

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»**

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

**Методические указания по выполнению контрольной
работы и индивидуальные задания для студентов
очной формы обучения. I семестр**

Санкт-Петербург

2016

УДК 51(07)

Математика: методические указания по выполнению контрольной работы и индивидуальные задания для студентов очной формы обучения. I семестр / сост.: И.Э. Апакова, Б.Ф. Иванов, Н.Ю. Косовская, О.Е. Куляхтина; СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2016. – 28 с.

В настоящих методических указаниях приводятся варианты контрольных работ первого семестра по курсу высшей математики, даны подробные решения аналогичного варианта контрольной работы и детально разобраны некоторые другие стандартные задачи векторной алгебры, аналитической геометрии и начала математического анализа. Кроме того, ко всем темам приведен в справочной форме необходимый теоретический минимум. Предназначены для студентов первого курса очной формы обучения.

Рецензент: доцент кафедры ВМ2 СПбГЭТУ им.Ульянова, канд.техн.наук Энтина С.Б.

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД (протокол № 6 от 02.02.2016).

Утверждены к изданию методической комиссией института энергетики и автоматизации ВШТЭ СПбГУПТД (протокол №5 от 12.04.2016).

Редактор и корректор В.А. Басова.
Техн. редактор Л.Я. Титова.

Темплан 2016 г., поз. 33

Подп. к печати 25.04.2016 г. Формат 60х84/16. Бумага тип № 1.
Печать офсетная. Объем 1,75 печ.л., 1,75 уч.-изд. л.
Тираж 50 экз. Изд. № 33. Цена «С». Заказ №

© Высшая школа технологии
и энергетики СПбГУПТД, 2016.

Содержание

Предисловие	3
Задачи с решениями	4
Контрольная работа с решениями	5
Варианты контрольных заданий.....	12
Необходимый теоретический материал	19
<i>Векторная алгебра</i>	<u>20</u>
<i>Аналитическая геометрия на плоскости</i>	21
<i>Аналитическая геометрия в пространстве</i>	24
<i>Предел функции</i>	26
<i>Производная функции</i>	27
Библиографический список	28

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для студентов первого курса очной формы обучения. Курс высшей математики в ВШТЭ СПбГУПТД состоит из четырех частей в соответствии с количеством семестров, в течение которых он изучается. В первом семестре курс высшей математики включает в себя темы: элементы линейной алгебры, векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, теория пределов и дифференциальное исчисление функций одной переменной. В первом семестре студент должен успешно выполнить одну расчетно-графическую работу и одну контрольную работу. В настоящих методических указаниях предложено 10 вариантов контрольной работы для самостоятельного решения, еще один аналогичный вариант с подробным разбором, несколько других стандартных задач векторной алгебры, аналитической геометрии, теории пределов и дифференцирования функций

одной переменной с их решениями и, кроме того, в справочной форме приведен необходимый теоретический материал по всем этим темам – важнейшие определения и формулы.

Задачи с решениями

1. Даны две точки $A(5; -2; 4)$ и $B(3; 1; 7)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.
 Координаты вектора равны разности координат конца и начала: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (3 - 5; 1 - (-2); 7 - 4) = (-2; 3; 3)$.
2. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если известно, что он направлен в противоположную сторону к вектору $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 14\vec{k}$ и его модуль равен 3.

• Найдем длину (модуль) вектора $\vec{b}$:

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15.$$

И так как по условию $\vec{a} = 3 \cdot \frac{-\vec{b}}{|\vec{b}|}$, то $\vec{a} = \frac{3}{15} \cdot (-\vec{b}) = -\frac{2}{5}\vec{i} + \vec{j} - \frac{14}{5}\vec{k}$. Итого $\vec{a} = \left(-\frac{2}{5}; 1; -\frac{14}{5}\right)$.

3. Вектор $\vec{a}$ образует с осями Ox и Oy углы $\alpha = 135^\circ$ и $\beta = 60^\circ$, и его длина равна 4. Найти координаты этого вектора.

• Обозначим искомые координаты вектора $\vec{a} = (x; y; z)$. Направляющие косинусы связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Следовательно

$$\cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 135^\circ - \cos^2 60^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

а значит, $\cos \gamma = \frac{1}{2}$ или $\cos \gamma = -\frac{1}{2}$. То есть условию задачи удовлетворяют два вектора. Найдем их координаты. Так как

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|},$$

то

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2};$$

$$y = |\vec{a}| \cos \beta = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2;$$

$$z = |\vec{a}| \cos \gamma \Rightarrow z_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2; z_2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

Итого $\vec{a}_1 = (-2\sqrt{2}; 2; 2)$ и $\vec{a}_2 = (-2\sqrt{2}; 2; -2)$.

