

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

ВЫСШАЯ

МАТЕМАТИКА

Методические указания
по выполнению контрольной работы
«Дифференциальные уравнения и ряды»
для студентов очной формы обучения

Санкт-Петербург

2016

УДК 51 (07.07)

Высшая математика: методические указания по выполнению контрольной работы «Дифференциальные уравнения и ряды» для студентов очной формы обучения / сост.: И.Э. Апакова, О.Е. Куляхтина; З.Л. Абжандадзе; М.Э. Юдовин; Н.Л. Белая; ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2016. – 40 с.

В настоящих методических указаниях изложены основные положения теории дифференциальных уравнений и рядов. Рассмотрены типовые задачи для выполнений контрольной работы. Предназначены для студентов всех направлений очной формы обучения (по третьему семестру).

Рецензент: доцент кафедры высшей математики № 2 Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» имени В.И. Ульянова (Ленина), канд. техн. наук С.Б. Энтина.

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 6 от 02 февраля 2016 г.).

Утверждены к изданию методической комиссией института энергетики и автоматизации ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 5 от 12 апреля 2016 г.).

Редактор и корректор В.А. Басова

Техн. редактор Л.Я. Титова.

Темплан 2016 г., поз.11 .

Подп. к печати 14.10.16 г. Формат 60×84/16. Бумага тип № 1.

Печать офсетная. Объем 2,5 печ. л., 2,5 уч.-изд. л. Тираж 50 экз.

Изд. № 11. Цена «С». Заказ №

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические указания предназначены для студентов всех направлений дневной формы обучения. Они составлены в соответствии с ныне действующей программой курса высшей математики в ВШТЭ СПбГУПТД и содержат необходимые сведения для выполнения контрольной работы по темам «Дифференциальные уравнения» и «Ряды».

Особое внимание уделяется разбору примеров; теоретический материал имеет преимущественно справочный характер. Для успешного решения задач контрольной работы следует основательно изучить все методы интегрирования дифференциальных уравнений, а также вспомнить методы нахождения неопределенных интегралов. Перед выполнением каждого пункта рекомендуем изучить теорию по данному разделу в учебниках [1], [2]. К выполнению контрольного задания следует приступать, решив достаточное количество задач, соответствующих этому заданию, которые можно найти в задачниках [3], [4], [5].

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ИХ ПОРЯДОК, ОБЩИЙ И ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

Дифференциальным уравнением называется равенство, содержащее производные и дифференциалы неизвестной функции.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок высшей производной, содержащейся в этом уравнении.

Функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, т.е. обращающая его в тождество, называется интегралом (или решением) этого уравнения.

Интеграл дифференциального уравнения называется общим, если он содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения, а функции, получаемые из общего интеграла при различных числовых значениях произвольных постоянных, называются частными интегралами этого уравнения.

Геометрически каждому частному интегралу дифференциального уравнения соответствует плоская линия, его график, которая называется

интегральной кривой этого уравнения, а общему интегралу соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Отыскание частного интеграла дифференциального уравнения n – го порядка ($n = 1, 2, 3, \dots$), удовлетворяющего n начальным условиям вида

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0; y''(x_0) = y''_0; \dots; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

называется задачей Коши.

В указанных n начальных условиях Коши задаются значения функции y и ее производных $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ при некотором заданном значении аргумента $x = x_0$. По этим n начальным условиям определяются значения всех n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, входящих в общий интеграл уравнения n – го порядка.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

2.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение первого порядка

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

называется уравнением с разделяющимися переменными, если функции P и Q разлагаются на множители, каждый из которых зависит только от одной переменной:

$$f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0. \quad (2)$$

В таком уравнении путем деления его членов на $f_2(y) \cdot g_1(x)$ переменные разделяются:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = 0. \quad (3)$$

После разделения переменных, когда каждый член уравнения будет зависеть только от одной переменной, общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = C, \text{ где } C - \text{ произвольная постоянная.} \quad (4)$$

2.2. Однородные уравнения первого порядка

Уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется однородным, если $f(x, y)$ можно представить как функцию только одного отношения переменных $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, т. е. уравнение вида

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (5)$$

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, а следовательно, и решается посредством замены функции y (или x) новой функцией u по формуле $y = u \cdot x$, где $u = u(x)$ (или $x = u \cdot y$, $u = u(y)$).

2.3. Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли

Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (6)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - известные функции от x , линейное (первой степени) относительно функции y и ее производной y' , называется линейным.

Посредством замены функции y произведением двух вспомогательных функций $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$, линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

Уравнение Бернулли $y' + P(x)y = y^n \cdot Q(x), \quad (7)$

отличающееся от линейного уравнения тем, что в правую часть входит множителем некоторая степень функции y , решается так же, как и линейное. Посредством подстановки $y = u \cdot v$ оно также сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными.

2.4. Уравнения в полных дифференциалах

Если в уравнении первого порядка $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ коэффициенты P и Q удовлетворяют условию $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, (8)

то его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$ [1, 2]. Такое уравнение называется уравнением в полных дифференциалах.

Записав такое уравнение в виде $du = 0$ и найдя первообразную функцию $u(x, y)$ по правилу, указанному в [1, 2], получим общий интеграл этого уравнения, полагая $u(x, y) = C$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.1. Уравнения, допускающие понижение порядка

Уравнение второго порядка $y'' = f(x)$ (9) решается последовательным интегрированием. Умножая обе его части на dx и интегрируя, получаем уравнение первого порядка: $y' = \int f(x)dx + C_1 = \varphi_1(x) + C_1$.

Снова умножая обе части полученного уравнения на dx и интегрируя, получаем общий интеграл исходного уравнения в виде явной функции от x и двух произвольных постоянных C_1, C_2 : $y = \int \varphi_1(x)dx + \int C_1 dx + C_2 = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2$.

