

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ

МАТЕМАТИКА

Методические указания
по выполнению расчетно-графической работы
«Ряды Фурье» и индивидуальные задания
для студентов очной формы обучения

Санкт-Петербург

2016

УДК 51 (07.07)

Высшая математика: методические указания по выполнению расчетно-графической работы «Ряды Фурье» и индивидуальные задания для студентов очной формы обучения / сост.: И.Э. Апакова, О.Е. Куляхтина; Н.Ю. Косовская; СПбГУПТД ВШТЭ. – СПб., 2016. – 23 с.

Излагаются основные положения теории тригонометрических рядов Фурье. Рассмотрены типовые задачи для выполнения расчетно-графической работы. Настоящие методические указания предназначены для студентов всех направлений очной формы обучения (по третьему семестру).

Рецензент: доцент кафедры высшей математики № 2 Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» имени В.И.Ульянова (Ленина), канд. техн. наук С.Б.Энтина.

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики СПбГУПТД ВШТЭ (протокол № 6 от 02 февраля 2016 г.).

Утверждены к изданию методической комиссией института энергетики и автоматизации СПбГУПТД ВШТЭ (протокол № 5 от 12 апреля 2016 г.).

Редактор и корректор В.А. Басова

Техн. редактор Л.Я. Титова.

Темплан 2016 г., поз. 67.

Подп. к печати 06.06.16 г. Формат 60×84/16. Бумага тип № 1.

Печать офсетная. Объем 1,5 печ. л.; 1,5 уч.-изд. л.

Тираж 50 экз. Изд. № 67. Цена «С». Заказ №

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для студентов дневной формы обучения инженерно-технических и экономических специальностей, а также студентов всех форм обучения как дополнительный материал по практическим занятиям в разделе «Ряды Фурье». Особое внимание в данной брошюре уделено разбору примеров, теоретический материал имеет лишь справочный характер.

Для успешного решения задач расчетно-графической работы по учебным планам третьего семестра следует основательно изучить терминологию, важные теоретические положения раздела, которые приведены в данном пособии.

Перед началом выполнения контрольной работы рекомендуем изучить теорию по данному разделу в учебниках [1],[2]. Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточного количества задач, соответствующих этому заданию, которые можно найти в задачниках [3],[4].

I. Ряды Фурье

1. Основной промежуток.

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовые последовательности.

Функциональный ряд

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots + \\ & + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned} \quad (1)$$

называется рядом Фурье.

Сформулируем главное утверждение.

Пусть функция $f(x)$ на интервале $(-p; p)$ удовлетворяет условиям:

- 1) на этом интервале $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва 1-го рода;
- 2) интервал $(-p; p)$ содержит конечное число экстремумов функции $f(x)$;

3) существуют $\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x)$.

Тогда функция $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье, при этом сумма $S(x)$ этого ряда равна:

1) $f(x)$ – в тех точках, где $f(x)$ непрерывна;

2) $\frac{1}{2}(\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x))$ в точке x_0 – точке разрыва функции;

3) $\frac{1}{2}(\lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x))$ в точках $-\pi$ и π .

Кроме того, коэффициенты $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$, ряда Фурье определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Заметим, что если $f(x)$ – чётная функция, то её ряд Фурье ищем в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{ где } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad (3)$$

если же $f(x)$ – нечётная, то её ряд Фурье имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad , \text{ где } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx . \quad (4)$$

2. Растяжение основного промежутка.

Рассмотрим теперь функцию, заданную на отрезке $[-l, l]$. Ряд Фурье для такой функции будет иметь вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) . \quad (5)$$

При этом главное утверждение сохранит все свои положения с поправкой на границы отрезка (или интервала).

Коэффициенты разложения в данном случае вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx ;$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx ;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx .$$

Для четной функции $f(x)$ ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad , \text{ где } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx ; \quad (6)$$

если же $f(x)$ – нечётная, то её ряд Фурье –

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \text{ где } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (7)$$

3. Смещение основного промежутка.