4. Для каких чисел α и β векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - \alpha\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} + 7\vec{j} + \beta\vec{k}$ коллинеарны?

• Векторы коллинеарны, когда их координаты пропорциональны, а значит,

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{3}{-2} = \frac{-\alpha}{7} = \frac{5}{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{21}{2}, \\ \beta = -\frac{10}{3}. \end{cases}$$

5. На оси Oz найти точку M , равноудаленную от точек $A(2; 3; 5)$ и $B(4; -1; -6)$.

• Точка M лежит на оси Oz , значит ее координаты $M(0; 0; z)$. Так как $|MA| = |MB|$, то

$$2^2 + 3^2 + (z - 5)^2 = 4^2 + (-1)^2 + (z - (-6))^2.$$

6. Найти уравнение плоскости перпендикулярной прямой

$$\frac{x - 3}{1} = \frac{y + 5}{-8} = \frac{z - 7}{4}$$

и проходящей через точку $M(6; 2; -9)$.

• Направляющий вектор прямой $\vec{s} = (1; -8; 4)$ можно взять в качестве нормального вектора плоскости. Тогда уравнение плоскости

$$\begin{aligned} (x - 6) - 8(y - 2) + 4(z + 9) &= 0; \\ x - 8y + 4z + 46 &= 0. \end{aligned}$$

Контрольная работа с решениями

1. Даны три точки на плоскости $A(1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(5; -1)$. Найти:

- длину и уравнение медианы из вершины C ;
- длину и уравнение высоты из вершины C .

2. Даны два вектора. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}$. Найти:

- скалярное произведение векторов $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{b} + \vec{a}$;
- векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(-2; 1; 0)$, $M_3(3; -1; 2)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(5; 2; 1)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

4. Найти пределы функций:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 8}{x - 6x^3};$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x}.$

5. Вычислить производные функций:

a) $y = \frac{25 - x^3}{x + 8};$

b) $y = (\sin x)^{2016}.$

Решения:

(1a)

Для нахождения длины и уравнения медианы CM найдем координаты точки M .

Эта точка делит сторону AB пополам, а значит, имеет координаты: $x_M =$

$$\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2 \text{ и } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3.$$

Тогда медиана CM имеет длину

$$\begin{aligned} |CM| &= \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - (-1))^2} = \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

А прямая, проходящая через медиану CM , имеет уравнение:

$$(y - y_M) = \frac{y_C - y_M}{x_C - x_M} (x - x_M),$$

$$y - 3 = \frac{-1 - 3}{5 - 2} (x - 2),$$

$$y - 3 = -\frac{4}{3} (x - 2),$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \left(\frac{4}{3} \cdot 2 + 3\right),$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}.$$

(1b)

Высота из вершины C (обозначим ее CH) перпендикулярна стороне AB , поэтому вначале найдем уравнение прямой, проходящей через AB , причем в двух формах:

$$(y - y_B) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B),$$

$$y - 4 = \frac{2 - 4}{1 - 3}(x - 3),$$

$$y - 4 = \frac{-2}{-2}(x - 3),$$

$$y = x - 3 + 4,$$

$$y = x + 1 \text{ (уравнение } AB \text{ с угловым коэффициентом),}$$

$$x - y + 1 = 0 \text{ (общее уравнение } AB).$$

Мы получили, что $k_{AB} = 1$, а так как CH перпендикулярна AB , то

$k_{CH} \cdot k_{AB} = -1$ и значит, $k_{CH} = -1$. Тогда

$$(y - y_C) = -1 \cdot (x - x_C),$$

$$y - (-1) = -(x - 5),$$

$$y = -x + 5 - 1,$$

$$y = -x + 4.$$

Длина высоты CH равна расстоянию от точки C до прямой AB , а значит, может

быть вычислена по формуле: $|CH| = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, если

$ax + by + c = 0$ – общее уравнение прямой AB . Тогда

$$|CH| = \frac{|1 \cdot 5 - 1 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}},$$

$$|CH| = \frac{7}{\sqrt{2}}.$$

Обратите внимание, что мы нашли длину и уравнение высоты CH , не находя координаты точки H .

(2a)

Рассмотрим два способа нахождения скалярного произведения линейных комбинаций данных векторов $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{a})$.