Уравнения второго порядка $F(x, y', y'') = 0$ (10)

и $F(y, y', y'') = 0$, (11)

не содержащие явно функции y или аргумента x , преобразуются в уравнения первого порядка посредством подстановки $y' = p(x)$, откуда $y'' = \frac{dp}{dx}$ – для уравнения (10) и $y' = p(y)$, откуда $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ – для уравнения (11).

3.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0, \quad (12)$$

где p и q – некоторые действительные числа.

Для отыскания общего решения этого уравнения составляется характеристическое уравнение

$$k^2 + p \cdot k + q = 0, \quad (13)$$

которое получается из данного дифференциального уравнения заменой y'', y' и y на соответствующие степени k , причем сама функция y заменяется единицей.

Тогда общее решение данного дифференциального уравнения строится в зависимости от корней k_1 и k_2 его характеристического уравнения. Здесь возможны три случая.

1) Корни k_1 и k_2 – действительные и различные, тогда общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}, \quad (14)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

2) Корни k_1 и k_2 – действительные и равные $k_1 = k_2 = k$, тогда общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{kx}, \quad (15)$$

3) Корни k_1 и k_2 – комплексно-сопряженные: $k_1 = \alpha + \beta i$; $k_2 = \alpha - \beta i$, тогда общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (16)$$

3.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x), \quad (17)$$

где p и q – некоторые действительные числа, $f(x)$ – известная функция независимой переменной x .

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \bar{y} + y_*, \quad (18)$$

где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (получающегося из данного неоднородного уравнения при $f(x) = 0$),

а y_* – частное решение данного неоднородного уравнения.

Для некоторых специальных видов функции $f(x)$ частное решение y_* можно найти методом неопределенных коэффициентов.

А) Если правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f(x) = e^{mx} \cdot P_n(x), \quad (19)$$

где $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ – многочлен n -ой степени,

m – некоторое действительное число, тогда :

1) Если число m не является корнем характеристического уравнения, то частное решение данного неоднородного уравнения задается формулой

$$y_* = e^{mx} \cdot Q_n(x), \quad (20)$$

где $Q_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, а коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ неизвестны и подлежат определению.

2) Если число m совпадает только с одним из корней характеристического уравнения, то частное решение данного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_* = xe^{mx} \cdot Q_n(x). \quad (21)$$

Если число m совпадает с обоими корнями характеристического уравнения, то частное решение данного неоднородного уравнения задается формулой $y_* = x^2 e^{mx} \cdot Q_n(x)$. (22)

Б) Если правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f(x) = e^{ax} (A_1 \cos bx + A_2 \sin bx), \quad (23)$$

где a, b, A_1, A_2 – заданные действительные числа, тогда

1) Если числа $a \pm bi$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение данного неоднородного уравнения задается формулой

$$y_* = e^{ax} (M \cos bx + N \sin bx), \quad (24)$$

где числа M и N неизвестны и подлежат определению.

2) Если числа $a \pm bi$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение данного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_* = x e^{ax} (M \cos bx + N \sin bx). \quad (25)$$

Таким образом, для указанных видов правой части (**А** или **Б**) написав выражение для функции y_* с неопределенными коэффициентами по указанным правилам, находим их, подставляя y_* в данное неоднородное уравнение и приравнивая коэффициенты у подобных членов из обеих частей полученного равенства.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами может быть решено и методом вариации произвольных постоянных [1, 2], который состоит в следующем. Сначала находится общее решение $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ соответствующего однородного дифференциального уравнения, имеющего ту же левую часть, что и исходное неоднородное уравнение (y_1 и y_2 – линейно независимые частные решения однородного уравнения). Затем частное решение y_* данного неоднородного уравнения находится в виде $y_* = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, т. е. предполагается, что постоянные C_1 и C_2 являются функциями независимой переменной x . При этом функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ могут быть найдены из системы:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

4. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Бесконечным рядом или, короче, **рядом** называется выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$. Числа $a_1, a_2, \dots$ называются членами ряда.

Ряд задан, если задано правило, позволяющее для любого натурального n найти соответствующий член ряда a_n . Ряд часто записывают в форме

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Пусть дан ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$. Величина

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ называется n -й **частичной суммой** этого ряда. Предел же этой величины, когда $n \rightarrow \infty$, называется **суммой** ряда.

Итак, сумма ряда есть предел последовательности его частичных сумм:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если ряд имеет **конечную** сумму, то говорят, что он *сходится*. В противном случае, т.е. когда сумма бесконечна или её вовсе нет, ряд называется **расходящимся**.

Вопрос о сходимости ряда лишь в редких случаях решается путём непосредственного нахождения суммы ряда, т.к. это обычно затруднительно; в основном же сходимость рядов устанавливается с помощью следующих свойств и признаков, сформулированных для положительных рядов.

Положительным называется ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$, в котором все члены положительны.

Необходимое условие сходимости ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

состоит в том, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Нужно отметить, что это условие не является достаточным, т.е. нарушение этого условия гарантирует расходимость ряда, но его выполнение не гарантирует сходимости.

4.1. Признаки сходимости положительных рядов

Первый признак сравнения

Пусть даны два положительных ряда : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,

причём при всех n выполняется условие $a_n \leq b_n$. Тогда если ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Второй признак сравнения

Пусть даны два положительных ряда : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если существует конечный и отличный от нуля предел отношения одинаковых по номеру членов рядов:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \quad (0 < I < +\infty) ,$$

то эти ряды одновременно сходятся или расходятся.

Признак Даламбера

Пусть положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ таков, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Если $l < 1$, то ряд сходится, а если $l > 1$, то расходится. (При $l = 1$ ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся, поэтому сходимость ряда следует установить с помощью других признаков).

Интегральный признак сходимости

Пусть ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ и некоторая функция $f(x)$, заданная при $x \geq 1$, связаны так, что при всех натуральных n $f(n) = a_n$, и кроме того, $f(x)$ - непрерывная и убывающая. Тогда ряд и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

4.2. Знакопередающие ряды

Ряд называется **знакопередающим**, если любые два его соседних члена имеют разные знаки.

