

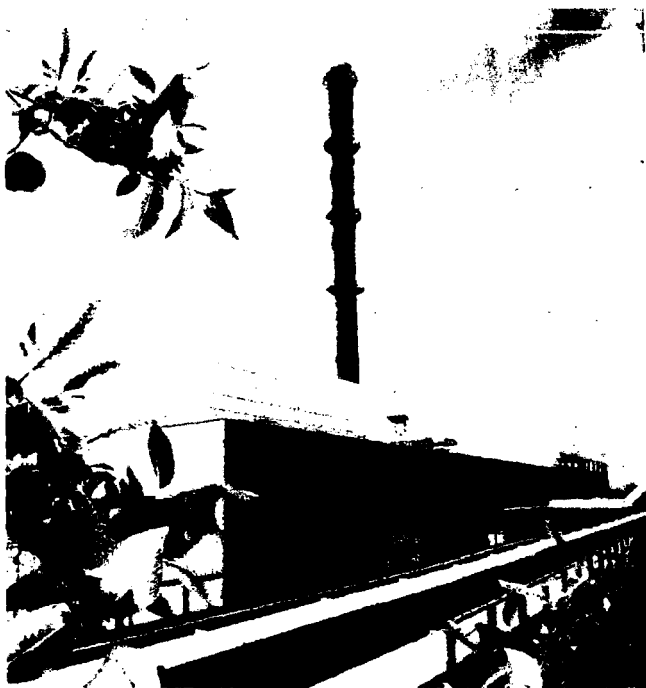
621.1(075)

С-504

В.А.СУСЛОВ

ТЕПЛОМАССООБМЕН

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



Санкт-Петербург
2008

Федеральное агентство по образованию

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования**

**Санкт-Петербургский государственный технологический
университет растительных полимеров**

В.А.Суслов

Тепломассообмен

Учебное пособие

3-е издание , переработанное и дополненное

810692

**Санкт-Петербург
2008**

УДК 621.184.64 (075)
ББК 31.31я 7
С 904

Сулов В.А. Тепломассообмен: учебное пособие. - 3-е изд-е, перераб. и доп.
/ ГОУ ВПО СПбГТУРП. СПб., 2008. - 120 с.: ил. 74. - ISBN 5-230-14398-3

Учебное пособие содержит основные понятия, определения и расчеты по тепломассообмену, теплопроводности, теплоотдаче, тепловому излучению, классификацию и гидродинамический расчет теплообменных аппаратов.

Пособие составлено в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов, охватывает минимальный, но необходимый материал по данной дисциплине и поэтому может быть использовано в качестве конспекта лекций для студентов теплоэнергетического факультета по специальностям 140100 «Теплоэнергетика», 140105 «Энергетика теплотехнологий».

Рецензенты: зав. кафедрой промтеплоэнергетики СПбГПУ, д-р техн. наук,
профессор В.М. Боровков;
канд. техн. наук, профессор кафедры промышленной тепло-
энергетики СПбГТУРП А.Н. Иванов

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров в качестве учебного пособия.

ISBN 5-230-14398-3

ББК 31.31я 7
© Сулов В.А., 2008
© ГОУ ВПО Санкт-Петербургский
государственный технологический
университет растительных полиме-
ров, 2008

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы тепло- и массообмена в инженерных разработках занимали и будут приобретать все большее значение, особенно с ограничением добычи легкодоступных углеводородных топлив.

Эффективность и надежность работы теплообменных аппаратов и тепловых двигателей зависит от того, насколько правильно проведен его тепловой расчет и на его базе определены его конструктивные характеристики. Решение многих задач химической технологии, вообще всей промышленности, а особенно энергетики, авиационной техники, судостроения, коммунального хозяйства неразрывно связано с успехами теории теплообмена.

Теория тепло- и массообмена представляет собой один из важнейших разделов технической физики. Она базируется на таких дисциплинах, как физика, термодинамика и газовая динамика.

Существенный вклад в развитие теории тепло- и массообмена сделан отечественными учеными: М.В. Кирпичевым, М.А. Михеевым, А.А. Гухманом, Г.Н. Кружилиным, С.С. Кутателадзе, А.В. Лыковым, Б.С. Петуховым, В.П. Исаченко, Д.А. Лабунцовым, В.М. Иевлевым, В.М. Антуфьевым, А.А. Жукаускасом, В.И. Субботиным и многими другими.

Настоящее учебное пособие составлено в соответствии с требованиями образовательных стандартов и охватывает минимальный, но необходимый объем материала по данной дисциплине и поэтому может быть использовано в качестве конспекта лекций студента-теплоэнергетика.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Теплопередача или теплообмен – это учение о самопроизвольных и необратимых процессах распространения теплоты в пространстве, обусловленных неоднородным температурным полем.

Температурным полем называется совокупность мгновенных значений температуры в объеме тела или системы тел для каждого рассматриваемого момента времени:

$$t = f(x, y, z, \tau), \quad (1.1)$$

где t – температура; x, y, z – пространственные координаты; τ – время.

Температурное поле, описываемое уравнением (1.1), в котором температура зависит от времени, называется **нестационарным**. При установившемся тепловом режиме, когда температурное поле не зависит от времени, $dt/d\tau = 0$, температурное поле называется **стационарным**:

$$t = f(x, y, z); \quad \partial t / \partial \tau = 0. \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) являются **многомерными** или пространственными. Для **одномерного** стационарного температурного поля уравнение записывается так:

$$t = f(x), \quad \partial t / \partial y = \partial t / \partial z = 0, \quad \partial t / \partial \tau = 0. \quad (1.3)$$

В этом случае температура в процессе нагрева или охлаждения определяется одной координатой.

Геометрическое место точек в температурном поле, имеющих одинаковую температуру, называют **изотермическими поверхностями**. Изотермические поверхности не пересекаются, они либо оканчиваются на поверхности тела, либо располагаются внутри его. Температура в теле изменяется только в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. Скорость изменения температуры по нормали к изотермической поверхности характеризуется **градиентом температуры** – вектором, направленным по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и численно равным производной от температуры по этому направлению:

$$\text{grad} t = \vec{n}_0 \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (1.4)$$

где $\vec{n}_0$ – единичный вектор, нормальный к изотермической поверхности и направленный в сторону возрастания температуры (рис. 1.1).

Количество теплоты, переносимое за единицу времени через изотермическую поверхность площадью F , называется **тепловым потоком** Q , [Дж/с] или [Вт]. Тепловой поток, проходящий через единицу площади поверхности, называют **плотностью теплового потока**: $q = Q/F$, [Вт/м²]. Вектор q направлен в сторону убывания температуры.

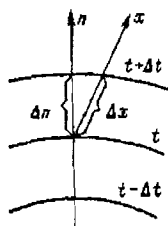


Рис. 1.1.
К определению температурного градиента

Если $\text{grad} t$ для различных точек изотермической поверхности различен, то количество теплоты, которое пройдет через всю изотермическую поверхность в единицу времени определится следующим образом:

$$Q = \int_F q \cdot dF, \quad [\text{Вт}], \quad (1.5)$$

где dF – элемент изотермической поверхности.

Полное количество теплоты Q , прошедшее за время τ через изотермическую поверхность F , найдется по уравнению:

$$Q_\tau = \int_0^\tau \int_F q \cdot dF \cdot d\tau, \quad [\text{Дж}]. \quad (1.6)$$

Количество теплоты, проходящее через элементарную площадку dF_ℓ , расположенную под углом ϕ к плоскости, касательной к изотермической поверхности определяется по уравнению: $dQ_\tau = q \cdot dF_\ell \cdot \cos \phi \cdot d\tau$. (1.7)

Из уравнения (1.7) следует, что самой большой плотностью теплового потока будет та, которая направлена по нормали к изотермическим поверхностям (рис. 1.2).

Таким образом, для определения количества теплоты, проходящего через какую-либо поверхность твердого тела, необходимо знать температурное поле внутри рассматриваемого тела. Нахождение температурного поля тела, является главной задачей теории теплопроводности.

Рис. 1.2. К уравнению 1.7

Различают три вида теплообмена:

- теплопроводность**;
- конвективный теплообмен**, характеризующийся переносом теплоты самим теплоносителем – макроскопическими элементами среды;
- теплообмен излучением**, характеризующийся тем, что часть внутренней энергии тела преобразуется в энергию излучения и передается через пространство электромагнитными волнами.

Плотность конвективного теплового потока на поверхности теплообмена определяется уравнением Ньютона-Рихмана:

$$q = \alpha (t_{\text{ж}} - t_{\text{с}}), \quad (1.8)$$

где α , [Вт/(м²·с)] – коэффициент теплоотдачи; $t_{\text{ж}}$ и $t_{\text{с}}$ – температуры теплоносителя и стенки.

В реальных условиях отдельные виды теплообмена – теплопроводность, конвективный теплообмен и лучистый теплообмен – сопутствуют один другому.

Теплопередачей называется теплообмен между двумя теплоносителями через разделяющую их твердую стенку. Плотность теплового потока в этом случае рассчитывается как:

$$q = k (t_2 - t_1), \quad (1.9)$$

где k , [Вт/(м²·с)] – коэффициент теплопередачи; $t_2 - t_1 = \Delta t$ – температурный напор, равный разности температур горячего и холодного теплоносителей, разделенных твердой стенкой.

2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Теплопроводность – процесс молекулярного переноса теплоты в сплошной среде, обусловленный наличием градиента температуры. Перенос теплоты теплопроводностью в телах происходит в результате последовательного обмена энергией движения структурных частиц от более нагретых к соседним менее нагретым частям среды. В газах перенос энергии осуществляется путем диффузии молекул и атомов. В жидкостях и твердых телах – путем упругих волн. В металлах перенос энергии осуществляется путем диффузии свободных электронов.

Основной закон теплопроводности формулируется **уравнением Фурье**:

$$q = -\lambda \operatorname{grad} t = -\lambda \cdot n_0 \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (2.1)$$

вектор плотности теплового потока, передаваемого теплопроводностью, пропорционален вектору градиента температуры в той же точке и тот же момент времени. Множитель пропорциональности λ , [Вт/(м·°К)] называется **коэффициентом теплопроводности** и является физическим параметром вещества. Знак “–” в (2.1) учитывает противоположное направление вектора q и вектора $\operatorname{grad} t$.

2.1. Коэффициент теплопроводности

Коэффициент теплопроводности для различных материалов определяется экспериментально:

$$\lambda = \frac{|q|}{|\operatorname{grad} t|}, \quad [\text{Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{К})]. \quad (2.2)$$

Согласно (2.2) λ численно равен количеству теплоты, которое проходит в единицу времени через единицу изотермической поверхности при $\operatorname{grad} t = 1$.

При наличии теплообмена тела имеют различную температуру. Поэтому необходимо знать зависимость λ от температуры. Опыты показывают, что для многих материалов эта зависимость близка к линейной:

$$\lambda = \lambda_0 [1 + b(t - t_0)], \quad (2.3)$$

где λ_0 – коэффициент теплопроводности при t_0 ; b – опытная постоянная.

2.1.1. Коэффициент теплопроводности газов

Согласно кинетической теории, в которой газ при обычных давлениях и температурах рассматривается как совокупность молекул, находящихся в хаотическом движении и столкновениях, теплопроводность определяется соотношением:

$$\lambda = \bar{w} l c_v \rho / 3, \quad (2.4)$$

где $\bar{w}$ – средняя скорость перемещения молекул газа; l – средняя длина пробега молекул; c_v – теплоемкость при $v = \text{const}$; ρ – плотность.

При увеличении давления ρ увеличивается, а l – уменьшается. При этом $\rho l = \text{const}$. Поэтому λ остается постоянным при изменении давления. С уве-

личением температуры $\bar{w}$ и c_v – увеличиваются. Поэтому λ также увеличивается. Для газов $\lambda = 0,006 - 0,6$ [Вт/(м·°К)]. λ для водяного пара и других реальных газов отличается от идеальных и зависит, в том числе, и от давления.

2.1.2. Коэффициент теплопроводности жидкостей

Коэффициент теплопроводности жидкости можно определить по уравнению:

$$\lambda = A (c_p \rho^{4/3}) / \mu^{1/3}, \quad (2.5)$$

где μ – молекулярная масса; A – коэффициент, пропорциональный скорости распространения упругих волн в жидкости, зависящий от температуры. Так как ρ убывает с повышением температуры, то для жидкостей при $\mu = \text{const}$, λ – убывает. Исключение составляют вода и глицерин. λ жидкостей = 0,07 – 0,7. С возрастанием давления λ увеличивается [5].

2.1.3. Коэффициент теплопроводности металлов

В металлах транспорт теплоты осуществляется, в основном, свободными электронами, которые движутся из областей более нагретых в менее нагретые, где они отдают энергию, и обратно для восполнения ее в более нагретых зонах. С повышением температуры в металлах усиливается рассеивание электронов. Поэтому λ уменьшается. При наличии примесей λ металлов убывает, что связано со структурными неоднородностями металла и связанным с этим рассеиванием электронов. Так λ чистой меди – 396, а λ меди со следами мышьяка – 142. λ сплавов и λ диэлектриков с увеличением температуры увеличиваются [6].

2.1.4. Коэффициент теплопроводности строительных материалов

Многие строительные и теплоизоляционные материалы имеют пористое строение. Поэтому λ сильно зависит от их плотности, поскольку поры таких тел заполняют воздух, теплопроводность которого низкая. λ пористых материалов в значительной степени зависит от влажности. Так λ влажного кирпича – 1; λ сухого кирпича – 0,35; а λ воды – 0,6. У строительных материалов $\lambda = 0,023 - 2,9$. **Материалы, имеющие $\lambda < 0,25$, относят к теплоизоляционным.**

2.2. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Для решения задач, связанных с нахождением температурного поля, необходимо иметь дифференциальное уравнение теплопроводности. Интегрируя это уравнение, можно получить аналитическую зависимость между величинами для всего рассматриваемого промежутка времени.

Рассмотрим в бесконечно малом промежутке времени dt бесконечно малый элементарный объем dv со сторонами dx , dy и dz . Введем следующие допущения (рис. 2.1):

- тело однородно и изотропно;
- физические параметры постоянны;

- деформация рассматриваемого объема, связанная с изменением температуры, мала по сравнению с самим объемом;
 - внутренние источники теплоты в теле заданы как: $q_v = f(x; y; z; \tau)$ и распределены равномерно.

Вывод дифференциального уравнения теплопроводности основан на законе сохранения энергии. Количество теплоты dQ , сообщенное элементарному объему dv за время $d\tau$ за счет теплопроводности и от внутренних источников, в зависимости от рассмотрения изохорного или изобарного процессов, равно изменению внутренней энергии или энтальпии вещества:

$dQ_1 + dQ_2 = dU + dL = dQ$, (2.6)
 где dQ_1 – [Дж] – количество теплоты, dQ_2 – количество теплоты, введенное в объем теплопроводностью за время $d\tau$; dQ_2 – количество теплоты, выделившееся за время $d\tau$ в объеме dv от внутренних источников теплоты; dU – изменение внутренней энергии и dL – работы, совершенной телом над окружающей средой или наоборот. Пусть механическая работа телом не совершается – $dL = 0$. Тогда dQ равно изменению внутренней энергии dU или энтальпии вещества di , содержащегося в элементарном объеме dv , за время $d\tau$.

Количество теплоты, которое подводится к граням элементарного объема за время $d\tau$ в направлении осей x, y, z обозначим через dQ_x, dQ_y, dQ_z .

При этом количество теплоты, подведенное к грани $dy \cdot dz$ в направлении оси X за время $d\tau$ будет равным $dQ_x = q_x \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau$, где q_x – проекция плотности теплового потока на ось X , $dy \cdot dz$ – элементарная площадка.

Количество теплоты, которое отводится через противоположные грани в тех же направлениях, обозначим через $dQ_{x+dx}, dQ_{y+dy}, dQ_{z+dz}$.

Относительно оси X оно пишется как:

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau.$$

Разница между подведенным и отведенным количеством теплоты от элементарного параллелепипеда за время $d\tau$ в направлении оси X , представляет:

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx} = q_x \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau - q_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau = (q_x - q_{x+dx}) \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau.$$

Функция q_{x+dx} является непрерывной и в рассматриваемом интервале dx раскладывается в ряд Тейлора:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots$$

Ограничившись двумя первыми членами ряда, получим:

$$dQ_{x1} = (q_x - q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau.$$

Аналогично находится количество теплоты, подводимое к элементарному объему в направлении координатных осей Y и Z .

В результате количество теплоты dQ_1 , подведенное за счет теплопроводности к рассматриваемому объему, будет равно:

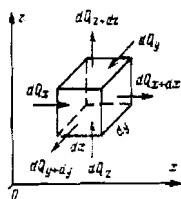


Рис. 2.1. К выводу дифференциального

$$dQ_1 = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz.$$

Пусть количество теплоты, выделяемое внутренними источниками в единице объема тела в единицу времени будет q_v , [Вт/м³].

Тогда вторая составляющая левой части уравнения (2.6) будет равна:

$$dQ_2 = q_v \cdot dv \cdot d\tau.$$

Третью составляющую уравнения (2.6) определим в зависимости от термодинамического процесса, протекающего в системе.

В изохорном процессе вся теплота, подведенная к элементарному объему, расходуется на изменение внутренней энергии его объема: $dQ = dU$.

Известно, что $dU = C_v \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv = c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv$,

где C_v – изохорная теплоемкость единицы объема [Дж/(м³·°K)]; c_v – изохорная теплоемкость единицы массы, [Дж/(кг·°K)]; ρ – плотность вещества [кг/м³].

Подставим полученные выражения в (2.6):

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau + q_v \cdot dv \cdot d\tau, \quad \text{или} \quad c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = - \text{div} \vec{q} + q_v. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) – дифференциальное уравнение энергии для изохорного процесса переноса теплоты.

В изобарном процессе вся теплота, подведенная к рассматриваемому объему, расходуется на повышение теплосодержания вещества этого объема.

Известно, что $di = C_p \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv = c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv = \rho \frac{\partial i}{\partial \tau} d\tau \cdot dv$,

где C_p – изобарная теплоемкость единицы объема, [Дж/м³·°K]; c_p – изобарная теплоемкость единицы массы, [Дж/кг·°K].

Подставим полученные значения dQ_1, dQ_2 и di в (2.6). Тогда

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v = - \text{div} \vec{q} + q_v. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) – дифференциальное уравнение энергии для изобарного процесса переноса теплоты.

В твердых телах теплота распространяется в соответствии с законом Фурье: $q = - \lambda \text{grad} t$, а $C_p \approx C_v = C$. Тогда (2.7) перепишем как:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = - \frac{1}{c \cdot \rho} \text{div} \vec{q} + \frac{q_v}{c \cdot \rho} = \frac{1}{c \cdot \rho} \text{div} (\lambda \cdot \text{grad} t) + \frac{q_v}{c \cdot \rho}. \quad (2.9)$$

(2.9) – дифференциальное уравнение теплопроводности. Перепишем (2.9)

в виде: $\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{c \cdot \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c \cdot \rho}.$

Так как теплофизические характеристики const по условию задачи, то

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c \cdot \rho}, \quad (2.10)$$

где $a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$, [м²/с] - коэффициент температуропроводности. Характеризует скорость изменения температуры и является мерой теплоинерционных свойств тела. Жидкости и газы обладают большой тепловой инерционностью и, значит, малым «а». Металлы обладают малой тепловой инерционностью, значит у них большой «а».

$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \nabla^2 t$ - второй оператор Лапласа по температуре.

С учетом обозначений перепишем (2.10):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{q_v}{c \cdot \rho}. \quad (2.11)$$

Если система тел не содержит внутренних источников теплоты $q_v = 0$, то

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t. \quad (2.12)$$

При стационарном состоянии температурного поля при наличии внутренних источников уравнение (2.11) запишется как:

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0 - \text{уравнение Пуассона}. \quad (2.13)$$

При отсутствии внутренних источников $q_v = 0$ и стационарном режиме (2.11) запишется как: $\nabla^2 t = 0$ - **уравнение Лапласа**. (2.14)

2.3. Условия однозначности для процессов теплопроводности

Явление теплопроводности описывается уравнениями энергии и закона Фурье:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{q_v}{c \cdot \rho}, \quad (2.15)$$

$$dq = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (2.16)$$

Уравнения (2.15) и (2.16) отражают общий характер процесса и имеют множество решений. Для получения конкретного решения, необходимо задание условий однозначности, т.е. дать математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса:

- **геометрические** - определяют форму и размеры тела, в котором протекает процесс;
- **физические** - характеризуют физические свойства среды и тела, то есть определяют числовые значения всех физических параметров тела, входящих в дифференциальное уравнение;
- **временные (начальные)** - определяют распределение температур в начальный момент времени;

- **граничные** - определяют взаимодействие тела с окружающей средой и могут быть заданы следующим образом:

а) **граничные условия первого рода** характеризуют распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени:

$$t_c = f(x, y, z, \tau);$$

б) **граничные условия второго рода** - распределение плотности теплового потока на поверхности тела:

$$q_c = f(x, y, z, \tau);$$

в) **граничные условия третьего рода** задаются температура окружающей среды и закон теплообмена между средой и поверхностью тела:

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_n = \alpha (t_a - t_n);$$

г) **граничные условия четвертого рода** характеризуются равенством тепловых потоков, проходящих через поверхность контакта двух тел:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_1 = \lambda_2 \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_2.$$

2.3.1. Передача теплоты через плоскую стенку

2.3.1.1. Граничные условия первого рода

Рассмотрим однородную, изотропную, плоскую стенку (рис. 2.2), толщина которой значительно меньше длины и ширины. На поверхностях пластины поддерживаются постоянными температурами t_{c1} и t_{c2} , а теплопроводность материала равна λ . В стационарном тепловом режиме для одномерного температурного поля дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0. \quad (2.17)$$

Граничные условия первого рода заданы следующим образом: при $x = 0 \rightarrow t = t_{c1}$; при $x = \delta \rightarrow t = t_{c2}$.

Интегрируем (2.17):

$$\frac{dt}{dx} = C_1, \quad dt = C_1 \cdot dx,$$

$$t(x) = C_1 \cdot x + C_2. \quad (2.18) \text{ Распределение тем-}$$

Из (2.18) следует, что при $\lambda = \text{const}$ температура в *температуры в* стенке меняется по линейному закону. *плоской стенке*

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем из граничных условий.

При $x = 0 \rightarrow C_2 = t_{c1}$. При $x = \delta \rightarrow t_{c2} = C_1 \delta + t_{c1}$.

$$C_1 = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta}. \quad (2.19)$$

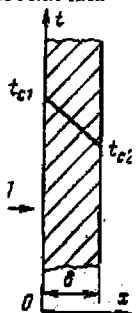


Рис. 2.2

Подставив C_1 в формулу (2.18), получим

$$t(x) = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x, \quad (2.20)$$

отсюда видно, что распределение температуры в плоской стенке осуществляется по закону прямой.

При подстановке в уравнение Фурье $\frac{\partial t}{\partial x} = C_1$, определим:

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}). \quad (2.21)$$

Из (2.21) следует, что количество теплоты, проходящее через единицу поверхности стенки в единицу времени, прямо пропорционально λ , разности температур на наружных поверхностях стенки и обратно пропорционально толщине стенки.

Величина $\frac{\lambda}{\delta}$ называется **тепловой проводимостью**, а ей обратная $-\frac{\delta}{\lambda}$ — **термическим сопротивлением** стенки. Оно представляет собой падение температуры в стенке на единицу плотности теплового потока.

Перепишем (2.21) в виде:

$$\frac{q}{\lambda} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta}.$$

Полученное подставим в (2.20) и получим:

$$t(x) = t_{c1} - \frac{q}{\lambda} x. \quad (2.22)$$

Из (2.22) видно, что при прочих равных условиях температура в стенке убывает быстрее при большей плотности теплового потока. Общее количество теплоты Q_τ , которое передается через стенку за промежуток времени τ , определяют:

$$Q_\tau = q \cdot F \cdot \tau = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) F \cdot \tau. \quad (2.23)$$

Рассмотрим теплопроводность многослойной стенки, показанной на рис. 2.3 и состоящей из n слоев. Поверхности слоев идеально контактируют, поэтому температура соприкасающихся поверхностей одинакова. При стационарном режиме тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же. Тогда на основании (2.22):

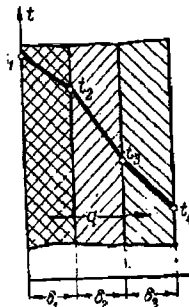


Рис. 2.3. Многослойная плоская стенка

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\lambda_1}{\delta_1} (t_1 - t_2) \\ q &= \frac{\lambda_2}{\delta_2} (t_2 - t_3) \\ q &= \frac{\lambda_3}{\delta_3} (t_3 - t_4) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Изменение температуры в каждом слое равно:

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_2 &= q \frac{\delta_1}{\lambda_1} \\ t_2 - t_3 &= q \frac{\delta_2}{\lambda_2} \\ t_3 - t_4 &= q \frac{\delta_3}{\lambda_3} \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Сложим левые и правые части системы (б):

$$q (\delta_1 / \lambda_1 + \delta_2 / \lambda_2 + \delta_3 / \lambda_3) = t_1 - t_4$$

или

$$q = \frac{t_1 - t_4}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}}.$$

Для многослойной стенки, состоящей из n слоев, по аналогии получим:

$$q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}, \quad (2.24)$$

где n — количество слоев в стенке.

Величина $\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$ — **полное термическое сопротивление теплопроводности многослойной стенки**, равное сумме термических сопротивлений всех слоев.

Из рассмотрения многослойной стенки, как однородной и однослойной толщиной $\sum_{i=1}^n \delta_i$, выводится **эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{\text{эк}}$ многослойной стенки**. Он равен коэффициенту теплопроводности однородной стенки, толщина которой равна толщине многослойной, а тер-

мическое сопротивление равно термическому сопротивлению рассматриваемой многослойной стенки: $q = \frac{\lambda_{\text{экв}}}{\sum_{i=1}^n \delta_i} (t_1 - t_{n+1})$. Тогда

$$\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\lambda_{\text{экв}}} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} \rightarrow \lambda_{\text{экв}} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \quad (2.25)$$

Из (2.25) следует, что $\lambda_{\text{экв}}$ зависит только от термических сопротивлений и толщины отдельных слоев.

2.3.1.2. Граничные условия третьего рода. Теплопередача

Передача теплоты от одного теплоносителя к другому через разделяющую их твердую стенку называется **теплопередачей**. Это сложный теплообмен, включающий теплоотдачу от горячего теплоносителя к стенке, теплопроводность внутри стенки и теплоотдачу от стенки к холодному теплоносителю (рис. 2.4).

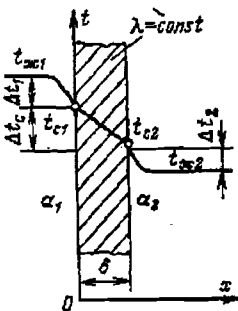
Пусть плоская однородная стенка имеет толщину δ значительно меньшей высоты. Заданы коэффициенты теплопроводности стенки λ , температуры теплоносителей $t_{\text{ж}1}$ и $t_{\text{ж}2}$ и коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 . Режим стационарный. При заданных условиях необходимо найти тепловой поток от горячей жидкости к холодной и температуры на поверхности через плоскую стенку. Плотность теплового потока от горячего теплоносителя к стенке определяется уравнением Ньютона – Рихмана: $q = \alpha_1 (t_{\text{ж}1} - t_{c1})$.

При стационарном режиме эта же плотность теплового потока, обусловленная теплопроводностью внутри твердой стенки, определяется уравнением (2.21): $q = \lambda / \delta (t_{w1} - t_{w2})$.

Эта же плотность теплового потока от стенки к холодному теплоносителю определяется уравнением Ньютона – Рихмана:

$$q = \alpha_2 (t_{c2} - t_{\text{ж}2}).$$

Сведем уравнения в систему:



$$\left. \begin{aligned} q \frac{1}{\alpha_1} &= (t_{\text{ж}1} - t_{c1}) \\ q \frac{\delta}{\lambda} &= (t_{c1} - t_{c2}) \\ q \frac{1}{\alpha_2} &= (t_{c2} - t_{\text{ж}2}) \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Решаем систему (*) относительно q , складывая равенства, почленно:

$$q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = t_{\text{ж}1} - t_{\text{ж}2}$$

или

$$q = \frac{t_{\text{ж}1} - t_{\text{ж}2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad [\text{Вт/м}^2] \quad (2.26)$$

Перепишем (2.26) в виде $q = K (t_{\text{ж}1} - t_{\text{ж}2})$, где $K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \cdot \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{К}} \right]$ — коэффициент теплопередачи. (2.27)

K — численно равен количеству теплоты, которое передается через единицу поверхности стенки в единицу времени от горячего теплоносителя к холодному при разности температур между ними в один градус.

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется **полным термическим сопротивлением теплопередачи**:

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \quad (2.28)$$

Так как полное термическое сопротивление состоит из частных термических сопротивлений, то, очевидно, что для многослойной стенки необходимо учитывать термическое сопротивление каждого слоя:

$$R = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} \quad \text{или} \quad K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

Тогда плотность теплового потока через многослойную плоскую стенку определится как:

$$q = \frac{t_{\text{ж}1} - t_{\text{ж}2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (2.29)$$

Тепловой поток Q [Вт] через поверхность F твердой стенки равен:

$$Q = q \cdot F = k \cdot \Delta t \cdot F \quad (2.30)$$

Температуры поверхностей стенки найдем из системы (*)

$$t_{c1} = t_{ж1} - q \frac{1}{\alpha_1}; \quad t_{c2} = t_{ж1} - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} \right); \quad t_{c2} = t_{ж2} + q \frac{1}{\alpha_2}.$$

На основании приведенных уравнений температура на границе любых двух слоев определяется по уравнению

$$t_{c(i+1)} = t_{ж1} - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right). \quad (2.31)$$

2.3.2. Передача теплоты через цилиндрическую стенку

2.3.2.1. Граничные условия первого рода

Рассмотрим тонкостенную трубу (рис.2.5) с внутренним диаметром $d_1 = 2r_1$ и наружным $d_2 = 2r_2$. На поверхностях стенки заданы постоянными температуры t_1 и t_2 . Теплопроводность материала стенки постоянна. Режим теплопроводности стационарный. Вертикальная ось OZ совмещена с осью трубы. Второй оператор Лапласа дифференциального уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (2.32)$$

Поскольку труба тонкостенная, то температура будет меняться только в радиальном направлении. Следовательно, температурное поле — одномерное.

$$\text{Тогда } \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0.$$

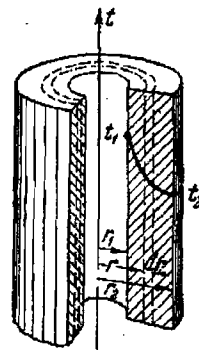


Рис. 2.5. Однородная цилиндрическая стенка

В связи с тем, что температуры на поверхностях трубы неизменны, изотермические поверхности — цилиндрические, имеющие с трубой общую ось. Следовательно, температура постоянна по φ , где φ — угол между координатами в горизонтальной плоскости:

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Тогда (2.32) примет вид

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = 0. \quad (2.33)$$

Зададимся граничными условиями:

$$r = r_1 \rightarrow t = t_1 \text{ и } r = r_2 \rightarrow t = t_2.$$

Введем новую переменную $U = \frac{\partial t}{\partial r}$.

$$\text{Тогда } \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{U}{r}.$$

Перепишем (2.33) в виде $\frac{\partial U}{\partial r} + U \frac{1}{r} = 0$. Разделим переменные:

$$\frac{\partial U}{U} + \frac{\partial r}{r} = 0. \quad (2.34)$$

Интегрируем (2.34) и получим: $\ln U + \ln r = \ln C_1$. (2.35)

Потенцируем (2.35), получим: $U \cdot r = C_1$, тогда $U = C_1 \frac{1}{r}$. Перепишем, под-

ставив обозначенное через U : $\frac{\partial t}{\partial r} = C_1 \frac{1}{r}$. (*)

Разделим переменные:

$$\partial t = C_1 \frac{\partial r}{r}. \text{ Интегрируем полученное выражение: } t = C_1 \cdot \ln r + C_2. \quad (2.36)$$

Уравнение (2.36) — уравнение температурной кривой в цилиндре.