Способ 1.

Найдем координаты векторов $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{b} + \vec{a}$:

$$\begin{aligned}\vec{a} - 2\vec{b} &= (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) - 2(\vec{j} + 4\vec{k}) = 2\vec{i} + (3 - 2)\vec{j} + (-1 - 2 \cdot 4)\vec{k} \\ &= 2\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{b} + \vec{a} &= (\vec{j} + 4\vec{k}) + (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) = 2\vec{i} + (1 + 3)\vec{j} + (4 - 1)\vec{k} = \\ &= 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}.\end{aligned}$$

Тогда скалярное произведение равно:

$$\begin{aligned}(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{a}) &= (2\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) = \\ &= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + (-9) \cdot 3 = -19.\end{aligned}$$

Способ 2.

Прежде всего вычислим скалярное произведение самих векторов a и b и квадраты их длин (то есть модулей). Это легко сделать, так как координаты этих векторов нам уже даны:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \cdot (\vec{j} + 4\vec{k}) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 = -1,$$

$$|\vec{a}|^2 = |2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}|^2 = 2^2 + 3^2 + (-1)^2 = 4 + 9 + 1 = 14,$$

$$|\vec{b}|^2 = |\vec{j} + 4\vec{k}|^2 = 0^2 + 1^2 + 4^2 = 1 + 16 = 17.$$

Теперь раскроем скобки в искомом скалярном произведении и подставим найденные значения:

$$\begin{aligned}(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{a}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= -\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 = -(-1) + 14 - 2 \cdot 17 = 1 + 14 - 34 \\ &= -19.\end{aligned}$$

Второй способ вычисления удобней, когда в задании все равно необходимо вычислить $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$.

(2b)

По формуле выражения векторного произведения через координаты получаем:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} == \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \\ &== (3 \cdot 4 - 1 \cdot (-1))\vec{i} - (2 \cdot 4 - 0 \cdot (-1))\vec{j} + (2 \cdot 1 - 0 \cdot 3)\vec{k} = \\ &= 13\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k}.\end{aligned}$$

(3)

Уравнение плоскости, проходящей через данные три точки, может быть получено из компланарности векторов MM_1, M_2M_1, M_3M_1 :

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \\&\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ -2 - 1 & 1 - 2 & 0 - 3 \\ 3 - 1 & -1 - 2 & 2 - 3 \end{vmatrix} = 0, \\&\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\&(x - 1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - (y - 2) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (z - 3) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0, \\&(x - 1) \cdot (-8) - (y - 2) \cdot 9 + (z - 3) \cdot 11 = 0, \\&-8x - 9y + 11z + (8 + 18 - 33) = 0, \\&8x + 9y - 11z + 7 = 0.\end{aligned}$$

Чтобы избежать арифметических ошибок, проверим полученное уравнение.

При подстановке любой из точек M_1, M_2, M_3 полученное уравнение должно превращаться в тождество:

$$\begin{aligned}8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 - 11 \cdot 3 + 7 &= 0, \\8 \cdot (-2) + 9 \cdot 1 - 11 \cdot 0 + 7 &= 0,\end{aligned}$$

$$8 \cdot 3 + 9 \cdot (-1) - 11 \cdot 2 + 7 = 0.$$

И это действительно так.

Теперь найдем уравнение прямой, проходящей через точку $N(5; 2; 1)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$. Из уравнения плоскости найдем вектор, перпендикулярный ей. Это вектор с координатами, равными коэффициентам уравнения плоскости:

$$8x + 9y - 11z + 7 = 0 \perp \vec{n} = (8; 9; -11).$$

То есть этот вектор $\vec{n}$ можно взять за направляющий вектор искомой прямой.

Тогда каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $N(5; 2; 1)$ параллельно вектору $\vec{n} = (8; 9; -11)$, имеет вид:

$$\frac{x - 5}{8} = \frac{y - 2}{9} = \frac{z - 1}{-11}.$$

(4a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 8}{x - 6x^3} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - 5 \frac{x^2}{x^3} + 8 \frac{1}{x^3}}{\frac{x}{x^3} - 6 \frac{x^3}{x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 5 \frac{1}{x} + 8 \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2} - 6} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + 8 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} 6} = \\ &= \frac{1 - 5 \cdot 0 + 8 \cdot 0}{0 - 6} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(4b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 3)}{(x + 1)} = \frac{2 + 3}{2 + 1} = \frac{5}{3}.$$