Пусть функция $f(x)$ задана и удовлетворяет условиям главного утверждения на отрезке $[h, h + 2\pi]$. Тогда ряд Фурье такой функции имеет вид (1), а его коэффициенты вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_h^{h+2\pi} f(x) dx; \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_h^{h+2\pi} f(x) \cos nx dx; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_h^{h+2\pi} f(x) \sin nx dx. \end{aligned} \quad (8)$$

II. Примеры решения задач

Решая предложенную задачу, вначале необходимо убедиться, что данная функция в указанном интервале удовлетворяет всем условиям главного утверждения. Затем вычисляются коэффициенты ряда Фурье по указанным формулам, и, подставляя их в ряд (1) или в ряд (5), получаем искомое разложение данной функции в ряд Фурье; наконец, основываясь на главном утверждении, нужно определить, при каких значениях x полученный ряд сходится к данной функции.

Пример № 1

Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 5, & -\pi < x < 0, \\ -3, & 0 < x < \pi \end{cases}$ в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$.

Решение: Функция $f(x)$ в указанном интервале является кусочно-постоянной (рис. 1) и удовлетворяет всем условиям главного утверждения. Точка $x = 0$ – точка разрыва 1-го рода. На промежутках $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$ функция монотонна. Поэтому ряд Фурье сходится, и его сумма $S(x)$ совпадает со значением функции $f(x)$ в точках непрерывности.

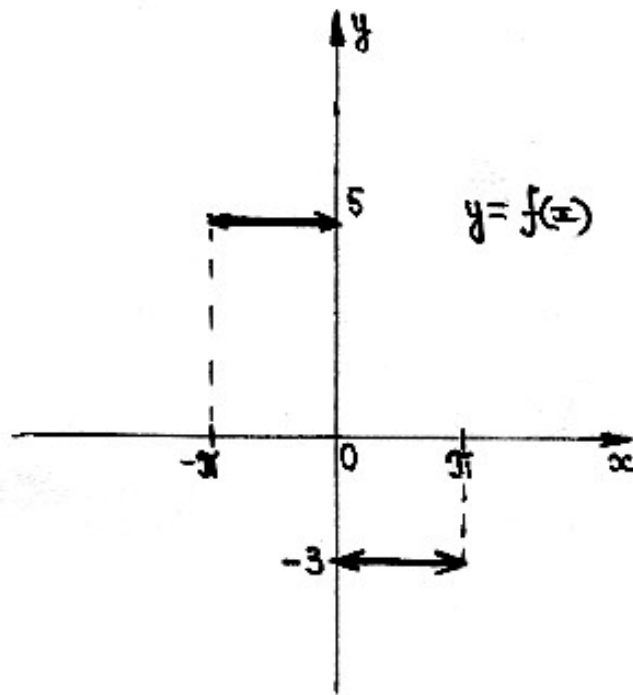


Рис. 1

Данная функция – функция общего вида, поэтому вычисляем коэффициенты ряда Фурье по формулам (2).

Так как функция $f(x)$ задана различными формулами на разных частях интервала $(-\pi, \pi)$, то при вычислении интегралов в формулах (2) для коэффициентов ряда, следует разбить интервал интегрирования на части и затем вычислять указанные интегралы как сумму интегралов по составляющим частям:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 5 dx + \int_0^{\pi} (-3) dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(5x \Big|_{-\pi}^0 - 3x \Big|_0^{\pi} \right) = 2;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 5 \cos nx dx + \int_0^{\pi} (-3) \cos nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{5 \sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{3 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right) = 0; \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 5 \sin nx dx + \int_0^{\pi} (-3) \sin nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{5 \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{3 \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right) = -\frac{5}{\pi n} (1 - (-1)^n) + \\ &+ \frac{3}{\pi n} ((-1)^n - 1) = \frac{8}{\pi n} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{16}{\pi n}, & n = 2k - 1, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Подставляя значения коэффициентов a_0 , a_n , b_n в тригонометрический ряд (1), получим искомое разложение данной функции в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{16}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)x \right) = \\ &= 1 - \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = 1 - \frac{16}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right). \end{aligned}$$

На рис.2 показан график функции $y = S(x)$, где $S(x)$ – сумма ряда Фурье функции $f(x)$. Эта сумма является периодической функцией с периодом 2π и совпадает с функцией $f(x)$ при всех $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