Постоянные C_1 и C_2 в (2.36) находим, используя граничные условия:

при $r = r_1 \rightarrow t = t_1 = C_1 \ln r_1 + C_2$ и при $r = r_2 \rightarrow t = t_2 = C_1 \ln r_2 + C_2$.

Тогда $C_2 = t_1 - C_1 \ln r_1$ и $t_2 = C_1 \ln r_2 + t_1 - C_1 \ln r_1$. Следовательно, перепад температур на стенке определится как: $t_1 - t_2 = C_1 (\ln r_1 - \ln r_2)$ и посто-

янная $C_1 = \frac{t_1 - t_2}{\ln r_1 / r_2}$. Подставив C_1 в уравнение температурной кривой, полу-

$$\text{чим } t_1 = \frac{t_1 - t_2}{\ln r_1 / r_2} \ln r_1 + C_2. \quad \text{Откуда } C_2 = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln r_1}{\ln r_1 / r_2}.$$

Подставим постоянные интегрирования в (2.36):

$$\begin{aligned} t &= (t_1 - t_2) \frac{\ln r}{\ln r_1 / r_2} + t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln r_1}{\ln r_1 / r_2} = t_1 + (t_1 - t_2) \left(\frac{\ln r}{\ln r_1 / r_2} - \frac{\ln r_1}{\ln r_1 / r_2} \right) \\ &= t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln r / r_1}{\ln r_2 / r_1} = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln d / d_1}{\ln d_2 / d_1}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Из (2.37) следует, что распределение температуры в цилиндрической стенке происходит по логарифмической кривой.

Воспользуемся уравнением Фурье: $Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F$; подставим в него (*):

$$Q = -\lambda \frac{C_1}{r} F = -\lambda \frac{(t_1 - t_2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l}{\ln r_1 / r_2 \cdot r} = \frac{2 \pi \cdot \lambda \cdot l}{\ln r_2 / r_1} (t_1 - t_2), \quad [\text{Вт}] \quad (2.38)$$

Тепловой поток в (2.38) может быть отнесен либо к единице внутренней или внешней поверхностей. Мы отнесем его к единице длины. Тогда

$$\frac{Q}{l} = q_l = \frac{\pi(t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda} \ln d_2 / d_1}, \quad [\text{Вт/м}] \quad (2.39)$$

Тепловой поток, отнесенный к единице длины трубы, называется линейной плотностью теплового потока. Как видно из (2.38), q_ℓ при $d_2/d_1 = \text{const}$ не зависит от поверхности цилиндрической стенки.

2.3.2.2. Граничные условия третьего рода. Теплопередача

Рассмотрим однородную трубу (рис. 26) с постоянным коэффициентом теплопроводности λ . Температуры теплоносителей $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$, коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 постоянны. Длина трубы велика по сравнению с толщиной стенки. Тепловой режим установившийся и постоянный. Тогда через стенку передается одно и то же количество теплоты. Следовательно, справедливы следующие равенства:

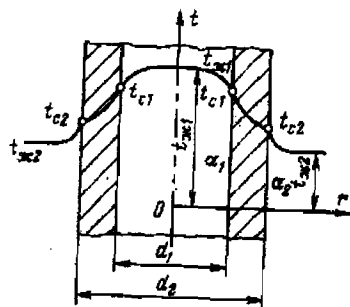


Рис. 2.6. Теплопередача через однородную цилиндрическую стенку

$$\left. \begin{aligned} q_\ell &= \alpha_1 \cdot \pi \cdot d_1 (t_{ж1} - t_{c1}) \\ q_\ell &= \frac{\pi (t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}} \\ q_\ell &= \alpha_2 \cdot \pi \cdot d_2 (t_{c2} - t_{ж2}) \end{aligned} \right\}$$

Перепишем полученную систему следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} t_{ж1} - t_{c1} &= \frac{q_\ell}{\pi \alpha_1 d_1}; \\ t_{c1} - t_{c2} &= \frac{q_\ell}{\pi} \left(\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} \right); \\ t_{c2} - t_{ж2} &= \frac{q_\ell}{\pi \alpha_2 d_2}. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Для определения температурного напора между теплоносителями сложим почленно уравнения системы (*):

$$t_{ж1} - t_{ж2} = \frac{q_\ell}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right).$$

Из полученного уравнения находится линейная плотность теплового потока через цилиндрическую поверхность:

$$q_\ell = \frac{\pi (t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}, \quad [\text{Вт/м}]. \quad (2.40)$$

Перепишем (2.40) в виде:

$$q_\ell = K_\ell \cdot \pi (t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.41)$$

где

$$K_\ell = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}, \quad \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ \text{К}} \right]. \quad (2.42)$$

Величина K_ℓ — **линейный коэффициент теплопередачи**. Она характеризует интенсивность передачи теплоты от одного теплоносителя к другому через разделяющую их стенку и равна количеству теплоты, которое проходит через стенку длиной 1 м в единицу времени от одной среды к другой при разности температур между ними в 1°К .

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется линейным термическим сопротивлением теплопередачи:

$$R_\ell = \frac{1}{K_\ell} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}, \quad (2.43)$$

и равна сумме частных термических сопротивлений (теплоотдачи и теплопроводности). В случае, если $d_2/d_1 < 2$, в практических расчетах можно пользоваться зависимостью

$$Q = K \cdot \pi \cdot d_x \cdot \ell (t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.44)$$

где K рассчитывается согласно (2.26).

Погрешность расчета уменьшится, если в качестве расчетной поверхности в (2.43) брать поверхность, со стороны которой α меньше:

1. $\alpha_1 \gg \alpha_2 \rightarrow d_x = d_2$;
2. $\alpha_2 \gg \alpha_1 \rightarrow d_x = d_1$;
3. $\alpha_1 \approx \alpha_2 \rightarrow d_x = 0.5 (d_1 + d_2)$.

При рассмотрении теплопередачи через многослойную цилиндрическую стенку система равенств (*) заменяется системой, учитывающей сопротивления теплопроводности всех слоев. После решения этой системы относительно q_ℓ получим

$$q_\ell = \frac{\pi (t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}} = K_\ell \cdot \pi (t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.45)$$

где $\frac{1}{K_\ell} = R_\ell = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}$ — **полное термическое сопротивление многослойной цилиндрической стенки**.

Из системы (*) следует, что $t_{c(i+1)} = t_{ж1} - \frac{q_\ell}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right).$ (2.46)

2.3.2.3. Критический диаметр цилиндрической стенки

Термическое сопротивление однородной цилиндрической стенки определяется уравнением (2.43): $R_t = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}$.

В условиях эксплуатации $\alpha_1; d_1; \lambda; \alpha_2 = \text{const}$. Поэтому $R_t = f(d_2)$.

Исследуем функцию R_t . $R_{t1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} = \text{const}$. $R_{t2} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$ - при увеличении d_2 будет возрастать. $R_{t3} = \frac{1}{\alpha_2 d_2}$ - при увеличении d_2 будет уменьшаться.

Таким образом, $R_t = f(R_{t1}; R_{t2}; R_{t3})$.

Возьмем производную от R_t по d_2 и приравняем ее к 0.

$$\frac{d(R_t)}{d(d_2)} = \frac{1}{2\lambda \cdot d_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0. \quad (2.47)$$

Значение d_2 из (2.47) соответствует экстремальной точке кривой $R_t = f(d_2)$. Из рис. 2.7 видно, что при $d_2 < d_{кр}$ с увеличением d_2 R_t уменьшается. При $d_2 > d_{кр}$ с увеличением d_2 R_t возрастает. Исследуя кривую на $\max$ и $\min$, увидим, что кривая имеет экстремальную точку, равную $d_2 = \frac{2\lambda}{\alpha_2}$, где термическое сопротивление

теплопередачи будет минимальным.

Значение внешнего диаметра трубы, соответствующее минимальному полному термическому сопротивлению, называется критическим диаметром.

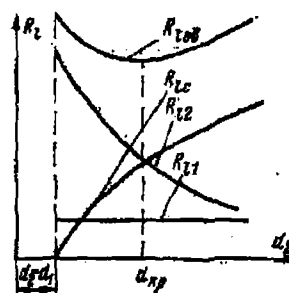


Рис. 2.7. Зависимость термического сопротивления цилиндрической стенки от d_2

2.3.2.4. Критический диаметр тепловой изоляции

Термическое сопротивление трубы с изоляцией составляет

$$R_t = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_c} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{из}} \ln \frac{d_n}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_n}$$

Так как R_t - обратно пропорционально плотности теплового потока при всех прочих постоянных величинах, то $q_t = f(d_{из})$. Критический диаметр

изоляции определяется уравнением $d_{кр,из} = \frac{2\lambda_{из}}{\alpha_2} \quad (2.48)$

При выборе изоляционного материала необходимо рассчитать критический диаметр по зависимости (2.48).

Согласно рис. 2.8, плотность теплового потока с ростом внешнего диаметра увеличивается, при $d = d_{кр}$ достигает максимума и с дальнейшим ростом d_2 уменьшается. Эту зависимость необходимо учитывать при выборе тепловой изоляции. Если $d_{кр,из} > d_2$, применение выбранного материала в качестве изоляционного, нецелесообразно. Для эффективной работы тепловой изоляции должно выполняться условие: $d_{кр,из} < d_2$.

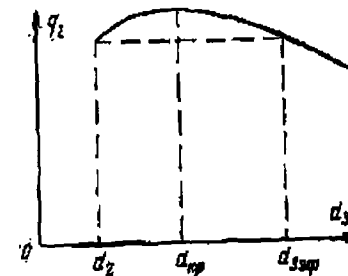


Рис. 2.8. Зависимость тепловых потерь от толщины изоляции трубы

2.3.3. Передача теплоты через шаровую стенку

2.3.3.1. Граничные условия первого рода

Рассмотрим полый шар с радиусами r_1 и r_2 , постоянной теплопроводностью λ и температурами поверхностей t_1 и t_2 , представленный на рис. 2.9. Температура изменяется только в радиальном направлении. Режим теплопроводности постоянный. $\nabla^2 t = 0$. Оператор Лапласа в сферических координатах записывается как:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = \nabla^2 t. \quad (2.49)$$

Граничные условия первого рода:

$$r = r_1 \rightarrow t = t_1; \quad r = r_2 \rightarrow t = t_2$$

Дважды интегрируя (2.49), получим:

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{c_1}{r^2}; \quad t = c_2 - \frac{c_1}{r}. \quad (2.50)$$

Постоянные интегрирования находим из граничных условий: $c_1 = -\frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}; \quad c_2 = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \frac{1}{r_1}$

Подставим постоянные интегрирования в (2.50):

$$t = t_{c1} - \frac{t_1 - t_{c2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \quad (2.51)$$

Из (2.51) видно, что температура внутри шаровой стенки изменяется по закону гиперболы. Количество теплоты, проходящее через шар, площадью $F = 4\pi r^2$ в единицу времени:

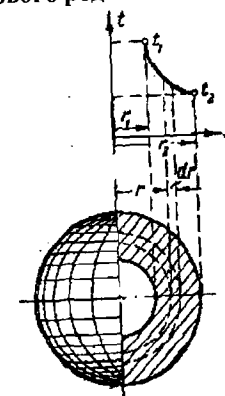


Рис. 2.9. Однородная шаровая стенка

$$Q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} F = \frac{4\pi \cdot \lambda \cdot r^2 (t_1 - t_2)}{r^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot \Delta t}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} = \pi \cdot \lambda \frac{d_1 d_2}{\delta} \Delta t, \quad (2.52)$$

где $\delta = \frac{d_2 - d_1}{2}$ - толщина стенки.

2.3.3.2. Граничные условия третьего рода

При граничных условиях третьего рода, кроме r_1 и r_2 , t_1 и t_2 , λ , известны температуры горячей и холодной жидкостей $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$ и коэффициенты теплоотдачи на поверхностях шаровой стенки α_1 и α_2 .

Процесс теплопроводности стационарный. Тогда можно записать:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \alpha_1 \pi \cdot d_1^2 (t_{ж1} - t_1) \\ Q &= \frac{2\lambda \cdot \pi}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} (t_1 - t_2) \\ Q &= \alpha_2 \pi \cdot d_2^2 (t_2 - t_{ж2}) \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Решая (2.53) относительно Q , получим

$$Q = \frac{\pi (t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}} = K_{ш} \pi \cdot \Delta t, \quad (2.54)$$

где $K_{ш}$ - коэффициент теплопередачи шаровой стенки, [Вт/°К].

$R_{ш} = \frac{1}{K_{ш}} = \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}$ - термическое сопротивление теплопередачи шаровой стенки.

2.3.4. Обобщенный метод решения задач теплопроводности в телах элементарных форм

Решения задач теплопроводности в плоской, цилиндрической и шаровой стенках можно унифицировать. Для этого рассмотрим одномерную задачу при стационарном режиме для указанных трех случаев:

$$t_c = f_1(x); \quad t_c = f_2(r); \quad t_c = f_3(r).$$

Примем, что изотермические поверхности в рассматриваемых телах замкнуты. Тогда $t = f(n)$, где n - нормаль к изотермической поверхности. Известно, что $Q \sim \partial t / \partial n$ и $F = f(n)$. Замкнутость поверхностей шара и цилиндра очевидна, плоскую стенку рассматриваем как предельный случай, когда $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Тогда} \quad Q = -\lambda \frac{dt}{dn} F(n). \quad (2.55)$$

Поскольку $Q = \text{const}$ для любой изотермической поверхности, то разделив переменные в (2.55) и проинтегрировав в пределах $n = n_1$ до $n = n_2$ и от t_{c1} до t_{c2} , получим:

$$Q = \frac{\lambda (t_{c1} - t_{c2})}{\int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{F(n)}}. \quad (2.56)$$

Зависимость (2.56) аналогична (2.21) для плоской стенки, где Q аналогично q , а $\int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{F(n)}$ - аналогичен толщине δ . При этом:

- а) для плоскостной пластины: $n = x$; $n_1 = 0$; $n_2 = \delta$; $F(n) = F = \text{const}$;
- б) для цилиндра: $n = r$; $n_1 = r_1$; $n_2 = r_2$; $F(n) = F(r) = 2\pi \cdot r \cdot l$;
- в) для шара: $n = r$; $n_1 = r_1$; $n_2 = r_2$; $F(n) = F(r) = 4\pi \cdot r^2$.

2.3.5. Интенсификация теплопередачи

Пути интенсификации теплообмена найдем в результате анализа коэффициента теплопередачи K , являющегося определяющей величиной при заданных размерах стенки и температурах теплоносителей: $K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$.

При тонких стенках с большим λ :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (2.57)$$

Из (2.57) следует, что K не может быть больше самого малого значения α . Если $\alpha_2 \rightarrow \infty$, то $K \rightarrow \alpha_1$. Если $\alpha_1 \rightarrow \infty$, то $K \rightarrow \alpha_2$. Следовательно, для увеличения K следует уменьшать большее из термических сопротивлений. При передаче теплоты через цилиндрическую и шаровую стенки термические сопротивления последних определяются не только коэффициентами теплоотдачи, но и размерами поверхностей: $\frac{1}{\alpha \cdot d}$; $\frac{1}{\alpha \cdot d^2}$.

Следовательно, если α мало, то термическое сопротивление теплоотдачи можно уменьшить за счет соответствующей поверхности. Этот результат можно получить за счет их оребрения поверхности (рис. 2.10), поскольку термические сопротивления пропорциональны $\frac{1}{\alpha_1 F_1}$ и

$\frac{1}{\alpha_2 F_2}$. Исходя из этого, при $\alpha_1 \ll \alpha_2$, оребряют поверхность со стороны α_1 до тех пор, пока $\alpha_1 F_1 \cong \alpha_2 F_2$. Дальнейшее увеличение F_1 малоэффективно. На рис. 2.10 представлены рисунки прямых и цилиндрических

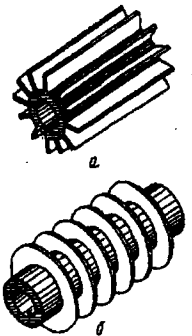
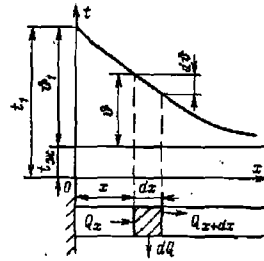


Рис. 2.10. Различные виды оребрения труб

2.4. Теплопроводность и теплопередача в стержне постоянного поперечного сечения

Рассмотрим распространение теплоты в прямом стержне с постоянным поперечным сечением по длине (рис. 2.11). Площадь поперечного сечения — f , периметр — u . Стержень находится в среде с постоянной температурой $t_{ж}$. Коэффициент теплоотдачи от стержня в окружающую среду постоянный. Значение коэффициента теплопроводности материала стержня λ высокое. Площадь поперечного сечения пренебрежимо мала по сравнению с его длиной, т.е. температура в стержне изменяется только вдоль его оси.



Отсчет температуры ведем от выбранной температуры $t_{ж}$. Избыточную, в результате этого, температуру стержня обозначим как ϑ . Тогда $\vartheta = t - t_{ж}$, где t — текущая температура стержня; $t_{ж}$ — температура среды, окружающей стержень. При температуре основания стержня t_1 , его избыточная температура определяется как:

$$\vartheta = t_1 - t_{ж}.$$

Выделим элемент стержня длиной dx на расстоянии x от основания стержня. Для этого участка уравнение материального баланса определится:

$$dQ = Q_x - Q_{x+dx}, \quad (2.58)$$

где dQ — количество теплоты, отдаваемое в единицу времени единицей наружной поверхности элемента окружающей среде; Q_x — количество теплоты, входящее в левую грань элемента в единицу времени; Q_{x+dx} — количество теплоты, выходящей из противоположной грани элементарного элемента в этот же промежуток времени.

На основании уравнения Фурье запишем:

$$Q_{x+dx} = -\lambda \frac{d}{dx} \left(\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx \right) f = -\lambda \cdot f \frac{d\vartheta}{dx} - \lambda \cdot f \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx.$$

При этом очевидно, что $Q_x = -\lambda \cdot f \frac{d\vartheta}{dx}$.

Подставим Q_x и Q_{x+dx} в (2.57): $dQ = \lambda \cdot f \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx$.

Вместе с тем $dQ = \alpha \cdot \vartheta \cdot U \cdot dx$, где U — геометрический размер ребра — периметр поперечного сечения ребер: $U = 2b$.

$$\text{Тогда } \lambda \cdot f \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx = \alpha \cdot \vartheta \cdot U \cdot dx \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot f} \vartheta.$$

$$\text{Обозначим } m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot f}}, \quad [1/\text{м}]. \quad \text{Тогда} \quad \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = m^2 \vartheta. \quad (2.59)$$

Пусть $m = \text{const}$ при $\alpha = \text{const}$ по всей поверхности; $\lambda = \text{const}$ в рассматриваемом диапазоне температур и постоянных габаритах ребра.

Пусть $m = \text{const}$ при $\alpha = \text{const}$ по всей поверхности; $\lambda = \text{const}$ в рассматриваемом диапазоне температур и постоянных габаритах ребра.

Проинтегрируем (2.59): $\vartheta = C_1^{mx} + C_2^{-mx}. \quad (2.60)$

Уравнение (2.60) — уравнение изменения избыточной температуры стержня вдоль его длины. Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий в зависимости от длины стержня и его температуры.

Из анализа m следует, что при оребрении следует выбирать материал ребер с $\lambda = \text{max}$ и делать тонкие ребра.

Решая (2.60), определим количество теплоты, отданное стержнем в окружающую среду:

$$\text{при } x = \infty \quad Q = \lambda \cdot f \cdot m \cdot \vartheta_1 = \vartheta_1 \sqrt{\alpha_p \lambda \cdot U \cdot f},$$

$$\text{при } x = l \quad Q_p = \lambda \cdot f \cdot m \cdot \vartheta_1 \cdot \text{th}(ml) = \vartheta_1 \sqrt{\alpha_p \lambda \cdot U \cdot f} \cdot \text{th}(ml),$$

где α_p — теплопередача с поверхности ребра; th — гиперболический тангенс.

При рассмотрении теплопередачи через ребристую плоскую стенку (рис. 2.12) найдем расчетное уравнение для определения потока теплоты с поверхности ребра:

$$Q_p = \alpha_p \vartheta_1 F_p \frac{\text{th}(\ell/d \sqrt{2\alpha_p \delta/\lambda})}{(\ell/d) \sqrt{2\alpha_p \delta/\lambda}}. \quad (2.61)$$

В (2.61) $\alpha_p \delta/\lambda = Bi$ — число Био. Критерий Био представляет собой отношение внутреннего термического сопротивления теплопроводности к внешнему термическому сопротивлению теплоотдачи:

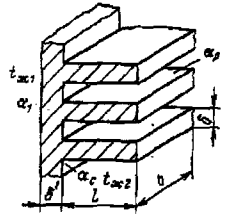


Рис. 2.12. Теплопередача

$Bi = \frac{\delta/\lambda}{1/\alpha_p}$. Перепишем (2.61) как: $Q_p = \alpha_p \vartheta_1 F_p E$, где $E = \frac{\text{th}(\ell/d \sqrt{2Bi})}{\ell/d \sqrt{2Bi}}$ — коэффициент эффективности

ребра. Число E стремится к 1 при $Bi \rightarrow 0$, а $\lambda \rightarrow \infty$.

$$Q = Q_p + Q_c = \alpha_{np} \vartheta_1 F_{p,c},$$

где $Q_c = \alpha_c \cdot \vartheta_1 \cdot F_c$ — поток теплоты с гладкой части ребристой поверхности; $F_{p,c} = F_p + F_c$; $\alpha_{np} = \alpha_p E (F_p/F_{p,c}) + \alpha_c (F_c/F_{p,c})$ — приведенный коэффициент теплоотдачи, учитывающий теплоотдачу поверхности ребра, поверхности гладкой стенки и эффективность работы ребра. Тогда общий тепловой

$$\text{поток через стенку определится как: } Q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1 F_c} + \frac{\delta'}{\lambda \cdot F_c} + \frac{1}{\alpha_{np} F_{p,c}}}. \quad (2.62)$$

Отнесем (2.62) к единице оребренной поверхности: $\frac{Q}{F_{p,c}} = K_{p,c} (t_{ж1} - t_{ж2})$, где

$$K_{pc} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} \frac{F_{pc}}{F_c} + \frac{\delta}{\lambda} \frac{F_{pc}}{F_c} + \frac{1}{\alpha_{np}}}; \quad F_{pc}/F_c - \text{отношение оребренной поверхности к}$$

гладкой называется коэффициентом оребрения.

Практическое определение эффективности оребрения является более сложной задачей. Во-первых, теоретический коэффициент эффективности ребра E заметно меньше единицы. Как следствие, при высоких значениях высоты ребра возникают сложности по определению α для подстановки в число Биссера. Во-вторых, раздельное определение α_p и α_c практически невозможно. Поэтому обычно коэффициент теплоотдачи α_{np} определяют, как прави-

$$\alpha_{np} = \left(E \cdot \mu_p \cdot \psi \frac{F_p}{F_{p,c}} + \frac{F_c}{F_{p,c}} \right) \alpha_c,$$

где E — условно конвективный коэффициент теплоотдачи, подставляемый в число Биссера; μ_p — коэффициент, учитывающий уширение ребер к основанию; ψ — поправочный, для коэффициента эффективности E , коэффициент, учитывающий неравномерное распределение теплоотдачи по поверхности ребра. Их значения, как правило, находят по справочным данным.

При заданных соотношениях коэффициентов теплоотдачи при оребренной плоской стенке со стороны малого α с коэффициентом оребрения $F_{pc}/F_c = 2$, передача теплоты увеличится примерно в два раза.

2.5. Теплопроводность при наличии внутренних источников теплоты

Процессы теплопроводности в химических системах осложняются действием экзотермических или эндотермических эффектов. В энергетических реакторах происходит выделение теплоты вследствие торможения осколков деления ядер, замедления потока нейтронов. В этих случаях теплота выделяется или поглощается во всем реакционном объеме. К этим задачам относятся системы с фазовыми превращениями, процессы с индукционным или диэлектрическим нагревом.

2.5.1. Теплопроводность однородной неограниченной пластины

Рассмотрим длинную пластину толщиной 2δ , малой по сравнению с другими размерами (рис. 2.13). Внутренние источники теплоты равномерно распределены по объему и равны q_v . Коэффициенты теплоотдачи α и температура теплоносителя вдали от пластины t_{∞} заданы постоянными. Параметры обеих поверхностей пластины одинаковы. Требуется определить температуру оси пластины t_0 , ее поверхности t_c , распределение температуры в пластине и количество теплоты, отданное в окружающую среду. При этих условиях температура пластины изменяется только вдоль оси x ,

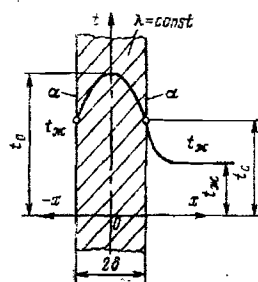


Рис. 2.13. Теплопроводность плоской пластины с внутренними источниками теплоты

а дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \quad (2.63)$$

Рассматриваем одну половину пластины, так как параметры поверхностей одинаковы.

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} x=0; \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=0} &= 0; \\ x=\delta; -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=\delta} &= \alpha(t_c - t_{\infty}) \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

Интегрируем (2.63):

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{q_v}{\lambda} x + C_1, \quad (2.65)$$

$$t = -\frac{q_v}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (2.66)$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из граничных условий. При $x = 0$ из (2.65) находим, что $C_1 = 0$. При $x = \delta$ из (2.65) имеем: $\frac{dt}{dx} = -\frac{q_v \delta}{\lambda}$. Подставим это значение производной в (2.64):

$$\frac{\lambda \cdot q_v \delta}{\lambda} = \alpha(t_c - t_{\infty}); \quad t_c = t_{\infty} + \frac{q_v \delta}{\alpha}.$$

Последнее подставим в (2.66) при $x = \delta$:

$$t_{\infty} + \frac{q_v \delta}{\alpha} = -\frac{q_v}{2\lambda} \delta^2 + 0 + C_2. \quad C_2 = t_{\infty} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v}{2\lambda} \delta^2.$$

Подставим постоянные интегрирования C_1 и C_2 в (2.66):

$$t = -\frac{q_v}{2\lambda} x^2 + 0 + t_{\infty} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v}{2\lambda} \delta^2 = t_{\infty} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \quad (2.67)$$

Уравнение температурного поля (2.67) показывает, что температура в стенке меняется по параболе.

Тепловой поток изменяется по оси x линейно: $q = q_v x$.

При $x = 0$ $q = 0$. При $x = \delta$ $q = \alpha(t_c - t_{\infty}) = q_v \delta$.

Общее количество теплоты, отданное двумя поверхностями пластины в единицу времени:

$$Q = q \cdot F = q_v \delta \cdot 2F_l. \quad (2.68)$$

Из (2.67) видно, что при $\alpha \rightarrow \infty$, $t_{\infty} = t_c$. Тогда (2.67) перепишем как:

$$t = t_c + \frac{q_v}{2\lambda} (\delta^2 - x^2). \quad \text{Тогда температура на оси симметрии пластины при } x = 0$$

$$\text{равна} \quad t_0 = t_c + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda}.$$

Перепад температуры между осью симметрии и стенкой:

$$t_0 - t_c = \frac{q_v \delta^2}{2\lambda}.$$

При больших перепадах температур коэффициент теплопроводности может быть зависим от температуры. Тогда с помощью метода Кирхгофа получим

$$t = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(t_0 + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{q_v x^2}{\lambda_0 b}}, \quad \text{где } \lambda = \lambda_0 (1 + bt).$$

2.5.2. Теплопроводность однородного цилиндра

Решая задачу теплопроводности однородного круглого цилиндра при стационарном режиме и $\lambda = \text{const}$, по аналогии найдем распределение температуры в цилиндре:

$$t = t_{ж} + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v}{4\lambda} (r_0^2 - r^2), \quad (2.69)$$

где r_0 — радиус цилиндра и текущий радиус соответственно.

Плотность теплового потока на поверхности цилиндра:

$$q = \alpha(t_c - t_{ж}) = \frac{q_v r_0}{2}. \quad (2.70)$$

Полный тепловой поток с поверхности цилиндра:

$$Q = q \cdot F = \frac{q_v r_0}{2} 2\pi \cdot r_0 \cdot \ell = q_v \pi \cdot r_0^2 \ell.$$

В случае, когда $\lambda = f(t)$, зависимость для температурной кривой может быть представлена следующим уравнением:

$$t = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(t_0 + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{q_v r^2}{2\lambda_0 b}}. \quad (2.71)$$

При рассмотрении задачи теплопроводности, когда теплота от внутренних источников отводится только через наружную поверхность цилиндрической стенки, при $\lambda = \text{const}$ в условиях стационарного режима теплообмена уравнение температурного поля в стенке запишется как:

$$t = t_{ж2} + \frac{q_v r_2^2}{2\alpha} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] 2\ln \frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2. \quad (2.72)$$

Плотность теплового потока на теплоотдающей поверхности:

$$q = \alpha(t_{c2} - t_{ж2}) = \frac{q_v r_2^2}{2} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]. \quad (2.73)$$

В случае, когда теплота отводится только через внутреннюю поверхность трубы, уравнение температурного поля определится следующим образом:

$$t = t_{ж1} + \frac{q_v r_1^2}{2\lambda} \left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1\right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[2\ln \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right]. \quad (2.74)$$

При отводе теплоты через внутреннюю и наружную поверхности трубы найдем перепад температур в стенке:

$$t_0 - t_{c2} = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left[\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 - 2\ln \frac{r_2}{r_0} - 1\right]; \quad t_0 - t_{c1} = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left[\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 + 2\ln \frac{r_0}{r_1} - 1\right],$$

$$\text{где } r_0^2 = \frac{q_v (r_2^2 - r_1^2) - 4\lambda(t_{c1} - t_{c2})}{q_v 2\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Перенос теплоты за счет теплопроводности, когда температура системы изменяется не только от точки к точке, но и с течением времени, называется нестационарным. Эти тепловые процессы всегда связаны с изменением внутренней энергии или энтальпии вещества. Нестационарные процессы существуют при прогреве или охлаждении материала и оборудования при пуске, остановке или изменении технологического режима процесса, производстве стекла, обжиге кирпича и т.д.

