Ляпунову.

Замечание. Для любого программного управления $v_p(t)$ и соответствующего программного движения $y_p(t)$ линейной управляемой системы

$$\dot{y} = P(t)y + Q(t)v + f(t) \quad (7.4)$$

системой в отклонениях является одна и та же линейная однородная система вида

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u. \quad (7.5)$$

В результате можно сделать вывод о том, что алгоритм построения стабилизирующего управления универсален для любого программного движения линейной системы (7.4).

8. Построение стабилизирующего управления

Рассмотрим линейную стационарную систему в отклонениях

$$\dot{x} = Px + Qu, \quad (8.1)$$

где P, Q – постоянные $(n \times n)$ - и $(n \times r)$ - матрицы соответственно.

Определение. Управление вида

$$u = Cx, \quad (8.2)$$

где C – постоянная $(r \times n)$ - матрица, будем называть *допустимым управлением вида линейной обратной связи*.

Задача стабилизации системы (8.1) состоит в том, чтобы построить допустимое управление (8.2), при котором замкнутая система

$$\dot{x} = (P + QC)x \quad (8.3)$$

асимптотически устойчива.

Поясним словосочетание «управление вида линейной обратной связи». По сути, вопрос в том, почему стабилизирующее управление предполагается строить именно в виде (8.2) ? При ответе на него заметим, что для вычисления значений вектора u по формуле (8.2) и его последующей технической реализации нужно знать величины C, x . Значение вектора x – отклонения от программного движения – предполагается измерять специальными датчиками или приборами в процессе функционирования объекта управления. Следовательно, можно считать его известной величиной. При этом в так называемом случае полной обратной связи предполагается, что все элементы вектора x доступны для измерения.

Матрица C называется матрицей коэффициентов усиления сигналов измерительных приборов. Ее построение и составляет математическую суть задачи стабилизации. Таким образом,

выбор формы представления допустимого управления не случаен, а продиктован здравым смыслом и практикой построения реальных систем стабилизации.

Конкретизируем исходную постановку задачи: требуется построить матрицу C так, чтобы замкнутая система (8.3) была асимптотически устойчива.

Сформулируем известный критерий асимптотической устойчивости линейных стационарных систем

Теорема. Линейная однородная система с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax$$

асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь λ_i – собственные числа матрицы A .

Таким образом, основная идея при решении задачи стабилизации состоит в том, чтобы обеспечить выполнение критерия асимптотической устойчивости для системы (8.3) за счет выбора матрицы C : собственные числа матрицы $P + QC$ должны иметь отрицательные вещественные части.

9. Метод неопределенных коэффициентов

Этот способ построения стабилизирующего управления «лежит на поверхности» и может быть понятен даже школьнику (если ему предварительно объяснить, что собственные числа матрицы - это корни характеристического полинома), сводится он к методу неопределенных коэффициентов. Действительно, собственные числа матрицы $P + QC$ будут функциями элементов матрицы C . Значит, можно попытаться выписать явную зависимость $\lambda_i = \lambda_i(C)$, $i = 1, \dots, n$ и обеспечить выполнение неравенств $\operatorname{Re} \lambda_i(C) < 0$ за счет выбора элементов матрицы C .

Проиллюстрируем этот подход для системы второго порядка на простейших примерах.

Пример 1. Требуется построить стабилизирующее управление для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}.$$

Здесь

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Стабилизирующее управление будем искать в виде

$$u = Cx = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица замкнутой системы имеет вид

$$P + QC = \begin{pmatrix} 1 + c_1 & 1 + c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Она имеет собственные числа $\lambda_1 = 1 + c_1$, $\lambda_2 = 1$. Очевидно, что первое из них может принимать произвольное значение за счет выбора параметра c_1 , а второе остается неизменным при любом выборе строки $C = (c_1 \ c_2)$.

Собственные числа матрицы $P + QC$, не зависящие от выбора C , назовем неуправляемыми, а те, что зависят от C , – управляемыми собственными числами системы.

Поскольку при любом выборе строки C матрица замкнутой системы имеет неуправляемое собственное число $\lambda_2 = 1$, то задача стабилизации не имеет решения для исходной системы. Действительно, критерий асимптотической устойчивости (см. теорему) не выполняется ни при одной строке C .

Пример 2. Внесем небольшое изменение в коэффициенты системы из *примера 1*:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}.$$

Здесь

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица замкнутой системы

$$P + QC = \begin{pmatrix} 1 + c_1 & 1 + c_2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа $\lambda_1 = 1 + c_1$, $\lambda_2 = -1$.

Собственное число $\lambda_2 = -1$ осталось неуправляемым, как и в предыдущем примере, однако оно лежит в левой полуплоскости комплексной переменной λ (является вещественным и отрицательным). При этом за счет выбора параметра c_1 можно обеспечить любое значение управляемому собственному числу λ_1 .

Действительно, зафиксируем так называемое эталонное значение $\lambda_1 = -1$, тогда при $c_1 = -2$ фактическое значение λ_1 совпадет с эталонным. Таким образом, для исходной системы построено стабилизирующее управление вида

$$u = Cx = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2x_1,$$

которое обеспечивает матрице замкнутой системы собственные числа $\lambda_{1,2} = -1$.

Следует обратить внимание, что в случае, когда стабилизирующее управление существует (как в данном примере), то оно строится неоднозначно. Все множество стабилизирующих управлений можно описать следующим образом: $u = c_1 x_1 + c_2 x_2$, где $c_1 < -1$, c_2 – любое.

Итак, для линейной стационарной системы в отклонениях (8.1) один из способов построения стабилизирующего управления (8.2) основан на общей идее метода неопределенных коэффициентов, суть которого заключается в следующем:

Вычисляем характеристический полином матрицы $P + QC$:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda E - (P + QC)) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n.$$

1. Зафиксируем эталонные собственные числа $\mu_1, \dots, \mu_n$ с отрицательными вещественными частями.
2. Выписываем эталонный полином $\phi(\lambda)$, имеющий наперед заданные корни $\mu_1, \dots, \mu_n$:

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \mu_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \mu_n) = \lambda^n + d_1 \lambda^{n-1} + \dots + d_n.$$

3. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ у характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ и эталонного полинома $\phi(\lambda)$.
4. Решая полученную систему, найдем элементы матрицы C .