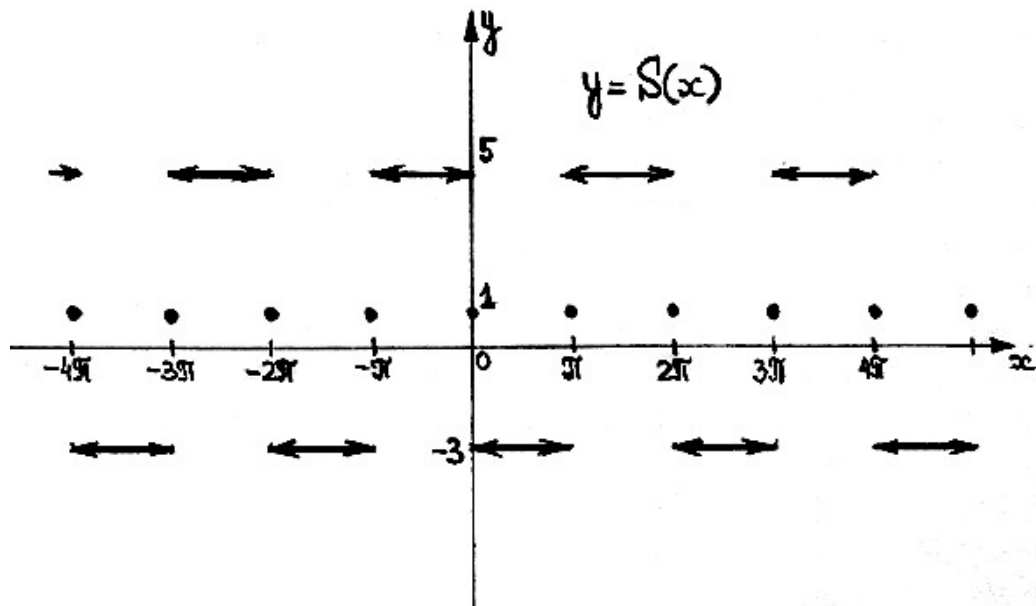


Рис. 2

В точке разрыва $x = 0$, где функция не определена, сумма ряда $S(x)$ отличается от данной функции:

$$S(0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow -0} f(x) + \lim_{x \rightarrow +0} f(x) \right) = \frac{1}{2} (5 - 3) = 1.$$

В обеих граничных точках интервала $x = -\pi$ и $x = \pi$ сумма ряда $S(x)$ равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) \right) = \frac{1}{2} (5 - 3) = 1.$$

Пример № 2

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x^2$ при $x \in [-\pi; \pi)$;
 $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Решение: Функция $f(x) = x^2$ в указанном интервале удовлетворяет всем условиям, сформулированным в главном утверждении.

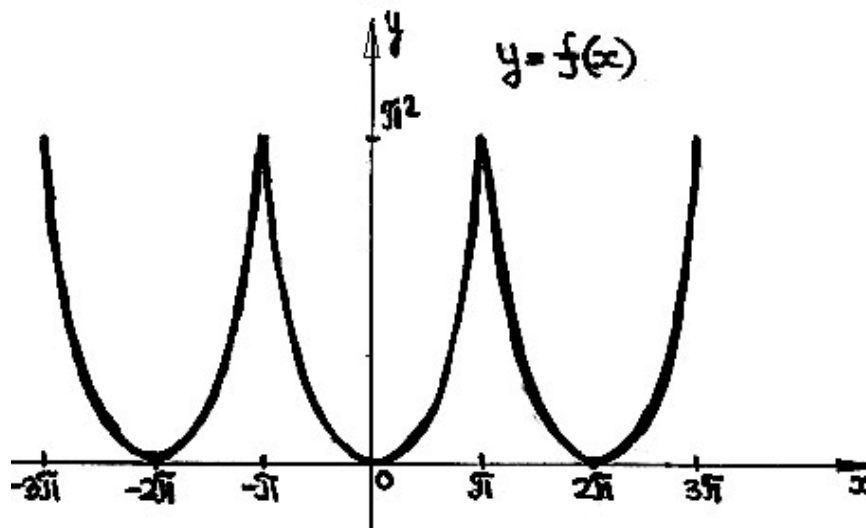


Рис. 3

Кроме того, данная функция $f(x) = x^2$ чётная (рис.3), значит, все $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, и поэтому функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье (1) по косинусам. Используя формулы (3), получим:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \\ &= \frac{4}{\pi n} x \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}; \end{aligned}$$

