

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**“САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА”**

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Кафедра высшей математики

Теория вероятностей

Методические указания по выполнению контрольной работы
и индивидуальные задания для студентов очной формы
обучения. IV семестр

**Санкт-Петербург
2016**

УДК 519.23.237

Теория вероятностей: методические указания по выполнению контрольной работы и индивидуальные задания для студентов очной формы обучения . IV семестр/ сост.: И.Ю.Малова, О.Е.Куляхтина, И.Э.Апакова, М.Э.Юдовин, Н.Ю.Косовская; ВШТЭ СПбГУПТД.-СПб.,2016.-30 с.

Приведены задачи для выполнения контрольной работы по теории вероятностей. Дан необходимый теоретический материал и разобраны аналогичные задания.

Рецензент: доцент кафедры ВМ-2 СПбГЭТУ им. В.И.Ульянова (Ленина), канд.физ.-мат. наук С.Б. Энтина .

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики ВШТЭ (протокол № 6 от 2 февраля 2016 г.)

Утверждены к изданию методической комиссией института теплоэнергетики и автоматизации ВШТЭ (протокол № 5 от 12 апреля 2016 г.)

Редактор и корректор В.А. Басова

Техн. редактор Л.Я.Титова

Темплан 2016г., поз. 29

Подп. к печати 19.05.16.Формат 60х84/16. Бумага тип №1.
Печать офсетная. Объем 2,0 печ.л. 2,0 уч.-изд.л. Тираж 50 экз.
Изд.№ 29 . Цена «С». Заказ

Ризограф ВШТЭ,198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4

@Высшая школа технологии и
энергетики СПбГУПТД, 2016

Введение

В практической деятельности мы встречаемся с различными явлениями, которые можно разделить на две большие группы — явления детерминированные и случайные. К первой группе относятся события, исход которых можно заранее предсказать, а ко второй — события, исход которых заранее предсказать невозможно (например, номер выигрышного лотерейного билета).

Теория вероятностей занимается математическим описанием случайных явлений. Было замечено, что одни случайные события происходят чаще, чем другие. Количественная характеристика частоты наступления случайного события, выраженная в долях единицы, называется *вероятностью события*. Чем ближе этот показатель к единице, тем чаще происходит наблюдаемое случайное событие, и наоборот, если вероятность близка к нулю, то наблюдаемое событие происходит сравнительно редко.

Основной математической моделью теории вероятностей является теоретико-вероятностный эксперимент (опыт, испытание), в рамках которого происходят определённые случайные события. Математический анализ этих событий и составляет предмет теории вероятностей.

1. Основные понятия теории вероятностей

1.1. Основные комбинаторные понятия

События можно подразделить на следующих три вида : достоверные, невозможные и случайные.

Событие называется *случайным*, если оно может либо произойти, либо не произойти. Например, при бросании игральной кости может выпасть шестерка, либо какое-то другое количество очков (следовательно, шестерка не выпадет).

Событие называется *достоверным*, если оно всегда происходит в эксперименте. Достоверное событие принято обозначать буквой Ω . Например, если у вас на полке стоят только учебники по математике, то какую книгу вы ни возьмете, она окажется по этой дисциплине. Соответственно, взять учебник по математике - достоверное событие, поскольку других вариантов у вас нет.

Событие называется *невозможным*, если оно никогда не происходит в эксперименте. Невозможное событие обозначается символом $\emptyset$. Например, вытащить красный шар из коробки с зелеными - невозможное событие.

Суммой событий A и B называется такое событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из событий A и B (при этом не исключается возможность наступления обоих событий). Сумму событий A и B записывают $A+B$, и геометрически она показана на рис. 1.1 штриховкой.

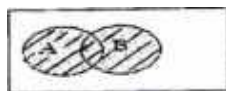


Рис 1.1

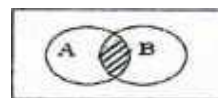


Рис 1.2

Произведением событий A и B называется такое событие, которое состоит в том, что происходят оба события. Обозначают произведение событий A и B следующим образом: $A \cdot B$, на рис. 1.2 оно выделено штриховкой.

Событие называется *противоположным* событию A , если оно заключается в том, что событие A не наступило. Противоположное событие обозначается как $\bar{A}$ (рис. 1.3).

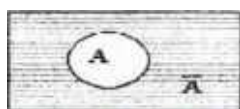


Рис. 1.3

События A и B называются *несовместными* если их произведение - невозможное событие.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1.1. Опыт состоит в бросании двух монет. Определить противоположные для следующих событий: 1- выпадение двух орлов; 2- выпадение орла и решки; 3- выпадение хотя бы одного орла.

Решение.

1. Событие - выпадение двух орлов - не наступит, если при бросании появится хотя бы одна решка..

2. Событие - выпадения орла и решки - не наступит, если выпадут либо два орла, либо две решки.

3. Событие — выпадение хотя бы одного орла — не произойдёт, если выпадут две решки.

Задача 1.2. Два стрелка производят залп по мишени. Обозначим через A_i -событие, заключающееся в том, что i -й стрелок поразил мишень. Выразить с помощью операций над событиями A_1 и A_2 следующие события: 1) мишень поражена; 2) в мишень попала только одна пуля; 3) мишень не поражена; 4) в мишень попало две пули; 5) промахнулся второй стрелок.

Решение.

1. Если мишень поражена, то в неё попал хотя бы один стрелок, поэтому искомое событие равно $A_1 + A_2$. Т. е. происходит либо событие A_1 либо событие A_2 , либо оба одновременно.

2. События A_1 и A_2 соответствуют попаданиям стрелков по мишени, а события $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ - промахам. Если в мишень попала только одна пуля, то такая ситуация возможна, когда первый стрелок попал, а второй - промахнулся или когда первый стрелок промахнулся, а второй - попал. Поэтому искомое событие есть сумма этих событий $A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2$.

3. Если мишень не поражена, то промахнулись оба стрелка, следовательно, искомое событие является произведением $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$.

4. Если в мишень попало две пули, то оба стрелка поразили мишень, поэтому искомое событие равно $A_1 \cdot A_2$.

5. Событие - промахнулся второй стрелок - противоположно событию A_2 , следовательно, это событие равно $\bar{A}_2$.

Для решения многих задач теории вероятностей требуется подсчитать число благоприятных исходов, т.е. тех событий, вероятность которых необходимо определить. Этот подсчёт можно упростить, используя простейшие комбинаторные формулы.

Рассмотрим множество, состоящее из n элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$. Выбираем k элементов ($k \leq n$). Группа из этих k элементов называется *соединениями* из n по k или выборками k элементов из n элементов.

Различают два вида соединений: *сочетания* и *размещения*.

Сочетания - это такие соединения, которые отличаются друг от друга только составом элементов.

Размещения - это такие соединения, которые отличаются друг от друга как составом элементов, так и порядком их следования.

Число различных сочетаний из n по k обозначается C_n^k :

$$C_n^k = \frac{n!}{n!(n-k)!},$$

число различных размещений из n по k обозначается :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Задача 1.3. Каким количеством различных способов можно посадить двух пассажиров в пятивагонную электричку так, чтобы они не сидели в одном вагоне.