Пример 3. Требуется построить стабилизирующее управление для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

Здесь

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Стабилизирующее управление будем искать в виде

$$u = Cx = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица замкнутой системы

$$P + QC = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 - 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем характеристический полином матрицы $P + QC$:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda E - (P + QC)) = \lambda^2 - c_1\lambda + 2 - c_2.$$

Зафиксируем эталонные собственные числа $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -3$.

Эталонный полином $\phi(\lambda)$, имеющий наперед заданные корни:

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) = \lambda^2 + 4\lambda + 3.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ у характеристического и эталонного полиномов: $-c_1 = 4$, $2 - c_2 = 3$.

Откуда $c_1 = -4$, $c_2 = -1$.

Искомое стабилизирующее управление имеет вид

$$u = Cx = \begin{pmatrix} -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -4x_1 - x_2.$$

Замечание. Вообще говоря, данный алгоритм имеет существенный недостаток. Даже в задачах малых размерностей возникает сложность вычисления элементов матрицы C , так как система уравнений может оказаться нелинейной. Поэтому существует еще один алгоритм построения стабилизирующего управления, связанный с элементами высшей алгебры и ее

возможностями замены переменных и перехода к удобным системам координат.

10. Время переходного процесса

Проиллюстрируем на простых примерах еще одно важное понятие – время переходного процесса и его связь с эталонными собственными числами и коэффициентами усиления.

Пример 4. Рассмотрим простейшую систему в отклонениях в виде одного скалярного уравнения

$$\dot{x} = 2x + 3u.$$

Требуется построить стабилизирующее управление вида линейной обратной связи $u = cx$ для нескольких вариантов эталонных собственных чисел:

- 1) $\lambda_1 = -0,1$;
- 2) $\lambda_2 = -1$;
- 3) $\lambda_3 = -10$;
- 4) $\lambda_4 = -100$.

Замкнутая система (8.3) в данном случае имеет вид

$$\dot{x} = (2 + 3c)x.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, выпишем уравнения для определения коэффициента усиления C в каждом из четырех случаев. Получим

$$2 + 3c_1 = -0,1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -0,7$$

$$2 + 3c_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -1$$

$$2 + 3c_3 = -10 \quad \Rightarrow \quad c_3 = -4$$

$$2 + 3c_4 = -100 \quad \Rightarrow \quad c_4 = -34$$

Поскольку стабилизирующее управление, если оно существует, может быть построено не однозначно, а с точностью до выбранного эталонного собственного числа, то возникает естественный вопрос: каков критерий выбора эталонного собственного числа? Для ответа на него необходимо понять, какое влияние оказывают эталонные собственные числа на поведение замкнутой системы.

Проинтегрируем замкнутую систему в каждом из четырех случаев с одними и теми же начальными условиями $x(0) = x_0$. Получим

$$x(t) = x_0 e^{-0,1t}, \quad x(t) = x_0 e^{-t}, \quad x(t) = x_0 e^{-10t}, \quad x(t) = x_0 e^{-100t}.$$

Заметим, что величина x_0 определяет начальное отклонение решения, а показатель экспоненты – скорость его убывания. Зафиксируем так называемую величину безразличия ε , которая в конкретной прикладной задаче характеризует абсолютное значение отклонения $x(t)$, которым можно пренебречь, т.е. считать равным нулю. Величина ε очень важна для работы системы стабилизации. Она показывает значение отклонения, при

достижении которого работа стабилизирующего управления может быть прекращена.

Особый интерес представляет время переходного процесса T , необходимое системе стабилизации для подавления начального отклонения x_0 до величины безразличия ε . Его можно вычислить, решая уравнение $x(T) = \varepsilon$. В рамках нашего примера найдем

$$x_0 e^{-0,1T_1} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad T_1 = \ln \left(\frac{x_0}{\varepsilon} \right)^{10}$$

$$x_0 e^{-T_2} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad T_2 = \ln \left(\frac{x_0}{\varepsilon} \right)$$

$$x_0 e^{-10T_3} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad T_3 = \ln \sqrt[10]{\frac{x_0}{\varepsilon}}$$

$$x_0 e^{-100T_4} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad T_4 = \ln \sqrt[100]{\frac{x_0}{\varepsilon}}$$

Очевидно, что выполняются неравенства $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$. При этом следует особо подчеркнуть, что соотношение между абсолютными значениями коэффициентов усиления противоположно: $|c_1| < |c_2| < |c_3| < |c_4|$.

Анализ, проведенный в рамках данного примера, позволяет сделать следующий общий вывод. Чем меньше эталонное собственное число, тем меньше время переходного процесса. При этом с уменьшением времени переходного процесса растет абсолютное значение коэффициента усиления. Поскольку

коэффициенты усиления определяют меру затрат на реализацию стабилизирующего управления, то особый интерес в каждом конкретном приложении представляет задача поиска разумного компромисса между временем переходного процесса и затратами на реализацию стабилизирующего управления. В этом состоит один из наиболее важных вопросов задачи оптимальной стабилизации.

