

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ»**

Кафедра высшей математики

Линейная алгебра

**Методические указания
и контрольные задания (№ 1, № 2, № 3)
для студентов-заочников
экономических специальностей**

Санкт-Петербург

2014

УДК 519.23.237.4

Линейная алгебра: методические указания и контрольные задания (№ 1, №2 ,№ 3) для студентов-заочников экономических специальностей;

сост. : Е. А. Титова, И.Ю. Малова, О.Е. Куляхтина; СПбГТУРП. - СПб., 2014.-20с.

Приведены задачи для выполнения контрольных работ студентами-заочниками направлений 38.03.01, 38.03.02 «Экономика» и «Менеджмент». Даны примеры решений аналогичных заданий.

Рецензент: доцент кафедры физики СПбГТУРП, канд.физ.-мат. наук М.Н. Полянский.

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол № 3 от 11 ноября 2013 г.).

Утверждены к изданию методической комиссией факультета промышленной энергетики СПбГТУРП (протокол № 3 от 15 ноября 2013 г.).

Редактор и корректор В.А. Басова

Техн. редактор Л.Я. Титова

Темплан 2014г., поз.23

Подп. к печати 09.06.14 г. Формат 60х84/16. Бумага тип № 1.

Печать офсетная. Объём 1,25 печ.л.;1,25 уч.-изд. л. Тираж 100 экз.

Изд. № 23. Цена «С». Заказ

Ризограф Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4

© Санкт-Петербургский государственный
технологический университет
растительных полимеров, 2014

Предисловие

Курс высшей математики состоит из четырех частей в соответствии с количеством семестров, в течение которых он изучается. В каждом семестре студент заочной формы обучения должен выполнить определенное количество контрольных работ. Данное пособие включает задания контрольных работ, которые должны быть выполнены в первом семестре. Таблицы для выбора задач представлены в конце пособия. Также представлены задачи с решениями, которые помогут в выполнении контрольных работ.

Задачи с решениями

1. Вычислить определитель 4-го порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение: Преобразуем определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Выберем в качестве ненулевого элемента $a_{13} = 1$ и с его помощью обратим все остальные элементы 3-го столбца в нуль. С этой целью:

а) к элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки;

б) из элементов 3-й строки вычтем элементы 1-й строки, умноженные на 2;

в) из элементов 4-й строки вычтем элементы 1-й строки

(напомним, что при этом величина определителя не изменится). Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по 3-му столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 1-й строки нового определителя удвоенные элементы 2-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

и разложим этот определитель по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot (0 - 3 \cdot (-1)) = -9.$$

2. Найти матрицу $5A - 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$5A = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \end{pmatrix}, 2B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix}, 5A - 2B = \begin{pmatrix} 10-8 & -15-6 & 5-4 \\ -5+6 & 0-2 & -10+8 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Итак, $5A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$

3. Найти произведение матриц AB , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение: Проверим возможность перемножения матриц, определив их размерность.

$A[2 \times 4]$, $B[4 \times 2]$. Следовательно, $n = l = 4$, $m = k = 2$, поэтому матрица AB существует, причем $AB[2 \times 2]$.

Для вычисления элементов матрицы $C = AB$ элементы строк матрицы A умножаются на соответствующие элементы столбцов матрицы B :

$$c_{11} = 2 \cdot 2 + (-2)(-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 9$$

(сумма произведений элементов первой строки A на элементы первого столбца B ; первый индекс вычисляемого элемента задает номер строки A , второй индекс – номер столбца B);

$$c_{12} = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5;$$

$$c_{21} = -3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -9;$$

$$c_{22} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -3.$$

Следовательно, $C = AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: Вычислим определитель матрицы A разложением по первому столбцу:

$$\Delta_A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, обратная матрица для матрицы A существует.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3; A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Значит,

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение: У матрицы A существуют миноры до 4-го порядка включительно, поэтому $\text{rang}(A) \leq 4$. Разумеется, непосредственное вычисление всех миноров 4-го, 3-го и т.д. порядка потребовало бы

слишком много времени. Поэтому, используя элементарные преобразования, приведем матрицу A к треугольному виду. Поменяем местами 1-ю и 2-ю строки, чтобы элемент a_{11} стал равным 1:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке первую, ко второй – удвоенную первую, к четвертой – первую, умноженную на 3. Тогда все элементы 1-го столбца, кроме a_{11} , окажутся равными нулю:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вычтем вторую строку полученной матрицы из третьей и четвертой строк:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и вычеркнем нулевые строки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы A равен рангу полученной матрицы размера 2×6 , т.е.

$$r(A) \leq 2. \text{ Минор } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

следовательно, $r(A) = 2$.