Условием сходимости знакопередающего ряда

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

является следующее утверждение:

Теорема Лейбница:

Если ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ удовлетворяет следующим условиям: $a_1 > a_2 > a_3 \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

Для знакопеременных рядов вводится понятие абсолютной сходимости ряда. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно или не абсолютно сходящимся рядом.

5. Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - постоянные числа.

Этот же ряд можно записать в виде $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. Областью

сходимости степенного ряда называют множество всех значений x , при которых этот ряд сходится как числовой. Чтобы найти область сходимости степенного ряда, обычно с помощью известных признаков изучают числовой

ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, а затем накладывают условия на переменную x .

5.1. Ряды Тейлора и Маклорена

Приведём основные факты. Известно, что для функции $f(x)$, имеющей производные до $n+1$ порядка включительно в окрестности точки a , имеет место формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)$, $a < t < x$.

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в окрестности точки a , допустим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, тогда

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

или
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Если в ряде Тейлора $a = 0$, получаем частный случай - ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Приведём разложение некоторых функций в ряд Маклорена, указав области сходимости:

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ (ряд сходится при любом x).

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$ (ряд сходится при любом x).

3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ (ряд сходится при любом x).

4. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \dots +$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))x^n}{n!} + \dots$$
 (ряд сходится при $|x| < 1$).

$$5. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (\text{ряд сходится при } |x| < 1).$$

$$6. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad (\text{ряд сходится при } |x| < 1).$$

5.2. Вычисление определенных интегралов с помощью рядов

Верно утверждение, что после почленного интегрирования степенного ряда, если пределы интегрирования лежат внутри интервала сходимости, получается ряд, сумма которого равняется соответствующему интегралу от суммы данного ряда. Поэтому определённые интегралы, которые как функции верхнего предела не выражаются элементарными функциями, удобно вычислять с помощью рядов. Нужно сначала разложить подынтегральную функцию в ряд, а потом проинтегрировать ряд почленно.

5.3. Применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений

Один из способов решения дифференциальных уравнений с помощью рядов состоит в том, что для представления функций применяется ряд Тейлора.

Пусть требуется найти решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Представим разложение искомого решения в ряд по степеням разности $x - x_0$.

Оно таково:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots,$$

$y(x_0)$ известно .

Подставив в уравнение значение $x = x_0$, найдём и $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Далее, дифференцируя заданное уравнение, получим

$$y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot y' , \text{ откуда находим}$$

$$y''(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot y' .$$

Далее аналогично дифференцируем y'' и, полагая $x = x_0$, найдём $y'''(x_0)$ и т.д. Таким образом, мы сможем найти сколь угодно много членов разложения решения дифференциального уравнения.

6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{y^2 + 1} dx = x y dy$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (см. формулу (2)), поэтому, разделив левую и правую части уравнения на выражение $x\sqrt{y^2 + 1}$ (при $x \neq 0$), приходим к равенству

$$\frac{dx}{x} = \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + 1}} .$$

Интегрируя обе части полученного равенства, получим общий интеграл данного дифференциального уравнения

$$\ln|x| = \sqrt{y^2 + 1} + C_1 \quad \text{или} \quad x = \pm e^{C_1} e^{\sqrt{y^2 + 1}}, \quad \text{или} \quad x = C e^{\sqrt{y^2 + 1}},$$

где $C = \pm e^{C_1}$.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$(1 + x^2)dy + ydx = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

Получили уравнение вида (3). Интегрируя обе части полученного равенства, получим общий интеграл данного дифференциального уравнения

$$\ln|y| = -\arctg x + C.$$

Теперь, используя указанное начальное условие $y(1) = 1$, подставляем в общий интеграл заданные значения переменных ($x_0 = 1$, $y_0 = 1$) и определяем соответствующее значение произвольной постоянной C :

$$\ln 1 = -\arctg 1 + C, \quad C = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, частным решением будет

$$\ln|y| = -\arctg x + \frac{\pi}{4} \quad \text{или} \quad y = e^{\frac{\pi}{4} - \arctg x}.$$

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0.$$

Решение. Выразим производную через дифференциалы переменных

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

умножим обе части уравнения на dx и разложим коэффициент при dy на множители, получим уравнение с разделяющимися переменными (см. формулу (2)):

$$(\sqrt{y} + 1)\sqrt{x}dy - ydx = 0.$$

Далее разделяем переменные: $\frac{\sqrt{y} + 1}{y} dy - \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 0$ и, интегрируя, находим общее решение дифференциального уравнения

$$\int (y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{y}) dy - \int x^{-\frac{1}{2}} dx = C; \quad 2\sqrt{y} + \ln|y| - 2\sqrt{x} = C.$$

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0.$$

Решение. Разрешая данное уравнение относительно производной

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

устанавливаем, что она является функцией только отношения переменных

$\frac{y}{x}$, то есть что данное уравнение является однородным (см. формулу (5)).

Далее вводим новую функцию u , полагая $y = u \cdot x$, где $u = u(x)$; при этом

$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, и после подстановки данное уравнение преобразуется в

уравнение с разделяющимися переменными

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{2u} \quad \text{или} \quad xdu = \frac{1 - u^2}{2u} dx.$$

Разделим переменные: $\frac{2udu}{1 - u^2} = \frac{dx}{x}$ и, интегрируя, найдем

$$-\ln|1 - u^2| = \ln|x| - \ln C_1 \quad \text{или} \quad x(1 - u^2) = \pm C_1 = C.$$

Исключая вспомогательную функцию $u \left(u = \frac{y}{x}\right)$, окончательно получим

$$y^2 = x^2 - Cx.$$

Пример 5. Решить уравнение $y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x$ при условии $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Решение. Убедившись, что данное уравнение линейное (вида (6)), полагаем $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$; тогда $y' = u'v + v'u$, и данное уравнение преобразуется к виду

$$u'v + v'u - uv \cdot \operatorname{ctgx} = \sin x \quad \text{или} \quad u'v + u(v' - v \cdot \operatorname{ctgx}) = \sin x.$$

Так как одну из вспомогательных функций u или v можно взять произвольно, выберем в качестве v какой-либо частный интеграл уравнения $v' - v \cdot \operatorname{ctgx} = 0$. Тогда для отыскания u получим уравнение $u'v = \sin x$.