11. Понятие переменной структуры

Рассмотрим понятие переменной структуры (СПС) на простейшем примере системы стабилизации, имеющей структурную схему, представленную на рисунке:

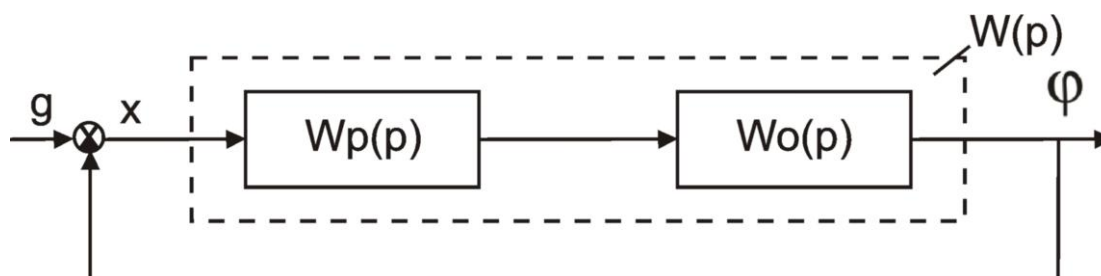


Рис. 7 Схема системы стабилизации

Здесь:

$g = const$ – задающее воздействие;

$\varphi = \varphi(t)$ – выходной сигнал;

$x = g - \varphi$ сигнал рассогласования или ошибки;

$W_p(p)$ – передаточная функция регулятора;

$W_o(p)$ – передаточная функция объекта управления;

$W(p) = W_p(p)W_o(p)$;

p – оператор Лапласа.

Назначением данной системы является поддержание выходного сигнала φ объекта управления на заданном уровне $g = const$. Рассмотрим случаи таких передаточных функций $W(p)$, когда передаточная функция объекта постоянна, а передаточные функции регуляторов различны.

Пусть

$$W_o(p) = \frac{1}{Tp}, \quad W_p(p) = \frac{1}{T_n p},$$

где T , T_n – соответственно постоянные времени интегрирования объекта и регулятора.

Тогда

$$W(p) = W_1(p) = \frac{k_1}{p^2},$$

где

$$k_1 = \frac{1}{TT_n}.$$

Пользуясь структурной схемой, получаем

$$\ddot{\varphi} = k_1 x, \quad k_1 > 0$$

$$x = g - \varphi,$$

откуда дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее динамику выходного сигнала φ , имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + k_1 \varphi = k_2 g.$$

Не теряя общности изложения, для большей простоты и наглядности будем считать, что $g = 1$ при $t \geq 0$, $g = 0$ при $t < 0$. Тогда общее решение уравнения имеет вид

$$\varphi(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + 1 \quad \text{при} \quad t \geq 0,$$

где $\omega^2 = k_1$, C_1 , C_2 - произвольные постоянные. Если учесть начальные условия $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, говорящие о том, что до поступления входного сигнала система находилась в состоянии покоя, то соответствующее частное решение уравнения примет вид:

$$\varphi(t) = -C \cos \omega t + 1, \quad t \geq 0.$$

График этого решения представлен на рисунке:

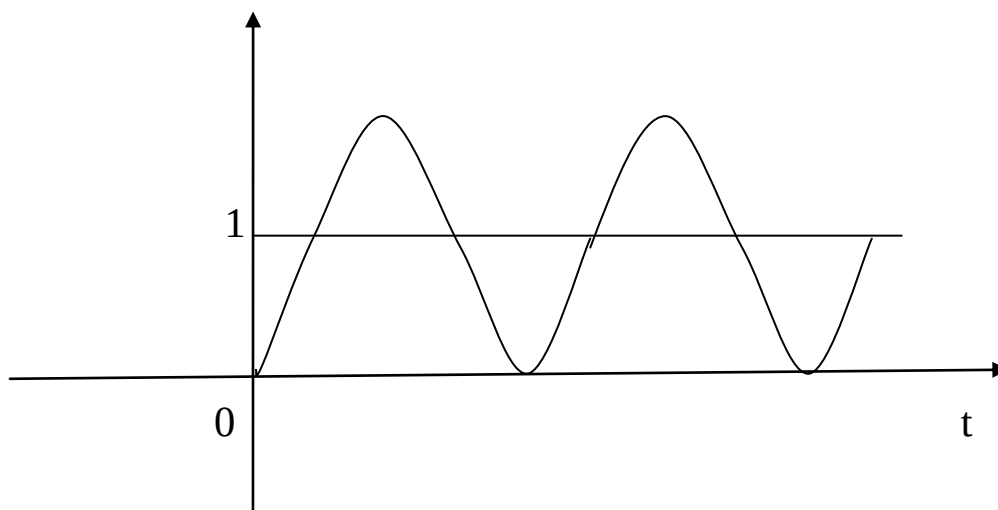


Рис.8. График переходного процесса в системе с передаточной функцией

$$W_1(p)$$

Таким образом, переходный процесс носит характер незатухающих колебаний около заданного уровня, и стабилизировать систему не удаётся.

Пусть теперь

$$W_o(p) = \frac{1}{Tp},$$

$$W_p(p) = k_n + \frac{1}{T_n p},$$

(k_n - коэффициент передачи регулятора).

Тогда

$$W(p) = W_2(p) = \frac{k_1 + k_2}{p^2},$$

где постоянные равны соответственно

$$k_1 = \frac{1}{TT_h} > 0,$$

$$k_2 = \frac{k_n}{T} > 0$$

Уравнения функционирования системы имеют вид:

$$\ddot{\varphi} = k_1 x + k_2 \dot{x}, \quad k_1 > 0,$$

$$x = g - \varphi.$$

Отсюда получаем уравнение:

$$\ddot{\varphi} + k_2 \dot{\varphi} + k_1 \varphi = k_1 g.$$

Будем считать, что корни соответствующего характеристического уравнения

$$\lambda^2 + k_2 \lambda + k_1 = 0$$

являются действительными и различными, причём отрицательными (доказательство отрицательности корней оставим за скобками):

$$0 > \lambda_1 > \lambda_2,$$

откуда

$$\varphi(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}.$$

График функции $\varphi(t)$ изображен на рисунке :