Различают две группы процессов:

- процесс стремится к тепловому равновесию при прогреве или охлаждении тел, помещенных в среде с заданным тепловым состоянием;
- температура тела претерпевает периодические изменения в периодически действующих подогревателях (регенераторах).

Аналитическое описание процесса теплопроводности включает в себя

дифференциальное уравнение теплопроводности: $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$

и условия однозначности, состоящие из:

- физических условий $\lambda, c, \rho, \dots$;
- формы и размеров тела $l_n, l_1, l_2, \dots, l_n$;
- начальных условий (температура тела в начальный момент времени): $\tau = 0 \rightarrow t = t_0 = f(x, y, z)$.
- граничных условий, которые задаются в виде условий третьего рода:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_{n=0} - t_{ж}).$$

Математическая формулировка рассматриваемой задачи заключается в отыскании функции: $t = f(x, y, z, \tau; \alpha; a; t_0; t_{ж}; l_1; \dots, l_n)$, которая бы удовлетворяла уравнению теплопроводности и условиям однозначности.

3.1. Нестационарные процессы теплопроводности в телах простой формы.

Граничные условия третьего рода

Рассмотрим неограниченную пластину толщиной 2δ сделанную из однородного изотропного материала с постоянными физическими характеристиками (рис. 3.1). В начальный момент времени $\tau = 0$ температура в пластине распределена равномерно и равна t_0 . Пластина помещена в среду с постоянной температурой $t_{ж} < t_0$.

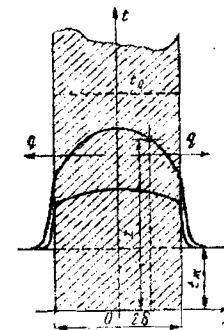


Рис. 3.1. Распределение температуры в пластине

Теплообмен на обеих поверхностях пластины происходит при $\alpha = \text{const}$. Требуется найти распределение температуры в пластине: $t = f(x, \tau)$. При поставленных условиях распределение температуры по толщине пластины должно быть симметричным: $\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = 0$, искомая функция $t(x, \tau)$ должна быть четной

функцией координаты x . (График четной функции симметричен относительно оси координат, нечетный - относительно начала координат).

Введем понятие "избыточной" температуры: $\vartheta = t - t_{\text{ж}}$. Тогда дифференциальное уравнение теплопроводности для пластины запишется:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

при следующих условиях однозначности:

- начальные условия: при $\tau = 0 \rightarrow \vartheta(x, 0) = \vartheta_0$;
- граничные условия: при $x = \delta \rightarrow \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{x=\delta}$;
- условия симметрии: при $x = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$.

Найдем функцию $\vartheta(x, \tau)$ распределения температуры в пластине в любой момент времени процесса охлаждения или нагревания. Используем метод разделения переменных. Решаем уравнение (3.1) в виде произведения двух функций, одна из которых $\varphi(x)$ - функция координаты, другая - $f(\tau)$ - времени:

$$\vartheta(x, \tau) = \varphi(x) \cdot f(\tau). \quad (3.2)$$

Подставим данную функцию в уравнение (3.1):

$$\frac{\partial [f(\tau)]}{\partial \tau} \varphi(x) = a \frac{\partial^2 [\varphi(x)]}{\partial x^2} f(\tau).$$

Разделим переменные:

$$\frac{1}{f(\tau)} \frac{\partial [f(\tau)]}{\partial \tau} = a \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\partial^2 [\varphi(x)]}{\partial x^2}.$$

Левая часть уравнения зависит от τ , правая - только от x . Известно, что две функции от двух разных и не зависящих друг от друга аргументов могут быть равны при любых значениях последних только в том случае, если они постоянны. Величина эта отрицательна, так как тепловые процессы стремятся к равновесию и обозначаются K . Тогда получим два дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{f(\tau)} \frac{d[f(\tau)]}{d\tau} = -aK^2; \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2 [\varphi(x)]}{dx^2} + K^2 \cdot \varphi(x) = 0. \quad (3.4)$$

В (3.3) разделим переменные: $\frac{d[f(\tau)]}{f(\tau)} = -a \cdot K^2 \cdot d\tau$.

Интегрируем полученное уравнение: $\ln[f(\tau)] = -a \cdot \tau \cdot K^2 + \ln C_1$,

$$\text{или} \quad f(\tau) = C_1 e^{-aK^2 \tau}. \quad (3.5)$$

Решение уравнения (3.4) имеет вид

$$\varphi(x) = C_2 \cos(Kx) + C_3 \sin(Kx). \quad (3.6)$$

Подставим (3.5) и (3.6) в (3.2) и получим

$$\vartheta = [C_2 \cos(Kx) + C_3 \sin(Kx)] C_1 e^{-aK^2 \tau}.$$

Обозначим $C_1 \cdot C_2 = C$ и $C_1 \cdot C_3 = D$.

Тогда $\vartheta = [C \cos(Kx) + D \sin(Kx)] e^{-aK^2 \tau}$.

Постоянные C , D и K определяются из начальных и граничных условий. D - из условий симметрии:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = [-C \cdot K \sin(Kx) + D \cdot K \cos(Kx)] e^{-aK^2 \tau}. \quad (3.7)$$

Поскольку рассматривается тепловой процесс, то при $x=0$: $K \neq 0$;

$K \cos(Kx) \neq 0$ и следовательно: $D=0$. Таким образом, $\vartheta = C e^{-aK^2 \tau} \cos(Kx)$. (3.8)

Слагаемое $C \cdot K \cdot \sin(Kx)$ должно быть отброшено, как не удовлетворяющее граничным условиям.

Значения $k = k_n$ найдём, используя граничные условия. На левой поверхности пластины $x = -\delta$. Подставим в граничные условия $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=-\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{x=-\delta}$

выражения (3.7) и (3.8): $C \cdot K \cdot e^{-aK^2 \tau} \sin(K\delta) = \frac{\alpha}{\lambda} C \cdot e^{-aK^2 \tau} \cos(K\delta)$.

При сокращении подобных получим $\text{ctg}(K\delta) = \frac{K\lambda}{\alpha}$.

Умножим числитель и знаменатель правой части уравнения на δ :

$$\text{ctg}(K\delta) = \frac{K\delta}{(\alpha \cdot \delta) / \lambda} = \frac{K \cdot \delta}{Bi}. \quad (3.9)$$

Обозначим $k\delta = \mu$. Тогда (3.9) перепишем: $\text{ctg}(\mu) = \mu / Bi$. (3.10)

Характеристическое (с постоянными коэффициентами) трансцендентное (не являющееся алгебраическим) уравнение (3.10) имеет для μ бесчисленное множество решений. Наиболее просто оно решается графическим путём.

Обозначим $\text{ctg}(\mu) = y_1$, а $\mu / Bi = y_2$. Построим графики этих функций.

График y_1 (на рис. 3.2) представляет собой котангенсоиду, являющуюся периодической функцией аргумента μ с периодом π . График y_2 - прямая, тангенс угла наклона которой к абсциссе равен $1/Bi$. Абсциссы точек пересечения этих графиков дают значения корней μ уравнения (3.10). Как видно из рисунка 3.2, уравнение (3.10) имеет бесчисленное множество корней

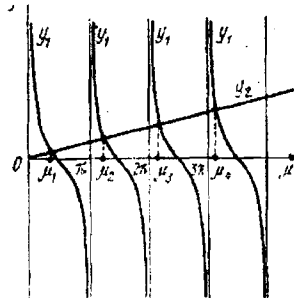


Рис. 3.2. Графический способ определения корней характеристического уравнения

$\mu_n (n = 1, 2, 3, \dots)$, удовлетворяющих уравнению (3.10) и граничному условию. Из (3.10) следует также, что значения μ_n , которые называются собственными числами, зависят от порядкового номера n и числа Bi . При $Bi = 0$ прямая $y_2 = \mu/Bi$ совпадает с осью ординат, тогда $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = \pi, \dots, \mu_n = (n-1)\pi$.

При $Bi = \infty$ прямая $y = \mu/Bi$ совпадает с осью абсцисс, тогда корни уравнения (3.10) будут равны $\mu_1 = \pi/2$; $\mu_2 = 3\pi/2, \dots, \mu_n = (2n-1)\pi/2$.

Метод разделения переменных позволяет получить совокупность частных решений ϑ , удовлетворяющих дифференциальному уравнению теплопроводности и граничным условиям. Каждому значению корня μ_n соответствует частное распределение температуры. Сумма частных решений является общим решением уравнения теплопроводности:

$$\vartheta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (3.11)$$

где $t = \frac{\tau}{\delta^2}$ - критерий Фурье, имеющий смысл обобщенного времени; характеризует связь между скоростью изменения температурного поля, физическими свойствами и размерами тела.

Константа C_n - определяется из начальных условий. При $Fo = 0$ ($\tau = 0$):

$$\vartheta_0 = \vartheta(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\mu_n \frac{x\delta}{\delta}\right). \quad (3.12)$$

Умножим (3.12) на $\cos(\mu_m x)$ и проинтегрируем в пределах: $-\delta \leq x \leq \delta$:

$$\vartheta_0 \int_{-\delta}^{\delta} \cos(\mu_m x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_{-\delta}^{\delta} \cos(\mu_m x) \cos(\mu_n x) dx.$$

Используем свойство ортогональности тригонометрической функции. Для данного случая оно может быть записано в виде

$$\int_{-\delta}^{\delta} \cos(\mu_m x) \cos(\mu_n x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ \int_{-\delta}^{\delta} \cos^2(\mu_n x) dx & \text{при } m = n \end{cases}, \quad (3.13)$$

при $m = n$ (3.13) имеет вид

$$\int_{-\delta}^{\delta} \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx = \delta \left(\frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} + 1 \right).$$

При этом C_n из (3.13) становится равным:

$$C_n = \frac{\vartheta_0 \int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx}{\int_{-\delta}^{\delta} \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx} = \frac{\vartheta_0 \frac{2\delta}{\mu_n} \sin \mu_n}{\delta \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} \right)} = \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}. \quad (3.14)$$

Подставив значение C_n в (3.11), получим уравнение распределения температур в симметрично охлаждаемой однородной пластине:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{\alpha \tau}{\delta^2}}. \quad (3.15)$$

В безразмерной форме уравнение (3.15) запишется как:

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{t(x, \tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (3.16)$$

$$\text{где } A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)}.$$

Уравнение (3.16) действительно и для случая прогрева пластины.

Для этого необходимо θ рассчитывать как: $\theta_{нагр} = 1 - \theta_{охл} = \frac{t(x, \tau) - t_0}{t_{ж} - t_0}$.

Так как $\cos(\mu_n x/\delta)$ - величина ограниченная, а $\exp(-\mu_n^2 Fo)$ - величина быстро убывающая, то при $Fo \geq 0,25$ ряд становится быстро сходящимся и может быть заменен только первым членом. В этом случае **распределение температуры в пластине** рассчитывается как:

$$\vartheta = A_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3.17)$$

Область вырождения функции (3.16) ($Fo \geq 0,25$) в (3.17) называют **регулярным тепловым режимом**.

При заданных координатах x искомая температура θ есть функция критериев Bi и Fo : $\theta = f(Bi, Fo)$. (3.18)

Для практических расчетов температуры в центре и на поверхности пластины обычно пользуются номограммами $\theta = f(Bi, Fo)$, приведенными на рис. 3.3 и рис. 3.4.

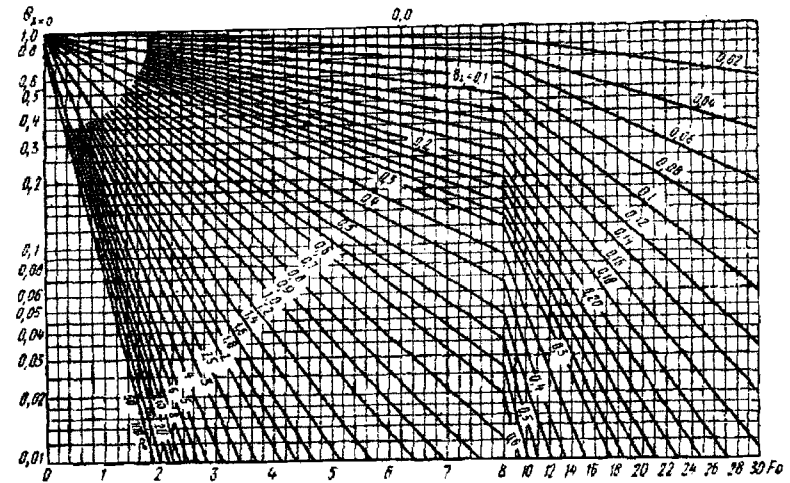


Рис. 3.3. Зависимость безразмерного перепада температур от чисел Фурье и Био для середины пластины

Пользуясь этими диаграммами, можно выполнить следующие расчеты:

1. Определить время охлаждения $Fo = \frac{a \cdot \tau}{\delta^2}$ до заданной температуры $\theta_{x=\delta}$

или $\theta_{x=0}$ - по известным условиям теплоотдачи на поверхностях;

2. Определить температуру через заданное время;

3. Определить интенсивность теплоотдачи на поверхностях при заданных Fo и θ .

При $Bi \rightarrow \infty$; $t_c = t_{ж}$; $\theta_{x=\delta} = 0$ такие условия обеспечивают $Bi \geq 100$. Тогда

$$\theta_{x=0} = \frac{4}{\pi} e^{-Fo \left(\frac{\pi^2}{4} \right)}, \quad (3.19)$$

$$\tau = \frac{4\delta^2}{\pi^2} \frac{1}{a} \ln \left(\frac{4}{\pi \theta_{x=0}} \right). \quad (3.20)$$

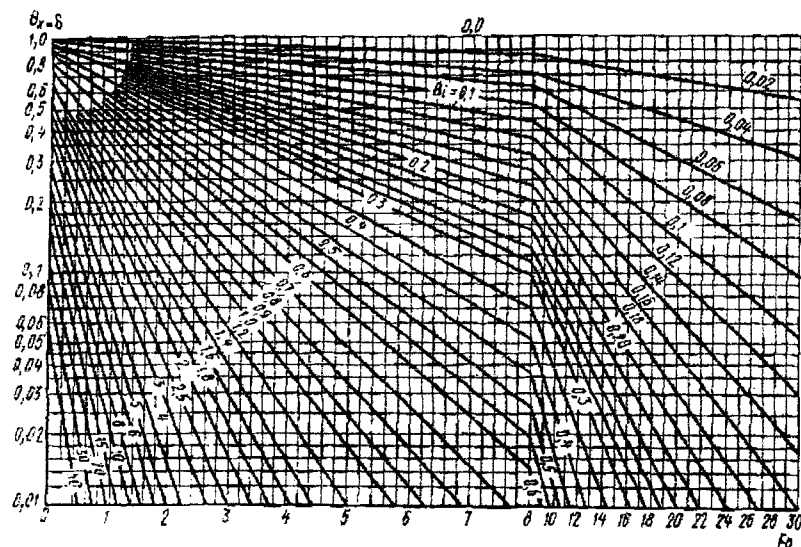


Рис. 3.4. Зависимость безразмерного перепада температур от чисел Фурье и Био для поверхности пластины

При $Bi \rightarrow 0$, когда внутреннее термическое сопротивление мало по сравнению с термическим сопротивлением на поверхности, температуры по толщине пластины распределяются равномерно: $\theta = \cos \left(\sqrt{Bi} \frac{x}{\delta} \right) e^{-Bi}$ (3.21)

Безразмерные температуры поверхности и оси пластины практически равны.

Для определения расхода теплоты за произвольный промежуток времени на охлаждение (нагревание) пластины пользуются уравнением вида:

$$Q = C \cdot \rho (t_0 - t_{\infty}) (1 - \bar{\theta}), \quad (3.22)$$

где $\bar{\theta}$ - средняя температура по толщине пластины определяется по уравнению при $Fo \geq 0,25$: $\bar{\theta} = B \cdot e^{-\mu^2 Fo}$,

где коэффициент $B = \frac{2Bi}{\mu_1^2 (Bi^2 + Bi + \mu_1^2)}$ на практике находится по графику, приведенному на рис. 3.5.

Все принципиальные выводы о влиянии Bi на температурные поля, сделанные для неограниченной пластины, остаются в силе и для случая охлаждения бесконечного цилиндра. При $Fo \geq 0,25$ для практических расчетов

можно использовать зависимость для расчета температуры на поверхности цилиндра:

$$\theta_{r=r_n} = A_1 \cdot I_0(\mu_1 R) e^{-\mu^2 Fo}, \quad (3.23)$$

где $R = r/r_n$ - безразмерный радиус $0 < R < 1$; $I_0(\mu_1)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка:

$$I_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2} \right)^{p+2n}}{\Gamma(n+1) \Gamma(p+n+1)}$$

Для оси цилиндра:

$$\theta_{r=0} = A_1 e^{-\mu^2 Fo}. \quad (3.24)$$

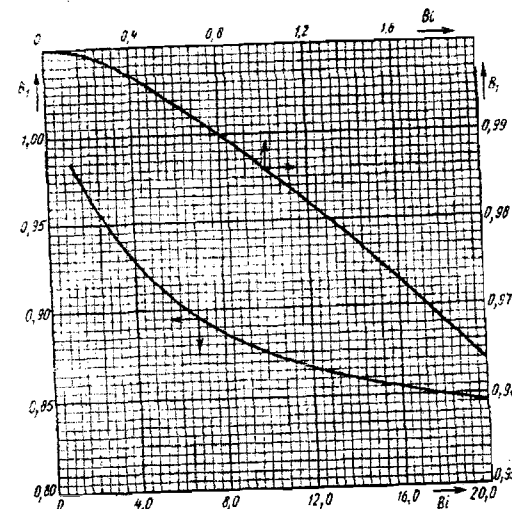


Рис. 3.5. Зависимость между коэффициентом B и критерием Bi для неограниченной пластины

Для практического определения температур используют номограммы, аналогичные приведенным на рис. 3.3 и 3.4.

Изменение количества теплоты тела за время τ определяется зависимостью:

$$Q = c \cdot \rho (g_0 - \bar{g}), \quad (3.25)$$

где средняя относительная температура цилиндра $\bar{g}$ для $Fo \geq 0,25$ определяется как:

$$\bar{g} = B \cdot \exp(-\mu^2 Fo), \quad (3.26)$$

где $B = \frac{4Bi}{\mu_1^2(\mu_1^2 + Bi^2)}$, или определяемый по номограммам, аналогично рис. 3.5.

Решая уравнение теплопроводности шара совместно с краевыми условиями, получим уравнение для расчета безразмерной температуры при

$$Fo \geq 0,25: \quad \theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{2Bi\sqrt{\mu_1^2 - (Bi-1)^2}}{\mu_1^2 + Bi^2 - Bi} \frac{\sin \mu_1 R}{\mu_1 R} e^{-\mu_1^2 Fo}. \quad (3.27)$$

Средняя температура шара определяется как:

$$\bar{\vartheta} = B \cdot \exp(-\mu_1^2 Fo), \quad (3.28)$$

где

$$B = \frac{6Bi}{\mu_1^2(\mu_1^2 + Bi^2 - Bi)}. \quad (3.29)$$

Температуры и величина B могут быть определены графически по номограммам с пластиной. Расход теплоты определяется уравнением:

$$Q = c \cdot \rho (\vartheta_0 - \bar{\vartheta}). \quad (3.30)$$

3.2. Нестационарное температурное поле пластины с внутренними источниками теплоты

Пусть неограниченная пластина толщиной 2δ с начальной температурой t_0 нагревается в среде с постоянной температурой t_{∞} . Внутри пластины действует источник теплоты $q_v = 0$. Найдем распределение температуры по толщине пластины. Дифференциальное уравнение теплопроводности для данного случая запишется как:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{q_v}{c \cdot \rho}. \quad (3.31)$$

$$\text{Начальное условие: } \vartheta(x; 0) = \vartheta_0 = (t_{\infty} - t_0). \quad (3.32)$$

$$\text{Граничные условия: } x = \delta; \quad \lambda \frac{d\vartheta}{dx} + \alpha(\vartheta_{\infty} - \vartheta) = 0; \quad (3.33)$$

$$\frac{d\vartheta(0; \tau)}{dx} = 0. \quad (3.34)$$

Решение задачи при поставленных условиях дает следующее уравнение температурного поля в пластине:

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{t_{\infty} - t}{t_{\infty} - t_0} = \frac{1}{2} Po \left(1 - \frac{x^2}{\delta^2} + \frac{2}{Bi} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{Po}{\mu_n^2} \right) A_n \cos \left(\mu_n \frac{x}{\delta} \right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (3.35)$$

где $Po = \frac{q_v \delta^2}{\lambda(t_{\infty} - t_0)}$ — критерий Померанцева.

При отсутствии внутренних источников теплоты $q_v = 0$ уравнение (3.35) превращается в уравнение для охлаждаемой однородной пластины. Постоянные μ_n и A_n рассчитываются также аналогично для однородной пластины без внутренних источников теплоты:

$$\text{ctg} \mu_n = \frac{\mu_n}{Bi};$$

$$A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}.$$

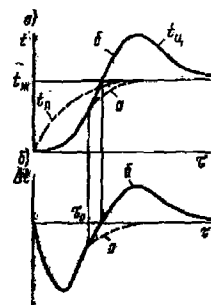
Средняя температура пластины находится по уравнению

$$\bar{\theta} = \frac{1}{3} Po \left(1 + \frac{3}{Bi} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{Po}{\mu_n^2} \right) B_n \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (3.36)$$

3.3. Нестационарное температурное поле в объеме, где осуществляются химические процессы

В системах, где осуществляются химические процессы, мощность внутренних источников теплоты непостоянна. Она связана с кинетикой химического процесса.

На рис. 3.6 показано изменение температуры на поверхности t_n и в центре t_{∞} пластины, нагреваемой в среде с постоянной температурой t_{∞} — при отсутствии q_v (пунктирные линии) и при наличии внутренних источников теплоты переменной мощности $q_v(\tau)$. В условиях экзотермической реакции, начиная с момента времени τ_0 , скорость изменения температуры в центре пластины будет превышать скорость нагрева при отсутствии источников теплоты. С момента времени τ_1 температура в центре пластины будет превышать температуру поверхности. Температуры будут



сближаться, когда химический процесс затухает и стремится к t_{∞} , когда реакция прекратится (рис. 3.6,а). На рис. 3.6,б показаны зависимости $\Delta t = t_n - t_{\infty} = f(\tau)$ для пластины при прогреве и при наличии реакции с экзотермическим эффектом.

В химических процессах выделяющееся количество теплоты пропорционально количеству прореагировавшего вещества. Степень превращения вещества определяется соотношением

$$\alpha = C_{\tau} / C_0 = \Delta H_{\tau} / \Delta H, \quad (3.37)$$

где C_{τ} и C_0 — концентрации исходного соединения к моменту τ и в начале реакции; ΔH_{τ} и ΔH — количество теплоты, выделенное (поглощенное) к моменту τ реакции и тепловой эффект реакции.

(а) и с внутренними источниками теплоты (б) уравнение кинетики химической реакции 1-го порядка имеет вид:

$$\alpha = 1 - e^{-k\tau}, \quad (3.38)$$

где k — константа скорости реакции; τ — время реакции.

Количество теплоты, выделяющееся за интервал времени τ реакции определяется соотношением:

$$q_v = q_0 e^{-k\tau}, \quad (3.39)$$

где $q_0 = k \cdot \Delta H$ — величина, постоянная для данной химической реакции.

Уравнение теплопроводности для реакции первого порядка запишется в виде

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{q_0 \cdot e^{-k\tau}}{c \cdot \rho}. \quad (3.40)$$

Решение уравнения (3.40) для неограниченной пластины с начальной температурой $t_{ж}$, полученное методом интегрального преобразования Лапласа, имеет вид:

$$\theta = t(x, \tau) - t_{ж} = \frac{q_0}{c \cdot \rho} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 Fo} \left[\frac{e^{-Fo(k_i - \mu_n^2)} - 1}{\mu_n^2 \frac{a}{\delta^2} - k} \right], \quad (3.41)$$

где $k = \frac{k \cdot R^2}{a}$ – кинетическое число; $A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}$; μ_n – корни уравнения $\sin \mu_n = \mu_n Bi$, как и для обычной пластины.

Для пластины $x = 0$ при $Fo \geq 0,25$ с достаточной для расчетов точностью можно написать

$$\theta(0, \tau) = \frac{(t_0 - t_{ж}) C \cdot \rho}{\Delta H} = K_f \left[\frac{A_1 e^{k_i Fo} - e^{-\mu_1^2 Fo}}{\mu_1^2 - k_i} \right]. \quad (3.42)$$

Как видно из уравнения (3.42), температура в химических системах определяется не только числами Fo и Bi , но и кинетическими характеристиками химического процесса.

3.4. Теплопроводность тел, образованных пересечением пластин

Вопросы теории теплопроводности при охлаждении (нагревании) тел конечных размеров решаются в соответствии с теоремой о перемножении решений. Согласно этой теореме при наличии решений системы уравнений теплопроводности для двух неограниченных пластин:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial t(y, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(y, \tau)}{\partial y^2};$$

температура $t(x, y, \tau)$ в любой точке оси симметрии неограниченного прямоугольного стержня определяется как произведение этих двух функций:

$$t(x, y, \tau) = t(x, \tau) \cdot t(y, \tau). \quad (3.43)$$

Если рассматривать параллелепипед как тело, образованное пересечением трёх неограниченных пластин, то **безразмерная температура в точке параллелепипеда** с координатами x, y, z может быть определена как произведение усредненных температур для трёх пластин: $\bar{\theta} = \bar{\theta}_1 \cdot \bar{\theta}_2 \cdot \bar{\theta}_3$. (3.44)

Для **цилиндра конической длины безразмерная температура** определяется как произведение решений для бесконечного цилиндра и неограниченной пластины, пересекающей цилиндр: $\bar{\theta}_4 = \bar{\theta}_1 \cdot \bar{\theta}_2$. (3.45)

Теоремой о перемножении решений пользуются и при определении температуры в телах более сложных пересечений. Так **средняя температура куба** определяется как: $\bar{\theta}_x = \bar{\theta}_1^3$. (3.46)

Следует отметить, что для использования данной методики необходимо, чтобы начальные условия для составляющих тел в результате умножения воспроизводили начальное условие для рассматриваемого тела, а граничные условия были однородны.

3.5. Регулярный режим процессов теплопроводности

Анализ решений дифференциального уравнения теплопроводности, полученных в виде ряда, показывает, что с ростом времени они все представляют собой быстро сходящийся ряд. Поэтому при $Fo \geq 0,25$ используют для расчётов только первый член ряда, например, для неограниченной пластины:

$$\theta = A_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_1^2 Fo} \quad \text{или} \quad \theta = A \cdot P \cdot e^{-m\tau}, \quad (3.47)$$

где A – постоянная, определяемая начальным распределением температуры, в теле; $P = \cos(\mu_1 x / \delta)$ – функция, определяемая координатами и Bi ; $m = \mu_1^2 \frac{a}{\delta^2}$ – темп регулярного режима, $\mu = k \cdot \delta$.

Нестационарный процесс теплопроводности, описываемый уравнением (3.47), называется **регулярным тепловым режимом**.

Прологарифмируем (3.47). Получим

$$\ln \theta = \ln(A \cdot P) - m\tau \quad \text{или} \quad \ln \theta = -m \cdot \tau + C(x, y, z). \quad (3.48)$$

Из уравнения (3.48) следует, что логарифм избыточной температуры от времени

относительной температуры – линейная функция времени, что справедливо для любой точки тела. На рис. 3.7 показано изменение температуры в точках x_1 и x_2 при охлаждении тела. Автономность относительной температуры во времени – характерная особенность регулярного режима.

Продифференцировав уравнение (3.48), получим

$$m = -\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \lg \varphi, \quad [1/c]. \quad (3.49)$$

Из уравнения (3.49) видно, что темп регулярного режима охлаждения (нагрева) не зависит ни от координат, ни от времени, представляет собой относительную скорость изменения температуры и в любой точке тела остаётся постоянным. **Темп регулярного режима** определяется геометрической формой, размерами тела, его физическими свойствами и условиями теплообмена на поверхности тела.

При $Bi \rightarrow \infty$, m пропорционален a :

$$m_{\infty} = \mu_1^2 \frac{a}{\delta^2} \quad \text{или} \quad a = k \cdot m_{\infty}, \quad (3.50)$$

где k – коэффициент формы, зависящий от геометрии форм и размеров тела и равен:

$$a) \text{ для параллелепипеда со сторонами } 2\delta_1; 2\delta_2; 2\delta_3$$

$$k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2\delta_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\delta_2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\delta_3}\right)^2}; \quad (3.51)$$

$$b) \text{ для цилиндра длиной } l \text{ и радиусом } r_0$$

$$k = \frac{1}{(2,405/r_0)^2 + (\pi/l)^2}; \quad (3.52)$$

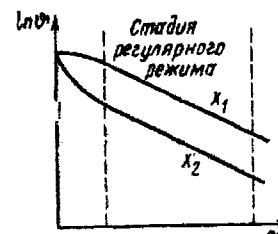


Рис. 3.7. Зависимость логарифма избыточной температуры от времени

в) для шара радиусом r_0 :

$$k = \frac{1}{(\pi/r_0)^2}. \quad (3.53)$$

3.6. Численные методы решения задач теплопроводности.

Метод конечных разностей

Задачи теплопроводности для тел сложной формы или при сложных краевых условиях не всегда удаётся решить аналитически. Метод конечных разностей позволяет решить практически любую задачу теплопроводности. Сущность метода состоит в замене непрерывной функции $t(x, \tau)$ сеточной функцией, определенной в дискретных точках, соответствующих дискретным значениям аргументов x, τ , которые задаются с некоторым шагом. Совокупность этих дискретных значений называется **сеткой**. Если шаги разбивки x и τ постоянными, то **сетка** называется **равномерной**.

Дифференциальный оператор уравнения теплопроводности заменяют его **сеточным** или **разностным** аналогом, который содержит значения сеточной функции в нескольких узлах сетки.