6. Решить систему при помощи формул Крамера:
$$\begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \end{cases}.$$

Решение: Главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

Найдем Δ_x , Δ_y и Δ_z :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

$$\text{Отсюда } x = \frac{D_x}{D} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{36}{9} = 4, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{18}{9} = 2.$$

7. Решить систему методом обратной матрицы:
$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ 5x - 4y - 7z = 4 \end{cases}.$$

Решение. Составим матрицу коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$

$\Delta_A = -51 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение.

Найдем обратную матрицу A^{-1} . Для этого найдем алгебраические дополнения.

$$A_{11} = -11; \quad A_{21} = -25; \quad A_{31} = 2;$$

$$A_{12} = 9; \quad A_{22} = -12; \quad A_{32} = 3;$$

$$A_{13} = -13; \quad A_{23} = -11; \quad A_{33} = 7.$$

Тогда $A^{-1} = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$

Если $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, то исходная система представима в виде матричного уравнения $AX = B$, решение которого $X = A^{-1}B$. Следовательно,

$$X = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11-150+8 \\ 9-72+12 \\ -13-66+28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -153 \\ -51 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть $x = 3, y = 1, z = 1$.

8. Решить систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ x + 4y + z = 4 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Решение. Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для удобства его применения поменяем местами 1-е и 2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при x равнялся единице:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ 3x - y + 2z = 9 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Теперь исключим x из второго и третьего уравнений. Для этого вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 3, а из третьего – первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ -13y - z = -3 \\ -11y + z = 3 \end{cases}.$$

Далее можно легко исключить z из третьего уравнения, если прибавить к нему второе:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ -13y - z = -3 \\ -24y = 0 \end{cases}$$

Из последнего уравнения получаем, что $y = 0$. Подставляя это значение в первое и второе уравнения, находим остальные неизвестные: $z = 3$, $x = 1$.

Итак, $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

10. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

11. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

14. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

15. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

16. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

17. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

18. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

19. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

20. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $A^2 - BA + 2A$.

21. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $B^2 + BA + 4A$.

22. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $A^2 - 2BA + A$.

23. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ вычислить

матричный многочлен $2A^2 + BA - 3A$.

24. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ вычислить

матричный многочлен $B^2 - BA + 4A$.

25. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ вычислить

матричный многочлен $A^2 + BA + 3B$.

26. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ вычислить

матричный многочлен $A^2 - BA + 4B$.

27. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ вычислить

матричный многочлен $B^2 - BA + 3A$.

28. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ вычислить

матричный многочлен $A^2 + 3BA - 2B$.

29. Для матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ вычислить

матричный многочлен $A^2 - BA + 4A$.

30. Вычислить обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

31. Вычислить обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

32. Вычислить обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
33. Вычислить обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 13 & -5 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.
34. Вычислить обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 17 & 4 \\ 5 & 16 & 3 \end{pmatrix}$.
35. Вычислить обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.
36. Вычислить обратную матрицу для матрицы
37. Вычислить обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.
38. Вычислить обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.
39. Вычислить обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
40. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
41. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$.
42. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

43. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 16 & 4 & 52 & 9 \\ 8 & -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

44. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

45. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

46. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

47. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

48. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 16 & 4 & 52 & 9 \\ 8 & -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

49. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -3 & 10 \\ 17 & 1 & -7 & 22 \\ 3 & 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

50. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и при

помощи формул Крамера $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29. \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$

51. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и при помощи формул Крамера
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1. \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$
52. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и при помощи формул Крамера
$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4. \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$
53. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и при помощи формул Крамера
$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11. \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$
54. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и при помощи формул Крамера
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -2 \\ -4x + 5y + 6z = -10. \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$
55. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и при помощи формул Крамера
$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -9 \\ -x - 3y + 6z = 13. \\ 2x + 5y - z = -4 \end{cases}$$
56. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и при помощи формул Крамера
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 4 \\ 2x + 3y - 4z = 3. \\ -x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$
57. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и при помощи формул Крамера
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2. \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$
58. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и при помощи формул Крамера
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 2y + 3z = 3. \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$
59. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и при помощи формул Крамера
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 4x + y + 5z = 10. \\ -x + 10y - z = 8 \end{cases}$$