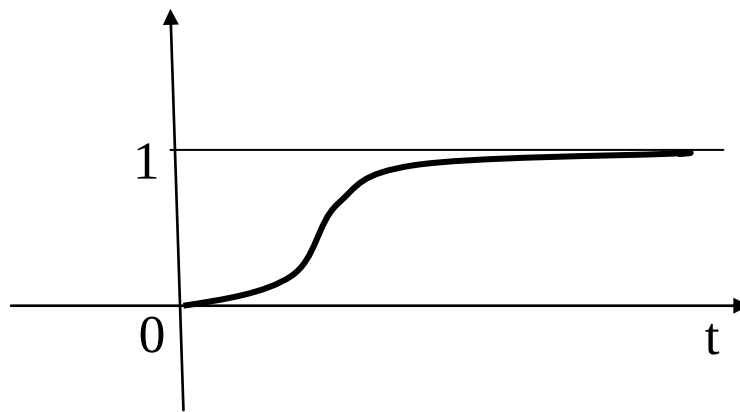


Рис. 9. График переходного процесса в системе ' с передаточной функцией

$$W_2(p)$$

Переходный процесс с ростом времени приближается к заданному уровню.

Поставим теперь задачу увеличения быстродействия системы стабилизации, причём без перерегулирования, за счет использования обеих рассмотренных выше передаточных функций $W_1(p)$, $W_2(p)$, т.е. за счет перехода от одной структуры процесса к другой. Можно показать, что взаимное положение графиков переходных функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ для системы стабилизации с передаточными функциями соответственно $W_1(p)$, $W_2(p)$ будет иметь вид, показанный на рис.10.

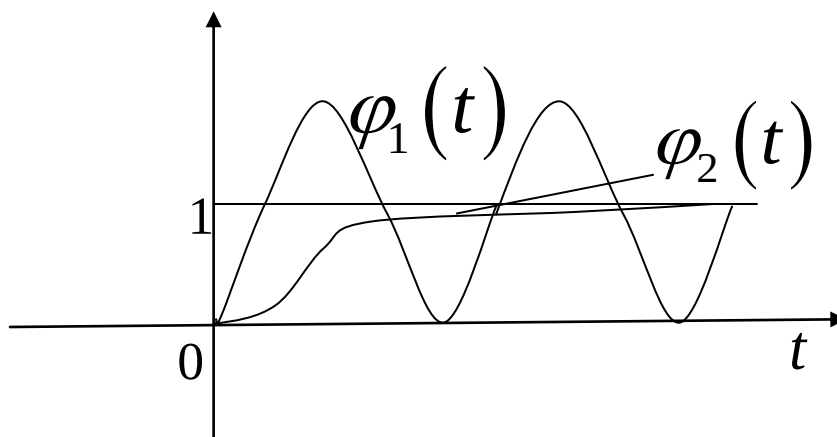


Рис.10. Графики переходных функций

Отсюда вытекает следующий способ стабилизации системы за счет использования обеих структур. Сначала надо использовать структуру с передаточной функцией $W_1(p)$, в результате чего выходной сигнал достаточно быстро приблизится к заданному уровню. Затем в некоторый момент $t = t_1$ надо переключиться на структуру с передаточной функцией $W_2(p)$, чтобы избежать перерегулирования и более медленно приближаться к единичному уровню.

В результате такого переключения структур выходной сигнал будет иметь вид, представленный на рисунке

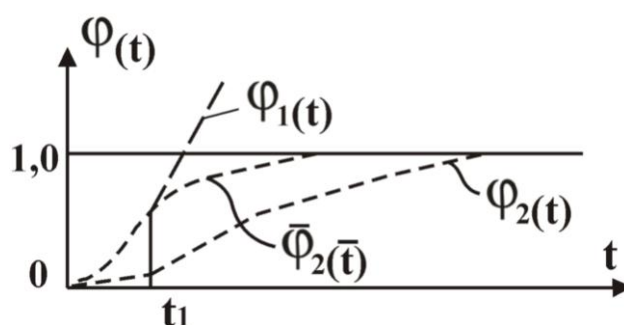


Рис.11. График переходной функции $\varphi(t)$ в системе с переключением структур

При этом чтобы определить вид функции $\tilde{\varphi}_2(t)$ - выходного сигнала после переключения в момент $t = t_1$ на вторую структуру, надо решить задачу Коши с соответствующими начальными условиями. Итак, переключаясь с первой структуры на вторую, мы увеличили быстродействие переходного процесса в системе стабилизации и при этом устранили перерегулирование.

Структурная схема построенной системы, которую можно считать системой с переменной структурой, приведена на рис.6.

Сочетание обеих структур становится возможным за счёт введения в систему управляемого ключа (K_l), осуществляющего скачкообразное изменение коэффициента передачи K_n регулятора:

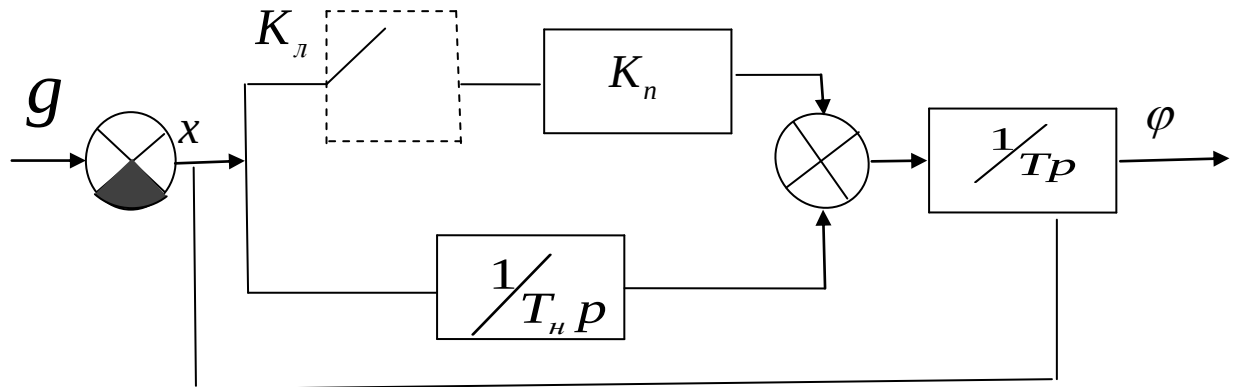


Рис.12. Структурная схема СПС

12. Принципы построения систем с переменной структурой

Наиболее простым и изученным типом СПС являются кусочно-линейные системы, т.е. системы, которые переключаются с одной линейной структуры на другую. Наглядно принципы построения таких систем можно проследить на системах второго порядка вида

$$\ddot{x} + k_2 \dot{x} + k_1 x = u, \quad (12.1)$$

где k_2 , k_1 - заданные постоянные, x , u - скаляры. Для изучения поведения решений уравнения (1.10) перейдем к эквивалентной системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + u \end{cases} \quad (12.2)$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}$$