(4c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \sin 4x}{3 \cdot 4x} = [x \rightarrow 0, t = 4x \Rightarrow t \rightarrow 0] = \frac{4}{3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \\ &= [\text{по 1му замечательному пределу}] = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(5a)

$$\text{Так как } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \text{ то } y' = \left(\frac{25-x^3}{x+8}\right)' = \frac{(-3x^2)(x+8) - (25-x^3) \cdot 1}{(x+8)^2} == \\ \frac{-3x^3 - 24x^2 - 25 + x^3}{(x+8)^2} = \frac{-2x^3 - 24x^2 - 25}{(x+8)^2}.$$

(5b)

а) Так как $f(u(x))' = f'(u) \cdot u'(x)$ и $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, то

$$y' = ((\sin x)^{2016})' = 2016 \cdot (\sin x)^{2015} \cdot (\sin x)' = \\ = 2016 \cdot (\sin x)^{2015} \cdot \cos x.$$

Варианты контрольных заданий

Вариант 1

- Даны три точки на плоскости: $A(-3; 1), B(2; -1), C(3; 4)$. Найти:
 - длину и уравнение медианы из вершины C ;
 - длину и уравнение высоты из вершины C .
- Даны два вектора: $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Найти:
 - скалярное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + 2\vec{a}$;
 - векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- Даны три точки в пространстве: $M_1(4; 1; 0), M_2(3; 2; -1), M_3(1; -2; 3)$.
Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(0; 5; 2)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
- Найти пределы функций:
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - x^3 - 6x^2}{3x^4 + 7}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 12}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{tg}(7x)}$.
- Вычислить производные функций:
 - $y = \frac{2 \sin x}{x^3 - 5x + 1}$;
 - $y = \sqrt[7]{\ln x}$.

Вариант 2

- Даны три точки на плоскости: $A(4; -1), B(1; 3), C(2; 0)$. Найти:
 - длину и уравнение медианы из вершины C ;
 - длину и уравнение высоты из вершины C .
- Даны два вектора: $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$. Найти:
 - скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;

- b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Даны три точки в пространстве: $M_1(1; -4; 2)$, $M_2(5; 2; -3)$, $M_3(2; 0; 1)$.
Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(4; -1; 3)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
4. Найти пределы функций:
- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^3 + 2}{3x^3 + 7x}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{3x^2 + 5x - 2}$;
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{3x}$.
5. Вычислить производные функций:
- a) $y = \frac{2 \sin x}{x^3 - 5x + 1}$;
- b) $y = 25^{3x+8}$.

Вариант 3

1. Даны три точки на плоскости: $A(2; -2)$, $B(6; 3)$, $C(-3; 0)$. Найти:
- a) длину и уравнение медианы из вершины C ;
- b) длину и уравнение высоты из вершины C .
2. Даны два вектора: $\vec{a} = \vec{i} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Найти:
- a) скалярное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + 2\vec{a}$;
- b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Даны три точки в пространстве: $M_1(0; 5; -3)$, $M_2(-2; 0; 3)$, $M_3(4; -2; 1)$.
Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(1; 3; 8)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
4. Найти пределы функций:
- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 5x + 2})$;
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}$;

с) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{3x}$.

5. Вычислить производные функций:

а) $y = 5x^3 \cdot \cos x$;

б) $y = 9^{\sin x}$.

Вариант 4

1. Даны три точки на плоскости: $A(0; 8)$, $B(-2; 4)$, $C(5; 3)$. Найти:

а) длину и уравнение медианы из вершины C ;

б) длину и уравнение высоты из вершины C .

2. Даны два вектора: $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} - 3\vec{j}$. Найти:

а) скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;

б) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(-2; 3; 1)$, $M_2(0; -2; 4)$, $M_3(4; 1; -5)$.

Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(-1; 4; 3)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

4. Найти пределы функций:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3-5x^2}{4-9x^3}$;

б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-9}$;

с) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right)^{x^2}$.

5. Вычислить производные функций:

а) $y = \frac{2+e^x}{1-e^x}$;

б) $y = (3x + 2)^{45}$.