вычисляя a_n , $n=1, 2, \dots$, мы два раза интегрировали по частям:

$$u = x^2; \quad dv = \cos nx dx \Rightarrow du = 2x dx; \quad v = \frac{\sin nx}{n};$$

$$u_1 = x; \quad dv_1 = \sin nx dx \Rightarrow du_1 = dx; \quad v_1 = -\frac{\cos nx}{n};$$

и учли, что $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $n=1, 2, \dots$.

Тогда искомое разложение имеет вид:

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}.$$

Это разложение данной периодической и всюду непрерывной функции справедливо при любом значении x , так как функция $S(x)$ является непрерывной в точках вида $x = (2k+1)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, поскольку $f(-\pi+0) = f(\pi-0) = \pi^2$, т. е. полученный ряд Фурье сходится к данной функции на всей числовой оси. Графики данной функции и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье полностью совпадают (рис. 4).

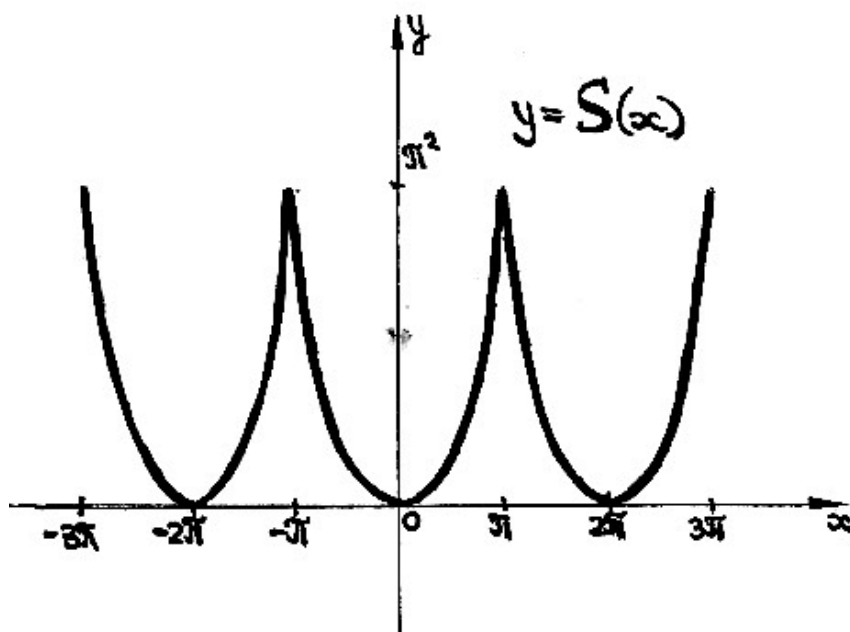


Рис.4

Пример № 3

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на интервале $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Найти значения суммы ряда $S(x)$ в точках $x = 0,25$; $x = 1,5$; $x = 7,13$.

Решение: Функция $f(x) = x$ в указанном интервале удовлетворяет всем условиям, сформулированным в главном утверждении. Кроме того, данная функция $f(x) = x$ нечётная (рис. 5), значит, все $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и поэтому функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье (5) по синусам.

Используя формулы (7) при $l = \frac{1}{2}$, получим:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \sin \frac{n\pi x}{\frac{1}{2}} dx = \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \sin 2\pi n x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin 2\pi n x & v = -\frac{\cos 2\pi n x}{2\pi n} \end{array} \right| = \\ &= 4 \left(-\frac{1}{2\pi n} x \cdot \cos 2\pi n x \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\pi n} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi n x dx \right) = \\ &= 4 \left(-\frac{\cos \pi n}{4\pi n} + \frac{\sin 2\pi n x}{(2\pi n)^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{\pi n} \cdot (-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Итак, искомое разложение имеет вид:

$$f(x) = x = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin 2\pi n x, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