Решая первое из этих уравнений, найдем v ; разделяя переменные и интегрируя, найдем его простейший, отличный от нуля частный интеграл:

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{ctgx} dx; \quad \ln v = \ln \sin x; \quad v = \sin x.$$

Подставляя v во второе уравнение и решая его, найдем u как общий интеграл этого уравнения:

$$u' \sin x = \sin x; \quad du = dx; \quad u = x + C.$$

Зная теперь u и v , находим общее решение данного уравнения

$$y = uv = (x + C) \sin x.$$

Теперь, используя указанное начальное условие $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, подставляем в общий интеграл заданные значения переменных ($x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 0$) и определяем соответствующее значение произвольной постоянной C :

$$0 = \left(\frac{\pi}{2} + C\right) \sin \frac{\pi}{2}; \quad 0 = \frac{\pi}{2} + C \quad \text{или} \quad C = -\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, частным решением будет $y = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x$.

Пример 6. Решить уравнение $x^2 y^2 y' + xy^3 = 1$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $x^2 y^2$:

$$y' + \frac{y}{x} = y^{-2} \cdot \frac{1}{x^2},$$

убеждаемся, что это уравнение Бернулли (7), где $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{1}{x^2}$.

Заменяя функцию y по формуле $y = u \cdot v$, имеем $y' = u'v + v'u$,

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2 u^2 v^2} \quad \text{или} \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}.$$

Отсюда, как и в решении предыдущей задачи, получаем два уравнения с разделяющимися переменными:

$$1) \quad v' + \frac{v}{x} = 0 \quad \text{и} \quad 2) \quad u'v = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}.$$

Решая первое из этих уравнений, находим v как простейший частный интеграл этого уравнения:

$$\frac{dv}{v} + \frac{dx}{x} = 0; \quad \ln v + \ln x = 0; \quad vx = 1; \quad v = \frac{1}{x}.$$

Подставляя v во второе уравнение и решая его, найдем u как общий интеграл этого уравнения:

$$\frac{u'}{x} = \frac{1}{u^2}; \quad u^2 du = x dx; \quad \frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{3}; \quad u = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}.$$

Следовательно, искомый общий интеграл данного уравнения

$$y = uv = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}.$$

Пример 7. Решить уравнение $(2y - 3)dx + (2x + 3y^2)dy = 0$.

Решение. Вначале убеждаемся, что данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах, поскольку выполняется условие (8):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (2y - 3)'_y = 2; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = (2x + 3y^2)'_x = 2; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Затем находим неопределенные интегралы:

$$\int P dx = \int (2y - 3) dx = 2xy - 3x + \varphi(y), \text{ считая } y \text{ постоянной,}$$

$$\int Q dy = \int (2x + 3y^2) dy = 2xy + y^3 + \psi(x), \text{ считая } x \text{ постоянной.}$$

Взяв все известные члены из первого результата и дописав к ним недостающие члены, зависящие только от y , из второго результата, получим функцию $u(x, y) = 2xy - 3x + y^3$, полным дифференциалом которой является левая часть данного дифференциального уравнения, а приравняв ее произвольной постоянной, получим искомый общий интеграл данного уравнения:

$$2xy - 3x + y^3 = C.$$

Пример 8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = e^{5x} + \cos x - 2x^3.$$

Решение. Данное уравнение есть уравнение 2-го порядка вида (9), допускающее понижение порядка, тогда умножая обе части данного уравнения на dx и интегрируя, получаем уравнение первого порядка:

$$y' = \int (e^{5x} + \cos x - 2x^3) dx = \frac{1}{5} e^{5x} + \sin x - \frac{1}{2} x^4 + C_1.$$

Снова умножая обе части полученного уравнения на dx и интегрируя, получаем общий интеграл исходного уравнения:

$$y = \int \left(\frac{1}{5} e^{5x} + \sin x - \frac{1}{2} x^4 + C_1 \right) dx = \frac{1}{25} e^{5x} - \cos x - \frac{1}{10} x^5 + C_1 x + C_2.$$

Пример 9. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(x-3)y'' + y' = 0.$$

Решение. Данное неполное уравнение 2-го порядка не содержит явно функции y , т. е. имеет вид (10), тогда, полагая $y' = p(x)$, получим $y'' = \frac{dp}{dx}$, и после подстановки данное уравнение обращается в уравнение 1-го порядка:

$$(x-3)p' + p = 0 \quad \text{или} \quad (x-3) \frac{dp}{dx} + p = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$\frac{dp}{p} + \frac{dx}{x-3} = 0; \quad \ln|p| + \ln|x-3| = \ln C; \quad |p(x-3)| = C;$$

$$p(x-3) = \pm C = C_1.$$

Заменяя вспомогательную переменную p на $\frac{dy}{dx}$, получим уравнение

$(x-3) \frac{dy}{dx} = C_1$, решая которое, найдем искомый общий интеграл данного

уравнения:

$$dy = \frac{C_1}{x-3} dx; \quad y = C_1 \ln|x-3| + C_2.$$

Пример 10. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y \cdot y'' - y'^2 = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Решение. Это неполное уравнение 2-го порядка вида (11), не содержащее явно аргумента x . Положим $y' = p(y)$, тогда $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$, и после подстановки данное уравнение обращается в уравнение 1-го порядка:

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$y p dp = p^2 dy; \quad y dp = p dy; \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y};$$

$$\ln p = \ln y + \ln C_1; \quad p = C_1 y.$$

Заменяя вспомогательную переменную p на $\frac{dy}{dx}$, получим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y.$$

Прежде чем интегрировать это уравнение, целесообразно определить значение постоянной C_1 , используя заданные значения $y(0) = 1, y'(0) = 2$:

$$2 = C_1 \cdot 1; \quad C_1 = 2.$$

Подставляя значение C_1 в последнее уравнение, разделяя в нем переменные и интегрируя, найдем:

$$\frac{dy}{dx} = 2y; \quad \frac{dy}{y} = 2dx; \quad \ln y + \ln C_2 = 2x; \quad C_2 y = e^{2x}.$$

Наконец, используя заданные значения $y(0) = 1$, определяем значение постоянной C_2 : $C_2 \cdot 1 = e^0$; $C_2 = 1$. Таким образом, получаем частный интеграл данного уравнения $y = e^{2x}$.