Для неограниченной пластины дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (3.54)$$

Заменим дифференциалы в уравнении (3.54) на их сеточные аналоги. Для этого заменим непрерывную координату x сеткой с шагом $\Delta x (x_i = i \cdot \Delta x)$, а время τ сеткой с шагом $\Delta \tau (\tau = j \cdot \Delta \tau)$. Рассмотрим точку сетки с координатами $i = n, j = k$. При этом $t_{n,k}$ означает температуру в пространственной точке $x = n \cdot \Delta x$ в момент времени $\tau = k \cdot \Delta \tau$. Заменим производные температуры в (3.54) разностными (сеточными) выражениями. Тогда в простейшем варианте

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \approx \frac{t_{(k+1),n} - t_{k,n}}{\Delta \tau}; \quad \frac{\partial t}{\partial x} \approx \frac{t_{k,(n+1)} - t_{k,n}}{\Delta x}; \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{t_{k,n} - t_{k,(n-1)}}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{t_{k,(n+1)} - t_{k,n}}{\Delta x} - \frac{t_{k,n} - t_{k,(n-1)}}{\Delta x} \right] = \frac{t_{k,(n+1)} - 2t_{k,n} + t_{k,(n-1)}}{\Delta x^2}.$$

Подставим полученные выражения производной от температуры в уравнение теплопроводности (3.54):

$$\frac{t_{(k+1),n} - t_{k,n}}{\Delta \tau} = \frac{a}{\Delta x^2} [t_{k,(n+1)} - 2t_{k,n} + t_{k,(n-1)}]. \quad (3.55)$$

Уравнение (3.55) является **разностным аналогом уравнения теплопроводности**. Решим (3.55) относительно $t_{(k+1),n}$:

$$(t_{(k+1),n} - t_{k,n}) = \frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} [t_{k,(n+1)} - 2t_{k,n} + t_{k,(n-1)}]$$

$$t_{(k+1),n} = \frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} [t_{k,(n+1)} + t_{k,(n-1)}] + \left(1 - \frac{2a \Delta \tau}{\Delta x^2}\right) t_{k,n}. \quad (3.56)$$

Уравнение (3.56) является решением сеточного уравнения (3.55). Оно устанавливает связь между искомой температурой в точке n и температурами в предыдущий расчетный интервал времени k в соседних узлах сетки $(n-1)$

и $(n+1)$. Выбор значений $\Delta \tau, \Delta x$ должен определяться по условию устойчивости

$$\frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.57)$$

обеспечивающему положительность коэффициента при $t_{n,k}$ в уравнении (3.56).

Уравнение (3.54) описывает нестационарное температурное поле в бесконечной пластине. При граничных условиях третьего рода температуры поверхностей пластины определяются условиями теплообмена:

$$\alpha(t_{ж} - t_{c,0}) = \frac{\lambda}{\Delta x} (t_{c,0} - t_{c,1}). \quad (3.58)$$

Температура на поверхности пластины

$$t_{c,0} = \frac{\frac{\alpha \cdot \Delta x}{\lambda} t_{ж} + t_{c,1}}{\frac{\alpha \cdot \Delta x}{\lambda} + 1}. \quad (3.59)$$

В каждом расчетном интервале времени $\Delta \tau$ уравнения (3.55) и (3.56) решаются столько раз, сколько интервалов (Δx) содержится в пространственной сетке. **Разностная схема** [уравнения (3.15)] называется **явной**, поскольку температуры t_{ij+1} определяются по известным значениям t_{ij} в предыдущий расчетный момент времени. Точность расчета увеличивается при уменьшении $\Delta \tau$ и Δx .

3.7. Исследование процессов теплопроводности методом аналогии (электротепловая аналогия)

Сходство аналогичных явлений заключается в одинаковом характере протекания процессов. Отдельные тепловые и электрические явления описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями и условиями однозначности, хотя физическое содержание и размерность входящих в них величин различны:

$$dQ = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n_m} dF_m; \quad (3.60)$$

$$dI = -\sigma \frac{\partial U}{\partial n_n} dF_n, \quad (3.61)$$

где dQ и dI — элементарные потоки теплоты и электричества, прошедшие в единицу времени через площадки dF_m и dF_n в направлении нормалей n_m и n_n ; t и U — температура и электрический потенциал; λ и σ — коэффициенты теплопроводности и электропроводности.

Для двумерной задачи уравнения теплопроводности и электропроводности имеют вид:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y_m^2} = 0; \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_n^2} = 0, \quad (3.63)$$

то есть уравнения имеют одинаковую структуру.

Аналогичные явления должны протекать в геометрически подобных системах. Задаемся граничными условиями третьего рода:

$-\lambda \text{grad } t = \alpha \Delta t$; $-\text{grad } t = \Delta t / (\lambda \alpha) = \Delta t / l_m$, где $l_m = \lambda / \alpha$; $-\text{grad } U = \Delta U / l_s$.

Для установления количественной связи между аналогичными физическими величинами математические описания приводят к безразмерной форме. Для этого в качестве масштаба для температурного напора принимают величину Δt_0 ; для электропотенциала - ΔU_0 ; для линейных размеров - сходственные линейные отрезки l_{m0} и l_{s0} . Тогда

$$x_m / l_{m0} = X_m; \quad y_m / l_{m0} = Y_m; \quad l_m / l_{m0} = L; \quad \Delta t / \Delta t_0 = \theta.$$

Отсюда получаем отношения: $x_m = X_m l_{m0}$; $y_m = Y_m l_{m0}$; $\Delta t = \Delta t_0 \theta$.

Аналогичные соотношения будут иметь место для величин электрического поля. После подстановки этих соотношений в дифференциальные уравнения электропроводности, последние будут иметь вид:

$$l_{m0} \nabla^2 (dx_m^2 + dy_m^2) = 0 \quad \text{или} \quad d^2 \theta / dx_m^2 + d^2 \theta / dy_m^2 = 0; \quad (3.64)$$

$$\Delta U_0 / l_{s0} (d^2 U / dx_s^2 + d^2 U / dy_s^2) = 0 \quad \text{или} \quad d^2 U / dx_s^2 + d^2 U / dy_s^2 = 0. \quad (3.65)$$

Тождественность приведенных уравнений имеет место при любом выборе сходственных масштабов для температуры и электропотенциала.

Граничные условия в безразмерном виде имеют вид:

$$\text{grad } \theta = \theta / L_m; \quad -\text{grad } U = U / L_s.$$

Уравнения тождественно одинаковы. Следовательно, решения безразмерных дифференциальных уравнений теплопроводности и электропроводности тождественно одинаковы при выполнении условия:

$$L_m = L_{s0} \quad \text{или} \quad l_m / l_{m0} = l_s / l_{s0}. \quad (3.66)$$

Поскольку $l_m = \lambda / \alpha$, то получим зависимость для выбора линейных размеров электрических моделей явления: $l_s = l_{s0} / l_{m0} \lambda / \alpha$.

$$\text{При } l_{s0} = l_{m0}, \quad l_s = \lambda / \alpha.$$

$$\text{При } \alpha = \text{const} \quad \text{и} \quad \lambda = \text{const}, \quad \text{тогда} \quad l_s = \text{const}.$$

При выполнении условия (3.66) безразмерная температура и безразмерное электрическое напряжение в сходственных точках систем имеют численно одинаковые значения: $\theta_1 = U_1$ или $\Delta t_1 / \Delta t_0 = \Delta U_1 / \Delta U_0$;

$$\theta_2 = U_2 \quad \text{или} \quad \Delta t_2 / \Delta t_0 = \Delta U_2 / \Delta U_0;$$

$$\text{Тогда} \quad \Delta t_1 / \Delta U_1 = \Delta t_2 / \Delta U_2 = \dots = \Delta t_0 / \Delta U_0 = C_{mu} = \text{const}. \quad (3.67)$$

Соотношение (3.67) показывает, что при заданных условиях распределение температуры и электрического потенциала являются подобными.

Изменение теплового потока пропорционально изменению теплоемкости и температуры: $dQ = C_m (\partial t / \partial \tau_m) d\tau_m$.

Изменение электрического тока пропорционально емкости и изменению напряжения: $dI = C_s (\partial U / \partial \tau_s) d\tau_s$ - подобное уравнение.

В моделях теплоемкости заменяются соответствующими электрическими емкостями.

При разработке электрических моделей, имитирующих процессы теплопроводности, применяются два способа. В первом способе (рис. 3.8) - электрические модели повторяют геометрию тепловой системы и изготавливаются из материала с непрерывной проводимостью: тонкие листовые электропроводящие материалы или слои, нанесенные на пластинки, или

жидкие электролиты. Во втором способе (рис. 3.9) - применяются электрические модели с сосредоточенными параметрами процесса. В них тепловые системы заменяются моделирующими электрическими цепями. Свойства исследуемой системы сосредотачиваются в отдельных узловых точках, расположенных вдоль электрических цепей.

Таким образом исследуются распределения температурных полей внутри здания; внутри турбинных лопаток, котлоагрегатах и т.д.

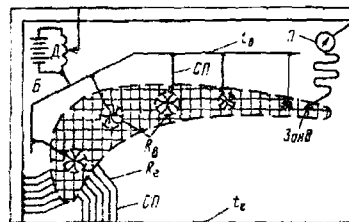
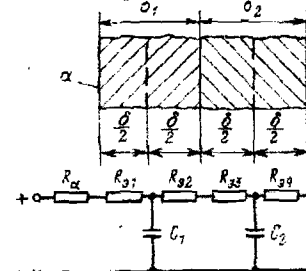


Рис. 3.8. Проволочная модель турбинной лопатки



ся динамическим коэффициентом вязкости μ [Па·с]. При $dw/dn = 1 \Rightarrow S = \mu$. В теплотехнике часто пользуются кинематическим коэффициентом вязкости $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, [м²/с]. У капельных жидкостей вязкость слабо зависит от давления, но резко уменьшается с повышением температуры. У газов вязкость увеличивается с повышением давления, так и температуры.

На теплоотдачу оказывает влияние сжимаемость жидкости или коэффициент сжатия тела: $\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_t$, [1/Па]. (4.1)

Изотермической сжимаемостью при постоянной температуре называют величину, представляющую собой относительное изменение плотности вещества при изменении давления. Для капельных жидкостей сжимаемостью можно пренебречь, но для газов он в 20000 раз выше, чем у жидкостей. Если скорость газа менее 1/4 скорости звука, то к нему можно применять законы несжимаемой жидкости.

Имеет значение для теплообмена тепловое расширение жидкости, которое оценивается температурным коэффициентом объемного расширения:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p, \quad [1/^\circ\text{K}], \quad (4.2)$$

представляющее собой относительное изменение объема при изменении температуры на один градус. Для жидкостей β мал. Для воды при температуре $t > 4^\circ\text{C}$ β может быть отрицательным.

Для идеального газа $\beta = 1/T$.

4.2. Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена

Для описания полей температур, скоростей и определения плотности теплового потока необходимо иметь соответствующий математический аппарат.

4.2.1. Уравнение энергии

Рассмотрим однородную и изотропную жидкость. Пусть ее физические параметры будут постоянны, а энергия деформации мала по сравнению с изменением внутренней энергии. Выделим в потоке жидкости неподвижный относительно координат элементарный параллелепипед с ребрами dx , dy и dz , представленный на рис. 4.1. Теплота через грани параллелепипеда переносится теплопроводностью и конвекцией, а также может выделяться внутренними источниками.

Вывод уравнения энергии, соответствующего принятым условиям, рассматривался ранее при выводе уравнения теплопроводности:

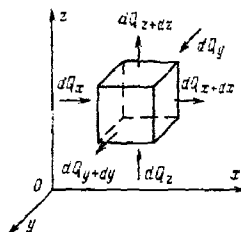


Рис. 4.1. Параллелепипед в потоке жидкости

$$\rho \frac{di}{d\tau} = -\text{div} \bar{q} + q_v, \quad (4.3)$$

где $\text{div} \bar{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$; ρ – плотность жидкости. У капельных жидкостей она слабо зависит от температуры. У газов плотность с повышением температуры значительно уменьшается.

Поскольку конвекция теплоты всегда сопровождается теплопроводностью, так как при движении жидкости или газа происходит соприкосновение частиц с различными температурами, то конвективный теплообмен можно рассчитать по уравнению $\bar{q} = q_{\text{теп}} + q_{\text{конв}} = -\lambda \nabla t + \rho \cdot w \cdot i$. (4.4)

Согласно (4.4) проекции плотности теплового потока q на координатные оси Q_x, Q_y, Q_z : $q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} + \rho \cdot w_x \cdot i$; $q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} + \rho \cdot w_y \cdot i$; $q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} + \rho \cdot w_z \cdot i$.

Подставив проекции в (4.3), получим

$$\rho \frac{di}{d\tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) - \rho \left(w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} \right) - \rho \cdot i \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + q_v.$$

Для несжимаемых жидкостей ($\rho = \text{const}$): $\text{div} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$.

$$\text{Тогда } \frac{di}{d\tau} + w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{\rho}.$$

Так как $i = \int C_p \cdot dt$, то

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{\rho \cdot C_p}. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) является **уравнением энергии**. Многочлен в левой части этого уравнения – полная производная от температуры по времени:

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{dz}{d\tau}, \quad \text{где } \frac{\partial t}{\partial \tau} - \text{локальная производная по } t,$$

$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}$ – характеризует изменение температуры по потоку, т.е. это конвективная производная по t .

Пользуясь обозначением оператора Лапласа, уравнение (4.5) запишем в виде

$$\frac{Dt}{d\tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{\rho \cdot C_p}.$$

При $w_x = w_y = w_z = 0$ уравнение (4.5) превращается в уравнение теплопроводности. Как видно, температурное поле в движущейся жидкости зависит от скорости. Поэтому в систему, описывающую процесс конвективного теплообмена, необходимо добавить уравнение движения.

4.2.2. Уравнение движения

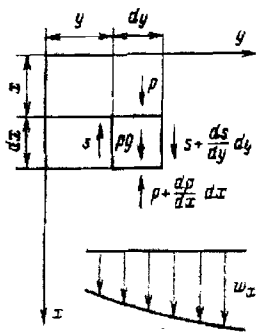


Рис. 4.2. Элементарный объем в потоке жидкости

Выделим в потоке жидкости элементарный объем с размерами ребер dx, dy и dz (рис. 4.2). Скорость потока изменяется только в направлении оси y . Вывод уравнения движения базируется на втором законе Ньютона $F=m \cdot a$.

На элементарный объем действуют следующие силы: сила тяжести, равнодействующая сил давления и равнодействующая сил трения. Найдем проекции этих сил на ось OX .

1. Проекция силы тяжести на ось OX равна произведению проекции ускорения свободного падения g_x на массу элемента: $df_1 = \rho \cdot g_x \cdot dv$.

2. Так как на верхней грани элемента давление жидкости равно p , то на площадку $dy \cdot dz$ действует сила $p \cdot dy \cdot dz$. На нижней грани давление равно $p + \frac{dp}{dx} dx$. Сила, действующая на эту грань, определится как: $-\left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) dy \cdot dz$. Знак “-” указывает противоположность направления действия силы направлению движения потока. Тогда равнодействующая сил давления равна $df_2 = -\frac{dp}{dx} dv$.

3. Вследствие изменения скорости только в направлении оси OY , сила трения возникает на боковых гранях элементарного объема $dx \cdot dz$. Около левой грани скорость движения частиц жидкости меньше, чем в центре элемента. Поэтому на участке «у» сила трения направлена против движения и равна $S \cdot dx \cdot dz$. У правой грани скорость частиц потока больше, чем в самом элементе. Поэтому на участке «у+dy» сила трения направлена в сторону движения.

Равнодействующая сил трения $df_3 = \left(S + \frac{dS}{dy} dy\right) dx \cdot dz - S dx \cdot dz = \frac{dS}{dy} dv$.

Так как $S = \mu \left(\frac{dw_x}{dy}\right)$, то $df_3 = \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} dv$.

Проекция на ось OX , равнодействующих всех сил, приложенных к объему, определяется как сумма df_1, df_2, df_3 : $df = \left(\rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}\right) dv$. (a)

Согласно второму закону механики, эта равнодействующая сила, учитывающая силы инерции, равна $df = \rho \frac{dw_x}{d\tau} dv$. (б)

Тогда $\rho \frac{dw_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}$.

В случае трёхмерного движения несжимаемой жидкости с постоянными физическими параметрами скоростное поле описывается системой уравнений движения в проекциях на оси OX, OY и OZ :

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dw_x}{d\tau} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{dw_y}{d\tau} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{dw_z}{d\tau} &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Уравнения системы (4.6) называются уравнениями Навье-Стокса. Поскольку составляющие скорости w_x, w_y, w_z изменяются во времени и пространстве, то член левой части уравнений (4.6) должен представлять собой полную производную от скорости по времени:

$$\frac{Dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}. \quad (4.7)$$

Аналогично для других осей.

В векторной форме уравнения системы (4.6) запишутся как:

$$\rho \frac{D\vec{w}}{d\tau} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w}. \quad (4.8)$$

Известно, что $\rho = \rho_0(1 - \beta \cdot \vartheta)$, где β - коэффициент объемного расширения; $\vartheta = t - t_0$; t_0 - фиксированная температура. Тогда уравнение движения можем записать в виде

$$\frac{D\vec{w}}{d\tau} = -\vec{g} \cdot \beta \cdot \vartheta - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \vec{w}. \quad (4.9)$$

Так как в систему уравнений, описывающих процесс теплообмена, вошла неизвестная величина Δp - давление, то система оказалась незамкнутой. Поэтому необходимо добавить уравнение сплошности.

4.2.3. Уравнение сплошности

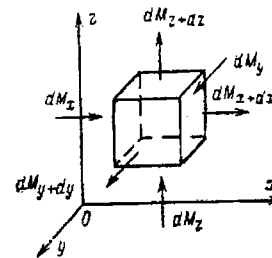


Рис. 4.3 Параллелепипед в потоке неподвижной жидкости

Выделим в потоке движущейся жидкости неподвижный параллелепипед со сторонами dx, dy и dz . Подсчитаем массу жидкости, протекающей через него в направлении осей OX, OY, OZ за время $d\tau$ (рис. 4.3).

В направлении оси OX в элементарный объем втекает масса жидкости

$$dM_x = \rho \cdot w_x \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau, \quad (a)$$

где $\rho \cdot w_x$ - количество массы, протекающей в единицу времени через единицу грани $dy \cdot dz$. Из противоположной грани вытекает количество

жидкости $dM_{x+dx} = \rho \cdot w_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau$. Взяв два первых члена ряда разложения, получим, что масса жидкости dM_{x+dx} , вытекающая из объема в направлении оси OX : $dM_{x+dx} = \left[\rho w_x + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx \right] dy dz d\tau$. (б)

Вычтем (а) из (б). Получим излишек массы жидкости, вытекающей из объема в направлении оси OX : $dM_{x+dx} - dM_x = \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dv d\tau$. (в)

Аналогично по направлениям OY и OZ :

$$dM_{y+dy} - dM_y = \frac{\partial(\rho \cdot w_y)}{\partial y} dv \cdot d\tau ; \quad (г)$$

$$dM_{z+dz} - dM_z = \frac{\partial(\rho \cdot w_z)}{\partial z} dv \cdot d\tau . \quad (д)$$

Суммируя (в), (г) и (д), получим полный избыток массы, вытекающей из объема. Он обусловлен изменением плотности жидкости в объеме dv и равен изменению массы объема во времени $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} dv d\tau$. Сократив сумму на dv и $d\tau$ и перенося все члены в правую часть равенства, получим **дифференциальное уравнение сплошности или неразрывности**

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0 . \quad (4.10)$$

Для несжимаемых жидкостей при $\rho = const$:

$$\frac{\partial(w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(w_z)}{\partial z} = 0 \quad (4.11)$$

или $div \vec{w} = 0$. (4.12)

4.3. Основы теории подобия и размерностей

Решение системы дифференциальных уравнений теплообмена средствами математического анализа связано с большими трудностями, иногда непреодолимыми. Поэтому такие задачи решаются либо численными методами с применением ЭВМ, либо экспериментальным путем. Вследствие этого обобщение полученных решений ограничено. При изменении аргументов требуется новое решение. Преодолеть эти трудности позволяет теория подобия.

4.3.1. Условия однозначности

Для выделения конкретно рассматриваемого процесса из бесчисленного множества, описываемого полученными дифференциальными уравнениями, к ним необходимо добавить **условия однозначности**. Они состоят из:

- 1) геометрических условий;
- 2) физических условий;
- 3) временных или начальных условий;
- 4) граничных условий.

Система дифференциальных уравнений в совокупности с условиями однозначности представляет собой математическую формулировку краевой задачи, которая является основой теории подобия.

Пусть поверхность твердого тела размером l_0 омывается жидкостью с постоянными вдали от тела температурой t_0 и скоростью w_0 . Поверхность тела имеет температуру t_n ; $t_n > t_0$. Физические параметры жидкости постоянны. Процесс стационарный и описывается уравнениями энергии, движения и сплошности. Граничные условия процесса:

1) вдали от тела ($y = \infty$) - $\vartheta = \vartheta_0 = 0$; $w_x = w_0$; $w_y = 0$; $\vartheta = t - t_0$, где t - текущая температура жидкости;

2) на поверхности тела ($y = 0$; $0 \leq X \leq l_0$; $-\infty \leq Z \leq +\infty$) -

$$\vartheta = \vartheta_c = t_c - t_0 = const; w_x = w_y = w_z = 0 .$$

Различают три вида величин:

- независимые переменные: координаты x, y ;
- зависимые переменные: v, w_x, w_y - определяются значениями независимых переменных при задании величин, входящих в условие однозначности;
- постоянные величины: $w_0, t_0, l_0, \nu, \alpha, g, \beta, \dots$, - задаются условиями однозначности и не являются функцией независимых переменных.

Для приведения к безразмерному виду граничных условий выбираем масштабы приведения: l_0, w_0, ϑ_c .

Обозначим безразмерные величины:

$$X = \frac{x}{l_0}; Y = \frac{y}{l_0}; W_x = \frac{w_x}{w_0}; W_y = \frac{w_y}{w_0}; \theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_c} .$$

Тогда граничные условия в безразмерном виде:

1) вдали от тела ($Y = \infty$) $\theta = \theta_0 = 0$; $W_x = 1$; $W_y = 0$;

2) на поверхности тела ($Y = 0$; $0 \leq X \leq 1$); $\theta = \theta_c = 1$; $W_x = W_y = 0$.

Из граничных условий в безразмерном виде следует, что при w_0, t_c, t_0 , имеющих различные условные значения, безразмерные величины θ_0, θ_c, W имеют вполне конкретные значения.

4.3.2. Условия подобия и вывод ее основных критериев

Теория подобия - это учение о подобных явлениях. Как известно, геометрические фигуры одинаковой формы подобны, если соответственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны.

Тогда
$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} = \frac{l''}{l'} = C_l ,$$

где x, y, z, l - координаты сходственных точек и сходственные отрезки. В этом случае C_l - константа геометрического подобия.

Понятие подобия может быть распространено на любые физические явления. Однако физические явления могут рассматриваться как подобные, если они относятся к классу явлений одной и той же природы.

По этому признаку в физическом подобии выделяют:

- **кинематически подобные процессы**, если подобны движения потоков жидкости;
- **динамическое подобие** означает подобие силовых полей;
- **тепловое подобие** означает подобие температурных полей и тепловых потоков.

Обязательной предпосылкой физического подобия является геометрическое подобие. Сопоставлять можно только **однородные величины** (размерность которых и смысл одинаковы) в **сходственных точках** пространства и в **сходственные моменты времени**. Сходственными точками называются

точки, удовлетворяющие условию геометрического подобия $\frac{l''}{l'} = C_l$. Тогда при кинематическом подобии имеем подобие полей скоростей и равенство $\frac{w''}{w'} = C_w$. При динамическом подобии - подобие полей давления: $\frac{p''}{p'} = C_p$. При

тепловом - подобие температурных полей $\frac{t''}{t'} = C_t$. Значения констант подобия C показывают, во сколько раз физические величины одной системы отличаются от тех же величин другой. Константы подобия C_w, C_p, C_t для подобных систем сохраняют одно и то же значение $C_w = idem; C_p = idem; C_t = idem$ в сходственные моменты времени. Два промежутка времени τ'', τ' называются сходственными, если они имеют общее начало отсчёта и связаны равенством $\frac{\tau''}{\tau'} = C_\tau = idem$.

Рассмотрим подобие двух систем, описываемых уравнениями энергии, движения и теплообмена на границе с теплообменной поверхностью. Эти системы должны удовлетворять трем условиям подобия:

- подобные явления должны быть качественно одинаковы, то есть они должны иметь одинаковую физическую природу, относиться к одному и тому же роду и описываться одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями, а величины, характеризующие подобие явлений, подобны, т.е. в сходственных точках и в сходственные моменты времени однородные величины φ'' одной системы и φ' другой системы пропорциональны - связаны константой подобия: $\varphi'' = C_\varphi \varphi'$;
- условия однозначности подобных процессов должны протекать в геометрически подобных системах и быть одинаковыми во всем, кроме числовых значений размерных постоянных, содержащихся в этих условиях;
- одноименные определяющие безразмерные переменные подобных процессов должны иметь одинаковое числовое значение.

Обозначим величины дифференциальных уравнений первой системы одним штрихом, второй - двумя штрихами. Первая система будет состоять из

уравнения энергии:

$$\frac{\partial t'}{\partial \tau'} + w'_x \frac{\partial t'}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial t'}{\partial y'} + w'_z \frac{\partial t'}{\partial z'} = a' \cdot \nabla^2 t' + \frac{q_v'}{c_p \cdot \rho'};$$

уравнения движения:

$$\frac{\partial w'_x}{\partial \tau'} + w'_x \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial w'_x}{\partial y'} + w'_z \frac{\partial w'_x}{\partial z'} = g'_x \cdot \beta' \cdot \vartheta' - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \nu' \cdot \nabla^2 w'_x;$$

уравнения теплообмена:

$$\alpha' \cdot \Delta t' = -\lambda' \frac{\partial t'}{\partial x'}.$$

(a)

Вторая система будет состоять из уравнений:

$$\frac{\partial t''}{\partial \tau''} + w''_x \frac{\partial t''}{\partial x''} + w''_y \frac{\partial t''}{\partial y''} + w''_z \frac{\partial t''}{\partial z''} = a'' \cdot \nabla^2 t'' + \frac{q_v''}{c_p \cdot \rho''};$$

$$\frac{\partial w''_x}{\partial \tau''} + w''_x \frac{\partial w''_x}{\partial x''} + w''_y \frac{\partial w''_x}{\partial y''} + w''_z \frac{\partial w''_x}{\partial z''} = g''_x \cdot \beta'' \cdot \vartheta'' - \frac{1}{\rho''} \frac{\partial p''}{\partial x''} + \nu'' \cdot \nabla^2 w''_x;$$

$$\alpha'' \cdot \Delta t'' = -\lambda'' \frac{\partial t''}{\partial x''}.$$

(б)

В соответствии со вторым условием подобия однородные величины должны быть подобны, т.е.

$$t''/t' = C_t, \quad \tau''/\tau' = C_\tau, \quad \omega''/\omega' = C_\omega, \quad l''/l' = C_l, \quad a''/a' = C_a, \quad \beta''/\beta' = C_\beta, \\ p''/p' = C_p, \quad \rho''/\rho' = C_\rho, \quad \nu''/\nu' = C_\nu, \quad \lambda''/\lambda' = C_\lambda \quad \text{и т. д.}$$

Выразим переменные второй системы через переменные первой и подставим в уравнения второй системы. Тогда

$$\frac{C_t}{C_\tau} \frac{\partial t'}{\partial \tau'} + \frac{C_w \cdot C_t}{C_l} \left(w'_x \frac{\partial t'}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial t'}{\partial y'} + w'_z \frac{\partial t'}{\partial z'} \right) = \frac{C_a \cdot C_t}{C_l^2} a' \cdot \nabla^2 t' + \frac{C_q}{C_p \cdot C_c} \frac{q_v'}{c_p \cdot \rho'};$$

$$\frac{C_w}{C_\tau} \frac{\partial w'}{\partial \tau'} + \frac{C_w^2}{C_l} \left(w'_x \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial w'_x}{\partial y'} + w'_z \frac{\partial w'_x}{\partial z'} \right) = C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta t} \cdot g'_x \cdot \rho' \cdot \Delta t' -$$

$$- \frac{C_p}{C_\rho \cdot C_l} \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{C_\nu \cdot C_w}{C_l^2} \nu' \cdot \nabla^2 w';$$

$$C_\alpha \cdot C_l \cdot \alpha' \cdot \Delta t' = C_\lambda \frac{C_l}{C_l} \left(-\lambda' \frac{\partial t'}{\partial x'} \right).$$

(в)

Для подобных систем уравнения должны быть тождественны. На этом основании уравнения системы (а) должны быть тождественны уравнениям системы (в).

Для этого необходимо, чтобы комплексы из констант подобия в уравнениях (в) сократились, т. е. должны быть равенства:

$$\frac{C_t}{C_\tau} = \frac{C_w \cdot C_t}{C_\ell^2} = \frac{C_a \cdot C_t}{C_\ell^2} = \frac{C_q}{C_\rho \cdot C_c}; \quad (4.13)$$

$$\frac{C_w}{C_\tau} = \frac{C_w^2}{C_\ell^2} = C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta t} = \frac{C_p}{C_\rho \cdot C_\ell} = \frac{C_v \cdot C_w}{C_\ell^2}; \quad (4.14)$$

$$C_a \cdot C_t = C_\lambda \frac{C_t}{C_\ell}. \quad (4.15)$$

Уравнения (4.13) – (4.15) – есть искомые условия подобия, которыми ограничивается произвольный выбор констант подобия.

Рассматривая члены соотношения (4.13) попарно, получим:

$$\frac{C_t}{C_\tau} = \frac{C_a \cdot C_t}{C_\ell^2} \text{ или } \frac{C_a \cdot C_\tau}{C_\ell^2} = 1; \quad (4.16)$$

$$\frac{C_w \cdot C_t}{C_\ell^2} = \frac{C_a \cdot C_t}{C_\ell^2} \text{ или } \frac{C_w \cdot C_\ell}{C_a} = 1; \quad (4.17)$$

$$\frac{C_a \cdot C_t}{C_\ell^2} = \frac{C_q}{C_\rho \cdot C_c} \text{ или } \frac{C_q \cdot C_\ell^2}{C_a \cdot C_t \cdot C_\rho \cdot C_c} = 1. \quad (4.18)$$

Из соотношения (4.14):

$$\frac{C_w}{C_\tau} = \frac{C_w^2}{C_\ell^2} \text{ или } \frac{C_w \cdot C_\tau}{C_\ell^2} = 1; \quad (4.19)$$

$$\frac{C_w^2}{C_\ell^2} = C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta t} \text{ или } \frac{C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta t} \cdot C_\ell^2}{C_w^2} = 1; \quad (4.20)$$

$$\frac{C_w^2}{C_\ell^2} = \frac{C_p}{C_\rho \cdot C_\ell} \text{ или } \frac{C_p}{C_w^2 \cdot C_\rho} = 1; \quad (4.21)$$

$$\frac{C_w^2}{C_\ell^2} = \frac{C_v \cdot C_w}{C_\ell^2} \text{ или } \frac{C_w \cdot C_\ell}{C_v} = 1. \quad (4.22)$$

$$\text{Из соотношения (4.15) } C_a \cdot C_t = C_\lambda \frac{C_t}{C_\ell} \text{ или } \frac{C_a \cdot C_\ell}{C_\lambda} = 1. \quad (4.23)$$

Подставим в уравнения (4.16) – (4.23) значения констант подобия, величины сгруппируем по индексам и получим условия подобия двух систем в новом выражении:

$\frac{a \cdot \tau}{\ell^2} = Fo = idem$ – **критерий Фурье**, характеризует связь между скоростью изменения температурного поля, физическими свойствами и размерами тела.

