

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ»**

Кафедра высшей математики

Уравнения математической физики

**Методические указания
для студентов вечернего и заочного отделений**

**Санкт-Петербург
2014**

УДК 51(07.07)

Уравнения математической физики: методические указания для студентов вечернего и заочного отделений /сост. : О.Е.Куляхтина, М.Э. Юдовин, Т.А.Забавникова, Е.А.Титова; СПбГТУРП – СПб., 2014.- 22с.

В методических указаниях излагаются основные положения математической физики. Рассмотрены основные уравнения матфизики и способы их решения . Рекомендуются для студентов вечернего и заочного отделений технического и технологического профилей.

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики СПбГТУРП (протокол № 2 от 16 октября 2013 г.).

Утверждены к изданию методической комиссией факультета промышленной энергетики СПбГТУРП (протокол № 3 от 6 ноября 2013 г.).

Рецензент: профессор кафедры прикладной математики и информатики, д-р физ.-мат. наук С.П.Помыткин.

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены для студентов дневного и вечернего отделений инженерно-технических специальностей. Они посвящены основным типам уравнений в частных производных и некоторым методам их решения.

Уравнения математической физики описывают математические модели физических явлений. Многие явления физики и механики (гидро- и газодинамики, упругости, электродинамики, квантовой физики, теории гравитации) описываются краевыми задачами для дифференциальных уравнений в частных производных. Для полного описания физических процессов, помимо уравнений, необходимо, во-первых, задать картину процесса в некоторый фиксированный момент (*начальные условия*) и, во-вторых, задать режим на границе той среды, где протекает этот процесс (*граничные условия*). Начальные и граничные условия образуют *краевые условия*, а дифференциальные уравнения вместе с соответствующими краевыми условиями – краевые задачи математической физики.

1. ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Основные определения

Функция двух переменных определяется следующим образом:

Рассмотрим множество E упорядоченных пар чисел (x, y) . Если в силу некоторого закона каждой паре (x, y) из E поставить в соответствие число $z \in U$, то говорят, что на множестве E определена функция $z = f(x, y)$ от двух переменных x и y .

Так как каждой паре чисел (x, y) соответствует на плоскости точка M с координатами (x, y) , то функция $z = f(x, y)$ задана на множестве E точек плоскости.

Функцию $z = f(x, y)$ можно изобразить в трёхмерном пространстве, где задана прямоугольная декартова система координат (x, y, z) в виде множества точек $(x, y, f(x, y))$, которые являются поверхностью в трёхмерном пространстве.

Например: график функции

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \text{ где } x^2 + y^2 \leq 1$$

- это верхняя половина сферы единичного радиуса с центром в начале координат.

Множество E называют областью определения функции, а множество U , состоящее из чисел $z=f(x,y)$, где $(x,y) \in E$ – множество значений функции.

Значение функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x_0, y_0)$ называется частным значением функции и обозначается $f(x_0, y_0)$ или $f(M)$.

Область определения функции $z=f(x,y)$ представляет собой либо часть плоскости, либо всю плоскость.

Замечание:

Так же определяется функция трех переменных $u = f(x, y, z)$, где независимыми переменными являются x, y, z , а область определения функции – область трехмерного пространства.

2. Частные производные первого порядка

Частной производной от функции $z = f(x,y)$ по независимой переменной x называется конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y),$$

вычисленный при постоянном y .

Частной производной по y называется конечный предел

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y),$$

вычисленный при постоянном x .

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Частными производными второго порядка от функции $z = f(x,y)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков.

Если производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ непрерывны, то они равны.

II. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

1. Дифференциальные уравнения с частными производными

Обозначим через D область трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ точек (x, y, z) , где x, y, z – декартовы координаты точки.

Уравнение вида

$$F \left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1)$$

называется дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка относительно неизвестной функции

$$u = u(x, y, z), \text{ где}$$

$$F = F \left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right)$$

- заданная действительная функция точек (x, y, z) , неизвестной функции u и ее частных производных.

Функция $u = u(x, y, z)$, определенная в области D задания уравнения, удовлетворяющая данному уравнению (1), называется *решением* или *интегралом* дифференциального уравнения с частными производными.

Общее решение данного уравнения n -го порядка содержит, как правило, произвольные функции. Выделение частных интегралов производится путем задания дополнительных условий, т.е. условий, налагаемых на функцию u и ее производные, на поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3$ (*краевые условия, начальные условия*).

Дифференциальное уравнение (1) называется *линейным*, если F - линейная функция от u и ее частных производных.

2. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка

Обозначим через D область пространства $\mathbb{R}^2$ точек (x, y) .