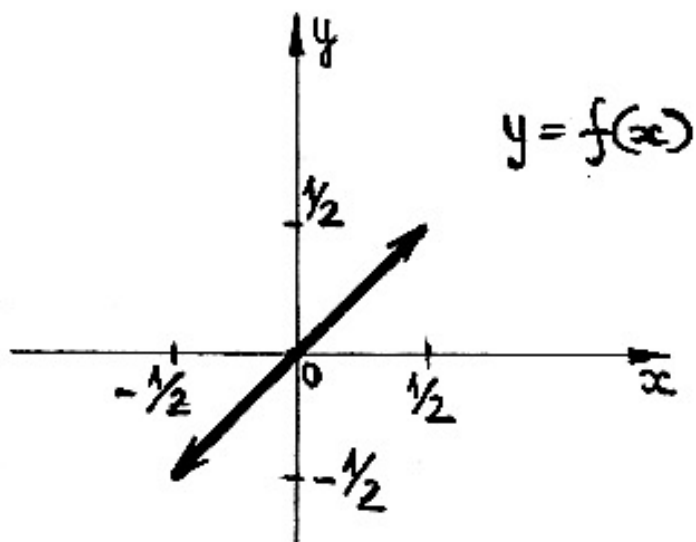


Рис. 5

График суммы изображен на рис. 6. Суммаряда Фурье $S(x)$ является периодической функцией с периодом равным $2l = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, причем $S(x) = f(x)$ только при $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

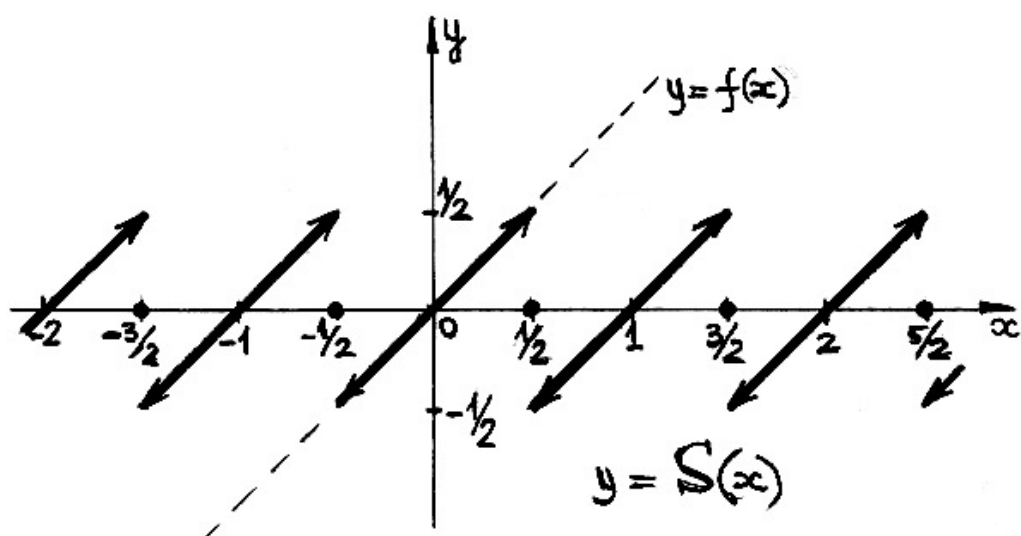


Рис. 6

Функция $S(x)$ претерпевает разрывы в точках вида $x = (2k + 1) \cdot \frac{1}{2} = k + \frac{1}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, принимая значение, равное

нулю, так как полусумма правого и левого предельных значений $S(x)$ в каждой такой точке равна нулю:

$$S\left(-\frac{1}{2}\right) = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(-\frac{1}{2}+0\right) + f\left(\frac{1}{2}-0\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Так как $x = 0,25 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, то $S(0,25) = f(0,25) = 0,25$.

Так как $x = 1,5$ является точкой вида $x = k + \frac{1}{2}$, $k = 1$, то $S(1,5) = 0$.

Так как функция $S(x)$ является периодической с периодом $T = 2l = 1$, то $S(7,13) = S(0,13 + 1 \cdot 7) = S(0,13) = f(0,13) = 0,13$.