Поведение траекторий системы (9.2) удобно рассматривать на фазовой плоскости. Пусть переменная

$$x = x_1$$

характеризует сигнал рассогласования или ошибку в системе. Поставим задачу стабилизации системы (9.2) за счет организации обратной связи по сигналу ошибки, т.е. за счет выбора управления в виде

$$u = \Psi x_1,$$

где коэффициент Ψ принимает одно из двух значений по правилу

$$\Psi = \begin{cases} \alpha, & x_1, (Cx_1 + x_2) > 0, \\ \beta, & x_1, (Cx_1 + x_2) < 0, \end{cases} \quad (12.3)$$

где α, β - постоянные величины, $C > 0$. Задача свелась к тому, чтобы выбрать постоянные α, β, C таким образом, чтобы решение системы (12.1) было асимптотически устойчивым, что в данном случае равносильно выполнению соотношений:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$$

Заметим, что система (12.1) с управлением, организуемым по закону $u = \Psi x_1$, где Ψ имеет вид (12.3), является СПС.

Действительно, управление мы формируем по закону

$$u = \begin{cases} \alpha x_1, & \text{при } x_1(Cx_1 + x_2) > 0, \\ \beta x_1, & \text{при } x_1(Cx_1 + x_2) < 0, \end{cases} \quad (12.4)$$

Итак, постоянные α, β задают две линейные структуры. Переключаясь с одной структуры на другую, мы хотим стабилизировать систему (12.2), (12.3). Рассмотрим, какими для этого должны быть постоянные α, β, C . Если $u = \alpha x_1$, то характеристическое уравнение, соответствующее системе (12.2), имеет вид:

$$\lambda^2 + k_2 \lambda + (k_1 - \alpha) = 0 \quad (12.5)$$

Будем считать, что $k_2 > 0$. Тогда, по крайней мере, один из корней этого уравнения положителен или имеет положительную действительную часть (если корни комплексные).

Будем брать α отрицательным и настолько большим по абсолютной величине, чтобы дискриминант уравнения (12.5) был отрицательным. Корни характеристического уравнения λ_1, λ_2 тогда будут комплексно сопряженными с положительной действительной частью:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_2}{2}\right)^2 - k_1 + \alpha}$$

При этом выбираем $\alpha : |\alpha| > \left| \left(\frac{k_2}{2}\right)^2 - k_1 \right|$. Тогда, как известно,

начало координат $x_1 = x_2 = 0$ будет положением равновесия системы (12.2) типа "неустойчивый фокус", а фазовые траектории представляют собой семейство раскручивающихся спиралей:

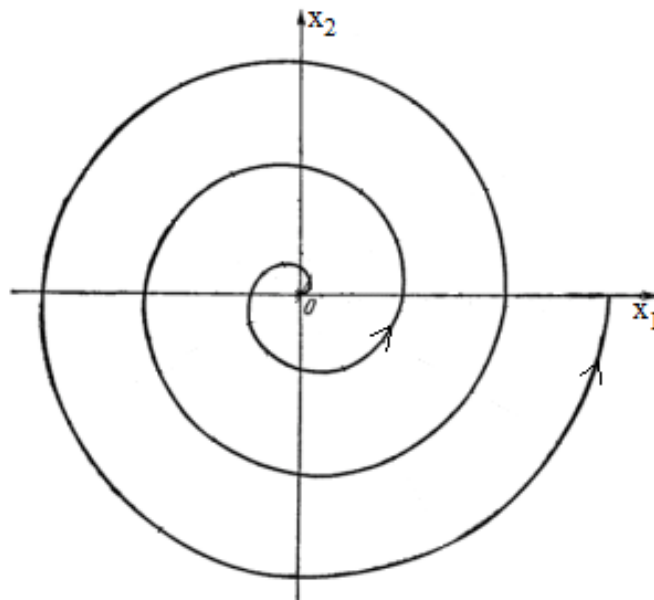


Рис. 13. Поведение траекторий в окрестности фокуса

Если $u = \beta x_1$, то характеристическое уравнение для (12.2) примет вид

$$\lambda^2 + k_2 \lambda + (k_1 - \beta) = 0, \quad k_2 > 0.$$

Выберем $\beta > 0$ достаточно большим. Таким, что корни характеристического уравнения являются действительными и различных знаков. Это всегда можно сделать, так как

$$\lambda_1 = -\frac{k_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{k_2}{2}\right)^2 - k_1 + \beta},$$

$$\lambda_2 = -\frac{k_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{k_2}{2}\right)^2 - k_1 + \beta},$$

если $\beta > k_1$ (при $k_1 < 0$). Тогда начало координат будет положением равновесия типа "седло". При этом положение равновесия неустойчиво, но имеется так называемая вырожденная траектория $x_2 = \lambda_2 x_1$, вдоль которой изображающая точка приближается к началу координат при $t \rightarrow +\infty$.