$\frac{w \cdot \ell}{a} = Pe = idem$ – **критерий Пекле**, является мерой отношения конвективного и молекулярного переносов теплоты в потоке.

$\frac{w \cdot \tau}{\ell} = Ho = idem$ – **критерий гомохронности**, характеризует скорость изменения поля скоростей при течении среды во времени.

$\frac{\Delta P}{\rho \cdot w^2} = Eu = idem$ – **критерий Эйлера**, характеризует подобие полей давления и является мерой отношения сил давления и инерционных сил.

$\frac{w \cdot \ell}{\nu} = Re = idem$ – **критерий Рейнольдса**, характеризует гидродинамический режим потока, являясь мерой отношения сил инерции и сил вязкого трения.

$\frac{\alpha \cdot \ell}{\lambda} = Nu = idem$ – **критерий Нуссельта**, характеризует интенсивность передачи теплоты конвекцией к интенсивности передачи теплоты теплопроводностью в слое толщиной l .

При делении $Pe/Re = \nu/a = Pr$ – **критерий Прандтля**, мера подобия температурных и скоростных полей в потоке.

Если (4.20) $\frac{g \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot \ell}{w^2}$ умножить на $Re^2 \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot \ell^3}{\nu^2} = Gr$ – **число Грасгофа**, характеризует подъемную силу, возникающую в жидкости из-за разности плотностей.

Так как $\beta \cdot \Delta t = \frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho_0}$, то можно записать более общую модификацию:

$$\frac{g \cdot \ell_0^3}{\nu^2} \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \right) = Ar - \text{число Архимеда. Для однородной среды при}$$

$\beta = const$ Ar идентичен Gr .

Безразмерные величины $\theta, W_x, W_y, X, Y, Nu, Re, Pe, Gr \dots$ можно рассматривать как новые переменные. Их можно поделить на:

- **независимые переменные** – безразмерные координаты X, Y – соответствуют поверхности теплоотдачи;
- **зависимые переменные** – θ, W_x, W_y, Nu – определяются значениями независимых переменных;

- **постоянные величины** – Re, Pe, Gr ; они заданы условиями однозначности и для конкретной задачи постоянны. Можно написать:

$$Nu = f_1(X, Y, Pr, Re, Gr) = F_1(X, Y, Pr, Re, Gr);$$

$$\theta = f_2(X, Y, Pr, Re, Gr) = F_2(X, Y, Pr, Re, Gr);$$

$$W_x = f_3(X, Y, Pr, Re, Gr) = F_3(X, Y, Pr, Re, Gr);$$

$$W_y = f_4(X, Y, Pr, Re, Gr) = F_4(X, Y, Pr, Re, Gr);$$

Приведенные уравнения называются **уравнениями подобия**. На основании этих уравнений безразмерные переменные делятся на:

- **определяемые** – числа, в которые входят искомые зависимые переменные: $\alpha, \vartheta, w_x, w_y, \theta, W_x, W_y, Nu$;

- **определяющие** – числа, составленные из независимых переменных и постоянных величин, входящих в условия однозначности: X, Y, Pr, Re, Gr .

Основные положения теории подобия формулируются в виде трех теорем.

1. Подобные между собой явления имеют одинаковые критерии подобия. Теорема устанавливает связь между константами подобия и позволяет выявить критерии подобия: запись дифференциальных уравнений должна быть одинаковой.

2. Условия однозначности подобных процессов должны быть одинаковыми во всём, кроме числовых значений размерных постоянных, содержащихся в этих условиях: теорема позволяет сократить число переменных в задачах теплообмена.

Из 1 и 2 теорем следует, что подобные процессы должны описываться одинаковыми безразмерными дифференциальными уравнениями и безразмерными граничными условиями.

3. Подобны те явления, которые имеют подобные условия однозначности и одинаковые определяющие критерии.

Критерии, представляющие собой безразмерную форму условий однозначности, называются **определяющими**. Понятие “определяющий” не является свойством, присущим определённым критериям. Так в задачах конвективного теплообмена критерий Nu есть величина определяемая.

Для подобия необходимо, чтобы одноименные определяющие безразмерные переменные были численно равны.

4.3.3. Теория размерностей

Для получения замкнутой системы дифференциальных уравнений, описывающих то или иное явление, приходится с целью уменьшения числа переменных вводить комплексные переменные, как правило, безразмерные. Неправильное определение числа безразмерных переменных, актуальных для рассматриваемого процесса, может привести к серьёзным ошибкам при описании экспериментальных данных в виде уравнений подобия.

Различают: **первичные физические величины**, которые непосредственно без связи с другими величинами характеризуют физическое явление (длина, время.....);

вторичные физические величины выражаются через первичные на основании физических законов (скорость). Физические величины характеризуются также числовыми значениями. Числовые значения первичных величин получают путём прямого измерения, вторичных – косвенным путём по числовым значениям первичных величин.

Символическое выражение вторичной величины через первичные называется **размерностью**. Размерность можно представить в виде степенной формулы:

$$[\varphi] = L^{n_1} M^{n_2} T^{n_3} \theta^{n_4} I^{n_5} j^{n_6},$$

где $[\varphi]$ – произвольная единица измерения; n_i – действительные числа.

Число безразмерных переменных указывает **π -теорема**: физическое уравнение, содержащее $n \geq 2$ размерных величин, из которых $k \geq 1$ величин имеют независимую размерность (первичные величины), после приведения к безразмерному виду будет содержать $n - k$ безразмерных величин.

4.4. Теплоотдача при продольном омывании плоской поверхности

Пусть плоская поверхность омывается потоком несжимаемой жидкости. Скорость и температура жидкости постоянны и равны w_0 и t_0 .

Поток направлен вдоль пластины, температура поверхности тела во времени не меняется. Внутренние источники теплоты в жидкости отсутствуют. Теплота трения пренебрежимо мала.

4.4.1. Условия прилипания

Из гидродинамики вязкой жидкости известно, что частицы жидкости, непосредственно прилегающие к твёрдому телу, адсорбируются или прилипают к его поверхности и их скорость становится равной нулю относительно поверхности тела. Этот слой “прилипшей” жидкости рассматривается как бесконечно тонкий слой. Скорость жидкости на стенке остаётся равной нулю до тех пор, пока газ представляет собой сплошную среду. В газах, по мере увеличения разрежения, ослабляется взаимодействие газа со стенкой, и молекулы газа у стенки начинают проскальзывать.

Степень разрежения потока характеризуется **числом Кнудсена** $K_n = \frac{\bar{\ell}}{\ell_0}$,

где $\bar{\ell}$ – средняя длина свободного пробега молекул газа; ℓ_0 – характерный размер твёрдого тела (диаметр).

При $\frac{\bar{\ell}}{\ell_0} > 0,001$ газ не рассматривается **сплошной средой** и условия прилипания нарушаются. Мы рассматриваем сплошные среды, где около пластины образуется тонкий слой заторможенной жидкости, в пределах которого скорость изменяется от нуля на поверхности тела до скорости невозмущённого потока вдали от поверхности. Этот слой заторможенной жидкости Л. Прандтль (1904 г.) назвал **гидродинамическим пограничным слоем**.

С увеличением расстояния x от передней кромки пластины (рис. 4.4) толщина пограничного слоя δ увеличивается, поскольку по мере движения жидкости вдоль тела влияние вязкости распространяется в глубину невозмущённого потока. Предельный переход к очень малым вязкостям (или к очень большим числам Рейнольдса) следует выполнять в уравнениях Навье-Стокса не путем исключения членов, зависящих от вязкости, а в решении этих уравнений путем приближения вязкости к нулю. Течение жидкости внутри пограничного слоя определяется условием: $\frac{\partial \omega_x}{\partial y} \neq 0$ вне пограничного слоя и на его внешней границе:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial y} = 0; \omega_x = \omega_0.$$

4.4.2. Гидродинамический пограничный слой

При омывании тела поток жидкости разделяют на две части: **пограничный слой** и **внешний поток**. Во внешнем потоке преобладают силы инерции. Вязкостные силы не проявляются. В пограничном слое силы вязкости и инерционные силы соизмеримы. Резкого перехода от пограничного слоя к течению жидкости вне слоя нет. Скорость в пограничном слое, по мере увеличения толщины потока, стремится к ω_0 . Под тол-

щиной пограничного слоя δ подразумевают некоторое расстояние от стенки, на котором скорость будет отличаться от скорости потока вдали от тела на определённую заранее заданную малую величину.

Напишем систему дифференциальных уравнений, описывающих стационарное поле скоростей при омывании плоской пластины, бесконечной в направлении оси OZ :

$$\omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \omega_y \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}; \quad (4.24)$$

$$\omega_x \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}; \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = 0. \quad (4.26)$$

Ввиду малой толщины пограничного слоя примем, что поперёк его давление не меняется: $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$. При постоянной скорости внешнего потока ω_0 , давление во внешнем потоке на основании уравнения Бернулли не меняется: $P + \frac{\rho \omega_0^2}{2} = \text{const}$. Такое течение в гидродинамике называют **безградиентным**

течением. Поскольку $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ - для пограничного слоя; $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ - для внешнего потока, то по аналогии и для пограничного слоя $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$.

Для пограничного слоя уравнение (4.25) можно опустить, так как члены уравнения движения на ось OY малы по сравнению с членами уравнения (4.24). Поэтому для плоского безградиентного стационарного течения вязкой жидкости в пограничном слое у плоской поверхности можно записать:

$$\omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2}; \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = 0. \quad (4.28)$$

Уравнение (4.27) можно записать в виде $\omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial S}{\partial y}$, где S - напряжение трения в плоскости, параллельной плоскости XZ .

4.4.3. Тепловой пограничный слой

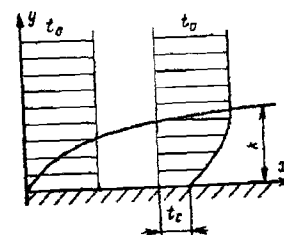


Рис. 4.5. Распределение температуры внутри теплового погран. слоя

Тепловой пограничный слой (рис. 4.5) - это слой жидкости у стенки, в пределах которого температура изменяется от значения температуры стенки, до значения температуры жидкости вдали от тела. Условие распределения температуры внутри теплового пограничного слоя $\frac{\partial t}{\partial y} \neq 0$; на внешней границе и вне границ теплового пограничного слоя $\frac{\partial t}{\partial y} = 0; t = t_0$.

K - толщина теплового пограничного слоя. Толщины гидродинамического δ и теплового K пограничных слоёв, как правило, не совпадают. Это зависит от рода жидкости и параметров процесса её течения и теплообмена. Ввиду малого K можно пренебречь теплопроводностью вдоль слоя по сравнению с поперечным переносом теплоты, т.е. $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0$. Тогда уравнение энергии примет вид

$$\omega_x \frac{\partial t}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}. \quad (4.29)$$

Так как $q_y = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)$, а $\frac{\partial q_y}{\partial y} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$, то правую часть (4.29) можно записать в виде $-\frac{1}{\rho \cdot C_p} \frac{\partial q_y}{\partial y}$. Чтобы замкнуть задачу к уравнению (4.29) добавим систему из уравнений (4.27) и (4.28).

Имеются два основных режима течения: **ламинарный и турбулентный**. При ламинарном режиме частицы жидкости движутся без перемешивания, слоисто. При турбулентном - неупорядоченно, хаотически. Направление и значения скоростей отдельных частиц непрерывно меняются. Эти режимы течения наблюдаются и в пограничном слое. При малых значениях x течение в пограничном слое может быть ламинарным: уравнения 4.27-4.29. С увеличением x толщина пограничного слоя возрастает, слой делается неустойчивым и течение в пограничном слое становится турбулентным. Теплоотдача существенно зависит от режима течения, поскольку перенос теплоты при ламинарном течении определяется теплопроводностью.

4.4.4. Турбулентный перенос теплоты и количества движения

При турбулентном течении мгновенная скорость частиц пульсирует около среднего во времени значения. Кроме того, дополнительно к изменению абсолютной величины w происходит ещё и изменение направления мгновенной скорости. Отклонение мгновенной скорости w от средней во времени $\bar{w}$ называют **пульсациями скорости** (пульсационные скорости) $w = \bar{w} + w'$, таким образом, турбулентное движение состоит как бы из регулярного течения, описываемого осреднёнными значениями скоростей, и из наложенного на него хаотического пульсационного течения.

При наличии в потоке температурного поля происходит перенос теплоты, из-за чего возникают **пульсации температур**. Аналогично обозначению скоростей: $t = \bar{t} + t'$. Пульсации скорости и температуры приводят к пульсациям давления и физических свойств. Таким образом, турбулентное течение является квазистационарным процессом. Проведя определённые преобразования, выдвинув ряд гипотез, можно получить систему дифференциальных уравнений для осреднённого турбулентного течения. Однако в строгой постановке этот вопрос не решён.

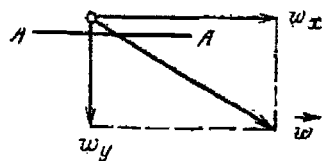


Рис. 4.6. Мгновенное значение скорости в плоском турбулентном потоке

Пусть в некоторый момент времени $\tau + d\tau$ скорость в некоторой точке турбулентного потока имеет свои компоненты w_x, w_y . Температура жидкости в данной точке $A \rightarrow t$. Контрольная поверхность $A-A$ расположена у фиксированной точки и параллельна плоскости XZ . За время $d\tau$ через поверхность $A-A$ проходит масса $\rho \cdot w_y \cdot d\tau$, [кг/м²]. В направлении оси OY проходят относительно оси OX : количество движения $\rho \cdot w_y \cdot w_x \cdot d\tau$ и теплота $\rho \cdot w_y \cdot t \cdot d\tau \approx \rho \cdot c_p \cdot w_y \cdot t \cdot d\tau$ (пусть $\rho, c_p = \text{const}$). Поскольку компоненты скорости постоянно меняются, среднеинтегральное значение плотности теплового потока q_y в направлении

$$OY: q_y = \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+d\tau} \rho \cdot c_p \cdot w_y \cdot t \cdot d\tau = \rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_y \bar{t}. \quad (4.30)$$

Используя свойства среднеинтегрального осреднения, запишем (4.30)

$$\text{в виде: } q_y = \rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_y \cdot \bar{t} + \rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_y \bar{t}'; \quad (4.31)$$

Среднеинтегральное значение количества движения относительно OX , переносимое в направлении OY за единицу времени через единицу поверхности, аналогично (4.31) запишем как:

$$S = \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+d\tau} \rho \cdot w_x \cdot w_y \cdot d\tau = \rho \cdot \bar{w}_x \bar{w}_y = \rho \cdot \bar{w}_x \cdot \bar{w}_y + \rho \cdot \bar{w}_x' \bar{w}_y'; \quad (4.32)$$

В соответствии с уравнениями (4.31) и (4.32) **конвективный перенос** складывается из **осреднённого и пульсационного** (турбулентного) **переноса**.

$$\text{Обозначим: } q_{t, \bar{t}} = q_o = \rho \cdot \bar{w}_y \cdot \bar{t}'; \quad (4.33)$$

$$S_{xy, m} = S_m = -\rho \cdot \bar{w}_x' \bar{w}_y'. \quad (4.33, a)$$

Знак (-) в (4.33, a) поставлен из-за противоположного направления пульсационного переноса количеству движения.

Поскольку теплота переносится, а количество движения осуществляется на отрезке ℓ , где пульсация существует, то можно записать:

$$q_m = -\rho \cdot C_p \cdot \bar{w}_y' \bar{\ell} \frac{d\bar{t}}{dy}; \quad (4.34)$$

$$S_m = \rho \cdot \bar{w}_y' \bar{\ell} \frac{d\bar{w}_x}{dy}. \quad (4.35)$$

Из (4.34) и (4.35) следует, что q_m и S_m пропорциональны производным $\frac{d\bar{t}}{dy}$ и $\frac{d\bar{w}_x}{dy}$. Тогда перепишем (4.34) и (4.35) в виде:

$$q_m = -\rho \cdot C_p \cdot \varepsilon_q \frac{d\bar{t}}{dy} = -\lambda_m \frac{d\bar{t}}{dy}; \quad (4.36)$$

$$S_m = \rho \cdot \varepsilon_s \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \mu_m \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}, \quad (4.37)$$

где λ_m, μ_m - коэффициенты турбулентного переноса теплоты и количества движения; $\varepsilon_q = \frac{\lambda_o}{(\rho \cdot \bar{n}_p)}$; $\varepsilon_s = \frac{\mu_o}{\rho}$ - кинематические коэффициенты турбулентного переноса теплоты и количества движения. Размерность $\lambda_m, \mu_m; \varepsilon_q; \varepsilon_s$ соответствует λ, μ, a, ν при молекулярном переносе.

Теплота и количество движения в направлении оси OY переносится одновременно и молекулярным механизмом. Тогда $q_y = -(\lambda + \lambda_m) \frac{d\bar{t}}{dy}$; (4.38)

$$S_{xy} = (\mu + \mu_m) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}. \quad (4.39)$$

4.4.5. Система уравнений турбулентного пограничного слоя

На основании изложенного для турбулентного пограничного слоя уравнение энергии $w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$, движения $w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$ и

сплошности $\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$ могут быть записаны в виде:

$$\rho \cdot C_p \left(\bar{w}_x \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda + \lambda_m) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \right]; \quad (4.40)$$

$$\rho (\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y} [(\mu + \mu_m) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}]; \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial y} = 0. \quad (4.42)$$

Из (4.33,а) следует, что турбулентный перенос $S_m = -\rho \bar{w}_x' \bar{w}_y'$.

Введя в (4.33,а) величину ℓ , называемую **длиной пути смешения** или

масштабом турбулентности получим $S_m = \rho \cdot \ell^2 \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2$. (4.43)

Из (4.35) и (4.43) имеем:

$$\bar{w}_y' \ell^2 = \ell^2 \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}. \quad (4.44)$$

Подставив (4.44) в (4.34), получим:

$$q_m = -\rho \cdot c_p \cdot \ell^2 \left| \frac{dw_x}{dw_y} \right| \frac{d\bar{t}}{dy}. \quad (4.45)$$

В пристенной области турбулентного течения масштаб турбулентности должен уменьшаться по мере приближения к стенке. Согласно Прандтлю:

$$\ell = \kappa \cdot y, \quad (4.46)$$

где $\kappa = 0,4$ – безразмерная величина.

$$\varepsilon_s = \varepsilon_q = \ell^2 \left| \frac{dw_x}{dy} \right| = (\kappa \cdot y)^2 \left| \frac{dw_x}{dy} \right|. \quad (4.47)$$

Из (4.47) следует, что существует аналогия между переносом количества движения и переносом теплоты.

Турбулентное течение характеризуется также **кинетической энергией турбулентного течения** E : $E = \frac{1}{2} \left[(\bar{w}_x')^2 + (\bar{w}_y')^2 + (\bar{w}_z')^2 \right]$ (4.48)

и **степени турбулентности** Tu :

$$Tu = \frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{3w_0^2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} [(\bar{w}_x')^2 + (\bar{w}_y')^2 + (\bar{w}_z')^2]}}{w_0}, \quad (4.49)$$

где $\bar{w}_x'$; $\bar{w}_y'$; $\bar{w}_z'$ – пульсационные составляющие скорости в определенный точке турбулентного потока; w_0 – характерная скорость процесса (скорость набегающего потока).

Перепишем уравнение энергии (4.29) в виде

$$\rho \cdot c_p \left(w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) = -\frac{\partial q_y}{\partial y}. \quad (4.50)$$

Уравнение (4.50) названо **уравнением Кружилина**.

Проинтегрируем (4.50) от $y=0$ до $y=\infty$.

Правая часть: $-\int_0^\infty \frac{\partial q_y}{\partial y} dy = q_c$. (4.1)

Левая часть: выразим из уравнения сплошности (4.28) w_y : $dw_y = -\frac{\partial w_x}{\partial x} dy$.

Так как при $y=0$ $w_y=0$, то $w_y = -\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy$.

Подставим w_y в (4.50) и проинтегрируем левую часть:

$$\int_0^\infty \left(w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) dy = \int_0^\infty w_x \frac{\partial t}{\partial x} dy - \int_0^\infty \left(\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \right) \frac{\partial t}{\partial y} dy. \quad (**)$$

Второй интеграл правой части данного уравнения возьмем по частям в соответствии с формулой: $\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v|_a^b - \int_a^b a \cdot du$.

Получаем $\int_0^\infty \frac{\partial t}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \right) dy = \int_0^\infty \left(\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \right) dt = t_0 \int_0^\infty \frac{\partial w_x}{\partial x} dy - \int_0^\infty t \frac{\partial w_x}{\partial x} dy = \int_0^\infty (t_0 - t) \frac{\partial w_x}{\partial x} dy$.

Полученное значение подставим в (**):

$$\int_0^\infty w_x \frac{\partial t}{\partial x} dy - \int_0^\infty (t_0 - t) \frac{\partial w_x}{\partial x} dy = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} [w_x (t_0 - t)] dy = - \frac{d}{dx} \int_0^\infty w_x (t_0 - t) dy.$$

Приравняем полученные значения правой и левой частей уравнения:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty w_x (t_0 - t) dy = - \frac{q_c}{\rho \cdot c_p}. \quad (4.51)$$

Уравнение (4.51) называется **интегральным уравнением теплового потока для теплового пограничного слоя**. В (4.51) предел интегрирования ∞ заменен на K , так как за пределами пограничного слоя производные уравнения (4.50) равны нулю по определению [2]. При известных распределениях скорости и температуры с помощью (4.51) можно определить толщину теплового пограничного слоя $k = k(x)$.

Поскольку $S = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$, запишем уравнение движения (4.27) в виде

$$\rho \left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad (4.52)$$

где S – касательное напряжение трения. Уравнение (4.52) названо уравнением Кармана.

Так как уравнение (4.52) аналогично уравнению энергии (4.50), то проведя интегрирование (4.52) в пределах $y=0$ и $y=\delta$ при аналогичных преобразованиях получим

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta w_x (w_0 - w_x) dy = \frac{S_c}{\rho}. \quad (4.53)$$

Уравнение (4.53) – **интегральное уравнение импульсов для гидродинамического слоя**.

4.4.6. Теплоотдача в ламинарном пограничном слое

Для расчета теплоотдачи в слое по уравнению (4.51) необходимо знать в нем распределение скорости, которое близко к параболе:

$w_x = a + b \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot y^3$ (кубическая парабола). Рассмотрим граничные условия: $y = 0 \rightarrow w_x = 0$. При этом полагаем, что $\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0$. На внешней границе пограничного слоя: $y = \delta$, $w_x = w_0$, $\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_{y=\delta} = 0$. Из (4.27), когда силы инерции пренебрежимо малы, получаем условие $\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0$. Уравнение распределения скорости будет удовлетворять граничным условиям при постоянных:

$a = 0$; $b = \frac{3}{2} \frac{w_0}{\delta}$; $C = 0$; $d = -\frac{1}{2} \frac{w_0}{\delta^3}$. Тогда уравнение распределения скорости примет вид:

$$\frac{w_x}{w_0} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2. \quad (*)$$

Согласно этому распределению скорости, из уравнения импульсов (4.52) получаем толщину гидродинамического пограничного слоя:

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{w_0}} \approx 4,64 \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{w_0}}. \quad (4.54)$$

Из (4.54) видно, что δ меняется пропорционально квадратному корню из расстояния от переднего края пластины до данной точки. В безразмерном виде (4.54) может быть записано как:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{\frac{w_0 \cdot x}{\nu}}} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}}. \quad (4.55)$$

Пусть $t_c = const$, т.е. t_c не зависит от x . Обозначим: $\vartheta = t - t_c$; $\vartheta_0 = t_0 - t_c$; где t_0 — температура жидкости за пределами пограничного слоя.

Распределение температуры описывается уравнением, аналогичным

уравнению распределения скорости (*), т.е. $\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = 1,5 \left(\frac{y}{k}\right) - 0,5 \left(\frac{y}{k}\right)^3$, откуда

$$\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right)_{y=0} = \frac{1,5 \cdot \vartheta_0}{k}. \quad (**)$$

Решая интегральное уравнение теплового потока для теплового пограничного слоя (4.51) с использованием зависимости для распределения скоростей и температуры и приняв $k < \delta$, получим в конечном итоге

$$\frac{k}{\delta} = \frac{1}{\sqrt[3]{Pr}}. \quad (4.56)$$

Подставив δ из (4.55) в (4.56), получим $k = \frac{4,64x}{\sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}}$, (4.57)

где $Re = \frac{w_0 \cdot x}{\nu}$.

При известном температурном поле плотность теплового потока от стенки к слою определяется уравнением Фурье: $q_c = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=1}$. Согласно

уравнению Ньютона — Рихмана эта же плотность равна $q_c = \alpha (t_c - t_{ж})$. Решая эти уравнения относительно α , получим уравнение теплоотдачи:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{t_c - t_{ж}} \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=0}. \quad (4.58)$$

Опустив в (4.58) знак минус и решая его в соответствии с уравнением распределения температуры (**), получим $\alpha = \frac{\lambda}{\vartheta_0} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{k}$. (4.59)

Из (4.59) следует, что α обратно пропорционален толщине пограничного слоя.

После умножения левой и правой частей (4.59) на x/λ и подставления в него k из (4.57) получим $Nu_x = 0,33 \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}$, (4.60)

где $Nu_x = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda} = \frac{\alpha \cdot \ell \cdot x}{\lambda \cdot \ell} = Nu_\ell \cdot X$; $Re = \frac{w_0 \cdot x}{\nu} = \frac{w_0 \cdot \ell \cdot x}{\nu \cdot \ell} = Re \cdot X$; $X = \frac{x}{\ell}$;

ℓ — длина пластины вдоль потока.

Перепишем (4.59) в виде $Nu_\ell = 0,33 X^{-0,5} Re_\ell^{0,5} Pr^{1/3}$. (4.61)

Тогда $Nu_\ell = a \cdot X^{-0,5}$ или $\alpha = C \cdot X^{-0,5}$.

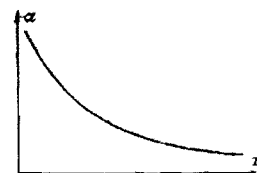


Рис. 4.7. Изменение α по длине пластины при ламинарном пограничном слое

Величины a и C независимы от x . При $x = 0$ значение α бесконечно велико. При увеличении x α принимает конечные и постоянно уменьшающиеся значения (рис. 4.7). Это, как следует из уравнений (**) и (4.57), объясняется постоянством температурного напора $\vartheta_0 = t_0 - t_c$ пластины при непрерывно уменьшающемся температурном градиенте с ростом x . Физические параметры, входящие в приведенные выше уравнения, выбирают по температуре набегающего потока t_0 . Уравнение (4.61) получено при постоянных физических параметрах потока. Для учета переменности физических параметров потока жидкости и направления теплового потока М.А. Михеевым был предложен

множитель: $\left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c}\right)^{0,25}$.

4.4.7. Переход ламинарного течения в турбулентное

Законы теплообмена, определяемые режимом течения при ламинарном и турбулентном режимах различны. О режиме течения судят по критическим значениям числа Re :

$$Re_{кр.1} = \frac{w_0 \cdot x_{кр.1}}{\nu}; \quad Re_{кр.2} = \frac{w_0 \cdot x_{кр.2}}{\nu};$$

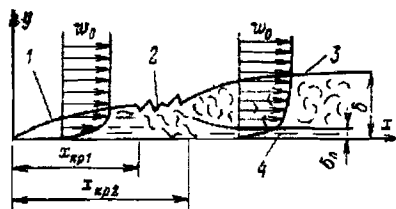


Рис. 4.8. Пограничный слой:
1- ламинарный пограничный слой;
2- переходная область;
3- турбулентный пограничный
слой; 4- вязкий ламинарный под-
слой

где x – продольная координата, от-
считываемая от передней кромки
поверхности.

$$Re_{кр} = \frac{w_0 \cdot x_{кр}}{\nu} = 10^4 \div 4 \cdot 10^6.$$

Участок, где осуществляется пе-
реход ламинарного течения в тур-
булентное, называется **переход-
ным**.

На преобразование режима течения
влияют характеристики внешнего потока:
степень турбулентности, масштаб турбу-
лентности, частота пульсаций и т.д., пара-
метры омываемого тела (волнистость, ше-
роховатость, вибрация и т.д.), интенсив-
ность теплообмена.

При сравнительно малых значениях степени турбулентности $Tu = \sqrt{\frac{2E}{3w_0^2}}$

смена режима не зависит от Tu внешнего потока, а определяется характери-
стиками ламинарного слоя. Увеличение Tu приводит к уменьшению $Re_{кр}$.

Течение в переходной области не является стабильным. Турбулентно-
текущая жидкость уносится потоком. Смена ламинарных и турбулентных со-
стояний течения происходит через разные промежутки времени. Такой ха-
рактер течения характеризуют **коэффициентом перемежаемости** ω – доля
определенного промежутка времени, в которой существует турбулентное те-
чение. $\omega = 1$ – турбулентное течение. $\omega = 0$ – ламинарное.

4.4.8. Теплоотдача при турбулентном по- граничном слое

Схема строения турбулентного погра-
ничного слоя представлена на рис. 4.9.
Уравнение переноса теплоты (4.38) и коли-
чества движения (4.39) поперек погранично-
го слоя можно записать в следующем виде:

$$q = -\lambda \left(1 + \frac{Pr}{Pr_m} \frac{\epsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y}; \quad (4.62)$$

$$S = \rho \cdot \nu \left(1 + \frac{\epsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial w_x}{\partial y}, \quad (4.63)$$

где Pr_m – турбулентное число Pr ,
характеризует ϵ_s / ϵ_q ; ϵ_s, ϵ_q – кинемати-

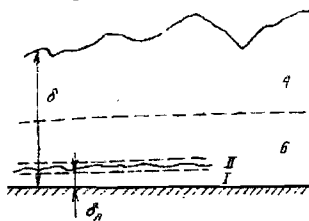


Рис. 4.9. Схема строения турбу-
лентного пограничного слоя:

A – внешняя область; B – прис-
тенная область; I – вязкий под-
слой; II – промежуточный слой

ческие коэффициенты переноса количества движения и теплоты соответст-
венно. С учетом (4.62) и (4.63) дифференциальные уравнения энергии (4.40)
и движения (4.41) для турбулентного пограничного слоя можно записать в
следующем виде:

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} = a \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{Pr}{Pr_m} \frac{\epsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} \right]; \quad (4.64)$$

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\epsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right]. \quad (4.65)$$

Для решения уравнений (4.64) и (4.65) необходимо знать коэффициенты
турбулентного переноса теплоты и количества движения, а также распреде-
ления скорости и температуры в турбулентном потоке.

Запишем уравнения (4.43), введя обозначения (4.46):

$$S_m = \rho \cdot \ell^2 \left(\frac{dw_x}{dy} \right)^2 = \rho (\kappa \cdot y)^2 \left(\frac{dw_x}{dw_y} \right)^2; \quad \sqrt{\frac{S_m}{\rho}} = \ell \frac{dw_x}{dy} = \kappa \cdot y \frac{dw_x}{dy};$$

где ℓ – длина пути смешения.