Пример № 4

Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в интервале $[0, \pi]$ уравнением $f(x) = \pi - 2x$: а) по косинусам; б) по синусам.

Решение: Функция $f(x) = \pi - 2x$ в указанном интервале удовлетворяет всем условиям, сформулированным в главном утверждении.

а) Чтобы получить разложение данной функции в ряд Фурье, содержащий только косинусы, продолжаем ее на соседний интервал $[-\pi, 0]$ четным образом (рис. 7), тогда коэффициенты ее ряда Фурье $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, а коэффициенты a_0 и a_n , $n = 1, 2, \dots$, вычислим по формулам (3):

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - 2x) dx = \frac{2}{\pi} (\pi x - x^2) \Big|_0^{\pi} = 0;$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - 2x) \cos nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = \pi - 2x & du = -2dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{(\pi - 2x) \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = -\frac{4}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \\
 &= -\frac{4}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{8}{\pi n^2}, & n = 2k - 1; \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

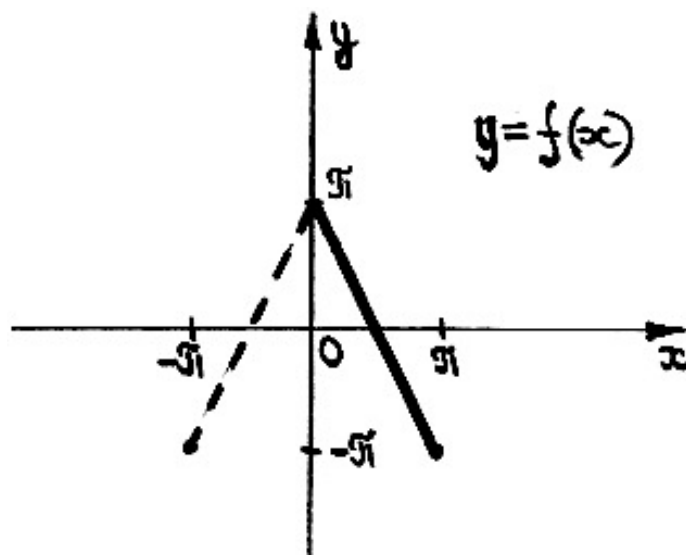


Рис. 7

Итак, искомое разложение имеет вид:

$$f(x) = \pi - 2x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad x \in [0, \pi].$$

График суммы $S(x)$ ряда Фурье, определенной на всей числовой оси, изображен на рис. 8.

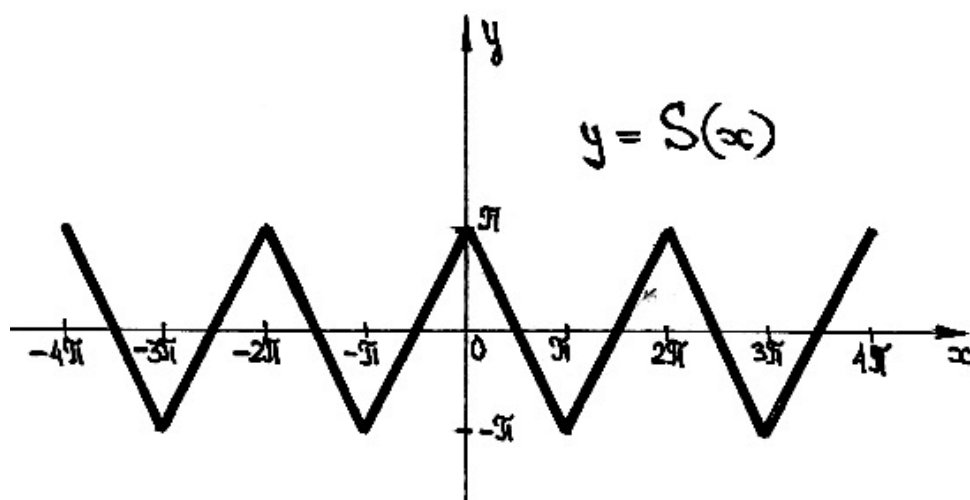


Рис. 8

б) Чтобы получить разложение данной функции в ряд Фурье, содержащий только синусы, продолжаем ее на соседний интервал $[-\pi, 0]$ нечетным образом (рис.9), тогда коэффициенты ее ряда Фурье $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а коэффициенты b_n , $n = 1, 2, \dots$, вычислим по формулам (4):

