

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»**

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Кафедра высшей математики

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**Методические указания по выполнению
расчетно-графической работы
и индивидуальные задания для студентов
очной формы обучения. I семестр**

Санкт-Петербург

2016

УДК 51(07)

Линейная алгебра: методические указания по выполнению расчетно-графической работы и индивидуальные задания для студентов очной формы обучения. I семестр / сост.: Т.А. Забавникова, Н.Ю. Косовская, И.Ю.Малова; СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2016. – 26 с.

В настоящих методических указаниях приводятся варианты расчетно-графических работ первого семестра по курсу высшей математики, даны подробные решения аналогичного варианта РГР, детально разобраны другие стандартные задачи линейной алгебры и приведен необходимый теоретический минимум. Предназначены для студентов первого курса очной формы обучения.

Рецензент: доцент кафедры ВМ2 СПбГЭТУ им.Ульянова,
канд.техн.наук Энтина С.Б.

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД (протокол № 6 от 02.02.2016).

Утверждены к изданию методической комиссией института энергетики и автоматизации ВШТЭ СПбГУПТД (протокол №5 от 12.04.2016).

Редактор и корректор В.А. Басова.
Техн. редактор Л.Я. Титова.

Темплан 2016 г., поз. 32

Подп. к печати 25.04.2016 г. Формат 60х84/16. Бумага тип № 1.
Печать офсетная. Объём 1,75 печ.л., 1,75 уч.-изд. л.
Тираж 50 экз. Изд. № 32. Цена «С». Заказ №

© Высшая школа технологии
и энергетики СПбГУПТД, 2016.

Содержание

Предисловие	3
Необходимый теоретический минимум	4
Задачи с решениями.....	8
Расчетно-графическая работа	16
Варианты индивидуальных заданий РГР.....	21
Библиографический список.....	26

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для студентов первого курса очной формы обучения. Курс высшей математики в ВШТЭ СПбГУПТД состоит из четырех частей в соответствии с количеством семестров, в течение которых он изучается. В первом семестре курс высшей математики включает в себя темы: элементы линейной алгебры, векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, теория пределов и дифференциальное исчисление функций одной переменной. В первом семестре студент должен успешно выполнить одну расчетно-графическую работу и одну контрольную работу. В настоящих методических указаниях предложено 10 вариантов расчетно-графической работы для самостоятельного решения, еще один аналогичный вариант с подробным разбором, несколько типовых задач линейной алгебры с решениями и, кроме того, в справочной форме приведен необходимый теоретический материал.

Необходимый теоретический минимум

Матрица A размера $n \times m$ – это прямоугольная таблица из n строк и m столбцов, состоящая из чисел a_{ij} (или иных математических выражений) для $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$. Часто записывается в виде $A = (a_{ij})$. Матрица размера $n \times n$ называется квадратной матрицей n -го порядка.

Сумма матриц A и B одинакового размера – это матрица того же размера со следующими элементами:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Умножение матрицы A на число k – это матрица того же размера со следующими элементами:

$$k \cdot (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij}).$$

Произведением матриц A размера $n \times m$ и B размера $m \times k$ называется матрица C размера $n \times k$ (обозначается $A \cdot B$) такая, что

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^m a_{is} \cdot b_{sj}, \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k.$$

Матрица, у которой все строки равны соответствующим столбцам матрицы A , называется матрицей, *транспонированной* к A , и обозначается A^T , то есть $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Единичной матрицей (обозначается E) называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю.

Матрица (обозначается A^{-1}) называется *обратной* к квадратной матрице A , если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Любой квадратной матрице A можно сопоставить некое число (или математическое выражение, если элементы матрицы – не только числа), которое называется *определителем* матрицы A и обозначается $\det A$ или $|A|$.

Определитель матрицы 2-го порядка равен разности произведения элементов матрицы на главной диагонали и произведения элементов на второстепенной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель матрицы 3-го порядка равен следующему выражению:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Данную формулу легко запомнить, если мысленно нарисовать поверх матрицы треугольники: с плюсом берем произведение элементов главной диагонали и произведения элементов, находящихся в вершинах треугольников со стороной, параллельной главной диагонали, а со знаком «минус» берем произведение элементов второстепенной диагонали и произведения элементов, находящихся в вершинах треугольников со стороной, параллельной второстепенной диагонали.