Решение. Посадка двух пассажиров в разные вагоны является, по существу, выборкой двух вагонов из пяти. Эта выборка является упорядоченной, поскольку посадка первого пассажира в i -й вагон, а второго – в j -й вагон отличается от посадки первого пассажира в j -й вагон, а второго в i -й. Поэтому данная выборка есть размещение из 5 по 2. Следовательно, число различных посадок :

$$A_2^5 = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Задача 1.4. Каким количеством различных способов можно выбрать из урны, содержащей пять белых и три чёрных шара, два шара одного цвета.

Решение. Событие - выбор двух шаров одного цвета - является суммой двух событий: выбор двух шаров белого цвета и выбор двух шаров чёрного цвета. Обозначим число благоприятных для этих событий исходов через m_1 и m_2 соответственно. Тогда общее число различных выборок одноцветных шаров $m = m_1 + m_2$. Найдём значения m_1 и m_2 . Выборка шаров одного цвета является неупорядоченной, поскольку нас интересует только состав выборки. Поэтому числа m_1 и m_2 находятся по формуле числа сочетаний. Так как белые шары выбираются только из белых, а чёрные только из чёрных, то имеем

$$m_1 = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

и

$$m_2 = C_3^2 = \frac{3!}{1!2!} = 3.$$

В итоге получим $m = 10 + 3 = 13$.

1.2. Вероятность событий

Анализ случайных событий показывает, что одни события происходят чаще, чем другие. Количественная мера, характеризующая частоту появления события и выраженная в долях единицы, называется *вероятностью случайного события*. Чем ближе к единице вероятность события, тем чаще оно наступает в испытаниях, и, наоборот, чем ближе к нулю вероятность случайного события, тем реже оно наступает в теоретиковавероятностном эксперименте. Если вероятность события равна единице, то это означает, что событие наступает практически всегда в эксперименте, а если она равна нулю, то событие практически никогда не наступает в нём. Вероятность события A обозначают $P(A)$.

Вероятность обладает следующими свойствами:

- вероятность события $P(A)$ не меньше нуля и не больше единицы :

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

- вероятность достоверного события $P(\Omega)$ равна единице :

$$P(\Omega) = 1;$$

- вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий :

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Эти свойства вероятности являются аксиомами. Приведём важнейшие следствия этих аксиом:

- вероятность невозможного события равна нулю :

$$P(\emptyset) = 0;$$

- вероятность противоположного события равна разности между единицей и вероятностью исходного события :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A),$$

- если событие A влечёт событие B , то вероятность события A не превосходит вероятности события B :

$$P(A) \leq P(B).$$

Для определения вероятности события A рассмотрим подробнее события, которые происходят в эксперименте. Их можно разбить на два класса: простые (элементарные) события и сложные (составные) события.

Элементарным событием или исходом называется такое событие, которое для любого события A рассматриваемого эксперимента находится в одном из двух отношений: либо оно влечёт событие A , либо оно влечёт противоположное событие $\bar{A}$. Из определения элементарного события следует, что оно не может быть суммой других событий нашего эксперимента, а сложное событие A есть сумма всех элементарных событий, которые являются частными случаями A . Совокупность элементарных событий называется *пространством элементарных событий*. Оно обозначается буквой Ω , а элементарные события, входящие в него, обозначаются $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$. Если число элементарных событий в эксперименте конечно, то такой эксперимент называется конечным.

Для конечных экспериментов вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} P(\omega_k), \quad (1.1)$$

где суммирование ведётся по всем элементарным событиям, являющимся частными случаями события A (т.е. влекущими A).

Пример. Из урны, в которой пять белых шаров и три чёрных, вынимается шар. Для этого эксперимента элементарным событием является выборка какого-то шара. Всего в этом эксперименте восемь элементарных событий. Сложными событиями здесь будут: выборка белого шара и выборка чёрного шара, поскольку они являются суммой, соответственно, пяти и трёх элементарных событий.

Если элементарные события равновозможны, то формула (1.1) может быть записана следующим образом:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.2),$$

где m -число благоприятных исходов (элементарных событий, влекущих событие A), n - общее число исходов (элементарных событий).

Задача 1.5. В ящике находятся 3 зеленых, 2 желтых и 5 белых шаров. Какова вероятность, что случайным образом вынутый шар окажется зеленым?

Решение. Общее количество исходов соответствует общему количеству шаров. Следовательно, $n=10$. Благоприятным исходом является вынутый зеленый шар. Таким образом, получаем, что $m=3$. По определению вероятности события: $P(A) = \frac{3}{10}$.

Задача 1.6. В партии из десяти деталей три детали бракованные. Из партии выбирают три детали. Какова вероятность того, что две из них будут стандартными, а одна бракованной?

Решение. Обозначим через A событие- две детали стандартные, а одна бракованная. Общее количество исходов n равно числу сочетаний C_{10}^3 , поскольку для нашей выборки важен только состав элементов. Число благоприятных исходов m равно произведению числа способов выбора двух стандартных деталей из семи C_7^2 на число способов выбора одной дефектной детали из трех C_3^1 . Окончательно получаем:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_7^2 \cdot C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{7! \cdot 3!}{2! \cdot 5! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{21}{40}.$$

Задача 1.7. Из колоды карт в 36 листов выбираются три карты. Какова вероятность того, что две из них будут одной масти, а одна - другой.

Решение. Обозначим искомую вероятность через P . В колоде карт четыре масти - пики, трефы, бубны и червы, а в каждой масти девять карт. Общее

число различных выборок трёх карт из колоды вычисляется по формуле числа сочетаний (выборка неупорядоченная).

$$n = C_{36}^3 = \frac{36!}{3! \cdot 33!} = 7140.$$

Для подсчёта благоприятных исходов m заметим, что процесс выбора карт можно представить в виде двух этапов. Сначала выбирают две масти (первый этап), а затем выбирают карты из этих мастей (второй этап). Число различных выборок двух мастей из четырёх вычисляется по формуле числа размещений, так как число карт первой масти не равно числу карт второй масти. Действительно, наборы карт ($\spadesuit, \heartsuit, \diamond$) и ($\diamond, \heartsuit, \spadesuit$) будут различны, хотя выбраны одинаковые масти.