Линейное уравнение второго порядка можно записать в виде:

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + h(x, y)u = f(x, y),$$

$$u = u(x, y).$$
(3)

Данное уравнение (3) является в точке (x, y) :

уравнением *гиперболического* типа, если

$$b^2 - ac > 0,$$

уравнением *параболического* типа, если

$$b^2 - ac = 0,$$

уравнением *эллиптического* типа, если

$$b^2 - ac < 0.$$

3. Основные типы уравнений математической физики

Основными уравнениями математической физики называют (для случая функции двух независимых переменных) следующие дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.

1) Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

К этому уравнению приводит рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, электрических колебаний в проводе, колебаний газа и т.д. Это уравнение является простейшим уравнением *гиперболического* типа.

2) Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2)$$

К этому уравнению приводит рассмотрение процессов распространения тепла. Это уравнение является простейшим уравнением *параболического* типа.

3) Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

К этому уравнению приводит рассмотрение задач о стационарном тепловом состоянии, задач гидродинамики, диффузии. Это уравнение является простейшим уравнением *эллиптического* типа.

В уравнениях (1), (2), (3) искомая функция u зависит от двух переменных, и каждое уравнение является однородным.

Можно рассмотреть также соответствующие уравнения для функции трех переменных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad - \text{ волновое уравнение,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad - \text{ уравнение теплопроводности,}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad - \text{ уравнение Лапласа.}$$

III. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. Частный случай

Иногда уравнение удастся преобразовать введением новых независимых переменных и новой искомой функции таким образом, что его общее решение можно получить в явном виде.

Например, рассмотрим уравнение:

$$f_1(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(g_1(y) \frac{\partial u}{\partial y} + g_2(y) \right) + f_2(x) \left(g_1(y) \frac{\partial u}{\partial y} + g_2(y) \right) = 0$$

Обозначим $g_1(y) \frac{\partial u}{\partial y} + g_2(y) = v$,

Тогда из исходного уравнения получим уравнение в виде:

$$f_1(x) \frac{\partial v}{\partial x} + f_2(x) v = 0$$

Полученное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно v и x .

После нахождения функции v уравнение

$$v = g_1(y) \frac{\partial u}{\partial y} + g_2(y)$$

позволяет найти функцию u - искомое решение.

Пример:

Найти общее решение уравнения:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 2x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Решение:

Заметим, что

$$x^2 \cdot v'_x + 2xv = (x^2 \cdot v)'_x$$

таким образом уравнение равносильно:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 ,$$

следовательно

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = \overline{C}_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \overline{C}_1(y) ,$$

и

$$u = \int \frac{1}{x^2} \overline{C}_1(y) dy = \frac{1}{x^2} \int \overline{C}_1(y) dy + C_2(x).$$

Обозначив $\int \overline{C}_1(y) dy = C_1(y)$, окончательно получим:

$$u = \frac{1}{x^2} C_1(y) + C_2(x).$$

2. Уравнение колебаний струны

Решение уравнения свободных колебаний струны, закрепленной на концах, методом разделения переменных

Метод разделения переменных (или метод Фурье) является типичным для решения многих задач математической физики.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0; \\ u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Метод Фурье заключается в нахождении решения $u(x, t)$ в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одного аргумента:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Для каждой такой функции имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = T(t) \frac{\partial X}{\partial x} = T(t) \cdot X' = T \cdot X',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T \cdot X'',$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X \cdot T', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X \cdot T''.$$

После подстановки в волновое уравнение получим:

$$X \cdot T'' = a^2 T \cdot X'' \quad \text{или} \quad \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

Так как левая часть последнего уравнения зависит только от t , а правая только от x , равенство возможно при постоянном значении:

$$\begin{cases} \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2 \\ \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \end{cases}$$

($-\lambda^2 < 0$: в другом случае решение не будет удовлетворять краевой задаче)

Или

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ T'' + a^2 \lambda^2 T = 0 \end{cases}$$

Решение системы:

$$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x,$$

$$T = C \cos a\lambda t + D \sin a\lambda t,$$

и $u(x; t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)(C \cos a\lambda t + D \sin a\lambda t).$

Воспользуемся условием $u(0, t) = 0 = u(l, t)$:

$$\begin{aligned} A \cos \lambda \cdot 0 + B \sin \lambda \cdot 0 &= 0 \Rightarrow A = 0, \\ B \sin \lambda l &= 0 \text{ и } B \neq 0, \text{ т.к. тогда } u(x, t) = 0, \\ \text{значит, } \lambda l &= \pi n \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{n\pi}{l}. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} u_n(x; t) &= \left(\overline{C}_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + \overline{D}_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \cdot B \sin \frac{n\pi}{l} x = \\ &= \left(C_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + D_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x, \end{aligned}$$

где $C_n = \overline{C}_n \cdot B$; $D_n = \overline{D}_n \cdot B$.