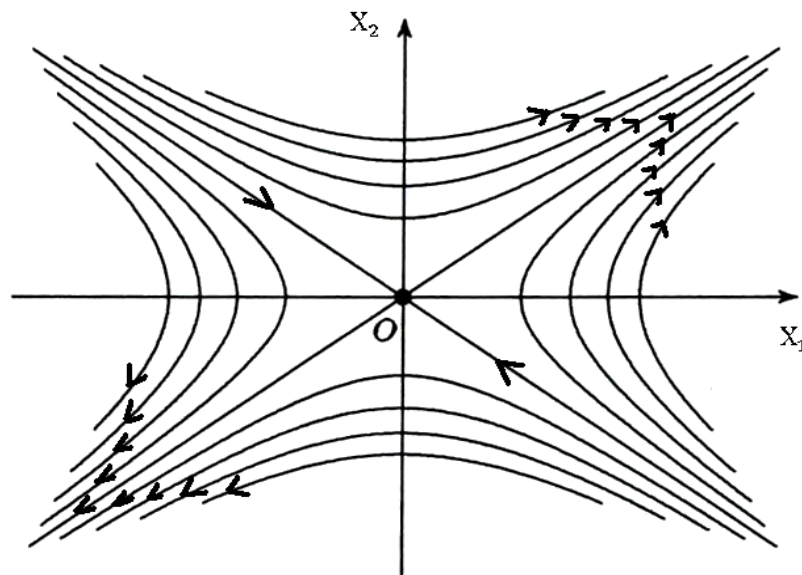


Рис. 14. Поведение траекторий в окрестности седла

Итак, система (12.2),(12.4) задаёт две неустойчивые линейные структуры.

Теперь попробуем, переключаясь с одной структуры на другую, стабилизировать систему, то есть добиться того, чтобы изображающая точка из любого начального положения приближалась к началу координат фазовой плоскости.

Для этого обратимся к выбору постоянного коэффициента C в соотношениях (12.3) или (12.4). Видно, что коэффициент Ψ переключается с одного значения на другое на прямых $x_1 = 0$ и $Cx_1 + x_2 = 0$.

Выбирая то или иное значение C , мы изменяем положение прямой переключения

$$Cx_1 + x_2 = 0.$$

Оказывается, характер движения в СПС (12.2), (12.4) зависит от взаимного положения прямых $x_2 = \lambda_2 x_1$ (вырожденная траектория) и $s = Cx_1 + x_2 = 0$ (прямая переключения). Рассмотрим этот вопрос подробнее. Прямые переключения $x = 0$, $s = 0$ разбивают фазовую плоскость на четыре сектора:

$$G_1 : x_1 > 0, s > 0;$$

$$G_2 : x_1 > 0, s < 0.$$

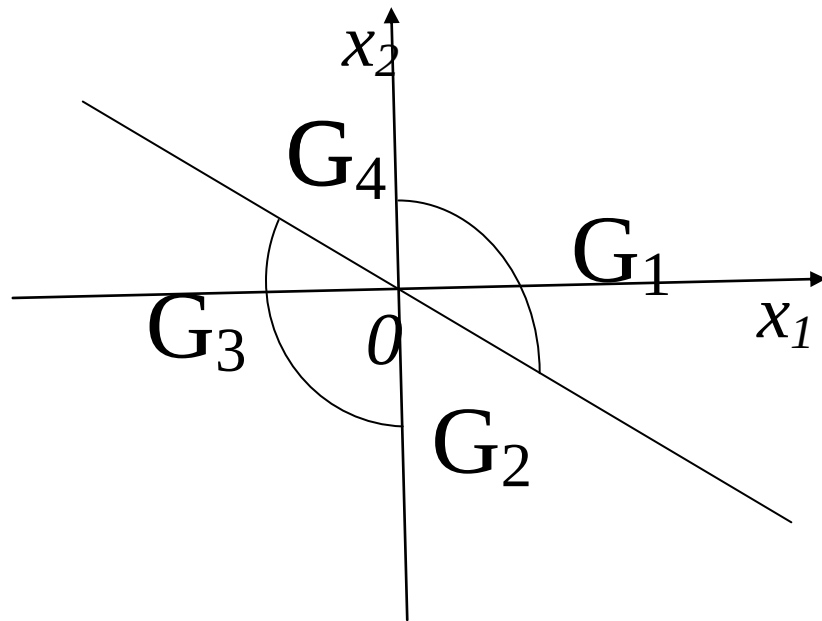


Рис. 15. Разделение фазовой плоскости

В секторах G_1 и G_3 коэффициент $\Psi = \alpha$, а в секторах G_2 и G_4 коэффициент $\Psi = \beta$. Получаем, что в G_1 и G_3 траектории ведут себя как в окрестности неустойчивого фокуса, а в секторах G_2 и G_4 как в окрестности седла.

Будем выбирать $C > 0$ следующим образом. Пусть, сначала $C = -\lambda$ т.е. прямая переключения совпадает с вырожденной траекторией.

Тогда точка из любого начального положения попадёт на вырожденную траекторию и по ней будет приближаться к началу. Такой режим движения в СПС, когда изменение структуры происходит на вырожденной траектории, которая соответствует вырожденному решению, приближающемуся к положению равновесия, называют *режимом движения по вырожденным траекториям*.

Как мы видим, этот режим обеспечивает стабилизацию системы. Однако из-за неточного знания действительных параметров объекта управления, неустойчивости работы управляющего устройства и других технических причин реально осуществить такой режим движения не представляется возможным. Малейшие отклонения будут уводить изображающую точку с устойчивой вырожденной траектории. Отклонения же эти обязательно присутствуют (в силу указанных выше причин) и не позволяют осуществлять переключение структур точно по прямой $s = 0$.

Выберем теперь

$$C > -\lambda_2 > 0.$$

При этом прямая

$$s = 0$$

будет расположена выше (круче) прямой

$$x_2 = \lambda_2 x_1.$$

В секторах G_2, G_4 (см. рис.15) вырожденной траектории не будет.

Анализ фазовой картины показывает, что в результате переключения структур на прямых изображающая точка будет приближаться к началу.

При этом структуры переключаются с некоторой конечной частотой и положение равновесия (начало координат) достигается в колебательном режиме. Такой режим движения в СПС называют *режимом переключения* (рис. 16).