Когда масти выбраны, то число различных выборок карт этих мастей равно числу выборок карт первой масти, умноженному на число выборок карт второй масти. Поскольку здесь не важен порядок выбора, то эти числа находятся по формуле числа сочетаний. Таким образом, число благоприятных исходов

$$m = A_4^2 \cdot C_9^2 \cdot C_9^1 = \frac{4!}{2!} \cdot \frac{9!}{2! \cdot 7!} \cdot \frac{9!}{1! \cdot 8!} = 3888.$$

Следовательно, вероятность выбора двух карт одной масти и одной карты другой масти равна:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{3888}{7140} \approx 0,545.$$

2. Основные формулы теории вероятностей

2.1. Формулы сложения и умножения вероятностей

Для любых двух событий A и B вероятность их суммы :

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.1)$$

Эта формула называется *формулой сложения вероятностей*, она обобщает аксиому сложения вероятностей, сформулированную в п. 1.1 для несовместных событий. Следует отметить, что если события A и B независимы, то формула (2.1) примет вид (2. 2):

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (2.2)$$

Во многих случаях приходится определять вероятность события, когда известно, что другое событие произошло. Вероятность события A , вычисленная при условии, что событие B наступило, называется *условной вероятностью* события A относительно события B и обозначается $P(A|B)$. Условная вероятность определяется по формуле

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (2.3)$$

Приведем еще одно определение независимости событий. События A и B называются независимыми, если вероятность наступления одного из них не зависит от наступления другого, то есть

$$P(A|B) = P(A) \text{ и } P(B|A) = P(B).$$

Из формулы (2.3) следует формула вычисления вероятности произведения событий A и B :

$$P(AB) = P(A | B) P(B), \quad (2.4)$$

которая называется формулой умножения вероятностей. Для независимых событий A и B она принимает более простой вид:

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (2.5)$$

Рассмотрим задачи, при решении которых используются формулы сложения и умножения вероятностей.

Задача 2.1. Два стрелка поражают мишень с вероятностью 0,6 и 0,8 соответственно. Они произвели залп по мишени. Требуется определить вероятность того, что мишень будет поражена.

Решение.

Способ 1. Обозначим через A_1 и A_2 - попадание в мишень первым и вторым стрелками соответственно, через B - поражение мишени. Мишень будет поражена, если в неё попадёт хотя бы один стрелок, поэтому событие B равносильно сумме $A_1 + A_2$. Тогда, учитывая формулы сложения и умножения вероятностей, а также то, что события A_1 и A_2 независимы (меткость - это внутреннее свойство стрелка), получим

$$P(B) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0,6 + 0,8 - 0,6 \cdot 0,8 = 0,92.$$

Способ 2. Событие - мишень поражена - противоположно событию - оба стрелка промахнулись. Поэтому

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) = 1 - 0,4 \cdot 0,2 = 0,92.$$

Задача 2.2. Из колоды карт в 36 листов последовательно выбираются две карты. Первая выбранная карта оказалась красной масти. Определить вероятность того, что и вторая карта будет красной масти.

Решение. Пусть A и B - появление карты красной масти при первой и второй выборках соответственно. В колоде 18 карт красной масти и 18 карт чёрной масти. Так как при первой выборке произошло событие A , то состав колоды изменился: в колоде стало 17 карт красной масти и 18 карт чёрной. Вычисляя $P(B | A)$ как отношение благоприятного числа исходов к общему, получим

$$P(B|A) = \frac{17}{35}.$$

Задача 2.3. В урне 3 белых и 5 чёрных шаров; из урны последовательно вынули два шара, которые оказались разноцветными. Какова вероятность, что первым был вынут белый шар?

Решение. Введём обозначения для событий:

A_i - появление белого шара при i -й выборке;

B_j - появление чёрного шара при j -й выборке;

C - вынуты разноцветные шары.

В задаче требуется найти $P(A_1|C)$, поэтому, исходя из определения условной вероятности, определим $P(C)$ и $P(AC)$.

Событие - выборка разноцветных шаров - есть сумма двух несовместных событий: первый вынутый шар белый, а второй — чёрный; первый вынутый шар чёрный, а второй - белый. Поэтому

$$P(C) = P(A_1B_2) + P(B_1A_2).$$

Из этого равенства, учитывая формулу умножения вероятностей (2.4), получим

$$P(C) = P(B_2 | A_1)P(A_1) + P(A_2 | B_1)P(B_1) .$$

По условию в урне 3 белых и 5 чёрных шаров, а их общее число равно 8. Вероятности событий A_1 и B_1 определяем как отношение благоприятного числа исходов к общему:

$$P(A_1) = \frac{3}{8} \text{ и } P(B_1) = \frac{5}{8} .$$

Если произошло событие A_1 или B_1 , то состав шаров в урне изменился. Условные вероятности событий B_2 и A_2 находим аналогично:

$$P(B_2|A_1) = \frac{5}{7} \text{ и } P(A_2|B_1) = \frac{3}{7} . \text{ Подставляя полученные значения, вычислим}$$

$$\text{вероятность события } C : P(C) = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{28} .$$

Для того чтобы определить вероятность $P(A_1C)$, заметим, что события A_1 и C происходят совместно только в том случае, когда происходит событие B_2 . Это означает, что $A_1C = A_1B_2$ и, следовательно, $P(A_1C) = P(A_1B_2) = P(B_2|A_1) \cdot P(A_1)$. Вероятности $P(B_2|A_1)$ и $P(A_1)$ были вычислены ранее, поэтому $P(A_1C) = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{56}$ и, окончательно,

$$P(A_1|C) = \frac{15}{56} \cdot \frac{15}{28} = \frac{1}{2} .$$

В данном примере вероятность $P(C)$ можно определить проще: как отношение благоприятного числа исходов к общему:

$$P(C) = \frac{C_3^1 \cdot C_5^1}{C_8^2} = \frac{3 \cdot 5}{28} = \frac{15}{28} .$$

Задача 2.4. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство равна 0,85, второе - 0,92, третье - 0,75. Найти вероятность того, что при аварии сработает : а) только одно устройство; б) только два устройства; в) все три устройства.

Решение: Пусть A — сработало первое устройство, B - второе, C - третье. По формулам умножения (2.5) и сложения (2.1) вероятностей имеем:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & P(A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C) = P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C) = \\ & 0,85 \cdot (1 - 0,92) \cdot (1 - 0,75) + (1 - 0,85) \cdot 0,92 \cdot (1 - 0,75) + (1 - 0,85) \cdot (1 - 0,92) \cdot 0,75 \\ & = 0,1835 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & P(AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC) = 0,85 \cdot 0,92 \cdot 0,25 + 0,85 \cdot 0,08 \cdot 0,75 + 0,15 \cdot 0,92 \cdot 0,75 \\ & = 0,247 ; \end{aligned}$$

$$\text{в)} P(ABC) = 0,85 \cdot 0,92 \cdot 0,75 = 0,586 .$$

2.2. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу событий, если выполнены два условия: они попарно несовместны и сумма всех событий является достоверным событием. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу, то вероятность любого события B можно определить по формуле

$$P(B) = P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + \dots + P(B | A_n)P(A_n), \quad (2.6),$$
 которая называется *формулой полной вероятности*.

Задача 2.5. Рабочие изготавливают однотипные детали. Вероятность брака у первого рабочего — 0,01, а у второго — 0,05. Из партии в пятьсот деталей, двести из которых сделаны первым рабочим, а триста — вторым, выбирается одна деталь. Какова вероятность того, что эта деталь бракованная?