Теперь учтем $u(x, 0) = f(x)$:

$$C_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x).$$

Так как волновое уравнение линейно и однородно, сумма решений также будет решением уравнения.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

– разложение в ряд Фурье функции $f(x)$.

Поэтому

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx.$$

Аналогично можно получить D_n :

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{2}{a\pi n} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \\ u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t). \end{aligned}$$

Окончательно

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + D_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Задача 1:

Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$; $u(x, 0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, где

$$f(x) = \frac{2u_0 x}{l}, \quad \text{при } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$f(x) = -\frac{2u_0 x}{l} + 2u_0, \quad \text{при } \frac{l}{2} < x \leq l.$$

Решение:

Следуя методу Фурье, найдем коэффициенты C_n и D_n .

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

При вычислении интегралов вида $\int x \sin \frac{n\pi}{l} x dx$ работаем методом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx &= \\ &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{2u_0}{l} x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx + \int_{\frac{l}{2}}^l -\frac{2u_0 x}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x dx + \int_{\frac{l}{2}}^l 2u_0 \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \\ &= \frac{2u_0}{l} \left(\int_0^{\frac{l}{2}} x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx - \int_{\frac{l}{2}}^l x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx + l \int_{\frac{l}{2}}^l \sin \frac{n\pi}{l} x dx \right) = \\ &= \\ \frac{2u_0}{l} \left(\frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{l^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sin n\pi + \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{l^2}{n\pi} \cos n\pi - \right. \\ &\quad \left. \frac{l^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{l^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{l^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{4u_0}{n^2\pi^2} l \cdot \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Так как $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$, если $n=2k$;

$$\sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^k, \text{ если } n = 2k + 1, \text{ то}$$

$$C_n = 0, \text{ если } n=2k \text{ и } C_n = \frac{8u_0}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}, \text{ если } n = 2k + 1.$$

$$D_n = 0, \text{ так как } \varphi(x)=0 \text{ по условию.}$$

Запишем решение:

$$u(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \frac{8u_0}{\pi^2} \cos \frac{a(2k+1)}{l} t \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x.$$

Задача 2:

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее условиям:

$$u(0, t) = u(2, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{4} \sin \frac{3\pi x}{2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin \pi x.$$

Решение:

Здесь имеет место задача свободных колебаний струны, закрепленной на концах (в точках 0 и 2). Имеем $a^2 = 9$, т.е. $a = 3$; $l = 2$. Поэтому решение ищем в виде:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{3\pi n}{2} t + D_n \sin \frac{3\pi n}{2} t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{2} x.$$

Подставим $t = 0$:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos 0 + D_n \sin 0) \cdot \sin \frac{\pi n}{2} x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{2} x$$

Используя первое начальное условие, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{2} x = \frac{1}{4} \sin \frac{3\pi}{2} x.$$

Можно подобрать коэффициенты C_n так, чтобы равенство выполнялось тождественно:

$$\frac{\pi n}{2} x = \frac{3\pi}{2} x \quad \text{при } n = 3, \text{ следовательно } C_3 = \frac{1}{4}; C_n = 0, \text{ если } n \neq 3.$$

Чтобы использовать второе начальное условие, продифференцируем $u(x, t)$ по t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3\pi n}{2} C_n \sin \frac{3\pi n}{2} t + \frac{3\pi n}{2} D_n \cos \frac{3\pi n}{2} t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{2} x$$

и подставим $t = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3\pi n}{2} C_n \cdot \sin 0 + \frac{3\pi n}{2} D_n \cdot \cos 0 \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{2} x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\pi n}{2} D_n \sin \frac{\pi n}{2} x ; \end{aligned}$$

таким образом, получаем условие $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\pi n}{2} D_n \cdot \sin \frac{\pi n}{2} x = \sin \pi x$
и подбираем коэффициенты:

$$\frac{\pi n}{2} x = \pi x \quad \text{при } n = 2, \quad \frac{3\pi 2}{2} D_2 = 1 \Rightarrow D_2 = \frac{1}{3\pi}; D_n = 0, n \neq 2.$$

Итак, имеется всего два ненулевых слагаемых при $n = 2$ ($D_2 = \frac{1}{3\pi}$) и при $n = 3$ ($C_3 = \frac{1}{4}$). Окончательно получаем решение:

$$u(x, t) = D_2 \sin \frac{3\pi 2}{2} t \cdot \sin \frac{\pi 2}{2} x + C_3 \cos \frac{3\pi 3}{2} t \cdot \sin \frac{\pi 3}{2} x =$$

$$= \frac{1}{3\pi} \sin 3\pi t \cdot \sin \pi x + \frac{1}{4} \cos \frac{9\pi}{2} t \cdot \sin \frac{3\pi}{2} x$$

3. Формула Даламбера для волнового уравнения

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения в области D:
 $-\infty < x < \infty, t > 0$.