Определитель любого порядка можно вычислить по формуле разложения по строке (или по столбцу), которая сводит вычисление определителя n -го порядка к вычислению n штук определителей порядка $n - 1$. Например, определитель третьего порядка раскладывается по первой строке следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

А вот так раскладывается по первой строке определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \\
= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \\
+ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

То есть мы умножаем элементы первой строки на определители меньшего порядка, получаемые из исходной матрицы вычеркиванием строки и столбца, соответствующего элементу.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ назовем произведение $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где *минор* M_{ij} – это определитель матрицы, составленной из элементов A , оставшихся после вычеркивания i -ой строки и j -го столбца.

Тогда разложение определителя по k -ой строке или k -му столбцу можно записать формулой:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{kj} \cdot A_{kj} = \sum_{i=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik}.$$

Очевидно, что предпочтительней выбирать ту строку или столбец, где больше всего нулей, тем самым уменьшая количество вычислений.

С помощью алгебраических дополнений можно вычислить обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{ij})^T$.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие действия:

1. Перемена мест двух строк (столбцов).
2. Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.

3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица B , полученная из матрицы A с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной* матрице A , обозначается $A \sim B$.

Минором k -го порядка произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов.

Рангом матрицы A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю, обозначается $r(A)$. В задачах мы часто будем пользоваться тем, что при элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется и ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если имеет хотя бы одно решение. Система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

По теореме Кронекера-Капелли:

- 1) $r(A) < r(A|B) \Leftrightarrow$ система несовместная;
- 2) $r(A) = r(A|B) = n \Leftrightarrow$ система совместная и определенная;
- 3) $r(A) = r(A|B) < n \Leftrightarrow$ система совместная и неопределенная.

Задачи с решениями

1. Найти матрицу $7A - 5B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$7A = \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 & 7 \cdot 1 & 7 \cdot 4 \\ 7 \cdot 3 & 7 \cdot 5 & 7 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 28 \\ 21 & 35 & -7 \end{pmatrix};$$

$$5B = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 & 5 \cdot 1 & 5 \cdot (-3) \\ 5 \cdot 5 & 5 \cdot 4 & 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & -15 \\ 25 & 20 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} 7A - 5B &= \begin{pmatrix} 14 & 7 & 28 \\ 21 & 35 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 & -15 \\ 25 & 20 & 10 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 14 - 15 & 7 - 5 & 28 - (-15) \\ 21 - 25 & 35 - 20 & -7 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 43 \\ -4 & 15 & -17 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ответ: $7A - 5B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 43 \\ -4 & 15 & -17 \end{pmatrix}$.

2. Найти произведение матриц AB , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Так как матрица A размера 2×4 , а матрица B размера 4×3 , то умножение матриц возможно и его результатом будет матрица размера 2×3 . Приведем вычисления элементов матрицы $C = A \cdot B$:

$$c_{11} = 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 7 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = -2;$$

$$c_{12} = 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-5) + 4 \cdot 0 = -17;$$

$$c_{13} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 21;$$

$$c_{21} = 1 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 46;$$

$$c_{22} = 1 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) + (-1) \cdot 0 = -3;$$

$$c_{23} = 1 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = 11.$$

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} -2 & -17 & 21 \\ 46 & -3 & 11 \end{pmatrix}$.

3. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $A^2 - BA + 3A$.

Решение:

Вычислим каждое слагаемое:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{4} \\ \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{3} \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{4} \\ \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{3} \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 - 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -4 & 12 \\ 15 & 22 & 29 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{6} & \boxed{-3} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{5} & \boxed{-1} & \boxed{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{4} \\ \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{3} \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 6 \cdot 2 - 3 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 6 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) & 0 \cdot 4 + 6 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 5 \cdot 0 - 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) & 5 \cdot 4 - 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 33 & 12 \\ 6 & 9 & 12 \\ 6 & -8 & 23 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 \\ 6 & 15 & 9 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Итого:

$$A^2 - BA + 3A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 12 \\ 15 & 22 & 29 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 33 & 12 \\ 6 & 9 & 12 \\ 6 & -8 & 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 \\ 6 & 15 & 9 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 - 9 + 3 & -4 - 33 + 0 & 12 - 12 + 12 \\ 15 - 6 + 6 & 22 - 9 + 15 & 29 - 12 + 9 \\ 1 - 6 + 3 & -7 + 8 - 3 & 5 - 23 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -37 & 12 \\ 15 & 28 & 26 \\ -2 & -2 & -12 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^2 - BA + 3A = \begin{pmatrix} -1 & -37 & 12 \\ 15 & 28 & 26 \\ -2 & -2 & -12 \end{pmatrix}.$

4. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$

Решение:

Очевидно, что ранг не больше 4, так как ранг не может быть большим, чем число строк и число столбцов, и что ранг не меньше 2, так как первый же

минор не равен нулю: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Так как элементарные преобразования не

меняют ранг матрицы, то приведем с их помощью матрицу к треугольному

виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim}$$

$$\xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim}$$

$$\xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 73 \end{pmatrix}.$$

У полученной матрицы ранг равен 4, так как очевидно, что минор из первых четырех столбцов не равен нулю (он равен произведению диагональных элементов, то есть пяти). Значит, и у исходной, эквивалентной ей, матрицы ранг равен 4.

Ответ: $r(A) = 4$.

5. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

Найдем обратную матрицу через союзную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T,$$

Определитель матрицы

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 1 = \\ &= 40 - 3 + 6 - 36 + 4 - 5 = 6 \neq 0, \end{aligned}$$

а алгебраические дополнения к элементам матрицы находятся следующим образом:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -13;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 22.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } A^{-1} &= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -8 \\ -13 & 1 & 22 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & -13 \\ -1 & 1 & 1 \\ -10 & -8 & 22 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{13}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

А теперь найдем обратную матрицу другим способом – методом Гаусса. Для этого необходимо элементарными преобразованиями над строками перевести матрицу A к единичной, тогда приписанная справа единичная матрица перейдет в A^{-1} .

$$(A|E) \sim (E|A^{-1});$$

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{I-2II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{II-2I} \\ &\xrightarrow{II-2I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{III-3I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 28 & -1 & -3 & 6 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{III-II} \\ &\xrightarrow{III-II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{6}III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right) \xrightarrow{III \leftrightarrow II} \\ &\xrightarrow{III \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{III-22II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{10}{6} & \frac{8}{6} & -\frac{22}{6} \end{array} \right) \xrightarrow{-III} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sim^{-III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6} \end{array} \right) \stackrel{I+9II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{6} & -\frac{3}{6} & \frac{9}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6} \end{array} \right) \stackrel{I-III}{\sim} \\ & \stackrel{I-III}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{13}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Разумеется, и этим способом мы получили тот же ответ.

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{13}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6} \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 9. \end{cases}$$

Решение:

Прежде всего вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 168 + 10 - 48 + 42 - 160 - 12 = 0.$$

Так как $\Delta = 0$, то метод Крамера не применить. Применим метод Гаусса, то есть приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -6 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 8 & 9 \end{array} \right) \stackrel{II-I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 9 \end{array} \right) \stackrel{III-II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right).$$

Ранг расширенной матрицы больше ранга матрицы системы. Следовательно, система несовместная, то есть не имеет ни одного решения. Это очевидно, если переписать последнюю строку в виде уравнения: $0=7$.

Ответ: система не имеет решений.

7. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ -3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

Прежде всего, вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 20 + 9 + 6 - 5 - 18 - 12 = 0.$$

Так как $\Delta = 0$, то метод Крамера не применить. Применим метод Гаусса, то есть приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 5 \\ -3 & -5 & 3 & | & -7 \\ 1 & 2 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ -3 & -5 & 3 & | & -7 \\ 2 & 3 & -1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+3I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 2 & 3 & -1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-2I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & -1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы $r(A) = r(A|B) = 2$, но меньше числа неизвестных $n = 3$. Следовательно, система совместна, но неопределенна, то есть имеет бесконечно много решений, выражаемых через один параметр. Пусть переменные x_1, x_2 будут базисными, а переменная x_3 – свободная. Выразим базисные переменные через свободную:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I-2II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_3 = 4, \\ x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4t + 4, \\ x_2 = 3t - 1, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

Общее решение можно записать в виде $(-4t + 4, 3t - 1, t)$ или

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Частные решения системы получаются при подстановке произвольного t , например, при $t = 0$: $(4; -1; 0)$, а при $t = 3$: $(-8; 8; 3)$.