Решение. Рассматриваемая ситуация является двухэтапной: первый этап — изготовление деталей рабочими, а второй — выбор детали из партии. Пусть событие A_i — изготовление детали i -м рабочим, а событие B — выбор бракованной детали. Заметим, что любая деталь изготавливается только одним рабочим, поэтому события A_1 и A_2 несовместны. Кроме того, каждая деталь из партии изготавливается только этими рабочими и, следовательно, сумма событий A_1 и A_2 есть достоверное событие. Это означает, что события A_1 и A_2 образуют полную группу событий и для определения вероятности события B можно использовать формулу полной вероятности

$$P(B) = P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2).$$

Определим значения вероятностей, входящих в правую часть этого равенства. Так как общее число деталей — пятьсот, а двести и триста деталей изготовлены первым и вторым рабочим соответственно, то вероятности

$$P(A_1) \text{ и } P(A_2) \text{ равны: } P(A_1) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5} \text{ и } P(A_2) = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}.$$

По условию, если деталь изготовлена первым рабочим, то вероятность брака равна 0,01, а если вторым, то 0,05. Поэтому

$$P(B | A_1) = 0,01 \text{ и } P(B | A_2) = 0,05.$$

Подставляя полученные значения в формулу полной вероятности, получим

$$P(B) = 0,01 \cdot \frac{2}{5} + 0,05 \cdot \frac{3}{5} = 0,034.$$

Задача 2.6. У рыбака два излюбленных места лова, которые он посещает с вероятностями 0,2 и 0,6 соответственно. На первом месте лова он вылавливает 2 кг рыбы с вероятностью 0,7, а на втором — с вероятностью 0,4. С рыбалки он возвращается с уловом в 2 кг. Какова вероятность того, что рыбак ловил рыбу на первом месте?

Решение. Пусть A_i — обозначает событие — рыбак ловил рыбу на i -м месте, а B — улов рыбы 2 кг. Из условия задачи имеем

$$P(A_1) = 0,2; P(A_2) = 0,6; P(B | A_1) = 0,7; P(B | A_2) = 0,4.$$

Вероятность $P(B)$ вычисляем по формуле полной вероятности $P(B) = 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,38$, а искомую вероятность $P(A_1|B)$ - по формулам Байеса

$$P(A_1|B) = \frac{0,7 \cdot 0,2}{0,38} = \frac{0,14}{0,38} = \frac{7}{19}.$$

2.3. Последовательность независимых испытаний. Формулы Бернулли, Муавра-Лапласа, Пуассона

Большой круг задач практического характера может быть сведён к теоретико-вероятностной модели так называемой последовательности независимых испытаний. Суть этой модели состоит в следующем. Рассматривается n одинаковых и независимых друг от друга опытов, в которых наблюдается событие A . Вероятность наступления события A одна и та же для каждого опыта. В этих условиях ставятся две основные задачи: определение вероятности наступления события A ровно k раз в n опытах; определение вероятности того, что событие A произойдёт не менее k_1 раз и не более k_2 раз в n опытах. Соответствующие вероятности обозначаются через $P_n(k)$ и $P_n(k_1; k_2)$.

Решение первой задачи может быть получено по формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad (2.7)$$

где p — вероятность наступления события A в одном опыте, а $q = 1-p$ является вероятностью события $\bar{A}$.

Однако применение формулы Бернулли для больших n затруднительно ввиду сложности вычислений. Поэтому для решения первой задачи при больших n используют приближённые формулы подсчёта $P_n(k)$ - локальную формулу Муавра-Лапласа и формулу Пуассона.

Согласно локальной формуле Муавра-Лапласа, величина $P_n(k)$ приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(x), \quad (2.8)$$

где

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

При этом следует отметить, что чем больше количество испытаний, тем точнее полученный результат.

Существует еще одна постановка этой задачи. Нас будет интересовать вероятность того, что в n опытах интересующее событие произойдет не менее k_1 раз и не более k_2 . При решении данной задачи также используются приближенные методы. Вероятность $P_n(k_1; k_2)$ согласно интегральной формуле Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (2.9)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{функция Лапласа},$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функций $\Phi(x)$ и $\phi(x)$ смотрим в соответствующих таблицах, которые приведены в конце любого учебника или задачника по теории вероятностей.

Задача 2.7. Бросается пять раз игральная кость. Какова вероятность, что в этой серии бросков выпадет: первое - ровно две тройки; второе - не менее четырех троек; третье - хотя бы одна тройка?

Решение. Событие A — выпадение тройки, вероятность этого события

$P(A) = p = \frac{1}{6}$. Вероятность выпадения двух троек определяем по формуле

$$(2.7), \text{ для } n=5 \text{ и } k=2 \text{ находим } P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1250}{7776} \approx 0,1608.$$

Вероятность выпадения не менее четырех троек определяем по формуле (2.8), имеем

$$P_5(4;5) = P_5(4) + P_5(5) \approx 0,0032 + 0,0001 = 0,0033.$$

Вероятность выпадения хотя бы одной тройки также можно вычислить по формуле (2.8), но можно определить ее проще, переходя к противоположному событию - невыпадению ни одной тройки. Тогда

$$P_5(0) = C_5^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} \approx 0,4019,$$

откуда искомая вероятность $P_5(1;5) = 1 - P_5(0) \approx 0,5981$.

Задача 2.8. Стрелок поражает мишень с вероятностью 0,8. Он произвел серию из ста выстрелов. Требуется определить вероятность следующих событий: первое - попадание в мишень ровно 75 раз; второе - попадание в мишень не менее 70 раз и не более 80 раз; третье - попадание в мишень не более 70 раз.

Решение. Поскольку число испытаний n достаточно велико, а произведение np существенно больше единицы, то для ответа на первый вопрос используем локальную формулу Муавра-Лапласа (2.9). Имеем $n=100$, $k=75$, $p=0,8$ и $q=0,2$, тогда

$$x = \frac{75 - 80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -\frac{5}{4} = -1,25.$$

Учитывая, что функция $\phi(x)$ четная, т.е. $\phi(x) = \phi(-x)$, по таблице находим значение $\phi(1,25) = 0,1826$, а затем искомую вероятность

$$P_{100}(75) \approx \frac{1}{4} \cdot 0,1826 \approx 0,0457.$$

Для решения второго вопроса используем интегральную формулу Муавра-Лапласа (2.9). Имеем $n=100$, $k_1=70$, $k_2=100$, $p=0,8$ и $q=0,2$. Вычисляем значения x_1 и x_2 :

$$x_1 = \frac{70 - 80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -\frac{10}{4} = -2,5, \quad x_2 = 0.$$

По таблице находим значения $\Phi(0)=0$ и $\Phi(2,5)=0,4938$. Так как функция Лапласа нечетная, то $\Phi(-2,5)=-0,4938$. Искомая вероятность равна:

$$P_{100}(70;80) \approx 0 - (-0,4938) = 0,4938.$$

Аналогично решается и третий пункт задачи. Имеем

$$x_1 = -20, \quad x_2 = -2,5;$$

$$\Phi(-20)=-0,5, \quad \Phi(-2,5)=-0,4938.$$

Искомая вероятность

$$P_{100}(0;70) \approx \Phi(-2,5) - \Phi(-20) \approx -0,4938 + 0,5 = 0,0062.$$

3. Случайные величины

3.1. Закон распределения случайной величины

Случайной величиной называется такая величина, которая в результате теоретико-вероятностного эксперимента может принимать то или иное значение, причем не известно заранее, какое именно.