Найти решение $u = u(x, t)$ уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (1),
 удовлетворяющее начальным условиям $u(x, 0) = f(x); \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = F(x)$.

Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что решением (1) является функция вида:

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \tau(x + at),$$

где φ и τ - произвольные, дважды дифференцируемые функции.

Полученное решение, зависящее от двух произвольных функций, называется решением *Даламбера*.

Используя начальные условия, найдём функции φ и τ :

$$\varphi(x) + \tau(x) = f(x) \quad (2)$$

$$-a\varphi'(x) + a\tau'(x) = F(x) \quad (3)$$

Интегрируя (3) на отрезке $[0; x]$, получим

$$-\varphi(x) + \tau(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(x) dx + c$$

Из последнего и (2) находим

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx - \frac{c}{2} \\ \tau(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(y) dy + \frac{c}{2} \end{cases}$$

Решение задачи Коши запишется в виде

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \tau(x + at)$$

или

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(y) dy$$

-это и есть формула Даламбера.

Пример:

Найти решение волнового уравнения для заданных начальных условий:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ; u(x, 0) = \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x - 1.$$

Решение:

Имеем задачу свободных колебаний бесконечной струны (без краевых условий). Применяем формулу Даламбера:

$$\begin{aligned} u(x; t) &= \frac{\cos(x - \frac{1}{2}t) + \cos(x + \frac{1}{2}t)}{2} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} (x-1) dx = \\ &= \frac{2 \cos x \cdot \cos \frac{t}{2}}{2} + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Bigg|_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} = \cos x \cdot \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \left((x + \frac{1}{2}t)^2 - (x - \frac{1}{2}t)^2 \right) + \\ &+ (x + \frac{1}{2}t) - (x - \frac{1}{2}t) = \cos x \cdot \cos \frac{t}{2} + xt + t. \end{aligned}$$

4. Уравнение теплопроводности. Решение однородного уравнения теплопроводности методом Фурье

Уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t)$$

с краевыми условиями $u(0, t) = u(l, t) = 0$ и начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$ описывает закон распределения температуры в однородном стержне длины l , на концах которого поддерживается нулевая температура.

Функция $F(x, t)$ характеризует существующие внутри стержня точки (источники), выделяющие или поглощающие тепло. Если такие источники отсутствуют, $F(x, t) = 0$ и уравнение называется однородным.

Решение однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

для начального условия $u(x, 0) = \varphi(x)$ и граничных условий $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$ будем искать методом разделения переменных.

$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, где $X(x)$ – зависит только от x , а $T(t)$ зависит только от t .

Подставляя $X(x) \cdot T(t)$ в уравнение, после преобразований получим

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Так как левая часть последнего уравнения зависит только от t , а правая – только от x , равенство возможно при постоянном значении:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = -\lambda \\ \frac{X''}{X} = -\lambda \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + a^2 \lambda T = 0 \end{cases}$$

Граничные условия дают $X(0) = 0$, $X(l) = 0$, и аналогично применению метода Фурье для волнового уравнения, решение $X'' + \lambda X = 0$ существует, если $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$. Тогда $X_n = \sin \frac{\pi n}{l} x$ и $T_n = C_n e^{-a^2 \lambda_n t}$, таким образом $u_n(x, t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{\pi n}{l} x$ являются решениями однородного уравнения теплопроводности, удовлетворяющими нулевым граничным условиям. Так как уравнение теплопроводности линейно и однородно,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Чтобы выполнились начальные условия:

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \text{т. е.}$$

C_n - коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$,

таким образом
$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

5. Уравнение теплопроводности для стационарного случая

Уравнение теплопроводности для стационарного случая обращается в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

так как $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Для плоских задач уравнение Лапласа имеет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Заменой переменных $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ уравнение можно преобразовать к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \varphi, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \varphi - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial y} r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Можно выразить

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = r^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

или

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

С уравнением Лапласа связано понятие гармонической функции.

Гармонической в области D является функция, непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяющая уравнению Лапласа.