Как показано в этом примере, лучше определять значение каждой постоянной немедленно после того, как она появляется в процессе решения.

Пример 11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 7y' + 10y = 0.$$

Решение. Данное уравнение есть ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами (12). Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 7k + 10 = 0; \quad k_1 = 2; \quad k_2 = 5.$$

Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение данного дифференциального уравнения, согласно формуле (14), имеет вид:

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{5x}.$$

Пример 12. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 8y' + 16y = 0, \text{ если } y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

Решение. Данное уравнение есть ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами (12). Так как характеристическое уравнение $k^2 + 8k + 16 = 0$ имеет равные действительные корни $k_1 = k_2 = -4$, то общее решение данного дифференциального уравнения, согласно формуле (15), имеет вид: $y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-4x}$ или $y = C_1 \cdot e^{-4x} + C_2 \cdot x e^{-4x}$.

Дифференцируя общее решение, имеем

$$y' = -4C_1 \cdot e^{-4x} + C_2 \cdot e^{-4x} - 4C_2 \cdot x e^{-4x}.$$

Подставив начальные условия в выражения для y и y' , получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0, \\ 3 = -4C_1 e^0 + C_2 e^0 - 4C_2 \cdot 0 \cdot e^0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 = C_1, \\ 3 = -4C_1 + C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 1$ и $C_2 = 7$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид :

$$y = e^{-4x} + 7x e^{-4x}.$$

Пример 13. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 25y = 0.$$

Решение. Данное уравнение есть ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами (12). Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 6k + 25 = 0; \quad k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{64}i}{2} = 3 \pm 4i;$$

здесь $\alpha = 3, \beta = 4$.

Так как характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня, тогда общее решение данного дифференциального уравнения, согласно формуле (16), имеет вид:

$$y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

Пример 14. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2.$$

Решение. Данное уравнение есть ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами (17). Вначале находим общее решение $\bar{y}$ однородного уравнения $y'' + 6y' + 5y = 0$, соответствующего данному неоднородному уравнению. Его характеристическое уравнение $k^2 + 6k + 5 = 0$ имеет корни $k_1 = -5; k_2 = -1$. Поэтому $\bar{y} = C_1 \cdot e^{-5x} + C_2 \cdot e^{-x}$.

Далее находим частное решение y_* данного неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов, так как правая часть данного уравнения имеет вид (19) $f(x) = 25x^2 - 2 = e^{0 \cdot x} \cdot P_2(x)$. Согласно указанному правилу (случай А 1), когда число $m = 0$ не является корнем характеристического уравнения, а степень заданного многочлена $n = 2$, y_* будет иметь вид (20) $y_* = e^{0 \cdot x} \cdot Q_2(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$.

Отсюда, дифференцируя, находим $y_*' = 2b_2 x + b_1$, $y_*'' = 2b_2$ и, подставляя y_*, y_*', y_*'' в данное уравнение, получим равенство

$$2b_2 + 6(2b_2 x + b_1) + 5(b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = 25x^2 - 2 \quad \text{или}$$

$$5b_2 x^2 + (12b_2 + 5b_1)x + (2b_2 + 6b_1 + 5b_0) = 25x^2 - 2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x из обеих его частей, ибо только при этом условии оно будет тождественным, получим систему

$$5b_2 = 25, \quad 12b_2 + 5b_1 = 0, \quad 2b_2 + 6b_1 + 5b_0 = -2,$$

из которой находим $b_2 = 5, \quad b_1 = -12, \quad b_0 = 12.$

Следовательно, $y_* = 5x^2 - 12x + 12$, а искомое общее решение данного неоднородного уравнения, согласно формуле (18),

$$y = \bar{y} + y_* = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x} + 5x^2 - 12x + 12.$$

Пример 15. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 10y = 37 \cos 3x.$$

Решение. Данное уравнение есть ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами (17). Вначале находим общее решение $\bar{y}$ однородного уравнения $y'' - 2y' + 10y = 0$, соответствующего данному неоднородному уравнению. Его характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 10 = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни $k_{1,2} = 1 \pm 3i$. Поэтому $\bar{y} = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Частное решение y_* данного неоднородного уравнения (будем искать его методом неопределенных коэффициентов), соответственно его правой части вида (23) $f(x) = 37 \cos 3x = e^{0 \cdot x} (37 \cos 3x + 0 \cdot \sin 3x)$ при $a = 0, b = 3$, когда числа $a \pm bi = \pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, будет иметь вид $y_* = e^{0 \cdot x} (M \cos 3x + N \sin 3x) = M \cos 3x + N \sin 3x$ по формуле (24).

Подставляя функцию y_* и ее производные $y'_* = -3M \sin 3x + 3N \cos 3x$, $y''_* = -9M \cos 3x - 9N \sin 3x$ в данное неоднородное уравнение, получим равенство

$$(M - 6N) \cos 3x + (N + 6M) \sin 3x = 37 \cos 3x,$$

которое будет тождеством только при равенстве коэффициентов у подобных членов ($\cos 3x$ и $\sin 3x$) в обеих его частях:

$$M - 6N = 37; \quad N + 6M = 0.$$

Решая эту систему, найдем $M = 1; N = -6$.