Среди случайных величин выделяются два основных типа - дискретные и непрерывные случайные величины. Случайная величина называется дискретной, если она принимает изолированные значения, и непрерывной, если ее значения сплошь заполняют некоторый промежуток $\langle a, b \rangle$. Например, номера выигрышных лотерейных билетов являются дискретной случайной величиной, а время ожидания автобуса на остановке - непрерывной.

С теоретико-вероятностной точки зрения, случайная величина полностью определена, если известна вероятность, с которой она принимает значения из любого заданного интервала. Соотношения, определяющие эти вероятности, называются законом распределения случайной величины. Закон распределения случайной величины может иметь различные формы: ряд распределения, многоугольник распределения, функция распределения, плотность вероятности и т.п.

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется таблица, в которой приведены все возможные значения случайной величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ и соответствующие им вероятности $p_i = P\{X=x_i\}$, $i=1, 2, \dots, n$.

X	x_1	x_2		x_n	
					
P	p_1	p_2		p_n	
					

Отметим, что $\sum_i p_i = 1$. Вероятность принятия случайной величиной значений из данного промежутка $\langle a, b \rangle$ определяется по формуле

$$P\{X \in \langle a, b \rangle\} = \sum_{x_i \in \langle a, b \rangle} p_i. \quad (3.1)$$

Графическое изображение ряда распределения называется многоугольником распределения (рис. 3.1).

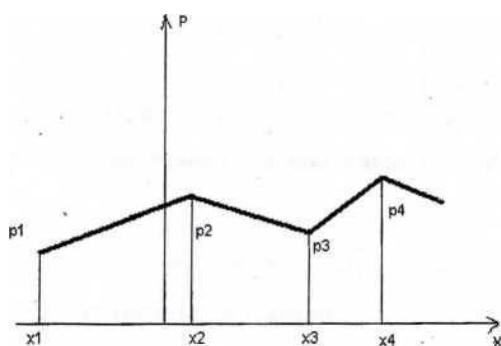


Рис. 3.1

Следует отметить, что приведенные формы закона распределения применимы лишь к дискретным случайным величинам. Однако имеется универсальная форма закона распределения, применимая для описания случайных величин обоих типов - функция распределения.

3.2. Функция распределения и плотность распределения случайной величины

Функцией распределения случайной величины называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что X примет значение меньше x

$$F(x) = P\{X < x\}. \quad (3.2)$$

Из определения $F(x)$ следует, что она принимает значения в промежутке от нуля до единицы. Перечислим основные свойства функции распределения: $F(x)$ является неубывающей функцией; вероятность принятия случайной величиной X значений из промежутка $[a, b)$ определяется формулой

$$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a). \quad (3.3)$$

Задача 3.1. По ряду распределения случайной величины X

X	0	2	3	6
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

найти функцию распределения, построить ее график и определить вероятности принятия случайной величиной значений в промежутках $(2, 5)$, $(-1, 0)$ и $(3, 8)$.

Решение. Пусть $x \leq 0$, тогда событие $X \in (-\infty, x)$ является невозможным, так как случайная величина X не принимает отрицательных значений, и поэтому $F(x)=0$.

Если $0 < x \leq 2$, то в промежутке $(-\infty, x)$ имеется только одно значение случайной величины, а именно - нулевое. Поэтому, учитывая формулу (3.1), имеем

$$F(x) = P(X < x) = p_1 = \frac{1}{8}.$$

Аналогично определяются значения функции распределения на промежутках: $(2, 3]$, $(3, 6]$, $(6, +\infty)$. В итоге получим:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{8}, & 0 < x \leq 2; \\ \frac{3}{8}, & 2 < x \leq 3; \\ \frac{7}{8}, & 3 < x \leq 6; \\ 1, & 6 < x. \end{cases}$$

График функции распределения приведен на рис. 3.2.

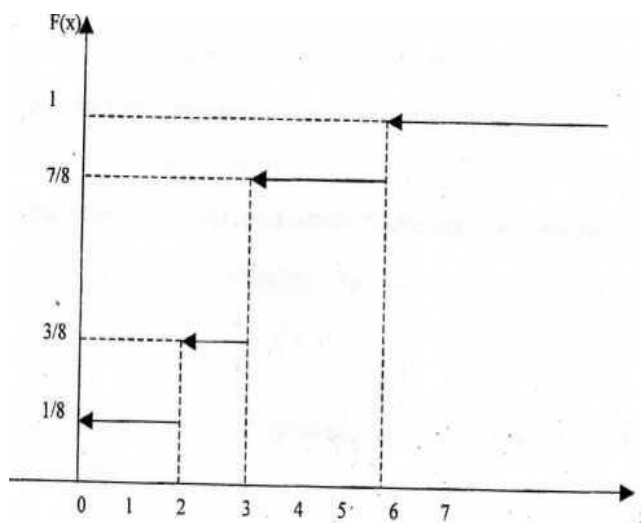


Рис. 3.2

Плотностью распределения вероятностей случайной величины X называется неотрицательная функция $f(x)$, удовлетворяющая равенству

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad (3.4)$$

где $F(x)$ - функция распределения.

Если $F(x)$ - дифференцируемая функция, то $F'(x)=f(x)$, поэтому плотность называют также дифференциальной функцией распределения. Основные свойства плотности:

$$\begin{aligned}
& 1. f(x) \geq 0 ; \\
& 2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1; \\
& 3. P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Заметим, что в соотношении 3 любой знак строгого неравенства можно заменить на знак нестрогого неравенства.

3.3. Числовые характеристики случайных величин

Математическим ожиданием или средним значением случайной величины X называется число, определенное равенствами:

$$M(X) = \sum_i p_i x_i - \text{ для дискретных случайных величин;}$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \tag{3.6}$$

-для непрерывных случайных величин.

Математическое ожидание - это такое значение, вокруг которого группируются значения случайной величины.

Перечислим основные свойства математического ожидания:

-математическое ожидание постоянной есть сама постоянная

$$M(C) = C;$$

- постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания

$$M(CX) = CM(X);$$

- математическое ожидание суммы двух независимых случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y);$$

- математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Разность между случайной величиной и математическим ожиданием $X - M(X)$ называется отклонением случайной величины. Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины называется *дисперсией*. Дисперсия характеризует степень концентрации значений случайной величины около среднего значения. Чем меньше дисперсия, тем больше значений случайной величины появляется вблизи математического ожидания и наоборот.

Квадратный корень из дисперсии называется среднеквадратичным отклонением $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$. Дисперсия обозначается $D(X)$.

Основные свойства дисперсии:

- дисперсия постоянной равна нулю $D(C) = 0$;
- постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат $D(CX) = C^2 D(X)$;
- дисперсия неотрицательна $D(X) \geq 0$;
- дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

Приведем расчетные формулы для вычисления дисперсии:

$$D(X) = \sum_i (x_i - m)^2 p_i,$$

- для дискретных случайных величин;

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx \quad (3.7)$$

- для непрерывных случайных величин, где m - математическое ожидание случайной величины X .