60. Решить систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} 2x + y - 5z - t = 2 \\ x - 2y + 2t = 1 \\ -x + 3y - z - 3t = -1 \\ x - y - z + t = 1 \end{cases}$
61. Решить систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} x + 2y - z - 2t = 5 \\ -2x - y + 2z + t = -4 \\ -x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = -1 \end{cases}$
62. Решить систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} 2x + y - 5z - t = 2 \\ x - 2y + 2t = 1 \\ -x + 3y - z - 3t = -1 \\ x - y - z + t = 1 \end{cases}$
63. Решить систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} 5x + y - 8z + 10t = -5 \\ 2x + y - 2z + t = 1 \\ -3x - 2y + 2z + t = -4 \\ x + 2y + 2z - 7t = 8 \end{cases}$
64. Решить систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5t = 3 \\ -y - t = -1 \\ x - 3z + 8t = -1 \\ x + 2y - 4z + 3t = 0 \end{cases}$
65. Решить систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} 2x - y + 5t = 6 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ -x + 2y + 4z + t = 10 \\ -y - z + 3t = 0 \end{cases}$
66. Решить систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5t = 3 \\ -y - t = -1 \\ x - 3z + 8t = -1 \\ x + 2y - 4z + 3t = 0 \end{cases}$
67. Решить систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} 2x + y - 5z - t = 2 \\ x - 2y + 2t = 1 \\ -x + 3y - z - 3t = -1 \\ x - y - z + t = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 68. \quad & \text{Решить систему уравнений методом Гаусса} \begin{cases} 2x + y - 5z - t = 2 \\ x - 2y + 2t = 1 \\ -x + 3y - z - 3t = -1 \\ x - y - z + t = 1 \end{cases} \\
 69. \quad & \text{Решить систему уравнений методом Гаусса} \begin{cases} 2x + y - 5z - t = 2 \\ x - 2y + 2t = 1 \\ -x + 3y - z - 3t = -1 \\ x - y - z + t = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

70. Написать разложение вектора $\bar{x}(6, 12, -1)$ по векторам $\bar{p}(1, 3, 0), \bar{q}(2, -1, 1), \bar{r}(0, -1, 2)$.

71. Написать разложение вектора $\bar{x}(1, -4, 4)$ по векторам $\bar{p}(2, 1, -1), \bar{q}(0, 3, 2), \bar{r}(1, -1, 1)$.

72. Написать разложение вектора $\bar{x}(-5, -5, 5)$ по векторам $\bar{p}(-2, 0, 1), \bar{q}(1, 3, -1), \bar{r}(0, 4, 1)$.

73. Написать разложение вектора $\bar{x}(6, 5, -14)$ по векторам $\bar{p}(1, 1, 4), \bar{q}(0, -3, 2), \bar{r}(2, 1, -1)$.

74. Написать разложение вектора $\bar{x}(-5, -5, 5)$ по векторам $\bar{p}(-2, 0, 1), \bar{q}(1, 3, -1), \bar{r}(0, 4, 1)$.

75. Написать разложение вектора $\bar{x}(8, 1, 12)$ по векторам $\bar{p}(1, 2, -1), \bar{q}(3, 0, 2), \bar{r}(-1, 1, 1)$.

76. Написать разложение вектора $\bar{x}(2, -1, 11)$ по векторам $\bar{p}(2, 1, -1), \bar{q}(0, 3, 2), \bar{r}(1, -1, 1)$.

77. Написать разложение вектора $\bar{x}(3, 1, 8)$ по векторам $\bar{p}(0, 1, 3), \bar{q}(1, 2, -1), \bar{r}(2, 0, -1)$.

78. Написать разложение вектора $\bar{x}(8, 0, 5)$ по векторам $\bar{p}(2, 0, 1), \bar{q}(1, 1, 0), \bar{r}(4, 1, 2)$.