Следовательно, $y_* = \cos 3x - 6 \sin 3x$, а искомое общее решение данного неоднородного уравнения, согласно формуле (18),

$$y = \bar{y} + y_* = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \cos 3x - 6 \sin 3x.$$

Пример 16. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}.$$

Решение. Данное уравнение есть ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами (17). Вначале находим общее решение $\bar{y}$ однородного уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$, соответствующего данному неоднородному уравнению. Его характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$; $k_2 = 2$. Поэтому $\bar{y} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x}$.

Далее находим частное решение y_* данного неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов, так как правая часть данного уравнения имеет вид (19) $f(x) = e^{2x} = e^{2x} \cdot P_0(x)$. Согласно указанному правилу (случай А 2), когда число $m = 2$ совпадает только с одним из корней характеристического уравнения $m = 2 = k_2$, а степень заданного многочлена $n = 0$, y_* будет иметь вид (21) $y_* = xe^{2x} \cdot Q_0(x) = xe^{2x} \cdot b_0$.

Отсюда, дифференцируя, находим $y'_* = b_0 e^{2x} + 2b_0 x e^{2x} = b_0 e^{2x} (1 + 2x)$, $y''_* = 2b_0 e^{2x} + 2b_0 e^{2x} (1 + 2x) = 2b_0 e^{2x} (2 + 2x)$ и, подставляя y_* , y'_* , y''_* в данное уравнение, получим равенство

$$2b_0 e^{2x} (2 + 2x) - 3b_0 e^{2x} (1 + 2x) + 2b_0 x e^{2x} = e^{2x} \quad \text{или} \\ 2b_0 (2 + 2x) - 3b_0 (1 + 2x) + 2b_0 x = 1.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим, что $b_0 = 1$. Следовательно, $y_* = xe^{2x}$, а искомое общее решение данного неоднородного уравнения, согласно формуле (18),

$$y = \bar{y} + y_* = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x} + xe^{2x}.$$

Пример 17. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

Решение. Данное уравнение есть ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами (17). Вначале находим общее решение $\bar{y}$ однородного

уравнения $y'' + y = 0$, соответствующего данному неоднородному уравнению. Его характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни $k_{1,2} = \pm i$. Поэтому $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Частное решение y^* данного неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов искать нельзя, так как правая часть данного уравнения $f(x) = \operatorname{tg} x$, что не соответствует ни случаю А, ни случаю Б. Поэтому воспользуемся методом вариации произвольных постоянных: будем искать y^* в виде $y_* = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, где функции $C_1(x)$ и

$$C_2(x) \text{ нужно найти из системы } \begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Умножая первое уравнение системы на $\sin x$, а второе – на $\cos x$ и складывая почленно полученные равенства, получим

$$C_2' = \sin x \quad \text{или} \quad C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x$$

(константу интегрирования полагаем равной нулю).

Далее, подставляя равенство $C_2' = \sin x$ в первое уравнение системы, получаем

$$C_1' \cos x + \sin^2 x = 0 \quad \text{или} \quad C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad \text{или}$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

Следовательно, частное решение y^* имеет вид

$$y_* = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x = (\sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|) \cos x - \cos x \sin x = -\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|,$$

а искомое общее решение данного неоднородного уравнения, согласно

$$\text{формуле (18), } y_* = \bar{y} + y_* = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

Пример 18. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}.$$

Решение. Данное уравнение есть ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами (17). Общее решение $\bar{y}$ однородного уравнения $y'' - y' = 0$ имеет вид $\bar{y} = C_1 + C_2 \cdot e^x$. Правая часть данного неоднородного уравнения $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$ (не соответствует ни случаю А, ни случаю Б) не

позволяет найти частное решение y_* данного неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов, поэтому воспользуемся методом вариации произвольных постоянных: будем искать y_* в виде $y_* = C_1(x) \cdot 1 + C_2(x)e^x$, где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ найдем из системы

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1' \cdot 1 + C_2' e^x = 0 \\ C_1' \cdot 0 + C_2' e^x = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \end{cases}.$$

Из второго уравнения находим

$$C_2' = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \quad \text{или} \quad C_2(x) = \int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx = \arcsin e^x$$

(константу интегрирования полагаем равной нулю).

Из первого уравнения системы получим $C_1' = -C_2' e^x = -\frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$,

интегрируя это выражение, имеем $C_1(x) = -\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx = \sqrt{1 - e^{2x}}$.

Тем самым, частное решение имеет вид $y_* = \sqrt{1 - e^{2x}} + e^x \cdot \arcsin e^x$, а общее решение данного неоднородного уравнения, согласно формуле (18),

$$y = \bar{y} + y_* = C_1 + C_2 e^x + \sqrt{1 - e^{2x}} + e^x \cdot \arcsin e^x.$$

7. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «РЯДЫ»

Задача 1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^n$ ($|q| \neq 1$).

Решение. Данный ряд является суммой элементов геометрической прогрессии. По известной формуле $S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

Если $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, и поэтому $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, следовательно, ряд сходится.

Если же $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, и $S_n \rightarrow \infty$, следовательно, ряд расходится.

Задача 2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ ($k \geq 1$).

Решение.

Отдельно рассмотрим два случая:

1. $k=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad (\text{гармонический ряд}).$$

Применим интегральный признак сходимости:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \left(f(n) = \frac{1}{n} \right), \quad f(x) - \text{непрерывная и убывающая для } x \geq 1.$$

Рассмотрим

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln|b| = +\infty,$$

т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится.

2. $k > 1$

Снова применяя интегральный признак, имеем:

$$f(x) = \frac{1}{x^k} \quad \left(f(n) = \frac{1}{n^k} \right), \quad f(x) - \text{непрерывная, убывающая при } x \geq 1.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^k} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{x^{k-1}} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{b^{k-1}} - \frac{1}{1-k} \right) = \frac{1}{k-1},$$

следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ сходится ($k > 1$).

Задача 3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2^n}}$.

Решение.