Ответ: система имеет бесконечно много решений, общее решение:
 $(-4t + 4; 3t - 1; t)$.

8. Найти коэффициенты разложения вектора $\bar{b}(3; -2; 7)$ по векторам $\bar{a}_1(1; 4; 2)$, $\bar{a}_2(0; 1; 3)$, $\bar{a}_3(2; -1; 1)$.

Решение:

Решение этой задачи идентично решению линейной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Решим ее методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 + 24 - 4 - 0 + 3 = 24;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 0 - 12 - 14 - 0 + 9 = -14;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 6 + 56 + 8 - 12 + 7 = 51;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 0 + 36 - 6 - 0 + 6 = 43;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{14}{24} = -\frac{7}{12}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{51}{24} = \frac{17}{8}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{43}{24}.$$

Ответ: $\bar{b} = -\frac{7}{12}\bar{a}_1 + \frac{17}{8}\bar{a}_2 + \frac{43}{24}\bar{a}_3$.

Расчетно-графическая работа

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 17, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$$

Найти ее решение:

- а) методом Крамера;
- б) с помощью обратной матрицы;
- с) методом Гаусса.

Решения:

(1) Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \\ &+ 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= (20 - 6 - 6 - 16 + 45 + 1) + 3(-8 + 3 + 18 + 8 - 18 - 3) + \\ &+ 2(2 + 15 + 12 - 2 - 12 - 15) - (6 - 20 + 6 - 1 + 16 - 45) = \\ &= 38 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - (-38) = 76. \end{aligned}$$

Отметим, что если бы в матрице были нули, то мы бы разложили определитель по той строке или столбцу, где нулей больше всего.

(2a) Решим систему уравнений по формулам Крамера. Найдем определитель матрицы системы:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 5 \cdot (-3) \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-3) \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot \\ &\quad \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 4 = -60 - 4 + 3 + 18 + 5 - 8 = -46.\end{aligned}$$

Так как $\Delta \neq 0$, то существует единственное решение.

Теперь найдем определитель, получающийся из Δ заменой первого столбца на столбец свободных членов:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} 17 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 15 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 17 \cdot (-3) \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 15 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 15 \cdot (-3) \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot \\ &\quad \cdot 17 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = -204 - 30 + 6 + 135 + 17 - 16 = -92.\end{aligned}$$

И, заменяя второй и третий столбец на столбец свободных членов, мы получаем соответственно второй и третий вспомогательные определители:

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \begin{vmatrix} 5 & 17 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 5 \cdot 2 \cdot 4 + 17 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 15 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 15 \cdot (-1) \cdot 5 - \\ &\quad - 1 \cdot 17 \cdot 4 = 40 - 34 + 45 - 12 + 75 - 68 = 46; \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 17 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 15 \end{vmatrix} = \\ &= 5 \cdot (-3) \cdot 15 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 17 - 2 \cdot (-3) \cdot 17 - 1 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot \\ &\quad \cdot 2 \cdot 15 = -225 + 8 + 17 + 102 - 10 - 30 = -138.\end{aligned}$$

И по формулам Крамера получаем решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-92}{-46} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{46}{-46} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-138}{-46} = 3.$$

(2b) Решим систему с помощью обратной матрицы. Найдем матрицу A^{-1} ,

обратную матрице системы $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T.$$

Определитель матрицы системы уже найден: $\det A = \Delta = -46 \neq 0$, а алгебраические дополнения к элементам матрицы находятся следующим образом:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 4 - (-1) \cdot 1 = -11;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2) = -6;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 = 7;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) = -5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 14;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = -1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-3) = 7;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(5 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) = 8;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 = -17.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } A^{-1} &= \frac{1}{-46} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -6 & 7 \\ -5 & 14 & -1 \\ 7 & 8 & -17 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-46} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -5 & 7 \\ -6 & 14 & 8 \\ 7 & -1 & -17 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{46} & \frac{5}{46} & -\frac{7}{46} \\ \frac{6}{46} & -\frac{14}{46} & -\frac{8}{46} \\ -\frac{7}{46} & \frac{1}{46} & \frac{17}{46} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