79. Написать разложение вектора $\bar{x}(2, -1, 11)$ по векторам $\bar{p}(1, 1, 0), \bar{q}(0, 1, -2), \bar{r}(1, 0, 8)$.

80. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. $A(6, 5, 1), B(0, 1, 2), C(2, 1, 0)$.

81. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. $A(5, 4, 2), B(1, 2, 3), C(3, 2, 1)$.

82. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. $A(2, 0, 4)$, $B(1, 1, 1)$, $C(3, 2, 1)$.
83. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 0)$, $C(3, 2, 1)$.
84. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(2, 3, -1)$.
85. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. $A(3, -3, 1)$, $B(-3, -2, 0)$, $C(5, 0, 2)$.
86. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. $A(4, 2, 1)$, $B(0, 4, 5)$, $C(1, 2, 7)$.
87. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. $A(1, 0, 2)$, $B(2, 4, 3)$, $C(1, 7, 1)$.
88. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. $A(5, -1, 3)$, $B(2, 0, 1)$, $C(3, 1, -1)$.
89. Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. $A(0, 8, 1)$, $B(2, 1, 1)$, $C(-1, 4, 5)$.
90. Определить направляющие косинусы вектора силы $F(3, 3, 3)$. Найти момент силы F , приложенной в точке $B(3, -1, 5)$, относительно точки $A(4, -2, 3)$.
91. Определить направляющие косинусы вектора силы $F(4, 4, 4)$. Найти момент силы F , приложенной в точке $B(4, -2, 5)$, относительно точки $A(5, -3, 3)$.
92. Определить направляющие косинусы вектора силы $F(8, -8, 8)$. Найти момент силы F , приложенной в точке $B(10, -8, 1)$, относительно точки $A(9, -7, 3)$.
93. Определить направляющие косинусы вектора силы $F(-2, 2, -2)$. Найти момент силы F , приложенной в точке $B(11, -9, 1)$, относительно точки $A(10, -8, 3)$.
94. Определить направляющие косинусы вектора силы $F(5, 5, 5)$. Найти

момент силы F , приложенной в точке $B(5, -3, 5)$, относительно точки $A(6, -4, 3)$.

95. Определить направляющие косинусы вектора силы $F(-3, 3, -3)$. Найти момент силы F , приложенной в точке $B(12, -10, 1)$, относительно точки $A(11, -9, 3)$.

96. Определить направляющие косинусы вектора силы $F(6, 6, 6)$. Найти момент силы F , приложенной в точке $B(6, -4, 5)$, относительно точки $A(7, -5, 3)$.

97. Определить направляющие косинусы вектора силы $F(-4, 4, -4)$. Найти момент силы F , приложенной в точке $B(13, -11, 1)$, относительно точки $A(12, -10, 3)$.

98. Определить направляющие косинусы вектора силы $F(7, 7, 7)$. Найти момент силы F , приложенной в точке $B(7, -5, 5)$, относительно точки $A(8, -6, 3)$.

99. Определить направляющие косинусы вектора силы $F(-5, 5, -5)$. Найти момент силы F , приложенной в точке $B(14, -12, 1)$, относительно точки $A(13, -11, 3)$.

Таблица контрольных заданий

вариант	Контрольная работа №1	Контрольная работа №2	Контрольная работа №3
1	11 21 31 41	51 61	71 81 91
2	12 22 32 42	52 62	72 82 92
3	13 23 33 43	53 63	73 83 93
4	14 24 34 44	54 64	74 84 94
5	15 25 35 45	55 65	75 85 95
6	16 26 36 46	56 66	76 86 96
7	17 27 37 47	57 67	77 87 97
8	18 28 38 48	58 68	78 88 98
9	19 29 39 49	59 69	79 89 99
10	10 20 30 40	50 60	70 80 90

Библиографический список

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 2005. Ч. 1, 2.
2. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. - М.: Айрис-пресс, 2007.
3. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов. - М.: Юнити-Дана, 2007.
4. Введенская Е.В., Виск Н.Д., Гуторина Т.А. Линейная алгебра.- М.: ГОУВПО «МАТИ» - Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского, 2005.

Содержание

Предисловие.....	3
Задачи с решениями.....	-
Задачи для самостоятельного решения.....	10
Таблица контрольных заданий.....	19