Пусть касательное напряжение турбулентного течения не меняется в
направлении y . Тогда $\sqrt{\frac{S_m}{\rho}} = \sqrt{\frac{S_c}{\rho}} = \text{const}$. Обозначим $\sqrt{\frac{S_c}{\rho}} = w_*$ – динами-
ческая скорость. Тогда $w_* = \kappa y \frac{dw_x}{dy}$, $dw_x = \frac{w_*}{\kappa} \frac{dy}{y}$ и $\bar{w}_x = \frac{w_*}{\kappa} \ln y + C$. (4.66)

Уравнение (4.66) характеризует логарифмическое распределение ос-
редненной скорости турбулентного течения в пристенной области. Решение
(4.66) при $y=0$ дает неприемлемый результат $\bar{w}_x = -\infty$ из-за неучета значи-
тельных сил вязкости непосредственно у стенки. Слой жидкости у стенки, в
котором преобладают силы вязкости, и являющийся составной частью тур-
булентного пограничного слоя, называется **вязким подслоем**. Уравнение
движения для него запишется в виде $d^2 \bar{w}_x / dy^2 = 0$. Откуда $\bar{w}_x = C_1 y + C_2$,

то есть в вязком подслое скорость меняется по линейному закону. Тогда

$$S = S_c = \mu \frac{d^2 \bar{w}_x}{dy^2} = \text{const} \quad \text{и} \quad S_c = \mu \frac{w_*^2}{\delta_n} = \rho \cdot w_*^2, \quad (4.66a)$$

где δ_n – толщина вязкого подслоя; $w_m = \bar{w}_x(\delta_n)$ – скорость на внешней границе
вязкого подслоя. Согласно (4.66a), $\delta_n = \nu \cdot w_*^2$. Постоянная интегрирования

С из (4.66) определится из граничных условий: $y = \delta_n = \nu \cdot w_*^2$; $w_x = w_*$. Тог-

да $C = w_* - \frac{w_*}{\kappa} \ln \delta_n = w_* - \frac{w_*}{\kappa} \ln \frac{\nu \cdot w_*}{w_*^2}$. Подставив постоянную С в (4.66) и прове-

дя необходимые преобразования, получим универсальное логарифмическое
распределение осредненной скорости в пристенной области турбулентного
потока. Оно представлено на рис. 4.10 и имеет следующий вид:

$$W^+ = \frac{\bar{w}_x}{w_*} = \frac{1}{\kappa} \lg y + \eta, \quad (4.67)$$

$$\text{где } \eta = \frac{w_* \cdot y}{\nu}; \quad \eta = \frac{w_*}{w_*} - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{w_*}{w_*}.$$

На рис. 4.10 кривой 1 показано линейное изменение скорости в вязком

$$\text{подслое I: } w_x = w_* \cdot y_* = \frac{w_*^2}{\nu} y = \frac{S_c}{\mu} y. \quad (4.68)$$

Кривой 2 изображено логарифмическое распределение осредненной скорости в пристенной турбулентной части B (рис. 4.9) пограничного слоя:

$$\frac{\bar{w}_x}{w_*} = 5,61 \cdot \lg y_* + 4,9. \quad (4.69)$$

Пересечению кривых 1 и 2 соответствует $y_* = \frac{w_* \cdot y}{\nu}$, примерно равный

12. При этом расчетная толщина вязкого подслоя равна

$$\delta_i \approx 12 \frac{\nu}{w_*} = 12 \nu \sqrt{\rho / S_c}. \quad (4.70)$$

Вязкий подслей (рис. 4.9) не имеет строго ламинарного течения. В него проникают пульсации, граница подслоя четко не определена. Она является

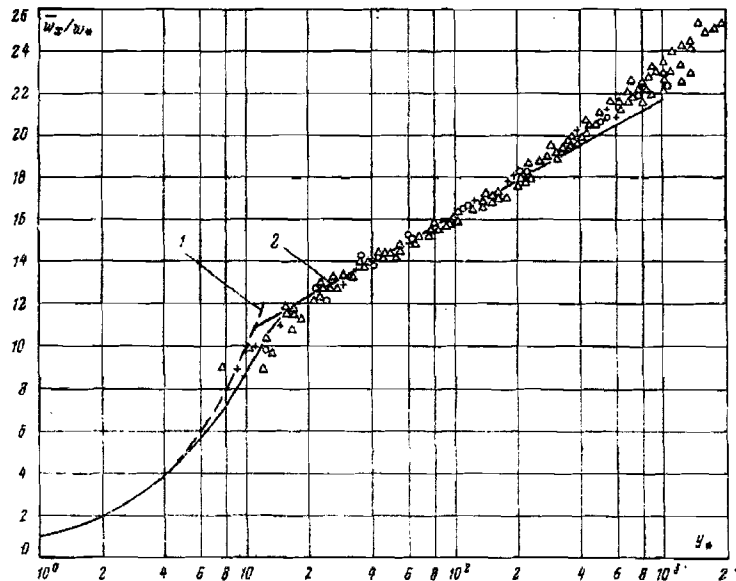


Рис. 4.10. Распределение безразмерной скорости по толщине турбулентного пограничного слоя

генератором пульсационного движения. Пристенная область составляет примерно 20 % толщины пограничного слоя; толщина вязкого подслоя около

2 %; толщина внешней области примерно 80 %.

Аналогично вязкому подслою у стенки можно выделить **тепловой подслей**. Он характеризуется преобладанием переноса теплоты теплопроводностью над турбулентным переносом. Пульсации, проникающие в вязкий подслей, не являются определяющими для теплового подслоя. Основным механизмом передачи – это молекулярный вязкостный перенос ($Pr > 1$). Для жидкостей – малотеплопроводные, вязкие среды с большими числами $Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda}$ –

тепловой подслоем является основным термическим сопротивлением.

Ввиду интенсивного турбулентного переноса, толщины теплового K и динамического δ пограничных слоев практически совпадают. При турбулентном течении толщина пограничного слоя δ больше, чем при ламинарном вследствие влияния турбулентной вязкости.

В тепловом подслое перенос теплоты определяется теплопроводностью, поэтому температура по его толщине изменяется по закону прямой. Представим распределение температуры в вязком подслое, где скорость меняется по линейному закону, как:

$$\theta = Pr \cdot y_*, \quad (4.71)$$

$$\text{где } \theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_*}; \quad \vartheta_* = \frac{q_c}{\rho \cdot c_p \cdot w_*}; \quad y_* = \frac{w_* \cdot y}{\nu}.$$

Распределение температуры в зоне логарифмического распределения осредненной скорости запишется как: $\theta = \frac{Pr_m}{\kappa} \ln y_* + C_q(Pr)$, (4.72)

где $C_q = f(Pr)$ – учитывает изменение температуры, связанное с неравенством толщин подслоев K_n и δ_n .

Зная распределение скорости и температуры, с помощью уравнений теплового потока (4.51) и импульса (4.53) можно рассчитать теплоотдачу.

Поскольку скорости температуры в вязком и тепловом подслоях изменяются по линейному закону, то $S_c = \mu \frac{w_m}{\delta_n}$; $q_c = \lambda \frac{\vartheta_m}{K_n}$.

S и q постоянны внутри K_n и δ_n . Тогда

$$q_c = S_c \frac{\lambda}{\mu} \frac{\vartheta_m}{w_m} \frac{\delta_n}{K_n}, \quad (4.73)$$

где $\vartheta_m = t_m - t_c$; t_m – температура на внешней границе теплового подслоя; $y = K_n$; w_m – скорость при $y = \delta_n$; t_c – температура поверхности стенки.

Для турбулентной части пограничного слоя молекулярный перенос теплоты и количества движения пренебрежимо мал. Поэтому распределение осредненных скорости и температуры идентичны. Тогда на основании уравнений переноса теплоты (4.34) и количества движения (4.35) запишем

$$q_d = S_d \cdot c_p \frac{t_0 - t_c}{w_0 - w_i}. \quad (4.74)$$

На границе теплового подслоя нет разрыва теплового потока, поэтому (4.73) и (4.74) приравняем и решим их относительно разности температур:

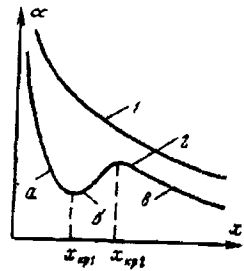


Рис. 4.11. Распределение интенсивности теплооб-

мена внутри пограничного слоя:

- 1- турбулентное течение;
2- смешанное течение;
а - ламинарное; б - переходное;
в - турбулентное

Обозначим $C_f = \frac{2S_c}{\rho \cdot w_0^2}$ — коэффициент трения, характеризующий касательное напряжение трения на стенке S_c . Подставим C_f в (4.77) и, поделив левую и правую его части на $\rho \cdot c_p \cdot w_0(t_0 - t_c)$, получим

$$St = \frac{\alpha}{\rho \cdot c_p \cdot w_0} = \frac{C_f/2}{1 + 12 \sqrt{\frac{C_f}{2} \left(Pr^{2/3} - 1 \right)}}, \quad (4.78)$$

где $St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr} = \frac{\alpha}{\rho \cdot c_p \cdot w_0}$. (4.79)

При $Pr=1$ (4.78) переходит в $St = C_f/2$.

$St = C_f/2$ — математическое выражение аналогии переноса теплоты и количества движения. Используя формулу Прандтля $C_f = \frac{0,0592}{Re_{f,x}^{0,2}}$, (4.81)

введя поправку $(Pr_f/Pr_w)^{0,25}$, получим $Nu_{f,x} = 0,0296 Re_{f,x}^{0,8} Pr_{f,x}^{0,43} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25}$. (4.82)

За определяющую температуру принята температура жидкости вдали от тела — t_0 . Определяющим размером является координата x , от начала участка

$$t_0 - t_c = \frac{q_c \cdot w_0}{S_c \cdot c_p} \left[1 + \frac{\mu \cdot c_p \cdot w_m \cdot K_n}{\lambda \cdot w_0 \cdot \delta_n} - \frac{w_m}{w_0} \right]. \quad (4.75)$$

Поскольку согласно (4.70) $\delta_n \approx 12 \frac{\nu}{w_*}$, то

$$w_m = \frac{\delta \cdot w_*^2}{\nu} = 12 w_* = 12 \sqrt{\frac{S_c}{\rho}}. \quad (4.76)$$

Пусть $\frac{K_n}{\delta_n} = \frac{1}{\sqrt[3]{Pr}}$ — на основании аналогии с уравнением (4.56). Подставим (4.76) и K_n/δ_n в (4.75) и решим его относительно q_c .

$$q_c = \frac{S_c \cdot c_p (t_0 - t_c)}{w_0 \left[1 + \frac{12}{w_0} \sqrt{\frac{S_c}{\rho}} \left(Pr^{2/3} - 1 \right) \right]}. \quad (4.77)$$

теплообмена. Распределение интенсивности теплообмена внутри пограничного слоя представлено на рис. 4.11.

5. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

5.1. Основные режимы течения в трубах

Течение жидкости в трубах классифицируют на **ламинарное** и **турбулентное** в зависимости от значения числа Re : $Re = \frac{\bar{w} \cdot d}{\nu}$, где $\bar{w}$ — средняя скорость жидкости.

При $Re < Re_{кр} \approx 2000$ — течение ламинарное. $Re_{кр1} = 2000$ — нижнее критическое число Re . В случае $Re > 2000$ и возмущении потока, ламинарный режим течения нарушается. Развитое турбулентное течение устанавливается

при $Re > Re_{кр2} \sim 10^4$. Течение при $Re = 2 \cdot 10^3 \div 10^4$ называют переходным.

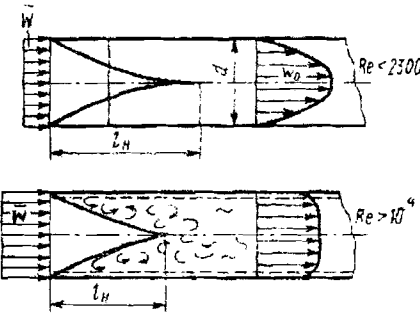


Рис. 5.1. Влияние начального участка на образование пограничного слоя

При движении у стенок трубы образуется **гидродинамический пограничный слой**, толщина которого непрерывно возрастает. На определенном расстоянии от входа пограничный слой заполняет все поперечное сечение. Расстояние от входа в трубу до слияния пограничных слоёв называется длиной гидродинамического начального участка или **участком гидродинамической стабилизации** l_n .

Гидродинамический начальный участок существует при обоих режимах течения. Однако при $Re > 2000$ в начальном участке может существовать ламинарный режим пограничного слоя, который при достижении критической толщины переходит в турбулентный. Толщина турбулентного слоя увеличивается, и слой заполняет всё сечение. Поток в зоне изменения режима течения характеризуется перемежаемостью движения.

При $Re > 5 \cdot 10^4$ — со входа в трубу развивается **турбулентный пограничный слой**.

Длина гидродинамического начального участка зависит от Re , степени турбулентности потока на входе и других факторов.

Для ламинарного изотермического движения скорости по сечению потока, когда он гидродинамически стабилизирован ($x > l_n$), распределяются по

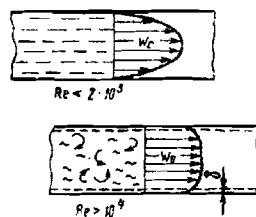


Рис. 5.2. Распределение скорости при ламинарном и турбулентном течении потока

При турбулентных потоках, скорость по сечению трубы распределяется по усеченной параболе. В пределах вязкого подслоя можно принять линейное изменение скорости. Чем больше Re , тем резче изменяется скорость у стенки вследствие меньшей толщины подслоя.

При наличии теплообмена наблюдается нагрев или охлаждение пристенных слоёв, в то время как температура ядра потока остаётся равной температуре выхода, т.е. всё изменение температуры на этом участке осуществляется в пристенном слое.

У поверхности трубы, начиная от её входного сечения, образуется **тепловой пограничный слой**, толщина которого постоянно увеличивается. Через определенное расстояние l_{HT} , тепловой пограничный слой заполняет все сечение трубы, где l_{HT} - участок термической стабилизации или начальный тепловой участок. При $x > l_{HT}$ - теплообмен считают стабилизированным. Изменение температуры потока по сечению трубы на начальном ее участке $\frac{\partial t}{\partial r}$ происходит значительно быстрее температурного напора $\Delta t = \bar{t} - t_c$, где $\bar{t}$ - среднemasовая по сечению температура жидкости. Поэтому, в соответствии с уравнением теплоотдачи $\alpha = -\frac{\lambda}{\Delta t} \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)$, α на участке тепловой стабилизации резко падает и становится постоянным при стабилизации теплообмена.

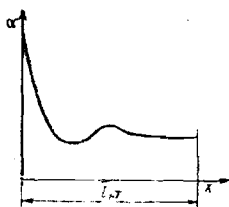


Рис. 5.3. Изменение α по длине трубы при турбулентном течении потока

параболе: $w_x = w_{max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$, где r_0 - радиус трубы; w_{max} - скорость на оси трубы.

При турбулентном течении большая часть трубы заполнена турбулентным потоком. При высоких значениях Re толщина ламинарного подслоя $\min$, хотя именно вязкий подслой определяет термическое сопротивление теплоотдачи.

При турбулентных потоках, скорость по сечению трубы распределяется по усеченной параболе. В пределах вязкого подслоя можно принять линейное изменение скорости. Чем больше Re , тем резче изменяется скорость у стенки вследствие меньшей толщины подслоя.

Длина участка тепловой стабилизации l_{HT} зависит от большого количества факторов: λ жидкости, Re , распределения температур на входе, наличия гидродинамической стабилизации. При ламинарном режиме течения жидкости и постоянных ее физических параметрах при $t_c = const \rightarrow l_{HT} = 0,55 Pe \cdot d$; при $q_c = const \rightarrow l_{HT} = 0,07 Pe \cdot d$.

При турбулентном течении $l_{HT} = (10 \div 15) d$. При ламинарном течении могут быть либо **вязкостный**, либо **вязкостно-гравитационный** режимы течения.

Вязкостный - существует при преобладании сил вязкости над подъемными силами, когда малые диаметры труб и температурные напоры, но большая вязкость жидкости.

В вязкостно-гравитационном режиме подъемные и вязкостные силы соизмеримы.

При вязкостном режиме распределение скоростей по сечению трубы зависит от направления теплового потока (рис. 5.4). В случае нагревания жидкости ее температура у стенки будет больше, чем при охлаждении, а значит - меньше вязкость. Поэтому скорость жидкости у стенки при нагревании больше, чем при охлаждении. Следовательно, α выше.

При вязкостно-гравитационном режиме значительное влияние на теплообмен оказывает направление токов естественной конвекции (вызванной разностью плотностей нагретых и холодных частиц) и её интенсивность.

В зависимости от направления вынужденного и свободного движения различают:

1. Направления вынужденного и свободного движений совпадают (рис. 5.5) при нагревании жидкости и её подъёмном движении в вертикальной трубе: 1 - суммарная кривая скорости; 2 - распределение скорости при вынужденном движении; 3 - при свободном движении.
2. Направления свободной и вынужденной конвекции взаимно перпендикулярны. Наблюдаются в горизонтальных трубах (рис. 5.6).



Рис. 5.4. Распределение скорости по сечению канала при вязкостном режиме течения жидкости: 1-изотермическое; 2-охлаждение; 3-нагревание

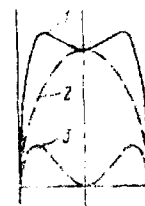


Рис. 5.5. Распределение скоростей в канале при подъёмном течении жидкости

При нагревании жидкости у стенки возникают восходящие токи и нисходящие - в середине трубы. Жидкость движется, напоминая винтовую линию. За счет турбулизации теплоотдача увеличивается. α в данном случае выше: а) нагревание; б) охлаждение.

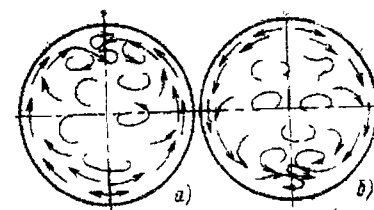
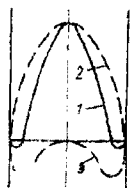


Рис. 5.6. Поперечные токи в горизонтальной трубе при течении жидкости: а) нагревание; б) охлаждение

3. Направления вынужденной и свободной конвекции противоположны: восходящее течение в вертикальной трубе и охлаждение (рис. 5.7). Скорость жидкости у стенки из-за противоположных по направлению токов свободной конвекции уменьшается. Иногда возникают возвратные течения (вихревые). Расчет интенсивности теплооб-



мена проводится, как при турбулентном течении жидкости.

5.2. Теплоотдача при течении жидкости в гладких трубах и каналах

Рис. 5.7. Обозначения, как на рис. 5.5

5.2.1. Ламинарный режим

При гидродинамическом стабилизированном ламинарном течении жидкости с постоянными физическими свойствами ее скорость в канале распределяется по закону параболы: $w_x = 2\bar{w}_x \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$ или

$$W_x = 2(1 - R^2), \text{ где } W_x = \frac{w_x}{\bar{w}_x} \text{ и } R = \frac{r}{r_0}.$$

Поставим W_x в уравнение Лайона, полученного для определения стабилизированного значения числа Nu:

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R \cdot dR \right)^2}{\left(1 + \frac{Pr}{Pr_m} \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) R} dR = 2 \int_0^1 \frac{dR}{R} \left[\int_0^R (1 - R^2) R \cdot dR \right]^2 = \frac{11}{48} \text{ или } Nu_d = 4,36.$$

Данный результат получен при $q_c = const$. При $t_c = const \rightarrow Nu = 3,66$.

Такие значения могут быть получены для параболического распределения скоростей, когда постоянны физические параметры жидкости при малых температурных напорах. Поэтому необходимая адекватность полученного результата по приведённым зависимостям и реальным данным может быть недостижима. Кроме того, данные зависимости не учитывают теплоотдачу начального участка. На начальном участке условия теплообмена в трубе близки к условиям при продольном омывании пластины, поэтому можно воспользоваться рассмотренными расчетными зависимостями в предыдущем разделе.

Учёт переменности физических параметров и ряда других факторов значительно усложняют задачу. Поэтому практические расчёты ведут по эмпирическим формулам, полученным для нагревания или охлаждения жидкости при различных положениях трубы. Приближённая оценка среднего коэффициента теплоотдачи для вязкостно-гравитационного режима может быть получена по зависимости М.А. Михеева:

$$Nu_{\text{жсд}} = 0,15 Re_{\text{жсд}}^{0,33} Pr_{\text{жсд}}^{0,33} (Gr_{\text{жсд}} \cdot Pr_f)^{0,1} \left(\frac{Pr_{\text{жс}}}{Pr_c} \right)^{0,25} \varepsilon_\ell. \quad (5.1)$$

В (5.1) определяющей температурой является средняя температура жидкости в трубе $t_{\text{жс}} = 0,5(t_{\text{вх}} + t_{\text{вых}})$; определяющий размер - внутренний диаметр трубы. ε_ℓ - поправка на длину трубы. При $l/d > 50 \rightarrow \varepsilon_\ell = 1$. При $l/d < 50$:

ℓ/d	1	2	5	10	15	20	30	40	50
ε_ℓ	1,9	1,7	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1

5.2.2. Турбулентный режим

Для определения плотности теплового потока на стенке при турбулентном пограничном слое было получено уравнение (4.77):

$$q_w = \frac{s_c \cdot c_p (t_0 - t_c)}{w_0 \left[1 + \frac{12}{w_0} \sqrt{\frac{s_c}{\rho}} \left(Pr^{2/3} - 1 \right) \right]},$$

где s_c - касательное напряжение на стенке.

Пусть $w_0 = \bar{w}$, $t_0 = \bar{t}$ - средние по сечению скорость и температура жидкости.

В случае безотрывного течения, когда гидравлическое сопротивление определяется силами трения, s_c находят, зная гидравлическое сопротивление ζ для стабилизированного течения.

Если перепад давления на участке идёт на преодоление трения стенки, то $\Delta P \cdot f = S_c \cdot F$, где f - поперечное сечение трубы; F - поверхность рассматриваемого участка трубы. Перепад давления находим по закону Дарси: $\Delta P = \zeta \frac{l}{d} \frac{\rho \bar{w}^2}{2}$. Тогда $S_c = \Delta P \frac{f}{F} = \zeta \frac{l}{d} \frac{\rho \bar{w}^2}{2} \frac{f}{F}$. Для круглой трубы: $\frac{\ell}{d} \cdot \frac{f}{F} = \frac{1}{4}$.

$$\text{Отсюда } S_c = \frac{\zeta}{8} \rho \cdot \bar{w}^2. \quad (5.2)$$

Подставим (5.2) в уравнение плотности теплового потока на стенке (4.77) и разделим его правую и левую части на $\rho \cdot c_p \cdot \bar{w} (t - t_c)$. После деления получим

$$St = \frac{\alpha}{\rho \cdot c_p \cdot \bar{w}} = \frac{\frac{\zeta}{8}}{1 + 12 \sqrt{\frac{\zeta}{8}} (Pr^{2/3} - 1)}. \quad (5.3)$$

$$\text{При } Pr = 1 \rightarrow St = \frac{\zeta}{8} \text{ или } Nu = \frac{\zeta}{8} Re \cdot Pr. \quad (5.4)$$

Если в (5.4) подставить экспериментально найденную функцию $f(Pr) = 0,91 Pr^{0,43}$, а ζ рассчитывать, как $\zeta = 0,184 Re_d^{-0,2}$, то получим

$$Nu_{\text{жсд}} = 0,021 Re_{\text{жсд}}^{0,8} Pr_{\text{жс}}^{0,43} (Pr_{\text{жс}} / Pr_c)^{0,25} \varepsilon_\ell. \quad (5.5)$$

$$\text{При } l/d > 50 \rightarrow \varepsilon_\ell = 1. \quad \text{При } l/d < 50 \rightarrow \varepsilon_\ell \approx 1 + \frac{2}{\ell/d}.$$

Определяющая температура - $t_{жк} = 0,5(t_{вх} + t_{вых})$. Определяющий размер - эквивалентный диаметр: $d_e = \frac{4f}{\Pi}$.

5.2.3. Переходный режим

При числах $Re = 2 \cdot 10^3 \div 10^4$ теплоотдача зависит от большого числа факторов, трудно поддающихся учёту. При $Re = const$ коэффициент перемежаемости возрастает с увеличением расстояния от входа в трубу, а также возрастает и с увеличением Re . Чем больше Re , тем на меньшей длине трубы может быть ламинарный режим. Переход от ламинарного режима течения к турбулентному может не одновременно происходить в ядре потока и в пограничном слое. Чем больше степень турбулентности на входе в трубу, тем меньше длина ламинарного пограничного слоя. Обобщённые методики расчёта теплообмена в переходной области отсутствуют. Приближённая оценка max и min значений может быть получена по уравнениям для турбулентного и ламинарного режимов течения.

5.2.4. Изогнутые трубы

При движении в таких трубах в жидкости возникают центробежные силы, создающие в поперечном сечении **циркуляционные токи** (вторичную циркуляцию). В результате возникает движение жидкости по винтовой линии. С уменьшением радиусагиба R влияние центробежного эффекта увеличивается. Вторичная циркуляция может наблюдаться как при турбулентном, так и при ламинарном течении.

$$Re'_{кр} \approx 2000. \quad Re''_{кр} = 18500 \left(\frac{d}{2R} \right)^{0,28}; \quad Re < Re'_{кр} - \text{ламинарное течение}$$

без вторичной циркуляции. При $Re'_{кр} < Re < Re''_{кр}$ - ламинарное течение со вторичной циркуляцией. Коэффициент теплоотдачи α рассчитывается по уравнению (5.5). При $Re > Re''_{кр}$ - турбулентное течение со вторичной циркуляцией. В этом случае расчёт ведётся по уравнению (5.5) с умножением на поправку $\varepsilon_{изг} = 1 + 1,8 \frac{d}{R}$.

5.2.5. Теплоотдача в шероховатых трубах

При течении жидкости в данных условиях происходят дополнительные гидродинамические преобразования, связанные с высотой бугорка шероховатости δ и толщиной вязкого подслоя δ_n . Рассматривают два основных случая:

- **бугорки шероховатости глубоко нагружены в подслое** ($\delta < \delta_n$). В этом случае течение в подслое не нарушается, бугорки обтекаются жидкостью без её отрыва.

- **бугорки шероховатости выходят за пределы вязкого подслоя** ($\delta > \delta_n$). В этом случае происходит отрывное, турбулентное обтекание

жидкостью бугорков. Пульсации у стенки заметно увеличиваются. Всё это приводит к возрастанию теплоотдачи.

При ламинарном течении ни коэффициент α , ни гидравлическое сопротивление не зависят от относительной шероховатости. Теплообмен может быть увеличен за счёт большей поверхности теплообмена шероховатой стенки.

При турбулентном течении эти факторы влияют на α . С уменьшением δ/d возрастает $Re_{кр}$, после которого меняется α . С увеличением α увеличивается гидравлическое сопротивление.

Оптимальный относительный шаг искусственной шероховатости: $(S/\delta)_{opt} = 12-14$; где S - расстояние между соседними неровностями. Для расчёта средней теплоотдачи может быть использована зависимость:

$$Nu_{\alpha, d, \text{с шер}} = 0,022 Re_{\alpha, d}^{0,8} Pr_{\alpha}^{0,47} (Pr_{\alpha} / Pr_{\infty})^{0,25} \cdot \varepsilon_o, \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_{ш} = \exp \left[0,85 \frac{(S/\delta)_{opt}}{S/\delta} \right]; \quad \text{при } \frac{S}{\delta} > \left(\frac{S}{\delta} \right)_{opt};$$

$$\varepsilon_{ш} = \exp \left[0,85 \frac{S/\delta}{(S/\delta)_{opt}} \right]; \quad \text{при } \frac{S}{\delta} < \left(\frac{S}{\delta} \right)_{opt}.$$

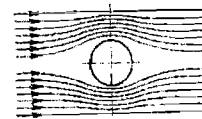
где

Определяющие температура и линейный размер аналогичны уравнению (5.5).

6. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ПОПЕРЕЧНОМ ОМЫВАНИИ ТРУБ И ПУЧКОВ ТРУБ

6.1. Одиночная труба

Плавное, безотрывное обтекание цилиндра, как показано на рис. 6.1, существует до $Re = 5 = \frac{w_0 \cdot d}{\nu}$, где w_0 - скорость набегающего потока, d - внешний диаметр. При $Re > 5$ картина меняется. Пограничный слой, образующийся на передней половине трубы, в кормовой части отрывается от поверхности и позади цилиндра образуются два сим-



метричных вихря. Вихри периодически отрываются от трубы и уносятся потоком жидкости, образуя вихревую дорожку (рис. 6.2). Частота отрыва вихря растёт до $Re \approx 10^3$. Затем рост частоты прекращается и при $Re = 10^3 \div 2 \cdot 10^5$ становится постоянной величиной, характеризуемой числом Струхала $Sh = \frac{f \cdot d}{w_0} = 0,2$, где f - частота отрыва.

Отрыв пограничного слоя происходит из-за снижения скорости в кормовой части трубы ($\varphi > 90^\circ$), повышения вследствие этого статического давле-

ния, под действием которого возникают возвратные течения, оттесняющие пограничный слой с поверхности тела.

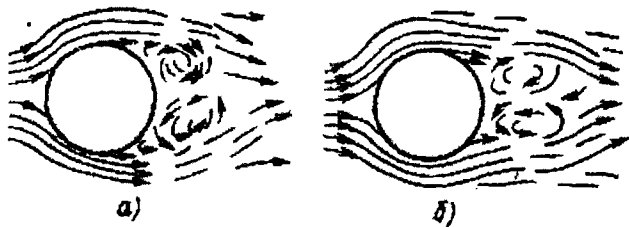


Рис. 6.2. Обтекание цилиндра при отрыве ламинарного (а) и турбулентного (б) пограничного слоя

При невысоких числах Re и малой степени турбулентности набегающего потока происходит отрыв ламинарного пограничного слоя (рис. 6.2,а); $\varphi_{кр} \approx 82^\circ$. При высоких числах Re , рост статического давления приводит не к отрыву, а к переходу режима течения в слое в турбулентное, обладающего большей кинетической энергией. В результате место отрыва турбулентного слоя резко смещается по потоку (рис. 6.2,б); $\varphi_{кр} \approx 140^\circ$. При постоянных числах Re повышение степени турбулентности приводит к уменьшению φ (рис. 6.3). Кривая 1 соответствует теплоотдаче при отрыве ламинарного пограничного слоя, кривая 2 – турбулентного.