Вариант 5

- Даны три точки на плоскости: $A(2; -2)$, $B(6; 5)$, $C(0; 3)$. Найти:
 - длину и уравнение медианы из вершины C ;
 - длину и уравнение высоты из вершины C .
- Даны два вектора: $\vec{a} = 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Найти:
 - скалярное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + 2\vec{a}$;
 - векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- Даны три точки в пространстве: $M_1(2; -3; 1)$, $M_2(5; 2; 2)$, $M_3(0; 1; -3)$.
Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(3; 1; -5)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
- Найти пределы функций:
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2x^2 - x^4}{4x^4 + 1}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 4x^2}{x^2 + x - 20}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{2x}$.
- Вычислить производные функций:
 - $y = (\sqrt{x^3}) \cdot \ln x$;
 - $y = \frac{1}{\sin x}$.

Вариант 6

- Даны три точки на плоскости: $A(2; 5)$, $B(0; 3)$, $C(-3; -1)$. Найти:
 - длину и уравнение медианы из вершины C ;
 - длину и уравнение высоты из вершины C .
- Даны два вектора: $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k}$. Найти:
 - скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;
 - векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(-1; 3; 2)$, $M_2(0; 1; 2)$, $M_3(5; -2; -1)$.

Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(3; -1; 4)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

4. Найти пределы функций:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2016 - x^2}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - x - 30}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{(1 + 4x)^3}$.

5. Вычислить производные функций:

a) $y = \frac{2^x}{5x+1}$;

b) $y = \log_5 (\cos x)$.

Вариант 7

1. Даны три точки на плоскости: $A(4; -2)$, $B(8; 0)$, $C(1; 4)$. Найти:

a) длину и уравнение медианы из вершины C ;

b) длину и уравнение высоты из вершины C .

2. Даны два вектора: $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Найти:

a) скалярное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + 2\vec{a}$;

b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(1; -2; 1)$, $M_2(0; -3; 2)$, $M_3(5; 1; -3)$.

Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(-2; 1; 4)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

4. Найти пределы функций:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100x^2 + 53}{1 + x^3}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{26x - 25 - x^2}{x^3 + x^2 - 2x}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{5x^2}.$

5. Вычислить производные функций:

a) $y = e^x \cdot x^{13};$

b) $y = \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x+5}.$

Вариант 8

1. Даны три точки на плоскости: $A(4; -2), B(-2; 3), C(1; 0)$. Найти:

a) длину и уравнение медианы из вершины C ;

b) длину и уравнение высоты из вершины C .

2. Даны два вектора: $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти:

a) скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;

b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(2; -2; 1), M_2(0; 3; 4), M_3(-5; 1; -3)$.

Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(-2; 0; 7)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

4. Найти пределы функций:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{13} + x^{10}}{13x^{12} + 100x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 2x^2 + x - 2};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{e^x - 1}.$

5. Вычислить производные функций:

a) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 5};$

b) $y = \cos(\sin x).$

Вариант 9

1. Даны три точки на плоскости: $A(5; -2), B(1; 5), C(-3; 1)$. Найти:
 - а) длину и уравнение медианы из вершины C ;
 - б) длину и уравнение высоты из вершины C .
2. Даны два вектора: $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 7\vec{i} - 5\vec{j}$. Найти:
 - а) скалярное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + 2\vec{a}$;
 - б) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Даны три точки в пространстве: $M_1(2; -3; 1), M_2(4; 0; -1), M_3(-1; 5; 3)$.
Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(5; -3; 1)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
4. Найти пределы функций:
 - а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2 + x^2}{3 - 4x^3}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 7x}$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{8x}$.
5. Вычислить производные функций:
 - а) $y = (x - 2x^5) \cdot \operatorname{arctg} x$;
 - б) $y = \arcsin \sqrt{x}$.

Вариант 10

1. Даны три точки на плоскости: $A(2; 3), B(-6; -1), C(1; 4)$. Найти:
 - а) длину и уравнение медианы из вершины C ;
 - б) длину и уравнение высоты из вершины C .
2. Даны два вектора: $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$. Найти:
 - а) скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;
 - б) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(2; -1; 3)$, $M_2(1; 4; -2)$, $M_3(-5; 1; 0)$.

Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(-3; 1; 7)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

4. Найти пределы функций:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{21-x}{x^2+1}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5+4x-x^2}{7+6x-x^2}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\operatorname{arctg} 3x-x}$.

5. Вычислить производные функций:

a) $y = \frac{\ln x}{x^2}$;

b) $y = \sin(11x^3 + 36)$.