И мы находим решение системы из равенства матриц:

$$X = A^{-1}B;$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{11}{46} & \frac{5}{46} & -\frac{7}{46} \\ \frac{6}{46} & -\frac{14}{46} & -\frac{8}{46} \\ -\frac{7}{46} & \frac{1}{46} & \frac{17}{46} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} -11 & -5 & 7 \\ -6 & 14 & 8 \\ 7 & -1 & -17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} (-11) \cdot 17 + (-5) \cdot 2 + 7 \cdot 15 \\ (-6) \cdot 17 + 14 \cdot 2 + 8 \cdot 15 \\ 7 \cdot 17 + (-1) \cdot 2 + (-17) \cdot 15 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} -187 - 10 + 105 \\ -102 + 28 + 120 \\ 119 - 2 - 255 \end{pmatrix} = -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} -92 \\ 46 \\ -138 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2с) Теперь решим данную систему линейных уравнений методом Гаусса.

Для этого приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками (так называемый прямой ход):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 17 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 15 \end{array} \right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 17 \\ 2 & 1 & 4 & 15 \end{array} \right) \xrightarrow{II \sim 5I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 17 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 15 \end{array} \right) \xrightarrow{III \sim 2I}$$

$$\begin{aligned}
& \overset{III-2I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 17 & 8 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 11 \end{array} \right) \overset{\frac{1}{17}II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{8}{17} & \frac{7}{17} \\ 0 & 7 & 6 & 11 \end{array} \right) \overset{III-7II}{\sim} \\
& \overset{III-7II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{8}{17} & \frac{7}{17} \\ 0 & 0 & \frac{46}{17} & \frac{138}{17} \end{array} \right) \overset{\frac{17}{46}III}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{8}{17} & \frac{7}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Видно, что ранг расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы системы, а значит, система имеет единственное решение. Теперь с помощью элементарных преобразований приведем правую часть полученной матрицы к единичной матрице (так называемый обратный ход):

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{8}{17} & \frac{7}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \overset{II-\frac{8}{17}III}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \overset{I+III}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \overset{I+3II}{\sim} \\
& \overset{I+3II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Тогда правый столбец и будет решением исходной системы.

Варианты индивидуальных заданий РГР

Вариант 1

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

Найти ее решение:

- а) методом Крамера;
- б) с помощью обратной матрицы;
- с) методом Гаусса.

Вариант 2

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -1, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Найти ее решение:

- а) методом Крамера;
- б) с помощью обратной матрицы;
- с) методом Гаусса.

Вариант 3

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 & 9 \\ 1 & -3 & 1 & 13 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 28, \\ \quad 5x_2 - x_3 = -15, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 15. \end{cases}$$

Найти ее решение:

- а) методом Крамера;
- б) с помощью обратной матрицы;
- с) методом Гаусса.

Вариант 4

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 13, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

Найти ее решение:

- а) методом Крамера;
- б) с помощью обратной матрицы;
- с) методом Гаусса.

Вариант 5

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 = -1, \\ 7x_1 - 3x_2 = -2. \end{cases}$$

Найти ее решение:

- а) методом Крамера;
- б) с помощью обратной матрицы;
- с) методом Гаусса.

Вариант 6

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 11 & -3 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & -10 & 2 \\ -3 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Найти ее решение:

- а) методом Крамера;
- б) с помощью обратной матрицы;
- с) методом Гаусса.

Вариант 7

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -14 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -8 & 5 \\ 2 & 1 & -13 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 17, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$$

Найти ее решение:

- а) методом Крамера;
- б) с помощью обратной матрицы;
- с) методом Гаусса.

Вариант 8

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + x_3 = 7, \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - 9x_3 = 3. \end{cases}$$

Найти ее решение:

- а) методом Крамера;
- б) с помощью обратной матрицы;
- с) методом Гаусса.

Вариант 9

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 13 & -8 & 9 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 3 \\ 7 & -6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Найти ее решение:

- а) методом Крамера;
- б) с помощью обратной матрицы;
- с) методом Гаусса.

Вариант 10

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -7, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

Найти ее решение:

- а) методом Крамера;
- б) с помощью обратной матрицы;
- с) методом Гаусса.

Библиографический список

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Данко С.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2007.
3. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс – М.: Айрис-пресс, 2008.