Общий член ряда $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2^n}}$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, общий член ряда $b_n = \frac{1}{2^n}$. Нетрудно

заметить, что $a_n < b_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится (задача 1); поэтому по

первому признаку сравнения сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}^n}$.

Задача 4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(5n-1)^2}$.

Решение.

Здесь $a_n = \frac{\sqrt{n}}{(5n-1)^2}$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ ($b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$). Воспользуемся вторым признаком сравнения рядов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{(5n-1)^2} : \frac{1}{n^{3/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot n^{3/2}}{(5n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2(5-\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{25},$$

так как $0 < \frac{1}{25} < +\infty$, ряды сходятся или расходятся одновременно. Но ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится (задача 2), следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(5n-1)^2}$ сходится.

Задача 5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(2n+1)!}$.

Решение.

Здесь $a_n = \frac{n^4}{(2n+1)!}$.

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\begin{aligned}
 l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{(2(n+1)+1)!} : \frac{n^4}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 \cdot (2n+1)!}{(2n+3)! \cdot n^4} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 (2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)n^4} = 0,
 \end{aligned}$$

так как $l < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(2n+1)!}$ сходится.

Задача 6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \sqrt[3]{\ln(n+1)}}$.

Решение.

Здесь $a_n = \frac{1}{(n+1) \cdot \sqrt[3]{\ln(n+1)}}$.

Применим интегральный признак:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1) \cdot \sqrt[3]{\ln(x+1)}} \quad \left(f(n) = \frac{1}{(n+1) \cdot \sqrt[3]{\ln(n+1)}} \right), \quad f(x) - \text{непрерывная}$$

убывающая при $x \geq 1$.

$$\begin{aligned}
 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1) \cdot \sqrt[3]{\ln(x+1)}} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b (\ln(x+1))^{-\frac{1}{3}} d(\ln(x+1)) = \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} (\ln(x+1))^{\frac{2}{3}} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} (\ln(b+1))^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} (\ln 2)^{\frac{2}{3}} \right) = +\infty
 \end{aligned}$$

Так как рассмотренный несобственный интеграл расходится, следовательно расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \sqrt[3]{\ln(n+1)}}$.

Задача 7. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n \cdot n!}$.

Решение.

Так как x может быть и отрицательной величиной, и положительной, рассмотрим сразу ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|x|^n \cdot n!}$ – в нём все члены положительны.

Воспользуемся признаком Даламбера, чтобы установить сходимость или расходимость ряда.

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|^{n+1} \cdot (n+1)!} : \frac{1}{|x|^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^n \cdot n!}{|x|^{n+1} \cdot n! \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x| \cdot (n+1)} = 0,$$

кроме случая, когда $x=0$ (при $x=0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x| \cdot (n+1)} = +\infty$). Следовательно,

так как $l < 1$ ($x \neq 0$), данный ряд сходится для $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Задача 8. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 + 1} x^n$.

Решение.

Как и в предыдущей задаче рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 + 1} |x|^n$. Применяя признак Даламбера, получаем:

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2 + 1} |x|^{n+1} : \left(\frac{3^n}{n^2 + 1} |x|^n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} \cdot |x|^{n+1} \cdot n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2} \right) \cdot |x|^n \cdot 3^n} =$$

$$= 3|x|.$$

Тогда, если $3|x| < 1$ или $|x| < \frac{1}{3}$, ряд сходится; если $3|x| > 1$ или $|x| > \frac{1}{3}$, ряд сходится.

Остаётся неизвестным, сходится ли ряд при $|x| = \frac{1}{3}$. Установим это, рассмотрев два числовых ряда.

1) Пусть $x = \frac{1}{3}$, тогда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ сходится по первому признаку сравнения, так как

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}, \text{ а } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{сходится (п. I, задача 2).}$$

2) Пусть $x = -\frac{1}{3}$, тогда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ - знакочередующийся, и он сходится абсолютно, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \text{ (см. 1.)}. \text{ Поэтому, окончательно, ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1} x^n$$

сходится при $|x| \leq \frac{1}{3}$, область сходимости: $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$.

Задача 9. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n+1)^n} x^n$.

Решение.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n+1)^n} |x|^n$. По признаку Даламбера получим:

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3(n+1))!}{(n+2)^{n+1}} |x|^{n+1} \cdot \left(\frac{(3n)!}{(n+1)^n} |x|^n \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3) |x|^{n+1} (n+1)^n}{(n+2)^{n+1} |x|^n (3n)!} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3) |x|}{(n+2)} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n = \\
&= |x| \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(3+\frac{1}{n})(3n+2)(3n+3)}{n(1+\frac{2}{n})} \cdot e^{\ln\left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)^n} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} 3(3n+2) \cdot \\
&\cdot (3n+3) e^{n \ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} = 3|x| \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} (3n+2)(3n+3) \cdot e^{n\left(-\frac{1}{n+2}\right)} = \\
&= 3|x| \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} (3n+2)(3n+3) \cdot e^{-1} = +\infty \quad (\text{если } x \neq 0).
\end{aligned}$$

Следовательно, если $x \neq 0$, то ряд расходится. Если же $x = 0$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n+1)^n} x^n \text{ сходится.}$$

Задача 10. Вычислить $\int_0^{1/8} \ln(1+\sqrt[3]{x}) dx$ с точностью до 10^{-2} .

Решение.