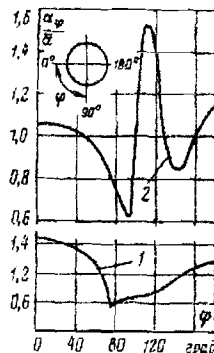


Рис. 6.3. Изменение теплоотдачи по окружности цилиндра

Падение α на лобовой части трубы происходит из-за роста толщины ламинарного пограничного слоя. Минимум α на кривой 1 соответствует месту отрыва слоя. В кормовой части трубы наблюдается сложный вихревой характер движения. При малых Re теплоотдача на корме трубы невысокая. С возрастанием Re α могут сравниться с интенсивностью теплообмена на лобовой части. На кривой 2 первый минимум α соответствует переходу ламинарного течения в слое в турбулентное. α резко возрастает. Второй минимум α соответствует месту отрыва турбулентного пограничного слоя. После отрыва труба омывается вихрями. Вследствие этого α возрастает. Расчетные зависимости по теплоотдаче были обобщены А.Жукаускасом:

$$5 < Re < 10^3 \rightarrow Nu_{ж} = 0,5 Re^{0,5} Pr_{ж}^{0,38} \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}; \quad (6.1)$$

$$10^3 < Re < 2 \cdot 10^5 \rightarrow Nu_{ж} = 0,25 Re^{0,6} Pr_{ж}^{0,38} \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}; \quad (6.2)$$

$$Re = 2 \cdot 10^5 \div 2 \cdot 10^6 \rightarrow Nu_{ж} = 0,023 Re^{0,8} Pr_{ж}^{0,38} \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}. \quad (6.3)$$

В уравнениях (6.1-6.3) определяющий линейный размер – d . Скорость взята в узком сечении канала. Определяющая температура: $t_{ж} = 0,5(t_{вх} + t_{вых})$.

С увеличением степени турбулентности потока α увеличивается:

$$Nu = Nu_0 [1 + 0,09(Re \cdot Tu)^{0,2}], \text{ где } Nu_0 - \text{определяется по (6.2).}$$

С уменьшением угла атаки (φ) коэффициент теплоотдачи α уменьшается:

$$\alpha_\varphi = \bar{\alpha}_{\varphi=90^\circ} (1 - 0,54 \cos^2 \varphi).$$

6.2. Теплоотдача при поперечном омывании пучков труб

В промышленности трубы используются в пучках, которые классифицируются на **коридорные** и **шахматные**. Основными характеристиками пучка являются **поперечный шаг** S_1 и **продольный шаг** S_2 .

Форма течения жидкости в пучке зависит от характера течения до пучка. При низких Re течение может оставаться ламинарным.

Турбулентный пограничный слой на стенках труб пучка может появиться при меньших Re , чем при омывании одиночной трубы: $Re_{кр} \approx 10^5$.

При $Re < 1 \cdot 10^5$ передняя часть труб омывается ламинарным пограничным слоем, а кормовая – отдельными неупорядоченными вихрями. Таким образом, общий характер течения – смешанный. Соответственно выделяются три режима омывания: ламинарный, смешанный и турбулентный. Для смешанного режима $Re = 1 \cdot 10^3 \div 1 \cdot 10^5$.

Омывание первого ряда труб шахматного и коридорного пучков (рис.6.4) аналогично омыванию одиночного цилиндра. Характер омывания остальных труб зависит от типа пучка. Трубы второго и последующего рядов коридорного пучка находятся в вихревой зоне, образованной впереди стоящими трубками. Однако основной поток проходит в продольных коридорах между рядами. Поэтому как лобовая, так и кормовая часть труб коридорного пучка омываются с меньшей интенсивностью по сравнению с аналогичными трубками

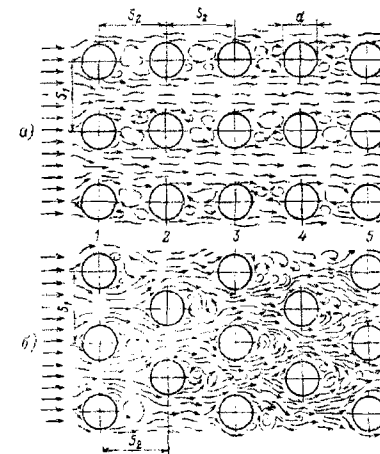


Рис. 6.4. Характер движения жидкости в коридорном (а) и шахматном (б) пучках труб

7. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ СВОБОДНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

Причина возникновения свободного движения – теплообмен. Свободное движение возникает под действием разности плотностей нагретых и холодных частиц неравномерно нагретой жидкости.

Если жидкость находится в поле силы тяжести, то наличие неоднородного поля плотностей вызывает появление результирующих подъемных сил, приводящих жидкость в движение, которое называют **гравитационной свободной конвекцией**.

Вдоль нагретой пластины снизу вверх движется ламинарный слой, толщина которого растет по мере того, как в процесс нагрева вовлекаются все новые частицы жидкости (рис. 7.1). На некоторой высоте ламинарный слой начинает разрушаться и переходит в турбулентный с ламинарным подслоем. α уменьшается по мере увеличения толщины ламинарного пограничного слоя и стабилизируется в области турбулентного движения.

Распределение скорости по толщине слоя напоминает параболическую эпюру (рис. 7.2).

На поверхности теплообмена и на внешней границе слоя скорость равна нулю. В отличие от вынужденного движения скорость является функцией определяющих параметров процесса и не входит в условия однозначности. Температура в пограничном слое изменяется от температуры на поверхности теплообмена t_c до температуры окружающей среды $t_{ж}$.

Для аналитического исследования теплоотдачи в условиях свободного движения могут быть использованы методы теории пограничного слоя, применяемые в задачах теплообмена при вынужденном движении. Однако аналитические решения не всегда совпадают с результатами эксперимента и практики.

Поскольку свободное движение существует при наличии неоднородного поля плотностей, то в уравнение движения вводится подъемная сила: $\rho g \beta \vartheta$, которое, в связи с этим, запишется как:

$$\rho \frac{Dw}{dt} = -\rho \cdot g \cdot \beta \cdot \vartheta - \nabla P + \mu \cdot \nabla^2 w.$$

Определяющим критерием при свободном гравитационном движении является критерий Грасгофа $Gr = \beta \frac{g \cdot \ell^3}{\nu^2} \vartheta$, где $\beta [1/^\circ\text{K}]$ – температурный ко-

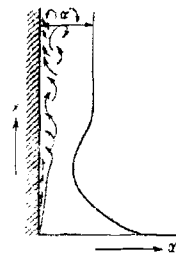


Рис. 7.1. Изменение α при свободном движении жидкости вдоль вертикального листа

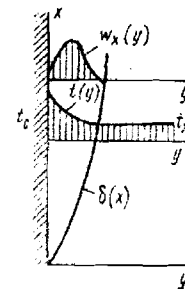


Рис. 7.2. Распределение температуры и скорости в пограничном слое у нагретой вертикальной поверхности

первого ряда. Характер омывания труб шахматного пучка практически аналогичен трубкам первого ряда.

Изменения α по окружности труб первого ряда коридорного и шахматного пучков соответствуют распределению α для одиночной трубы (рис. 6.5). Для остальных труб коридорного пучка максимум α наблюдается при $\varphi \approx 50^\circ$. Два максимума α приходятся на удар набегающих струй. Лобовая часть труб интенсивному воздействию потока подвергается. Поэтому α не невысокие. В трубах шахматного пучка максимум теплоотдачи приходится на лобовую часть.

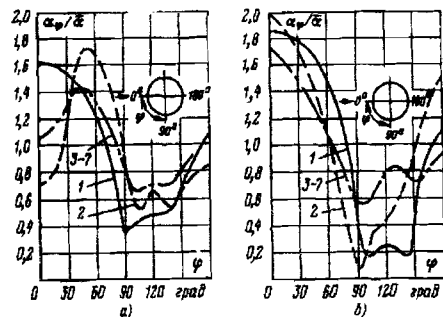


Рис. 6.5. Изменение α по периметру труб для различных рядов коридорных (а) и шахматных (б) пучков

Средняя теплоотдача труб первых рядов определяется начальной турбулентностью потока. Начиная с третьего ряда, теплоотдача стабилизируется, поскольку степень турбулентности потока определяется компоновкой пучка.

Теплоотдача первого ряда шахматного пучка составляет 60 % теплоотдачи третьего ряда, второго – 70 %. В коридорных пучках на первый ряд приходится 60 % от α третьего, а α второго – 90 % от α третьего. Возрастающие теплоотдачи по рядам объясняется дополнительной турбулизацией потока в пучке. Если же поток дополнительно турбулизирован до пучка, то α первых рядов может быть выше α глубинных.

При смешанном режиме α_{cr} ряда может определяться согласно зависимости:

$$Nu_{ж} = c Re_{ж}^n Pr_{ж}^{0,38} \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} \varepsilon_s. \quad (6.4)$$

Для шахматных пучков $c = 0,41$; $n = 0,6$.

Для коридорных пучков $c = 0,26$; $n = 0,65$.

ε_s – учитывает влияние относительных шагов: S_1/d – относительный поперечный и S_2/d – относительный продольный шаги. $\varepsilon_s = (S_2/d)^{0,15}$ – для коридорного; $\varepsilon_s = (S_1/S_2)^{1,6}$ при $S_1/S_2 < 2$ для шахматного и при $S_1/S_2 \geq 2$: $\varepsilon_s = 1,12$. Определяющий размер – внешний диаметр. Скорость жидкости берется по узкому сечению пучка. Определяющая температура – средняя температура жидкости: $t_{ж} = 0,5(t_{вх} + t_{вых})$.

Средний для пучка труб коэффициент теплоотдачи определяется как:

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + (n-2)\alpha_3}{n}.$$

коэффициент объемного расширения, представляющий собой относительное изменение объема при изменении температуры на один градус.

Критериальное уравнение теплообмена при свободной конвекции

имеет вид: $Nu = C (Gr \cdot Pr)_m^n$. (7.1)

Экспериментально установлено существование трех режимов движения, каждому из которых соответствуют пределы изменения $(Gr \cdot Pr)_m$.

Для охлаждаемых на воздухе проволок малого диаметра (1 мм) при достаточно малых значениях $(Gr \cdot Pr)_m$ число Nu принимает постоянное значение

$Nu = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda} = 0,45 \pm 0,5$. Теплота в этом случае переносится за счет теплопроводности через пленку нагретого воздуха, обволакивающего проволоку. По-

этому электропровода выдерживают большие плотности тока без сжогов, поскольку α обратно пропорционален диаметру.

Значению $(Gr \cdot Pr) > 5 \cdot 10^2$ соответствует ламинарное движение, при $(Gr \cdot Pr) > 2 \cdot 10^7$ устанавливается турбулентный режим. Коэффициент C и показатель n находятся по таблице:

$Gr \cdot Pr$	$1 \cdot 10^3 \div 5 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^2 \div 2 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7 \div 1 \cdot 10^{13}$
C	1,18	0,54	0,135
n	1/8	1/4	1/3

При турбулентном режиме в области $n = 1/3$, α не зависит от определяющего размера. Такой процесс теплообмена называют автомодельным. Уравнение (7.1) применимо для любых капельных и упругих жидкостей при $Pr \geq 0,7$ для тел любых форм и размеров. За определяющую температуру взята средняя температура пограничного слоя: $t_m = 0,5(t_{жс} + t_c)$. За определяющий размер для труб и шаров – диаметр, для вертикальных плит – их высота, для горизонтальных плит – их меньшая сторона. Для горизонтальных плит α увеличивается на 30 %, если нагретая сторона обращена вверх.

Теплоотдача при свободном движении жидкости в ограниченном пространстве (рис. 7.3) зависит от формы и размеров пространства, рода жидкости и температурных характеристик поверхностей, ограничивающих пространство (воздушные изоляционные прослойки).

Из-за сложности процессов определить α обычным путем с учетом особенностей движения не удастся. Для практических расчетов тепловой поток через прослойки толщиной δ рассчитывается по уравнению теплопроводности (рис. 7.3): $q = \frac{\lambda_{экв}}{\delta} (t_{c1} - t_{c2})$, где $\lambda_{экв}$ – эквивалентная

теплопроводность, учитывающая конвективный перенос теплоты; t_{c1} и t_{c2} – температуры горячей и холодной поверхностей, разделенных прослойкой; $\lambda_{экв} = \epsilon_k \lambda_{ж}$,

ϵ_k – коэффициент, учитывающий влияние конвекции:

$\epsilon_k = f(Gr \cdot Pr)$, может быть взят из рис. 7.4.

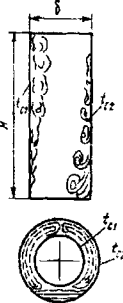


Рис. 7.3. Циркуляция жидкости в замкнутом пространстве

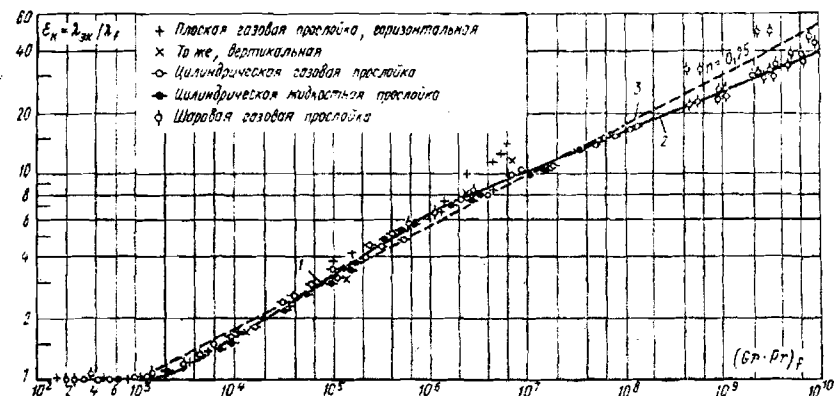


Рис. 7.4. Коэффициент ϵ_k – при естественной циркуляции в замкнутом объеме

8. КИПЕНИЕ

По принципу кипения все промышленные испарители можно разделить на две основные группы:

- в которых кипение осуществляется в большом объеме;
- кипение осуществляется в условиях направленного движения жидкости (аппараты с естественной и принудительной циркуляцией).

8.1. Теплообмен при пузырьковом кипении жидкости в большом объеме

При пузырьковом кипении паровая фаза образуется в виде отдельных паровых пузырьков, зарождающихся в определенных местах теплоотдающей поверхности: центрах парообразования. Каждый центр генерирует паровую фазу с определённой частотой f . Зародившись у данного центра, паровой пузырёк в течение некоторого времени растёт в объёме, а затем отрывается от поверхности и всплывает, увлекая за собой некоторое количество жидкости из пристенной области в основное ядро. Во время своего роста пузырёк, вытесняя жидкость, вызывает её перемещение со скоростью, примерно равной скорости роста радиуса R пузыря dR/dt . После отрыва пузырька освободившееся пространство заполняется жидкостью, подтекающей к стенке из основного объёма. Когда эта жидкость прогреется до температуры, господ-

ствующей в пристенной области, у данного центра зарождается новый пузырь.

Таким образом, процесс генерации пара вызывает интенсивный массообмен в кипящей жидкости и дополнительную турбулизацию пристенной области, что существенно повышает интенсивность теплообмена. При достаточно большом числе действующих на единице поверхности центров парообразования z пограничный слой настолько сильно турбулизируется, что значение α при пузырьковом кипении оказывается заметно выше, чем при конвективном теплообмене в однофазной среде. Однако высокая интенсивность теплообмена наблюдается в том случае, если кипящая жидкость смачивает поверхность.

Высокие значения коэффициента теплоотдачи, устанавливающиеся при пузырьковом кипении, позволяют отводить от теплоотдающей поверхности тепловые потоки порядка $10^6 \div 10^7$ Вт/м² при умеренных температурных напорах. Это объясняется тем, что возникает новый, значительно более мощный по сравнению с турбулентным обменом в однофазной среде механизм переноса. Основная масса теплоты выносятся из пристенного слоя в объём жидкости с паром пузырей, т.е. в виде теплоты испарения. Наряду с этим часть теплоты отводится в виде избыточной энтальпии перегретой жидкости, увлекаемой паровыми пузырями при их отрыве от поверхности.

Опыт показывает, что число действующих центров парообразования, а следовательно, и значение α увеличиваются с ростом величины плотности теплового потока, передаваемого кипящей жидкости.

На рис. 8.1 представлена зависимость α от q при кипении воды под атмосферным давлением на погруженной поверхности.

Участок AB соответствует конвективному теплообмену в однофазной среде в условиях естественной конвекции: $Nu = C(Gr \cdot Pr)^n$. Участок CD характеризует область развитого пузырькового кипения. Между областью естественной конвекции в однофазной среде и развитого пузырькового кипения имеется **переходная зона**, в которой в паровую фазу генерируют отдельные центры. С увеличением q число z быстро растёт и это способствует существенной интенсификации процесса теплообмена.

Следовательно, $\alpha \propto q^n$, где $n = 0,65 \div 0,7$.

Тогда $\alpha = k \cdot q^{0,7}$, где k - коэффициент зависящий от свойств жидкости, теплоотдающей поверхности и ряда других факторов.

В точке D возникает **кризис теплообмена**. Он обусловлен непрерывным ростом числа центров парообразования. Кризис связан с потерей гидродинамической устойчивости жидких плёнок между пузырьками и слиянию отдельных пузырей в общую паровую плёнку, отделяющую жидкость от теп-

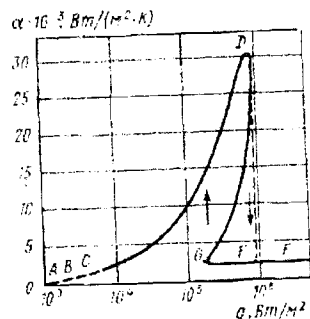


Рис. 8.1. Теплообмен при кипении воды в большом объеме

лоотдающей поверхности. Тепловой поток, при котором режим пузырькового кипения сменяется пленочным, называется **первым критическим тепловым потоком**. Переход к **плёночному кипению** обычно сопровождается резким снижением α , так как в этом случае теплота от поверхности теплообмена к жидкости передаётся через плёнку пара. Участок GF характеризует область плёночного кипения. Когда тепловой поток осуществляется независимо от условий теплообмена (электрообогрев, горелка), кризис теплообмена развивается по линии DE . При обогреве насыщенным паром - по линии DG .

Независимо от способа обогрева поверхности переход от плёночного режима кипения к пузырьковому происходит при q в несколько раз меньшем величине $q_{кр1}$. Этот тепловой поток называют **вторым критическим тепловым потоком** $q_{кр2}$.

В процессе кипения жидкость испаряется в паровой пузырек, т.е. с криволинейной (вогнутой) поверхности раздела фаз. Следовательно, молекулы жидкости при пересечении границы раздела фаз должны совершать большую работу против молекулярных сил, чем при испарении с плоской поверхности. Таким образом, жидкость должна иметь определенный перегрев по отношению к температуре насыщения Δt_1 .

Так как поверхность пузыря является замкнутой, то вследствие действия молекулярных сил давление пара в паровом пузыре всегда больше давления насыщения P . Чтобы жидкость могла испаряться в пространство с большим давлением, она должна быть перегрета на величину Δt_2 .

$$\text{Суммарный перегрев составляет } \Delta t_{пер} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2\sigma}{R} \frac{T_n}{r \cdot \rho} \quad (8.1)$$

При $R \rightarrow 0$, $\Delta t_{пер} \rightarrow \infty$. Это означает, что в реальных условиях процесс генерации пара может происходить только в том случае, если в жидкости уже имеются зародыши паровой фазы конечного радиуса кривизны (центры парообразования). Такими центрами являются элементы микрошероховатости поверхности: впадины, микротрещины, заполненные газом или паром данной жидкости. Однако даже при полном удалении инородных центров парообразования (полировка, дегазация) для каждой жидкости существует своё предельное значение перегрева, которым определяется граница её метастабильных состояний. Опыты показывают, что значительный перегрев жидкости наблюдается только в пристенном слое. На расстоянии 2 мм от поверхности величина перегрева равна примерно $0,5^\circ\text{C}$ (рис.8.2).

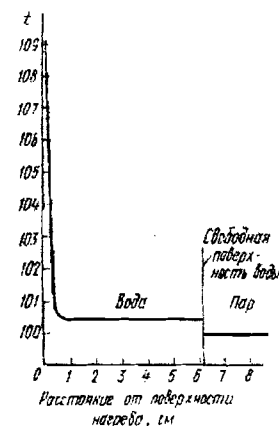


Рис. 8.2. Распределение температуры воды при ее кипении в большом объеме

Поэтому в испарительной аппаратуре паровые пузыри возникают на теплоотдающей поверхности, а не в объеме жидкости.

Величиной перегрева жидкости определяются значения всех локальных характеристик процесса парообразования: **скорость роста парового пузыря, число центров и частота парообразования, диаметр пузыря при отрыве от поверхности**, а следовательно, и интенсивность теплообмена. При выводе уравнения, определяющего скорость роста парового пузыря, исходят из балансового соотношения, утверждающего, что приращение массы пара за время $\Delta \tau$ равно массе испарившейся за это время жидкости:

$$\rho'' dV_p = \rho' \left[\frac{dF}{d\tau} \right] \Delta \tau,$$

где F и V_p – текущие значения объема и поверхности пузыря соответственно; ρ' – плотность жидкой фазы; ρ'' – плотность паровой фазы; $dF/d\tau$ – массовый поток, передаваемый от жидкости через поверхность пузыря.

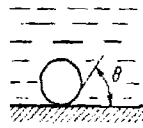
В окончательном виде получаем $\frac{dR}{d\tau} = \beta \frac{a}{R} Ia$, $\beta = 5 + 10$ – коэффициент, зависящий от свойств жидкости и геометрии пузыря; $Ia = \frac{C_p \cdot \Delta t}{r} \frac{\rho'}{\rho''}$ – (8.2)

– **число Якоба**. Уравнение хорошо согласуется с опытными данными при $Ia < 10$.

Величина **диаметра парового пузыря** определяется из условия равновесия пузыря в момент отрыва от теплоотдающей поверхности. Если рассматривать процесс роста пузыря как квазистатический, то условие равновесия обычно записывается в виде равенства архимедовой (подъемной) силы, стремящейся оторвать пузырь от поверхности, и силы поверхностного натяжения, удерживающей его на стенке. Для шаровой формы пузыря это уравнение имеет вид: $\frac{\pi \cdot d_0^3}{6} (\rho' - \rho'') g = \pi \cdot d_0 \cdot \sigma \cdot f(\theta)$, где θ – краевой угол (рис. 8.3).

На основании опытных данных известно, что функция краевого угла $f(\theta)$ находится в соотношении $\sqrt{6f(\theta)} = 0,02\theta$.

С учетом этой зависимости $d_0 = 0,02\theta \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}} \cdot$ (8.3)



Из представленной зависимости видно, что $\sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}$ представляет собой величину, пропорциональную диаметру парового пузыря при отрыве от поверхности. Эта величина часто встречается в уравнениях, как характерный линейный размер парового пузыря l_0 .

В процессе теплообмена при пузырьковом кипении важной величиной является **частота парообразования**: $f_0 = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2}$, где τ_1 – время роста пузыря до момента отрыва от поверхности; τ_2 – период времени от момента отрыва до момента зарождения нового пузыря.

Произведение $f_0 d_0$ является некоторой мерой **скорости роста пузыря**:

$f_0 \sqrt{d_0} = 0,56 \left[\frac{(\rho' - \rho'')}{\rho'} g \right]^{0,5}$, а произведение $f_0 d_0^3$ – мерой объемного количества пара, генерируемого каждым центром парообразования в единицу времени:

$$f_0 d_0^3 = 588 \left[\frac{\rho' \cdot a^5}{g(\rho' - \rho'')} \right]^{1/3} Ja^{5/3}.$$

Уравнениями, описывающими процесс теплообмена при пузырьковом кипении являются:

– **уравнения движения для жидкой и паровой фаз**

$$\rho' \left(\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) = \rho' \cdot g - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu' \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right);$$

$$\rho'' \frac{Dw_x}{dt} = (\rho' - \rho'')g - \nabla P_x + \mu'' \nabla^2 w_x$$

– **уравнения сплошности для жидкой и паровой фаз**

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0;$$

$$\text{div} w'' = 0$$

– **уравнение теплопроводности для жидкой фазы**

$$\frac{Dt}{d\tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{r - C_p \cdot \Delta t}{C_p} \text{div} w';$$

– **условия теплового взаимодействия на границе раздела фаз**

$$-\lambda \frac{dt}{dn} = r \cdot \rho'' \cdot w''$$

$$t_{ep} = t_n + \frac{T_n (\rho' - \rho'')}{r \cdot \rho'' \cdot \rho'} \left[\frac{2\sigma \cdot \rho'}{R(\rho' - \rho'')} - \frac{\lambda}{\mu' \cdot r} \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{ep} \sqrt{\frac{2\pi \cdot \beta \cdot T_n}{g}} \right],$$

где λ – коэффициент аккомодации; β – газовая постоянная; из первого уравнения теплового взаимодействия фаз находится скорость парообразования – $w'' = \frac{q}{r \cdot \rho''}$; второе уравнение – характеризует скачок температуры на границе раздела фаз;

– **условия механического взаимодействия на границе раздела фаз**

$$P_{ep} = P_{zp} + \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\mu'' \left(\frac{\partial w''}{\partial n} \right)_{ep} = \mu' \left(\frac{\partial w'}{\partial n} \right)_{ep}$$

$$(w'_{x,y})_{ep} = (w''_{x,y})_{ep}$$

где R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны на границе раздела в данной точке; первое уравнение системы характеризует скачок давления на границе раздела фаз; второе – равенство касательных напряжений;

– масштаб сформировавшихся пузырей

$$R \sqrt{\frac{g(\rho' - \rho'')}{\sigma}} = f\left(\theta; \frac{w^2}{g \cdot \ell} \dots \dots \delta/\ell \dots \dots z\right).$$

Приведенные уравнения объединяются в систему, которая, однако, не дает строгого аналитического решения. Поэтому задачи по теплообмену при кипении решаются методом теории подобия. Анализ указанной системы уравнений приводит к следующему уравнению с обобщенными переменными:

$$Nu_{\text{кип}} = f(P; Ks; Ar_{\text{кип}}; Kt; K_{\sigma}; K_p; B_0; \theta; l_0; Z_l);$$

$$Zl = \frac{\alpha \cdot l_0}{\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}; \quad Pr = \frac{\nu}{a};$$

$$Re_{\text{кип}} = \frac{w_{\text{кип}} \cdot l_0}{\nu} = \frac{q}{r \cdot \rho'' \cdot \nu} \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}};$$

(8.4)

$$Ar_{\text{кип}} = \frac{g \cdot l_0^3 (\rho' - \rho'')}{\nu^2} = \frac{g}{\nu^2} \left(\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{(\rho' - \rho'')}{\rho'};$$

$$Kt = \frac{(r \cdot \rho'')^2}{C_p \cdot t_n \cdot \rho' \cdot \sqrt{\sigma \cdot g(\rho' - \rho'')}} = \frac{r}{C_p \cdot t_n} \frac{rg^{\frac{1}{2}}}{\rho' \sqrt{\sigma g(\rho' - \rho'')}} = \frac{r}{C_p \cdot t_n} \frac{\rho''}{\rho'} \frac{\rho''}{(\rho' - \rho'')} \frac{r}{g \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}};$$

$$Ks = \frac{r}{C_p \cdot t_n} - \text{отношение теплоты, затраченной на парообразование к теп-$$

плоте, идущей на подогрев жидкости;

$$K_{\sigma} = \frac{r}{g \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}} - \text{мера отношения энергии, затраченной на испарение,$$

к энергии, израсходованной на образование поверхности раздела фаз в поле массовых сил;

$$K_p = \frac{P}{\sqrt{\sigma \cdot g(\rho' - \rho'')}} - \text{безразмерная форма перепада давления на границе}$$

раздела фаз;

$$B_0 = \frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')^2} - \text{аналог числа Бойда; характеризует относительные}$$

размеры зарождающихся паровых пузырей; l_0 – линейный размер системы; θ – краевой угол, характеризует способность жидкости смачивать теплоотдающую поверхность;

l_0 и Z_l – переменные, характеризующие относительные размеры зародившейся паровой фазы и число центров парообразования, т.е. свойства теплоотдающей поверхности.

Экспериментально установлено, что при кипении одной и той же жидкости на полированной поверхности α ниже, чем на необработанной технической поверхности. Установлено, что влияние шероховатости на интенсивность теплообмена при кипении проявляется в большей степени при малых тепловых нагрузках.

Интенсивность теплоотдачи при кипении зависит от давления, под которым находится жидкость. Известно, что α непрерывно возрастает с увеличением P . Однако при низких давлениях, как видно из рис. 8.4, зависимость $\alpha = f(P)$ менее резкая, чем при высоких.

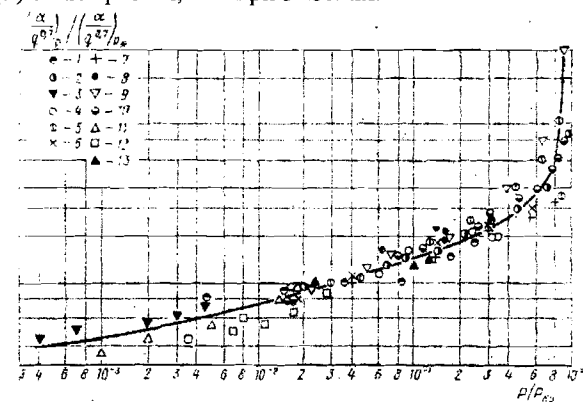


Рис. 8.4. Влияние давления на коэффициент теплоотдачи при кипении

К настоящему времени опубликовано значительное количество различных формул для определения значения α при развитом пузырьковом кипении насыщенной жидкости в условиях естественной конвекции. В большинстве случаев это эмпирические формулы типа: $\alpha = C \cdot q^n f(P)$. Значения C, n и $f(P)$ в этих формулах зависят от множества факторов, оказывающих влияние на интенсивность теплообмена при кипении. Из обобщенных эмпирических зависимостей, построенных на основе теории подобия, наибольшее распространение получила формула Н.Г. Стюшина: $Nu_{\text{исп}} = A [Pe_{\text{исп}} \cdot k_t^{0.63} \cdot k_{\sigma}^{0.5}]^n$, (8.5)

$$\text{где } Pe_{\text{исп}} = \frac{w_{\text{исп}} \cdot \ell_0}{a} = \frac{q}{r \cdot \rho'' \cdot a} \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}};$$

$$\text{при } N = Pe_{\text{исп}} \cdot k_t^{0.63} \cdot k_{\sigma}^{0.5} \geq 10^7 \rightarrow A = 3,2 \cdot 10^{-5}; n = 0,75;$$

$$\text{при } 5 \cdot 10^5 < N < 10^7 \rightarrow A = 2,65 \cdot 10^{-2}; n = 1/3.$$

8.2. Теплообмен при кипении в условиях направленного движения жидкости

Движение двухфазного потока имеет ряд особенностей. В условиях направленного движения среды паровые пузыри, образующиеся на теплоот-

дающей поверхности, испытывают дополнительное по сравнению с кипением в большом объеме динамическое воздействие со стороны потока жидкости. Под влиянием этих факторов меняются значения локальных характеристик процесса парообразования: уменьшается отрывной диаметр паровых пузырей, увеличивается частота их отрыва, деформируется поверхность пузырей и т.д. Все это оказывает влияние и на интенсивность теплообмена.

Поэтому для его характеристики наряду с величинами, рассчитанными по уравнениям материального и теплового балансов, приходится вводить величины, определение которых ведётся с учётом особенностей движения отдельных фаз. Параметры, рассчитанные по уравнениям материального и теплового балансов, называются **расходными параметрами**, а величины, характеризующие движение каждой из фаз в отдельности или гидродинамику всего потока, являются **истинными параметрами**.