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - 2x) \sin nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = \pi - 2x & du = -2dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{(\pi - 2x) \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} (-1)^n + \frac{\pi}{n} - \frac{2}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{n} ((-1)^n + 1) = \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{n}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k - 1, \end{cases} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

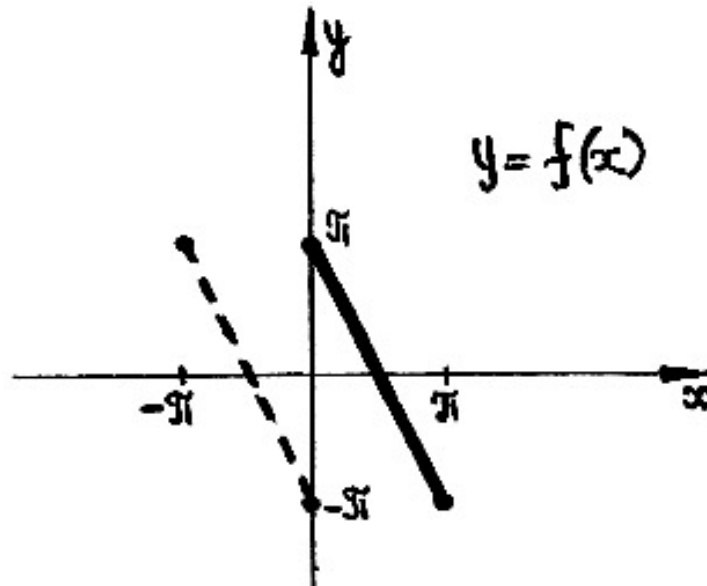


Рис. 9

Итак, искомое разложение имеет вид:

$$f(x) = \pi - 2x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{k}, \quad x \in (0, \pi).$$

График суммы ряда Фурье изображен на рис. 10. Сумма ряда $S(x) = f(x)$ только при $x \in (0, \pi)$. В точках $x = 0$ и $x = \pi$ имеем:

$$S(0) = \frac{f(-0) + f(+0)}{2} = \frac{1}{2}(-\pi + \pi) = 0; \quad f(0) = \pi;$$

$$S(0) \neq f(0);$$

$$S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{1}{2}(\pi - \pi) = 0; \quad f(\pi) = -\pi;$$

$$S(\pi) \neq f(\pi).$$

Таким образом, сумма ряда в точках $x = 0$ и $x = \pi$ не совпадает со значениями функции $f(x)$.

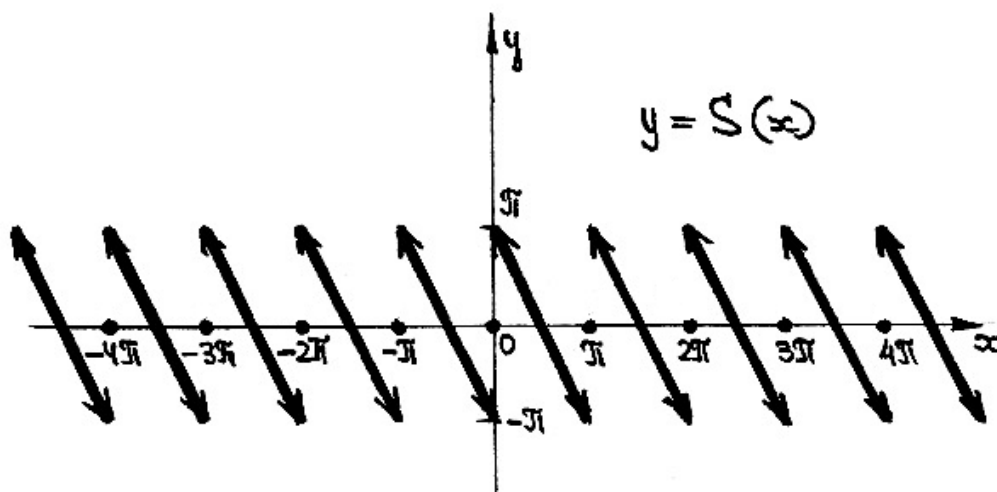


Рис.10

Пример № 5

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < \pi, \\ 1, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ в интервале $(0, 2\pi)$.