На практике удобнее пользоваться следующей формулой для вычисления дисперсии:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \quad (3.8)$$

Задача 3.2. Для дискретной случайной величины X , заданной рядом распределения

X	0	3	4	8
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

определить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

Решение. По формулам (3.6) имеем

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{8} = 3.$$

Для определения дисперсии воспользуемся формулой (3.8), тогда

$$D(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{1}{8} + 64 \cdot \frac{1}{8} - (3)^2 = 5,5 \quad \text{и} \quad \sigma(X) = \sqrt{5,5} \approx 2,345.$$

Задача 3.3. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины X , плотность распределения которой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2e^{-2x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Решение. По формулам (3.6) имеем

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x2e^{-2x}dx = -\left(xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

Для определения дисперсии используем формулу (3.8):

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2 = \int_0^{+\infty} x2e^{-2x}dx - \frac{1}{4} =$$

$$= -\left(x^2e^{-2x} + xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$

$$\sigma[X] = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Задача 3.4. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2 , причём $x_1 < x_2$. Известны - вероятность p_1 значения x_1 , математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$. Найти закон распределения этой случайной величины, если $p_1 = 0,95$, $M(X) = 3,2$, $D(X) = 0,1$.

Решение. $M(X) = x_1 \cdot 0,95 + x_2 \cdot 0,05 = 3,2$;

$$D(X) = (x_1 - 3,2)^2 \cdot 0,95 + (x_2 - 3,2)^2 \cdot 0,05 = 0,1.$$

Имеем два уравнения для нахождения неизвестных x_1 и x_2 . Решая эту систему уравнений, определяем $x_1 = 3,128$, $x_2 = 3,564$. Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	3,128	3,564
p	0,95	0,05

Задача 3.5. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X .

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ \frac{x}{3} - 1,3 & 3 < x \leq 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Решение. Согласно формуле (3.4) имеем: $f(x) = F'(x)$, то есть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ \frac{1}{3}, & 3 < x \leq 6, \\ 0, & x > 6. \end{cases}$$

Из формул (3.6) и (3.7)

$$M(X) = \int_3^6 x \cdot f(x)dx = \int_3^6 \frac{x}{3}dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_3^6 = \frac{1}{6} (36 - 9) = \frac{9}{2};$$

$$D(X) = \int_3^6 \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 f(x) dx = \int_3^6 \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{3}{4}.$$

3.4. Нормальное распределение

Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a и σ , если ее плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.9)$$

Вероятностный смысл параметров распределения следующий: a -это математическое ожидание, σ - среднеквадратичное отклонение случайной величины.

Замена переменной $Y = \frac{X - a}{\sigma} \quad (3.10)$

позволяет любую случайную величину X , распределенную по нормальному закону с параметрами a и σ , привести к случайной величине Y , распределенной по так называемому стандартному нормальному закону с параметрами 0 и 1. Для стандартного нормального закона распределения плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (3.11)$$

а функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x), \quad (3.12)$$

где $\Phi(x)$ -функция Лапласа :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (3.13)$$

Задача 3.6. На станке изготавливают деталь. Длина детали X является случайной величиной с параметрами $a=20$ см и $\sigma=0,2$ см. Найти вероятность того, что длина детали будет заключена между 19,7 см и 20,3 см, т.е. отклонение в ту или иную сторону не превысит 0,3 см.

Решение. Отклонение $|X - a| < \varepsilon$ случайной величины X равносильно

отклонению $|Y| < \frac{\varepsilon}{\sigma}$ случайной величины Y , распределенной по

стандартному нормальному закону (см. (3.10)). Для нашего случая $-\frac{3}{2} < Y < \frac{3}{2}$.

Вероятность попадания случайной величины Y в интервал $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ равна

$$P(-\frac{3}{2} < Y < \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(-\frac{3}{2}) = \Phi(\frac{3}{2}) - \Phi(-\frac{3}{2}) = 2\Phi(\frac{3}{2})$$

Определив по таблице значение $\Phi(1,5)$, получим

$$P\{|X-20| < 0,3\} = P\{|Y| < 1,5\} = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664.$$

Задача 3.7. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами 3 и 5. Определить вероятность ее попадания в интервал $(-1,2)$.

Решение. Неравенство $-1 < X < 2$ для случайной величины X равносильно неравенству $\frac{-1-a}{\sigma} < Y < \frac{2-a}{\sigma}$ для стандартно распределенной случайной величины Y (3.10). Поэтому, учитывая, что $a = 3$, $\sigma = 5$, имеем $P\{-1 < X < 2\} = P\{-0,8 < Y < -0,2\} = \Phi(-0,2) - \Phi(-0,8) = -0,5793 - (-0,7881) = 0,2088$.

4. Элементы математической статистики

4.1. Основные понятия

К основным задачам математической статистики относятся:

1. Нахождение по опытным (статистическим) данным закона распределения наблюдаемой случайной величины - статистического закона распределения.
2. Нахождение по статистическим данным параметров распределения наблюдаемой случайной величины - точечное и интервальное оценивание параметров распределения.
3. Статистическая проверка гипотезы о теоретическом законе распределения наблюдаемой случайной величины.

Первая и вторая задачи решаются посредством выборки большого и малого объема. Для статистической проверки гипотезы о законе распределения (задача 3) используются специальные критерии (Пирсона, Колмогорова и т.п.).

Простой статистический ряд. Это - первичная форма записи статистического материала. Например, случайная величина X при 15 наблюдениях приняла следующие значения:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X_k	-20	-60	-10	30	60	70	-10	-30	120	-100	-80	20	40	-60	-10

Простой статистический ряд может быть обработан различными способами.

Статистическая функция (закон) распределения. Так называется частота события $X < x$ в данном статистическом материале

$$F^*(x) = P^*(X < x).$$

Так, для рассмотренного простого статистического ряда, при $X=x=-100$ будет $F^*(-100) = 0$; когда $-100 < x < -80$ будет $F(x) = 1/15$; в точке $x=-80$ $F^*(x)$ возрастёт ещё на $1/15$; в точке $x=-60$ $F^*(x)$ возрастает на $2/15$ и так далее до $F^*(x)=1$ при $x>120$. Таким образом, $F^*(x)$ терпит разрывы в точках $x=-100$, $x=-80$, $x=-60$ и т.д. График её - ступенчатая линия, расположенная между $F^*(x)=0$, $x<-100$, и $F^*(x)=1$ при $x>120$.

Всё множество значений, наблюдаемых в результате опыта, называется **генеральной совокупностью**, а число наблюдений - её **объёмом** ($n=15$ -объём в рассмотренном примере).