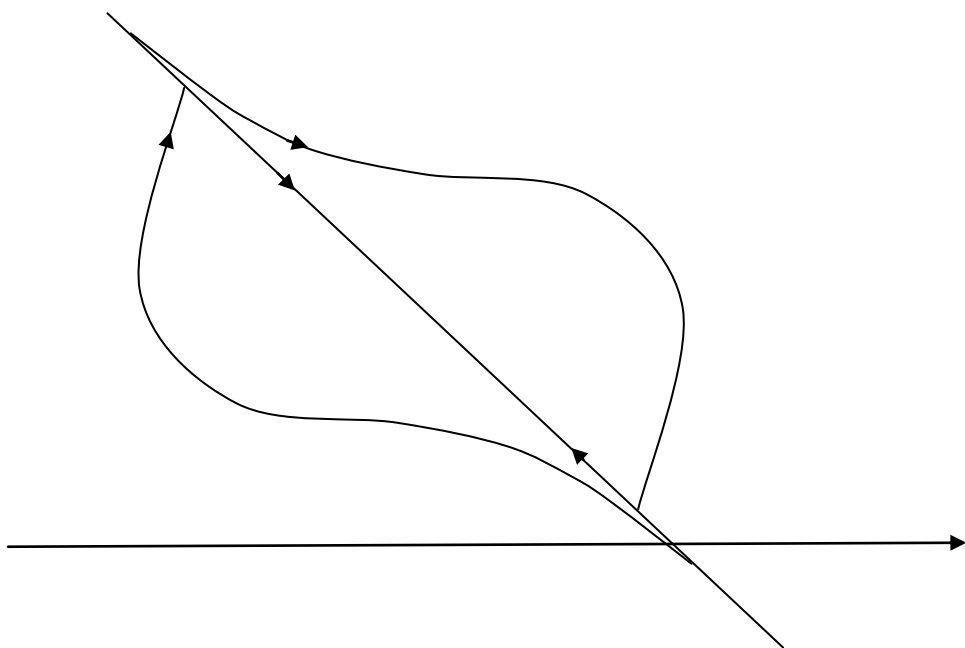
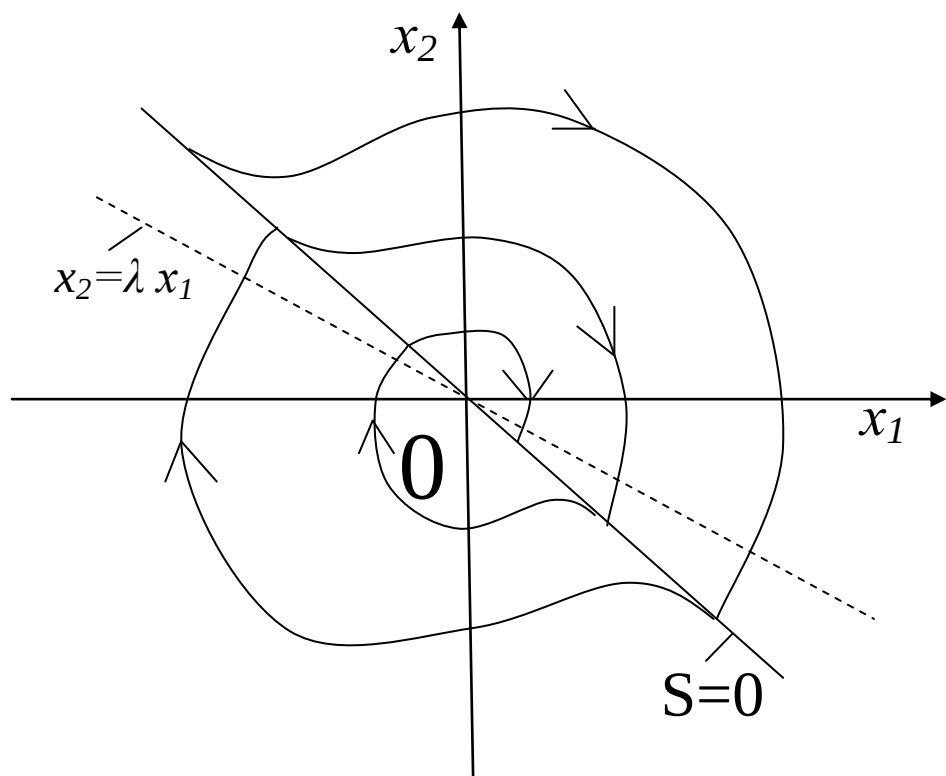


Рис. 16. Режим переключения

Пусть теперь $-\lambda_2 > C > 0$. Тогда прямая $s = 0$ будет расположена ниже прямой $x_2 = \lambda_2 x_1$. В секторах G_2, G_4 будет присутствовать вырожденная траектория. Анализируя фазовую картину, замечаем, что из любого начального положения изображающая точка попадает на прямую переключения $s = 0$. Поскольку переключение структур точно на прямой $s = 0$ осуществить практически невозможно, то в результате изображающая точка будет двигаться в окрестности прямой $s = 0$, и структура будут переключаться с одной на другую с бесконечно большой частотой. Действительно, в окрестности прямой $s = 0$ векторы фазовых скоростей направлены к этой прямой. Режим движения, при котором переключение структур осуществляется с бесконечно большой частотой, а прямая переключения не является фазовой траекторией ни для одной из линейных структур, называют *скользящим режимом*.