Задача отыскания функции $u(x, y)$, гармонической в области D , непрерывной в D и на поверхности S , которая ограничивает данную область, удовлетворяющей краевому условию $u|_S = f(x; y)$, называется задачей Дирихле.

6. Задача Дирихле для круга

Рассмотрим круг радиуса R с центром в полюсе полярной системы координат.

Пусть $u|_{r=R} = f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ – непрерывная функция.

Решение уравнения Лапласа

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

будем искать методом Фурье:

$$u(r, \varphi) = \Phi(\varphi)R(r).$$

Подставляя в уравнение Лапласа, получим

$$r^2 \Phi(\varphi)R''(r) + r\Phi(\varphi)R'(r) + \Phi''(\varphi)R(r) = 0,$$

или $\frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -k^2 \quad (k-\text{const}).$

Таким образом

$$\begin{cases} \Phi'' + k^2 \Phi = 0 & (1) \\ r^2 R'' + rR' - k^2 R = 0 & (2). \end{cases}$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\Phi = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi$$

Решение уравнения (2) будем искать в форме $R(r) = r^m$ и после подстановки получим:

$$r^2 m(m-1)r^{m-2} + r m r^{m-1} - k^2 r^m = 0 \text{ или } m^2 - k^2 = 0, \text{ т.е. } m = \pm k.$$

Таким образом $R(r) = C \cdot r^k + D \cdot r^{-k}.$

Заметим, что $u(r, \varphi)$ как функция от φ – периодическая функция с периодом 2π , поэтому k может принимать одно из значений $0, 1, 2, 3, \dots$. $D = 0$, так как в противном случае функция имела бы разрыв в точке $r = 0$ и не была бы гармонической в круге.

Изменив обозначение, можно переписать:

$$u_0 = \frac{A_0}{2}; u_n = (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Вследствие линейности и однородности уравнения Лапласа решением будет являться функция

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n$$

Определим A_0, A_n, B_n по краевому условию:

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) R^n$$

Из разложения функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье находим

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt; \quad A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt;$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Таким образом

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n(t - \varphi) \right] dt;$$

данный результат можно упростить и привести к виду

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \varphi) + r^2} dt.$$

Интеграл, стоящий в правой части, называется интегралом Пуассона.

Задачи для самостоятельного решения

1. Струна, концы которой закреплены в точках $x = 0$ и $x = l$, оттянута в начальный момент времени в точке $x = c$ и отпущена без начальной скорости. Определить $u(x, t)$, если $u(c, 0) = h$.

2. Струна, концы которой закреплены в точках $x = -l$ и $x = l$, в начальный момент времени имеет параболическую форму с вершиной в точке $u(0,0) = h$, затем струна отпущена без начальной скорости. Определить $u(x, t)$.

3. Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$,

и

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 2) \\ 0, & x \notin (0, 2) \end{cases}$$

Вычислить $u(3, 1)$.

4. Бесконечная струна имеет в начальный момент форму

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 - |x - 1|, & x \in (0, 2) \\ 0, & x \notin (0, 2) \end{cases}.$$

Начальная скорость равна нулю. Уравнение струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Найти форму струны при $t = 60$ сек.

5. Два физических процесса описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{соответственно. Только в одном из них оба}$$

направления хода времени t равноправны.

В каком? Как это отражается на постановке задачи Коши для каждого из уравнений?

6. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям:
 $u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0; \quad u(x, 0) = x(1 - x).$

7. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq l/2, \\ l - x, & l/2 < x \leq l. \end{cases}$$

Библиографический список

1. Пискунов Н.С.. Дифференциальное и интегральное исчисления.- М.: Наука, 1985.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика.- Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.- М.: Главиздат, 1953.

Оглавление

Введение.....	3
I. Функция двух переменных	3
II. Классификация уравнений с частными производными.....	5
III. Некоторые методы решения уравнений математической физики.....	8
Задачи для самостоятельного решения.....	20

Ольга Евгеньевна Куляхтина,
Марк Эльевич Юдовин,
Татьяна Алексеевна Забавникова,
Екатерина Александровна Титова

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические указания
для студентов вечернего и заочного отделений

Редактор и корректор В.А.Басова
Техн.редактор Л.Я.Титова

Темплан 2014г., поз. 53

Подп. к печати 15.12.14 . Формат 60х84/16. Бумага тип № 1. Печать офсетная.
Объём 1,5 печ.л.; 1,5 уч.- изд. л. Тираж 50 экз.
Изд. № 53 . Цена «С» . Заказ

Ризограф Санкт-Петербургского государственного технологического
университета растительных полимеров, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана
Черных, 4.