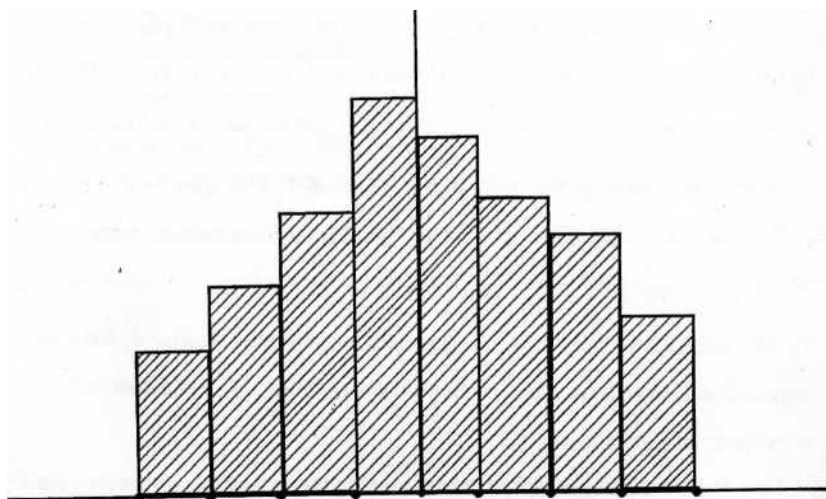
При большом числе наблюдений удобнее пользоваться некоторыми усреднёнными характеристиками. Разделим весь диапазон наблюдаемых значений на интервалы (**разряды**) и подсчитаем количество значений m_i приходящихся на каждый i -й разряд; это число разделим на общее число наблюдений n и найдём частоту, соответствующую данному разряду

$$P_i^* = \frac{m_i}{n} \quad (\text{сумма частот равна 1}).$$

Составим таблицу: в первой строке приводим разряды, во второй - количество значений в данном разряде, в третьей - соответствующие частоты; эта таблица называется **статистическим рядом**. Пусть $n = 500$, I_k = разряд:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
I_k	-4;-3	-3;-2	-2;-1	-1;0	0;1	1;2	2; 3	3; 4
P_k^*	0,012	0,05	0,144	0,266	0,24	0,176	0,092	0,02

График статистического ряда - гистограмма; в рассмотренном примере она имеет вид:



Гистограмма приближённо соответствует эмпирической плотности распределения непрерывной случайной величины X .

4.2. Числовые характеристики статистического распределения

Эмпирическим аналогом математического ожидания является среднее арифметическое полученных значений случайной величины

$$M^*(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = m^*(x) \quad (4.1)$$

- **статистическое среднее случайной величины.** При неограниченном увеличении числа опытов статистическое среднее приближается к математическому ожиданию. $M'(X)$ является случайной величиной, которая тем не менее даёт некоторое представление о неизвестном значении $M(X)$.

Аналогично определяется статистическая дисперсия случайной величины

$$D^*(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m^*(x))^2. \quad (4.2)$$

При не слишком большом количестве опытов применяют следующий приём-пользуются статистическим рядом, полученным из той же генеральной совокупности. Тогда будем иметь

$$m_x^* = M^*(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i p_i^* = \bar{x}, \quad (4.3)$$

где $\bar{x}$ - выборочная средняя, $\tilde{x}_i$ - “представитель” i -ого разряда (например, среднее арифметическое значение x для данного разряда - середина интервала (x_i, x_{i+1})); p_i^* - частота; n - количество разрядов. Аналогично

$$D^*(x) = \sum (\tilde{x}_i - m_x^*)^2 P_i^*, \quad \sqrt{D^*(x)} = \sigma, \quad (4.4)$$

где $D^*(x)$ - выборочная дисперсия; $\sigma(x)$ - среднее квадратическое отклонение выборки.

4.3. Оценки числовых характеристик

Из рассмотрения статистического материала можно сделать предположение о законе распределения случайной величины. Тогда возникает задача отыскания параметров, которыми определяется это распределение; например, для нормального закона необходимо найти величины a и σ . Такое приближённое значение параметра является случайной величиной и называется его **оценкой**. Пусть $\tilde{a}$ - статистическая оценка неизвестного параметра a , выбранного (предполагаемого) закона распределения. Желательно, чтобы при увеличении числа испытаний n она приближалась, сходилась по вероятности к величине a . Оценка, обладающая таким свойством, называется **состоятельной**. Кроме того, необходимо, чтобы, заменяя величину a приближённо на $\tilde{a}$, мы не делали систематической ошибки, т.е. чтобы выполнялось условие $M(\tilde{a}) = a$. Такая оценка называется **несмещённой**.

Наконец, желательно, чтобы выбранная несмещённая оценка имела минимальное рассеяние около математического ожидания, т.е. обладала по

сравнению с другими оценками минимальной дисперсией $D[\tilde{a}] = \min$. Такая оценка называется **эффективной**.

Точечной называется оценка, которая определяется одним числом. При небольшом числе наблюдений точечная оценка неизвестного параметра может значительно отличаться от оцениваемой величины, т.е. приводить к грубым ошибкам. Поэтому в большинстве задач требуется не только найти для параметра a подходящее численное значение, но и оценить его точность, надёжность, т.е. нужно установить, к каким ошибкам приведёт замена параметра a его оценкой $\tilde{a}$ и с какой степенью уверенности можно утверждать, что эти ошибки не выйдут за данные пределы.

4.4. Доверительный интервал. Доверительная вероятность (надёжность)

Пусть для параметра a получена из опыта несмещённая оценка $\tilde{a}$. Оценим возможную ошибку. Назначим некоторую, близкую к 1, вероятность (например, $\beta=0,9; 0,95$ или $0,99$). Так что рассматриваемое случайное событие с вероятностью β можно считать практически достоверным. Найдём такое число $\varepsilon > 0$, что будет

$$P(|\tilde{a} - a| < \varepsilon) = \beta, \quad (4.5)$$

т.е. вероятность того, что оценка $\tilde{a}$ отличается от истинного (теоретического) значения параметра a меньше чем на ε , равна β . Тогда возможные ошибки практически не выходят из интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Большие ошибки могут появиться с малой вероятностью $\alpha=1-\beta$. Из (4.5) следует

$$P(\tilde{a} - \varepsilon < a < \tilde{a} + \varepsilon) = \beta. \quad (4.6)$$

Это означает, что с вероятностью β параметр a попадает в интервал

$$I_\beta = (\tilde{a} - \varepsilon, \tilde{a} + \varepsilon). \quad (4.7)$$

Здесь параметр a неслучаен, а интервал I_β - случайный - случайно его положение на оси ОХ, определяемое центром $\tilde{a}$; случайна и его длина 2ε . Величину β необходимо толковать как вероятность того, что случайный интервал I_β , покрывает неизвестный параметр a . Величина β называется **доверительной вероятностью** или **надёжностью**, а интервал I_β - **доверительным интервалом**. Границы доверительного интервала $a_1 = \tilde{a} - \varepsilon, a_2 = \tilde{a} + \varepsilon$ называются **доверительными границами**.

5. Варианты контрольных работ

Студенты дневного отделения в течение семестра выполняют одну контрольную работу по теории вероятностей. Студент должен выполнить контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его номера в списке группы.