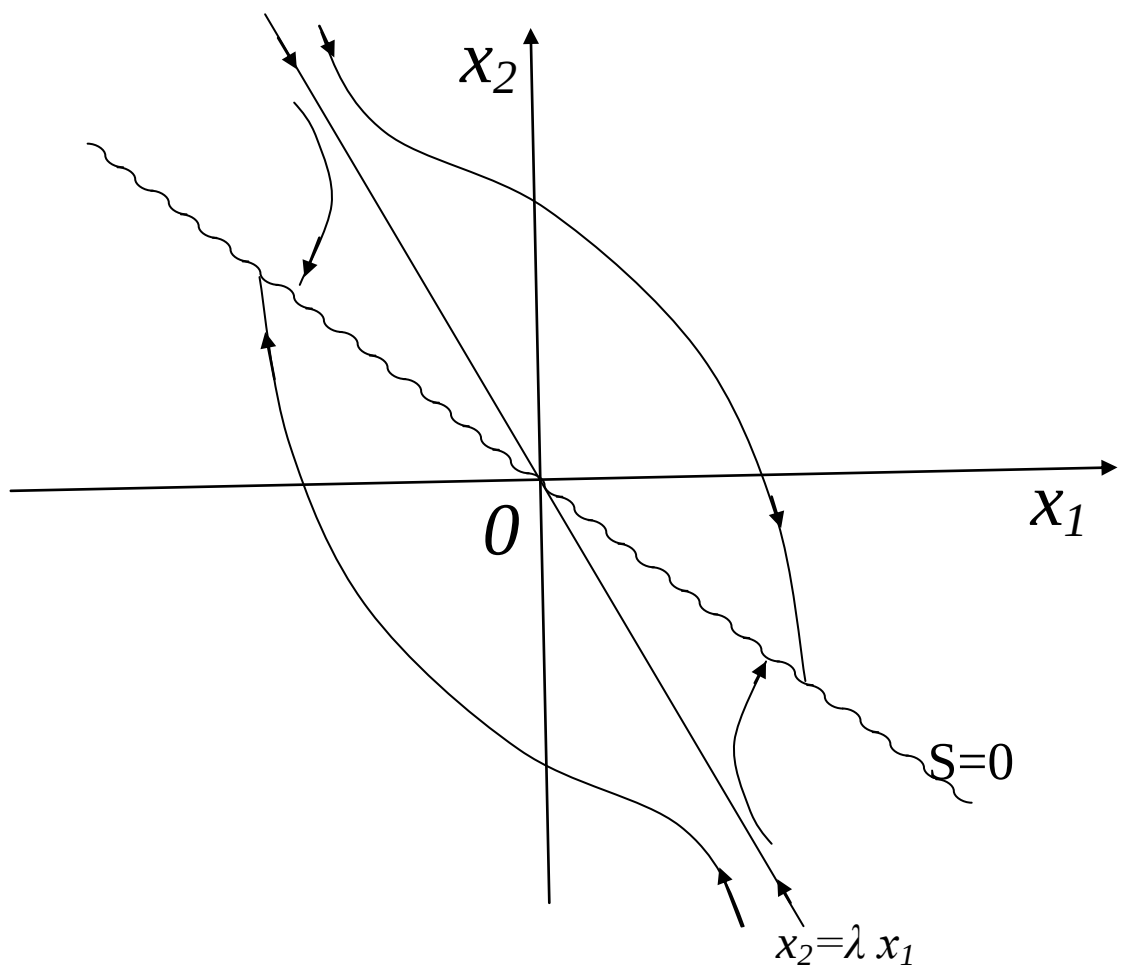


Рис. 17. Скользящий режим..

Этот режим можно также охарактеризовать как искусственное вырожденное движение. Скользящие режимы являются, в силу многих своих полезных качеств, основными режимами функционирования СПС, поэтому дальнейшее изложение будет посвящено именно этому виду движения. Следует отметить, что скользящие режимы появились не только в рамках теории СПС.

Подводя итог предварительному рассмотрению принципов построения СПС, ещё раз отметим, что наиболее плодотворным способом их функционирования является скользящий режим, идея искусственного введения которого заключается в следующем. В фазовом пространстве задаётся некоторое многообразие точек, являющееся пересечением поверхностей разрыва (переключения) $s_i = 0$. Пусть движение по этому многообразию обладает желаемыми свойствами (например, асимптотической устойчивостью). При этом траектории, лежащие на многообразии $s_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$, не принадлежат ни одной из имеющихся структур. Тогда последовательность изменения структур должна быть выбрана так, чтобы изображающая точка всегда попадала на указанное многообразие, а затем двигалась по нему. С момента попадания будет осуществляться искусственное вырожденное движение, которое может обладать рядом полезных свойств, не присущих ни одной из структур в отдельности. Это искусственное вырожденное движение и будем называть *скользящим режимом*. Термин "вырожденный" здесь означает тот факт, что многообразие движения в скользящем режиме имеет меньшую размерность, чем фазовое пространство, что существенно при работе с многомерными системами.

Библиографический список

Основная литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. - М.:Наука,1979.
2. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. - М.:Наука, 1984.
3. Жабко А.П., Прасолов А.В., Харитонов В.Л. Сборник задач и упражнений по теории управления. - М.: Высшая школа, 2003.
4. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. - М.: Наука, 1967.
5. Леонов Г.А. Введение в теорию управления. – СПб; СПбГУ, 2004.

Дополнительная литература

1. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. - М.: Наука, 1969.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. - М.: ИЛ, 1960.
3. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. - М.: Наука, 1973.
4. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. - М.: Наука, 2012.

5. Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П. Динамические модели теории управления. - М.: Наука, 1985.
6. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. - М.: Наука, 1972.
7. Zubov V.I. Lectures on control theory. - M.: Nauka, 2010.

Содержание

Введение.....	3
1. Понятие об управляемых объектах.....	4
2. Задача об оптимальном быстродействии.....	7
3. Метод динамического программирования.....	8
4. Принцип максимума.....	10
5. Задача синтеза.....	12
6. Основы теории устойчивости.....	16
7. Общая постановка задачи стабилизации	19
8. Построение стабилизирующего управления.....	22
9. Метод неопределенных коэффициентов.....	25
10. Время переходного процесса.....	30
11. Понятие переменной структуры.....	33
12. Принцип построения систем с переменной структурой...	40
Библиографический список.....	52

\