Необходимый теоретический материал

Векторная алгебра

Координаты вектора – это коэффициенты разложения вектора по базисным векторам: $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, и вектор обычно записывают в виде $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Длина вектора $\vec{a}$ определяется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями Ox , Oy , Oz углы α , β , γ соответственно. Направление вектора $\vec{a}$ определяется с помощью направляющих косинусов $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, которые следующим образом выражаются через координаты:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Причем направляющие косинусы связаны соотношением

$$(\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\cos \gamma)^2 = 1.$$

Если $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z};$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z);$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z).$$

Если вектор задан точками $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, то его координаты равны разности координат точки конца и точки начала:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Скалярное произведение очень просто вычисляется в координатах. Если

$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z), \vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Часто используется критерий ортогональности:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \text{ (или } \vec{a} = 0, \text{ или } \vec{b} = 0).$$

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый условиями:

- 1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;
- 2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 3) векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначается векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$,

$\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right).$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно вычислить как длину векторного произведения:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Аналитическая геометрия на плоскости

Расстояние между двумя точками на плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если точка M делит отрезок AB в отношении λ , то есть $\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}$ и

$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$, то координаты точки M находятся по формулам:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, точка с координатами $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ – это середина отрезка AB , если $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ можно вычислить по формуле:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

или как модуль некоего определителя, что то же самое, но легче для

запоминания: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\Delta|$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Общее уравнение прямой на плоскости:

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c – числа, причем a и b не обращаются в нуль одновременно.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b,$$

где угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к оси ox ($k = \operatorname{tg} \alpha$), а число b – ордината точки пересечения прямой с oy .

Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ с заданным угловым коэффициентом k , находится из равенства

$$(y - y_1) = k(x - x_1).$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ находится из равенства:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки, равен

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Если $x_2 = x_1$, то уравнение прямой имеет вид $x = x_1$.

Если $y_2 = y_1$, то уравнение прямой имеет вид $y = y_1$.

Угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ вычисляется по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

В частности:

$$(y = k_1x + b_1 \parallel y = k_2x + b_2) \Leftrightarrow k_2 = k_1;$$

$$(y = k_1x + b_1 \perp y = k_2x + b_2) \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$ – это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую, и оно может быть найдено по формуле:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Каноническое уравнение окружности с центром в точке с координатами $(a; b)$ и с радиусом R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где число a называется большой полуосью эллипса, а число b – малой полуосью эллипса, $a > b$. Точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ называются фокусами, и числа a, b, c связаны соотношением $c^2 = a^2 - b^2$. Сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов постоянна. При построении эллипс удобно вписывать в прямоугольник $x = \pm a, y = \pm b$.

Если $a = b$, то уравнение эллипса задает окружность с центром в 0 и радиусом равным a .

Аналитическая геометрия в пространстве

Расстояние между двумя точками в пространстве $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка M делит отрезок AB в отношении λ , то есть $\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}$ и $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты точки M находятся по формулам:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, точка с координатами $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ – это середина отрезка AB .

Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

причем числа A, B, C не обращаются в нуль одновременно. Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется *нормальным вектором* этой плоскости. В частности, вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$ находится из условия компланарности векторов $\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_3M_1}$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть две плоскости заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z = 0$. Углом между плоскостями в пространстве называется угол между нормальными векторами этих плоскостей. То есть

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|},$$

Так как $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ – нормальные вектора, то получаем формулу через координаты:

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0 \parallel A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2};$$

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0 \perp A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + d = 0$ – это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость, и оно может быть найдено по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{s} = (m, n, p)$, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Обращение в нуль одного из знаменателей означает обращение в нуль соответствующего числителя.

В *векторной форме* уравнения прямой: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$, где $\vec{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $\vec{s} = (m; n; p)$.

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

где t – переменный параметр, $t \in \mathbb{R}$.

Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Предел функции

Определение предела функции:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall x > N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0 \exists N > 0 \forall x > N \Rightarrow f(x) > M).$$

Операции над пределами функции:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)},$ если $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными:

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Часто используемые эквивалентности:

$$\sin x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x \sim x,$$

$$\arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad \ln(1 + x) \sim x.$$

Производная функции

Определение производной функции $f(x)$ в точке x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Таблица производных:

1. $(c)' = 0, c = \text{const};$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{R};$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0;$
4. $\log_a x = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1;$
5. $(\sin x)' = \cos x;$
6. $(\cos x)' = -\sin x;$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2};$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2};$
9. $(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
10. $(\operatorname{arctg} x)' = (-\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Правила дифференцирования:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v';$
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv';$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$
4. $f(u(x))' = f'(u) \cdot u'(x).$

Библиографический список

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Данко С.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2007.
3. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс – М.: Айрис-пресс, 2008.