Ниже приведены задания для контрольной работы.

Вариант	Номера заданий
1	21,31,41,51,61
2	22,32,42,52,62
3	23,33,43,53,63
4	24,34,44,54,64
5	25,35,45,55,65
6	26,36,46,56,66
7	27,37,47,57,67
8	28,38,48,58,68
9	29,39,49,59,69
10	30,40,50,60,70

К/р . Теория вероятностей и математическая статистика

21. Студент знает 45 из 60 ответов на вопросы программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что:

а) студент знает ответы на все три вопроса, содержащихся в его экзаменационном билете; б) студент знает ответы только на два вопроса своего экзаменационного билета; в) студент ответы знает только на один вопрос своего экзаменационного билета.

22. В каждой из двух урн находятся 5 белых и 10 черных шаров. Из первой урны во вторую переложили наудачу один шар, а затем из второй урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второй урны, окажется черным.

23. Три стрелка в одинаковых и независимых условиях произвели по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8, третьим – 0,7. Найти вероятность того, что:

а) только один из стрелков попадет в цель; б) только два стрелка попадут в цель; в) все три стрелка попадут в цель.

24. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что в 1600 испытаниях событие наступит 900 раз.

25. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равно 0,9, второе – 0,95 и третье – 0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только одно устройство; б) только два устройства; в) все три устройства.

26. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,07. Найти вероятность того, что в 1460 испытаниях событие наступит 28 раз.

27. В партии из 1000 изделий имеется 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых из этой партии 50 изделий ровно 5 окажутся дефектными.

28. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 225 испытаниях событие наступит не менее 75 и не более 90 раз.

29. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготавливаются детали одного наименования. На первом станке изготавливается 10 %, на втором – 30 %, на третьем – 60 % всех деталей. Для каждой детали вероятность быть бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке; 0,8 – если она изготовлена на втором станке; 0,9 – если она изготовлена на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бездефектной.

30. Два брата входят в состав двух различных спортивных команд, каждая из которых состоит из 12 человек. В двух урнах имеется по 12 билетов с номерами от 1 до 12. Члены каждой команды вынимают наудачу по одному билету из определенной урны (без возвращения). Найти вероятность того, что оба брата вытащат номер 6.

31-40. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2 , причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного

значения x_1 , математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$. Найти закон распределения этой случайной величины.

31. $p_1 = 0,1; M(x) = 3,9; D(x) = 0,09$.

32. $p_1 = 0,3; M(x) = 3,7; D(x) = 0,21$.

33. $p_1 = 0,5; M(x) = 3,5; D(x) = 0,25$.

34. $p_1 = 0,7; M(x) = 3,3; D(x) = 0,21$.

35. $p_1 = 0,9; M(x) = 3,1; D(x) = 0,09$.

36. $p_1 = 0,9; M(x) = 2,2; D(x) = 0,36$.

37. $p_1 = 0,8; M(x) = 3,2; D(x) = 0,16$.

38. $p_1 = 0,6; M(x) = 3,4; D(x) = 0,24$.

39. $p_1 = 0,4; M(x) = 3,6; D(x) = 0,24$.

40. $p_1 = 0,2; M(x) = 3,8; D(x) = 0,16$.

41-50. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией) $F(X)$. Найти плотность вероятности (дифференциальную функцию), математическое ожидание и дисперсию. Построить графики интегральной и дифференциальной функций.

$$\begin{array}{ll}
 41. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases} & 42. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x^2 - x) & \text{при } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases} \\
 43. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^3 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases} & 44. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 3x^2 + 2x & \text{при } 0 < x \leq 1/3 \\ 1 & \text{при } x > 1/3 \end{cases}
 \end{array}$$

$$45. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{при } 2 < x \leq 4 \\ 1 & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

$$46. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 / 9 & \text{при } 0 < x \leq 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

$$47. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 / 4 & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

$$48. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\pi / 2 \\ \cos x & \text{при } -\pi / 2 < x \leq 0 \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

$$49. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 2 \sin x & \text{при } 0 < x \leq \pi / 6 \\ 1 & \text{при } x > \pi / 6 \end{cases}$$

$$50. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3\pi / 4 \\ \cos 2x & \text{при } 3\pi / 4 < x \leq \pi \\ 1 & \text{при } x > \pi \end{cases}$$

51-60. Известны математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X . Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (α, β) .

51. $a=10, \sigma=4, \alpha=2, \beta=13$.

52. $a=9, \sigma=5, \alpha=5, \beta=14$.

53. $a=8, \sigma=1, \alpha=4, \beta=9$.

54. $a=7, \sigma=2, \alpha=3, \beta=10$.

55. $a=6, \sigma=3, \alpha=2, \beta=11$.

56. $a=5, \sigma=1, \alpha=1, \beta=12$.

57. $a=4, \sigma=5, \alpha=2, \beta=11$.

58. $a=3, \sigma=2, \alpha=3, \beta=10$.

59. $a=2, \sigma=5, \alpha=4, \beta=9$.

60. $a=2, \sigma=4, \alpha=6, \beta=10$.

61-70. Найти доверительные интервалы для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}$, объем выборки n и среднее квадратическое отклонение σ .

61. $\bar{x}=75,17, n=36, \sigma=6$.

62. $\bar{x}=75,16, n=49, \sigma=7$.

63. $\bar{x}=75,15, n=65, \sigma=8$.

64. $\bar{x}=75,14, n=81, \sigma=9$.

65. $\bar{x}=75,13, n=100, \sigma=10$.

66. $\bar{x} = 75,12$, $n = 121$, $\sigma = 11$.
 67. $\bar{x} = 75,11$, $n = 144$, $\sigma = 12$.
 68. $\bar{x} = 75,10$, $n = 169$, $\sigma = 13$.
 69. $\bar{x} = 75,09$, $n = 196$, $\sigma = 14$.
 70. $\bar{x} = 75,08$, $n = 225$, $\sigma = 15$.

Библиографический список

Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшее образование, 2002.

Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.- М: Высшее образование , 2008.

Содержание

Введение	3
1.Основные понятия теории вероятностей.....	4
1.1.Основные комбинаторные понятия.....	4
1.2.Вероятность событий.....	7
2.Основные формулы теории вероятностей.....	9
2.1.Формулы сложения и умножения вероятностей.....	9
2.2.Формула полной вероятности.Формула Байеса.....	12
2.3.Последовательность независимых испытаний.Формулы Бернулли. Муавра-Лапласа,Пуассона.....	13
3.Случайные величины.....	15
3.1.Закон распределения случайной величины.....	15
3.2.Функция распределения и плотность распределения случайной величины.....	16
3.3.Числовые характеристики случайных величин.....	18
3.4.Нормальное распределение.....	21
4.Элементы математической статистики.....	22
4.1.Основные понятия.....	22
4.2.Числовые характеристики статистического распределения.....	23
4.3.Оценки числовых характеристик.....	24
4.4.Доверительный интервал.Доверительная вероятность(надежность).....	25
5.Варианты контрольных работ.....	25
Библиографический список.....	30