Решение: Данная функция удовлетворяет условиям главного утверждения. Точка $x = \pi$ – точка разрыва 1-го рода. На промежутках $(0, \pi)$ и $(\pi, 2\pi)$ функция монотонна.

Будем искать коэффициенты ряда Фурье по формулам (8) при $h=0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} (-1) dx + \int_{\pi}^{2\pi} dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-x \Big|_0^{\pi} + x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = 0;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} (-\cos nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin nx}{n} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} (-\sin nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin nx dx \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{\cos nx}{n} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \\
&= \frac{2}{\pi n} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{4}{\pi n}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Итак, искомое разложение имеет вид:

$$f(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \quad x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi).$$

В точке разрыва $x = \pi$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi+0} f(x) \right) = \frac{-1+1}{2} = 0 = \\
&= -\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi}{(2k+1)}.
\end{aligned}$$

III. Задания для расчетно-графической работы

а) Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье. Изобразить график функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$:

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} -2, & -2 < x < 0, \\ 3, & 0 < x < 2; \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} -3, & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ 2, & 0 < x < \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} 4, & -5 < x < 0, \\ -6, & 0 < x < 5; \end{cases}$$

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < -2, \\ -5, & -2 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 2, \\ 0, & 2 < x < 3; \end{cases}$$

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \\ 2, & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ -1, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi; \end{cases}$$

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} 5, & -3 < x < 0, \\ -2, & 0 < x < 3; \end{cases}$$

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} -4, & -6 < x < 0, \\ 2, & 0 < x < 6; \end{cases}$$

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \\ -2, & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ 4, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi; \end{cases}$$

$$9. \quad f(x) = \begin{cases} 8, & -\pi < x < 0, \\ -7, & 0 < x < \pi; \end{cases}$$

$$10. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -4 < x < -3, \\ -2, & -3 < x < 0, \\ 3, & 0 < x < 3, \\ 0, & 3 < x < 4. \end{cases}$$

б) Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам и по синусам, продолжив ее в симметричный интервал. Нарисовать график суммы ряда $S(x)$. Найти значения суммы в указанных точках:

$$1. \quad f(x) = 1 - x, \quad 0 < x \leq 1, \quad S(0,2), \quad S(17,2);$$

$$2. \quad f(x) = 2 - 3x, \quad 0 < x \leq 2, \quad S(1,5), \quad S(12,7);$$

$$3. \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2}x, \quad 0 < x \leq 3, \quad S(2,5), \quad S(18,1);$$

$$4. \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2}x, \quad 0 < x \leq 3, \quad S(2,5), \quad S(18,1);$$

$$5. \quad f(x) = 1 - \frac{3}{2}x, \quad 0 < x \leq 4, \quad S(3), \quad S(15,6);$$

$$6. \quad f(x) = 3x + 1, \quad 0 < x \leq 1, \quad S(0,8), \quad S(13,2);$$

$$7. \quad f(x) = 3 - 2x, \quad 0 < x \leq 3, \quad S(2), \quad S(18,4);$$

$$8. \quad f(x) = \frac{1}{3}x - 2, \quad 0 < x \leq 6, \quad S(1), \quad S(23);$$

$$9. \quad f(x) = \frac{2}{3}x + 1, \quad 0 < x \leq 2, \quad S(1,5), \quad S(9);$$

$$10. \quad f(x) = 2x - 1, \quad 0 < x \leq 1, \quad S(0,7), \quad S(11,5).$$

Библиографический список

1. Бермант А.Ф. Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа.- СПб. : Лань, 2006.
2. Натансон И.Г.. Краткий курс высшей математики.- СПб. : Лань, 2005.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу / под ред. Б.П.Демидовича – М. : Астрель, 2001.
4. Берман Г.Н.. Сборник задач по курсу математического анализа .- М.: Наука, 1985.

Содержание

Предисловие.....	3
I. Ряды Фурье.....	3
II. Примеры решения задач.....	6
III. Задания для расчетно-графической работы.....	20
Библиографический список.....	22