Для вычисления этого интеграла разложим подынтегральную функцию в ряд, заменяя в разложении $\ln(1+x)$ x на $\sqrt[3]{x}$:

$$\ln(1+\sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{x} - \frac{(\sqrt[3]{x})^2}{2} + \frac{(\sqrt[3]{x})^3}{3} - \frac{(\sqrt[3]{x})^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{x}^n}{n} + \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{1/8} \ln(1+\sqrt[3]{x}) dx &= \int_0^{1/8} x^{\frac{1}{3}} dx - \int_0^{1/8} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{2} dx + \int_0^{1/8} \frac{x}{3} dx + \dots + (-1)^{n+1} \int_0^{1/8} \frac{x^{\frac{n}{3}}}{n} dx + \dots = \\ &= \left(\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{2 \cdot \frac{5}{3}} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{\frac{n+3}{3}}}{n \cdot \frac{n+3}{3}} + \dots \right) \Bigg|_0^{1/8} = \frac{(\frac{1}{8})^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{(\frac{1}{8})^{\frac{5}{3}}}{2 \cdot \frac{5}{3}} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(\frac{1}{8})^{\frac{n+3}{3}}}{n \cdot \frac{n+3}{3}} + \dots, \end{aligned}$$

так как получивший ряд знакопеременный, $|R_{n-1}| \leq \frac{(\frac{1}{8})^{\frac{n+3}{3}}}{n \cdot \frac{n+3}{3}}$, и требуемая

точность достигается при $n=2$, т.е. $|R_1| \leq \frac{(\frac{1}{8})^{\frac{5}{3}}}{2 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{(0,5)^5 \cdot 3}{2 \cdot 5} = 0,009375$.

Тогда

$$\int_0^{1/8} \ln(1+\sqrt[3]{x}) dx \approx \frac{(\frac{1}{8})^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \approx 0,0469.$$

Задача 11. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

Решение.

Разложим $\sin 2x$ в ряд Маклорена, заменяя в разложении $\sin x$, x на $2x$:

$$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x} dx &= \int_0^1 \left(2 - \frac{(2x)^3}{x \cdot 3!} + \frac{(2x)^5}{x \cdot 5!} - \frac{(2x)^7}{x \cdot 7!} \dots + (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n-1}}{x(2n-1)!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(2x - \frac{8x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{32x^5}{5 \cdot 5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n-1}}{(2n-1) \cdot (2n-1)!} + \dots \right) \Big|_0^1 = \\ &= 2 - \frac{8}{3 \cdot 3!} + \frac{32}{5 \cdot 5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n-1) \cdot (2n-1)!} + \dots\end{aligned}$$

Этот ряд знакочередующийся, поэтому $|R_{n-1}| \leq \frac{2^{2n-1}}{(2n-1) \cdot (2n-1)!}$,

требуемая точность достигается при $n = 6$, т.е. $|R_5| \leq \frac{2^{11}}{11 \cdot (11)!} = 0,0000047$.

Тогда

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x} dx &\approx 2 - \frac{8}{3 \cdot 3!} + \frac{32}{5 \cdot 5!} - \frac{128}{7 \cdot 7!} + \frac{512}{9 \cdot 9!} = 2 - 0,444444444 + 0,0533333 - \\ &- 0,003628 + 0,000157 = 1,605418 \approx 1,6054 \quad .\end{aligned}$$

Задача 12. Найти четыре первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x - y^2$, удовлетворяющего условию: $y(1) = 1$.

Решение. Будем искать решение в виде:

$$y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

Последовательно дифференцируя заданное уравнение, получим:

$$\begin{aligned}
y'' &= 1 - 2y \cdot y', \\
y''' &= -2(y')^2 - 2y \cdot y'', \\
y^{(4)} &= -6y' \cdot y'' - 2y \cdot y''', \\
y^{(5)} &= -6(y'')^2 - 8y' \cdot y''' - 2y \cdot y^{(4)}.
\end{aligned}$$

Подставляя начальные условия, найдём:

$$y'(1) = 0 \quad ; \quad y''(1) = 1 \quad ; \quad y'''(1) = -2 \quad ; \quad y^{(4)}(1) = 4 \quad .$$

Таким образом, решение имеет первые слагаемые:

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{-2}{6}(x-1)^3 + \frac{4}{24}(x-1)^4 + \dots$$

Или окончательно :

$$y = 1 + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{6} + \dots$$

Задача 13. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в ряд решения уравнения $y' = \sin x + xy$, если $y(0) = 1$.

Решение. В данном случае решение будем искать в виде:

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$y'(0) = 0 \quad (\text{из уравнения } y'(0) = \sin 0 + 0 \cdot y(0) \text{ }).$$

Последовательно дифференцируя уравнение и подставляя начальные условия, получим:

$$\begin{aligned}
y'' &= \cos x + y + x \cdot y', & y''(0) &= \cos 0 + 1 = 2 \quad ; \\
y''' &= -\sin x + y' + y' + x \cdot y'', & y'''(0) &= 0 \quad ; \\
y^{(4)} &= -\cos x + 2y'' + y'' + x \cdot y''', & y^{(4)}(0) &= -\cos 0 + 3 = 2.
\end{aligned}$$

Таким образом мы получаем три первых члена разложения в ряд решения:

$$y = 1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{4!}x^4 + \dots$$

Окончательно:
$$y = 1 + x^2 + \frac{x^4}{12} + \dots$$

Библиографический список

1. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. - М.: Наука, 1978. Т. 1,2.
2. *Письменный Д.* Конспект лекций по высшей математике. - М.: Айрис-пресс, 2007. Ч. 1, 2.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. - М.: Наука, 2003.
4. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 2005. Ч. 1, 2.
5. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. - М.:Наука, 1985.

Содержание

Предисловие.	3
1. Дифференциальные уравнения, их порядок, общий и частный интегралы	3
2. Дифференциальные уравнения первого порядка	4
2.1. Уравнения с разделяющимися переменными	4
2.2. Однородные уравнения первого порядка	5
2.3. Линейные уравнения и уравнения Бернулли	5
2.4. Уравнения в полных дифференциалах	6
3. Дифференциальные уравнения второго порядка	6
3.1. Уравнения, допускающие понижение порядка	6
3.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	7
3.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	8
4. Числовые ряды	10
4.1. Признаки сходимости положительных рядов	11
4.2. Знакопередающиеся ряды	12
5. Степенные ряды.	13
5.1. Ряды Тейлора и Маклорена.	13
5.2. Вычисление определенных интегралов с помощью рядов	15
5.3. Применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений.	15
6. Примеры решения дифференциальных уравнений	16
7. Примеры решения задач по теме «Ряды»	29
Библиографический список	39