Основными расходными параметрами двухфазного потока являются:

- **приведённая скорость жидкости** - $W'_0 = \frac{V'}{f}$, где V – объёмный расход;

- **приведённая скорость пара** - $W''_0 = \frac{V''}{f}$;

- **массовое паросодержание потока** - $x = \frac{G''}{G' + G''} = \frac{i_{cm} - i'}{r}$;

- **объёмное расходное паросодержание** - $\beta = \frac{V''}{V' + V''} = \frac{w''_0}{w'_0 + w''_0} = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x} \frac{\rho'}{\rho''}}$.

Движение среды характеризуется также величиной **массовой скорости**: $G/f = \rho \cdot w$.

При движении двухфазного потока вдоль канала постоянного сечения линейные скорости w'_0 и w''_0 и массовые скорости отдельных фаз $\rho' \cdot w'$ и $\rho'' \cdot w''$ вследствие фазовых превращений изменяются. Однако неизменной будет оставаться величина $w_0 = \frac{\rho' \cdot w'}{\rho'} = \frac{G}{f \cdot \rho'}$, представляющая собой отношение массовой скорости всего потока к плотности жидкой фазы, взятой при температуре насыщения. Эта величина называется **скоростью циркуляции**.

Истинные параметры потока легко определить, если известна доля сечения канала, занимаемая паровой фазой: $\varphi = f''/f$, где f'' – сечение, занимаемое паром. Эта величина называется истинным объёмным паросодержанием. Тогда

- **истинная скорость пара**: $w'' = \frac{w''_0}{\varphi}$;

- **истинная скорость жидкой фазы**: $w' = \frac{w'_0}{1 - \varphi}$;

- **относительную скорость фаз (скольжение)**: $w_{отн} = w'' - w'$.

Определение истинных значений параметров двухфазного потока в различных сечениях канала является одной из основных задач гидродинамики.

Однако аналитические методы определения этих величин не приводят к точным результатам. Экспериментальные определения величин требуют трудоемких опытов и дорогостоящего оборудования. Поэтому во многих случаях при расчетах делают допущение: $\varphi = \beta$, т.е. рассматривают среду, как гомогенную смесь без учета скольжения. При этом скорость такой смеси оказывается равной $w_{см} = w'_0 + w''_0$.

При кипении в трубах процесс теплообмена наиболее полно описывается системой дифференциальных уравнений, включающей:

- уравнение движения двухфазного потока;
- уравнение конвективного переноса теплоты;
- уравнение, описывающее сток теплоты из пристенного слоя жидкости в ядро потока;
- уравнения граничных условий.

$$\left. \begin{aligned} g[(1-\varphi)\rho' + \varphi \cdot \rho''] \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{4\tau_{тр}}{d_{мп}} &= (1-\varphi)\rho' \cdot w' \frac{\partial w'}{\partial x} + \varphi \cdot \rho'' \cdot w'' \frac{\partial w''}{\partial x} + (\bar{w} - w') \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \cdot \rho'' \cdot w''); \\ \frac{4}{d} \lambda \left(\frac{dt}{dn} \right)_{n=0} &= [r - Cp(t_{ж} - t_n)] \frac{\partial (w'_0 \cdot \rho')}{\partial x}; \\ -\lambda \left(\frac{dt}{dn} \right)_{n=0} &= \Delta P_{мп} \frac{f}{F} \frac{Cp(t_1 - t_0)}{\bar{w} - w_1} + V_{ж} \cdot f_0 \cdot z \cdot \rho' \cdot Cp(t_1 - t_0) + c \cdot d_0^2 \cdot f_0 \cdot z \cdot \sigma; \\ \alpha \cdot \Delta t &= -\lambda \frac{dt}{dn}. \end{aligned} \right\} (*)$$

Система (*) приводит к следующей совокупности обобщенных переменных:

$$Nu = f(Re; Fr; Pr; Kw; Ks; K\sigma; \frac{w'_0}{w_0}; l_0/l; \rho''/\rho'). \quad (8.6)$$

Многие обобщения опытных данных проводятся в соответствии с (8.6).

Значение коэффициента теплоотдачи в условиях направленного движения жидкости так же, как и при кипении в большом объеме, определяется соотношением между интенсивностью механизма передачи теплоты, обусловленного процессом парообразования, и интенсивностью механизма конвективного теплообмена в однофазной среде.

8.2.1. Режимы течения восходящего двухфазного потока

Существование режима течения двухфазного потока зависит от теплофизических свойств жидкости и пара, расходов отдельных фаз и от размеров и положения трубы в пространстве. Визуальные наблюдения и киносъемка показали, что в вертикальных трубах существуют различные режимы течения (рис. 8.5).

Поскольку жидкость поступает в канал, как правило, недогретой до состояния насыщения, то необходимо определенное количество тепла и времени, чтобы довести ее до состояния насыщения. Участок 1 называется **участком течения однофазной жидкости**. Теплообмен на этом участке определяется условиями конвекции, т.е. турбулентным (скоростным) обменом в однофазной среде: $Nu = f(Re; Gr; Pr)$.

В обогреваемом канале пузырьки появляются еще до того, как средняя температура жидкости достигает температуры насыщения t_n . Образуются они на стенке, когда ее температура несколько превышает t_n . Достигнув определенного размера, пузырь сносится потоком, оставаясь сначала на стенке, а затем отрываясь от нее. При больших недогревах до t_n пузырь конденсируется в ближайших слоях потока, либо может проникать в его ядро. При этом происходит турбулизация пограничного слоя и усиление перемешивания ядра. На механизм передачи тепла за счет турбулентного обмена в этом случае накладывается влияние механизма передачи тепла за счет парообразования. Этот участок 2 называется **участком неустойчивости кипения**, а теплоотдача может быть рассчитана по уравнению:

$$St(K_p)^{-1/3} = 1,25 K_w (Pe_{исп}')^{-1/3} K_S^{0,5}, \quad (8.7)$$

$$St = \frac{\alpha}{C_p \cdot \rho' \cdot w_{см}}; \quad K_p = K_p \left[\frac{\rho' - \rho''}{\rho''} \right]^{0,5} = \left(\frac{p}{\sigma} \right) \cdot \left(\frac{\sigma}{g \cdot \rho'} \right)^{0,5},$$

$$Pe_{исп}' = Pe_{исп} \left(\frac{\rho''}{\rho'} \right) \cdot \left(\frac{\rho' - \rho''}{\rho''} \right)^{0,5} = \frac{q}{r \cdot \rho' \cdot a} \sqrt{\frac{\sigma}{g \cdot \rho'}}$$

Пузырьковый режим 3 устанавливается при низких паросодержаниях, когда весь поток достигает температуры насыщения. В этих условиях пар движется в потоке жидкости в виде отдельных пузырей небольшого диаметра 1-3 мм. При этом турбулизация ядра жидкости паровыми пузырями настолько сильная, турбулентным механизмом передачи теплоты можно пренебречь и считать, что отвод тепла от стенки полностью определяется механизмом передачи за счет парообразования. Теплоотдача может быть рассчитана, как при кипении жидкости в большом объеме по уравнению (8.5).

С увеличением паросодержания пузыри сливаются в крупные образования - снарядные пузыри, занимающие большую часть сечения канала. Они разделяются прослойками жидкости, в которых так же, как и при пузырьковом режиме, движутся небольшие пузырьки пара. Количественно теплоотдача в этом случае может быть рассчитана, как при пузырьковом кипении жидкости. Этот участок называется **участком снарядного течения**.

С дальнейшим увеличением паросодержания пузыри - снаряды сливаются и устанавливается **кольцевое течение**. При этом режиме жидкость движется по периметру в пленке вдоль стенки трубы. В паровом стержне в центре трубы движутся лишь отдельные капли жидкости. Ввиду того, что пар движется на этом участке с высокими скоростями (до 50 м/с), то за счет сил трения пленка жидкости значительно разгоняется. Поэтому на механизм передачи тепла за счет парообразования накладывается турбулентное влияние в

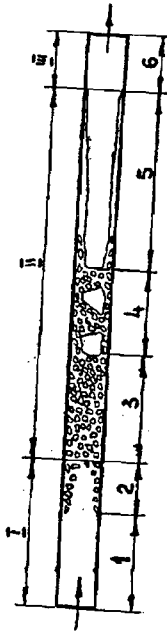


Рис. 8.5. Структура потока при кипении жидкости внутри вертикальной трубы

однофазной среде. Теплоотдача на этом участке может быть рассчитана по формуле А.А. Андреевского:

$$\alpha/\alpha_{б,о} = 0,65 \left[1 + 1,5 \cdot 10^{-8} \left(\frac{w_{см} \cdot r \cdot \rho'}{q} \right)^{3/2} \right], \quad (8.8)$$

где $\alpha_{б,о}$ - рассчитывается по (8.5).

Дальнейшее возрастание паросодержания приводит к режиму течения паровой смеси, когда почти вся жидкость более или менее равномерно распределена по всему сечению трубы, и движется в виде диспергированного потока капель. Такой режим течения называется дисперсно-кольцевым.

Как видно, каждый участок трубы с типовым течением потока жидкости характеризуется одним или несколькими механизмами передачи тепла, определяющими интенсивность теплоотдачи. Выделить в настоящее время эти участки обычным путем довольно сложно, поэтому наибольшее распространение пока получают зависимости, учитывающие усредненный по всей поверхности трубы теплообмен. Наиболее известна из них расчетная зависимость Н.Г. Стюшина:

$$\frac{Nu_{кип}}{Nu_{б,к}} = 6150 \cdot N^{0,7}, \quad (8.9)$$

где $N = \frac{q}{r \cdot \rho'' \cdot w} \left(\frac{\rho''}{\rho'} \right)^{1,45} \left(\frac{r}{C_p \cdot T_n} \right)^{0,333}$. При $N \leq 0,4 \cdot 10^{-5} \rightarrow Nu_{кип} = Nu_{б,к}$; $Nu_{б,к}$ - рассчитывается по уравнениям для течения однофазной жидкости.

8.2.2. Гравитационно стекающий двухфазный поток в вертикальных трубах

Различают 6 режимов при опускном течении кипящей жидкости в вертикальной трубе (рис. 8.6). При этом в отличие от восходящего режима течения в условиях развитого пузырькового кипения, при котором пузырьки распределены по всему сечению трубы, при **нисходящем пузырьковом потоке** паровые пузырьки концентрируются вокруг оси трубы (а).

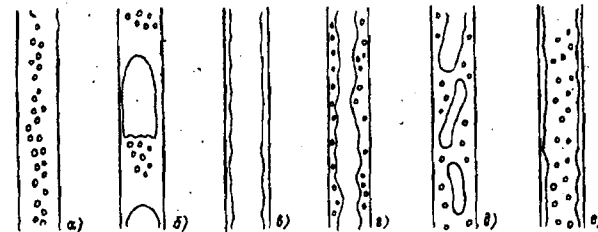


Рис. 8.6. Нисходящий поток в вертикальной трубе:

а - пузырьковый; б - снарядный; в - падающая пленка; г - кипящая падающая пленка; д - пенный; е - дисперсно-кольцевой

В этих условиях скорость пара ниже скорости течения жидкости. Поэтому при всех режимах доля сечения, занятая паром, выше, чем при подъемном движении.

С увеличением расхода газа пузырьки образуют большие газовые образования – пробки, имеющие форму снарядов. Этот **снарядный режим** течения (б) более устойчив, чем при подъемном течении.

Кольцевой режим течения может иметь несколько модификаций. При малых расходах жидкости и газа пленка жидкости стекает вниз по стенке трубы (**плёночный** – в). С увеличением расхода жидкости и газа образуется пузырьковая **падающая пленка** (г), затем **пенный режим** течения (д), который при достаточно высоких расходах газа может перейти в **дисперсно-кольцевой режим** (е).

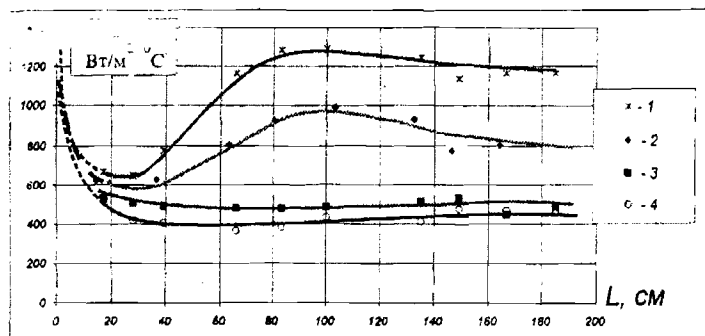


Рис. 8.7. Распределение локальных коэффициентов теплоотдачи по длине трубы при малых числах Re при гравитационном течении пленки жидкости

На рис. 8.7 дано распределение локальных коэффициентов теплоотдачи по длине трубы при гравитационном течении пленки жидкости. Показано, что в пределах 20 см длины экспериментальной трубы расположен начальный участок, характеризующийся уменьшением α , и далее участок стабилизированного теплообмена. Теплоотдача для данного случая может быть рассчитана по уравнению:

$$Nu_{м,ж} = (0,165 Re_{ж}^{0,16} - 0,4) Pr_{ж}^{0,34} \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} \cdot \varepsilon_a, \quad (8.10)$$

где $Nu_{м,ж} = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\nu^2}{g} \right)$ – модифицированное число Нуссельта; $\varepsilon_a = 0,8 \div 1,0$ – поправочный коэффициент.

Уравнение справедливо при $Re > Re_{кр}$, $Re_{кр} = 2200 Pr^{-0,3}$.

Теплоотдача в каждом конкретном случае определяется как при кипении, так и при течении однофазной жидкости, условиями теплообмена: режимом течения потока, его теплофизическими свойствами и т.д.

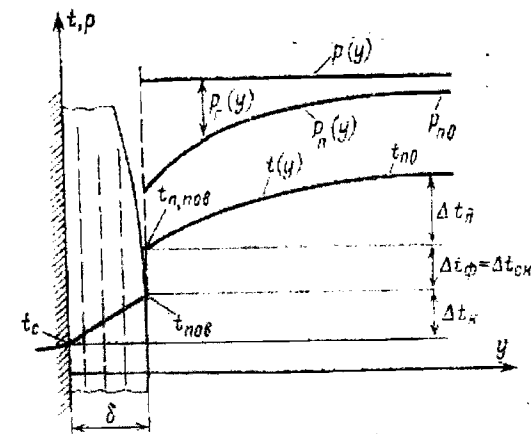
9. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ЧИСТОГО ПАРА

Конденсация представляет собой процесс перехода пара в жидкое состояние. Конденсация часто встречается в практике. В конденсаторах паровых турбин пар конденсируется на охлаждаемых трубах; конденсация пара осуществляется в опреснительных установках и многочисленных теплообменных аппаратах.

Конденсация может происходить как **в объеме пара**, так и **на охлаждаемой поверхности теплообмена**. В энергетике, других областях техники и промышленности чаще приходится иметь дело с конденсацией пара на охлаждаемых поверхностях теплообмена. Эта задача и будет рассматриваться.

Конденсация насыщенного или перегретого пара на твердой поверхности теплообмена происходит, если температура поверхности меньше температуры насыщения при данном давлении. На поверхности может образоваться пленка конденсата. Такой вид конденсации называется **плёночной**. **Плёночная конденсация** имеет место, если конденсат смачивает поверхность теплообмена. Если же конденсат не смачивает поверхность, то она покрывается отдельными каплями конденсата – **капельная конденсация**. Смачиваемость жидкости обычно характеризуют краевым углом θ . При $\theta > 90^\circ$ жидкость не смачивает стенку.

В большинстве случаев теплотехнических задач наблюдается плёночная конденсация, так как вода, как правило, смачивает поверхность теплообмена. Капельная конденсация наблюдается при пуске новых теплообменных аппаратов или когда она вызвана с помощью специальных средств – гидрофобизаторов, которые наносятся на поверхность или вводятся в пар.



Теплоотдача при **капельной конденсации** водяного пара может быть во много раз больше, чем при **плёночной**. Это объясняется тем, что пленка конденсата оказывает большое термическое сопротивление передаче теплоты фазового перехода от поверхности пленки к стенке. В общем случае, помимо термического сопротивления конденсата, необходимо выделить термическое сопротивление на границе раздела фаз и диффузионное сопротивление:

$$R = \frac{t_i - t_a}{q} = \frac{1}{\alpha} = R_\delta + R_\phi + R_D.$$

Рис. 9.1. Распределение концентраций и температуры при конденсации пара из парогазовой смеси

Появление R_{ϕ} обусловлено скачком температуры на границе раздела фаз (рис. 9.1). Из ряда экспериментальных исследований следует, что при конденсации чистого водяного пара с давлением $P > 10^4$ Па с достаточным приближением можно считать, что температурный скачок на границе раздела фаз и диффузионное сопротивление отсутствуют и $R = \frac{t_n - t_c}{q} = \frac{1}{\alpha} \approx R_k$.

Термическое сопротивление пленки R_k конденсата зависит от режима течения. Переход от ламинарного течения пленки к турбулентному определяют по значению числа $Re = \frac{\bar{w} \cdot \delta}{\nu}$, где $\bar{w}$ – средняя скорость течения пленки в рассматриваемом поперечном сечении; δ – толщина пленки конденсата; ν – вязкость конденсата.

Опытные данные различных авторов показывают, что наиболее вероятно, что значением $Re_{кр} = 400$. Ламинарное течение жидкой пленки может сопровождаться волновым движением, которое может изменить характер теплообмена. Возникновение волнового режима определяется числом $Re_{волн}$:

$$Re_{волн} = 0,56 \left(\frac{\sigma}{\rho^* g^{1/3} \cdot \nu^{4/3}} \right).$$

Расход конденсата в каком-либо произвольно выбранном сечении движущейся пленки есть $G = \rho^* \bar{w} \cdot f = \rho^* \bar{w} \cdot \delta \cdot \ell_z$, где ℓ_z – размер стенки в направлении нормали к плоскости чертежа. Следовательно, $\bar{w} \cdot \delta = \frac{G}{\rho^* \ell_z}$.

Пусть на участке от $x = 0$ до x образовалось G конденсата, и в единицу времени была передана теплота $Q = G \cdot r = q \cdot F = \alpha \Delta t \cdot x$.

Тогда $G = \frac{q \cdot F}{r} = \frac{q \cdot x \cdot \ell_z}{r}$. Следовательно, $\bar{w} \cdot \delta = \frac{q \cdot x}{\rho^* r}$.

Отсюда $Re = \frac{\bar{w} \cdot \delta}{\nu} = \frac{q \cdot x}{\rho^* r \cdot \nu} = \frac{\alpha \cdot \Delta t \cdot x}{\mu^* r}$.

Таким образом, при данных условиях число Re характеризует не только гидродинамику, но интенсивность теплообмена.

$$\text{Или } \alpha = \frac{Re \cdot \rho^* r \cdot \nu}{\Delta t \cdot x}.$$

$$\text{Обозначив через } B = \frac{4}{r \cdot \rho^* \nu}, \text{ можно написать } \alpha = \frac{Re}{\Delta t \cdot x \cdot B}. \quad (9.1)$$

При плёночной конденсации сухого насыщенного пара число Re рассчитывается в зависимости от режима течения конденсатной плёнки, который определяется по значению приведенной длины трубы z : $z = \Delta t \cdot x \left(\frac{g}{\nu^2} \right)^{1/3} \frac{\lambda'}{r \cdot \rho^* \nu'}$,

где g – ускорение свободного падения; ν' – коэффициент кинематической вязкости конденсата; λ' – коэффициент теплопроводности конденсата; r – теплота парообразования; ρ^* – плотность конденсата; $\Delta t = t_n - t_c$ – температурный напор; $\frac{g \cdot x^3}{\nu^2} = Ga$; $A = \left(\frac{g}{\nu^2} \right)^{1/3} \cdot \frac{\lambda}{r \cdot \rho^* \nu'}$. Тогда $z = \Delta t \cdot Ga^{1/3} \frac{\lambda'}{r \cdot \rho^* \nu'} = \Delta t \cdot x \cdot A$.

Физические параметры конденсата определяются по температуре насыщения. Для вертикальных труб $x = H$.

При $z < 2300$, что соответствует $Re < 400$, режим течения конденсатной пленки ламинарный и $Re = 0,95 z^{0,78} \varepsilon_1$, (9.2)

где $\varepsilon_1 = \left[\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_n} \right)^3 \frac{\mu_n}{\mu_c} \right]^{1/8}$. Уравнение (9.2) приводится к известному уравнению Нуссельта:

$$\bar{\alpha} = 0,9434 \sqrt[4]{\frac{r \cdot \rho^{*2} \cdot g \cdot \lambda^{*3}}{\mu^* \Delta t \cdot x}}. \quad (9.3)$$

При $z > 2300$ режим течения конденсатной пленки смешанный, т.е. на верхнем участке трубы – ламинарный, а на остальной части – турбулентный и $Re = [89 + 0,024(Pr_n/Pr_c)^{0,25} \cdot Pr_n^{0,5}(z - 2300)]^{4/3}$, (9.4) где Pr_n и Pr_c – числа Прандтля для конденсата, определяемые по температуре насыщения и пленки соответственно.

Полученные зависимости справедливы при конденсации чистого насыщенного пара на вертикальных стенках и трубах. В случае наклонных стенок используется зависимость $\alpha_{накл} = \alpha_{верт} \sqrt[4]{\cos \varphi}$. (9.5)

В случае конденсации пара на горизонтальных трубах величина x в уравнении (9.1) $x = \pi \cdot R$, тогда $Re = \frac{4\alpha \cdot \Delta t \cdot \pi \cdot R}{\rho^* r \cdot \nu'}$, (9.6)

где R – радиус трубы. Приведенная длина трубы находится по зависимости:

$$z = \Delta t \cdot \pi \cdot R \left(\frac{g}{\nu'^2} \right)^{1/3} \frac{\lambda'}{r \cdot \rho^* \nu'} = \Delta t \cdot \pi \cdot R \cdot A. \quad (9.7)$$

Уравнение (9.7) справедливо при $d < 20 \left(\frac{\sigma'}{\rho^* g} \right)^{0,5}$ и ламинарном режиме течения пленки конденсата: $z < 2300$. Для встречающихся на практике случаев при горизонтальном расположении труб эти два условия обычно выполняются.

Комплексы A и B берутся из таблицы:

T_n	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
$A, \left[\frac{1}{\text{м} \cdot ^\circ \text{C}} \right]$	34,5	42,7	51,5	60,7	70,3	82,0	94,0	107	122	136	150	167
$B \cdot 10^3, \left[\frac{\text{м}}{\text{Вт}} \right]$	4,88	5,57	6,28	6,95	7,65	8,47	9,39	10,15	11,09	12,04	12,9	14,02

Полученные зависимости справедливы при конденсации чистого пара и на чистой поверхности. Поэтому при определении α необходимо учитывать ряд дополнительных обстоятельств, влияющих на теплоотдачу.

1. Влияние скорости и направления течения пара. При малых давлениях влияние скорости пара невелико, но с увеличением давления оно сильно возрастает.
2. Влияние состояния поверхности. Если поверхность шероховата или покрыта слоем окисла, то вследствие дополнительного сопротивления течению пленки толщина ее увеличивается, а α при этом снижается на 30 % и более.
3. Влияние перегрева пара. При конденсации перегретого пара α несколько выше, чем при конденсации насыщенного. Однако разница невелика, составляет около 3 %, в практических расчетах ею можно пренебречь.
4. Влияние содержания в паре неконденсирующихся газов. При содержании в паре даже 1 % воздуха α снижается на 60 % и более.
5. Влияние компоновки поверхности нагрева.
6. Влияние примеси других паров.

10. ТЕПЛО-И МАССООБМЕН В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ

10.1. Основные понятия и законы

Диффузией или **массообменом** называют самопроизвольный процесс, стремящийся к восстановлению внутри фаз равновесного распределения концентраций. При этом в однородной по температурам и давлениям смеси происходит перенос вещества из области с большей концентрацией в область с меньшей.

По аналогии с теплообменом диффузия происходит как молекулярным (микроскопическим), так и молярным (макроскопическим) путём.

Количество вещества, нормально проходящее в единицу времени через поверхность, называется потоком массы компонента J , $[кг/с]$.

Поток массы J , проходящей через единицу поверхности F , называют плотностью потока массы:

$$\bar{j} = \frac{dJ}{dF} \quad (10.1)$$

Тогда $J = \int_F \bar{j} \cdot dF$.

Плотность потока массы компонента диффузии в однородной по температуре и давлению макроскопически неподвижной смеси определяется **законом Фика**:

$$j_i = -D \frac{\partial b_i}{\partial n} \quad (10.2)$$

или

$$j_i = -\rho \cdot D \frac{\partial m_i}{\partial n}, \quad (10.3)$$

где b_i - концентрация вещества, равная отношению массы компонента к объёму смеси, $[кг/м^3]$; $m_i = \frac{b_i}{\rho}$ - относительная массовая концентрация i -го компонента; ρ - плотность смеси; D - коэффициент молекулярной диффузии од-

ного компонента относительно другого, $\left[\frac{м^2}{с}\right]$; n - направление нормали к поверхности одинаковой концентрации данного вещества; $\frac{\partial b_i}{\partial n}$; $\frac{\partial m_i}{\partial n}$ - градиенты концентрации, направленные в сторону возрастания концентрации и являющиеся движущей силой, обеспечивающей перенос вещества.

Диффузия, осуществляющаяся согласно закону Фика, называется **концентрационной**.

Согласно кинетической теории газов диффузия возрастает с увеличением температуры и уменьшается с ростом давления. Диффузия мало зависит от пропорции смеси, поэтому в технических расчетах ею пренебрегают. В бинарных смесях коэффициент диффузии одинаков для взаимно диффундирующих компонентов.

Перепишем (10.2) в соответствии с уравнением идеального газа:

$j_i = -D_{pi} \frac{\partial p_i}{\partial n}$, где p_i - парциальное давление компонента; n - то же, как и в (10.2); $D_{pi} = \frac{D}{R \cdot T}$ - коэффициент молекулярной диффузии, отнесённый к градиенту парциального давления данного компонента. D_{pi} от коэффициента диффузии D отличается тем, что различен для компонентов смеси.

$D = D_{p1} \cdot R_1 \cdot T = D_{p2} \cdot R_2 \cdot T$ или $\frac{D_{p1}}{D_{p2}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{M_1}{M_2}$, где M - молекулярная масса.

При переменной температуре смеси возникает **температурная диффузия (эффект Соре)**. Согласно кинетической теории газов, при различных массах молекул двух компонентов, за счёт термодиффузии более тяжёлые молекулы стремятся перейти в холодные области. При равенстве масс молекул в холодные области стремятся перейти более крупные молекулы. Термодиффузия приводит к образованию градиента концентрации. Возникающая концентрационная диффузия стремится выровнять состав смеси. В результате с течением времени может установиться стационарное состояние, при котором противоположное влияние концентрационной диффузии и термодиффузии уравновешивается.

В результате молекулярного диффузионного переноса теплоты в смеси газа, первоначально имеющего одинаковую температуру, между двумя газами возникают разность температур. Это **диффузионный термоэффект (эффект Дюфо)** - явление обратное термодиффузии.

Бародиффузия возникает за счёт неоднородности давления. Тяжёлые молекулы стремятся перейти в область более высокого, а лёгкие в область пониженного давления. Бародиффузия, как и термодиффузия сопровождается обычным переносом массы, вызванной градиентом концентрации.

Плотность потока массы i -го компонента за счёт молекулярного переноса с учётом концентрационной диффузии, термодиффузии и бародиффузии определяется как:

$$\bar{j}_{M,i} = -\rho(D \cdot \nabla m_i + \frac{D_T}{T} \nabla T + \frac{D_\delta}{\delta} \nabla \delta), \quad (10.4)$$

где $D_T = k_T \cdot D$ - коэффициент термодиффузии, $\text{м}^2/\text{с}$; $D_\delta = \kappa_\delta \cdot D$ - коэффициент бародиффузии, $\text{м}^2/\text{с}$; p - давление смеси.

Первый член в скобках (10.4) учитывает концентрационную диффузию, второй - термодиффузию, третий - бародиффузию;

$k_T = \frac{D_T}{D}$ - термодиффузионное отношение; $\kappa_\delta = \frac{D_\delta}{D}$ - бародиффузионное отношение.

Из (10.4) следует, что суммарный перенос массы какого-либо компонента путём молекулярной диффузии является следствием концентрационной диффузии, термодиффузии и бародиффузии. Мы будем рассматривать эффекты, связанные с концентрационной диффузией.

В движущей среде вещество переносится как диффузией, так и конвекцией. При этом происходит перенос удельной массы смеси:

$$j_k = \rho \cdot \bar{w}, \quad (10.5)$$

где ρ - плотность; $\bar{w}$ - скорость.

Суммарная плотность потока конвекцией и диффузией определяется как:

$$\bar{j} = \bar{j}_{\text{м.д.}} + j_{k,i}. \quad (10.6)$$

Поскольку вещество переносит теплоту: $\bar{j}_i \cdot i_i$, где i - удельная энтальпия i -го компонента, то плотность теплового потока определяется как:

$$\bar{q} = -\lambda \nabla t + \rho \cdot \bar{w} \cdot i + \sum j_{\text{м.д.}} \cdot i_i, \quad (10.7)$$

где $\lambda \nabla t$ - перенос теплоты теплопроводностью; $\rho \cdot \bar{w} \cdot i$ - конвекция теплоты; $\sum j_{\text{м.д.}} \cdot i_i$ - перенос теплоты молекулярной диффузией.

10.2. Дифференциальные уравнения тепломассообмена

10.2.1. Уравнение массообмена

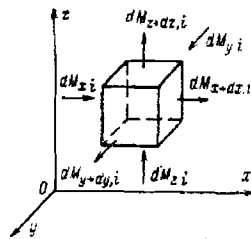
Рассматриваем несжимаемую жидкость. Внутри жидкости отсутствует источник массы. Термо- и бародиффузию не учитываем.

Выделяем из смеси неподвижный элементарный параллелепипед с рёбрами dx, dy, dz (рис. 10.1). Пусть D и ρ постоянны. Составим для него уравнение баланса массы. В параллелепипеде вдоль оси x втекает за элементарный промежуток времени dt масса i -го компонента $dM_{x,i} = j_{x,i} dy \cdot dz \cdot dt$ и вытекает $dM_{x+dx,i} = j_{x+dx,i} dy \cdot dz \cdot dt$. Разность количеств масс компонентов определяется выражением:

$$dM_{x,i} - dM_{x+dx,i} = -\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt = -\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} dv \cdot dt. \quad \text{Рис. 10.1. Массообмен внутри}$$

Аналогично для других осей. неподвижного параллелепипеда

Суммируя разности по трем осям, получим $dM_i = -\left(\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} + \frac{\partial j_{y,i}}{\partial y} + \frac{\partial j_{z,i}}{\partial z}\right) dv \cdot dt$.



Поскольку $dM_i = \rho \frac{\partial m_i}{\partial \tau} dv \cdot dt$, получим $\rho \frac{\partial m_i}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} + \frac{\partial j_{y,i}}{\partial y} + \frac{\partial j_{z,i}}{\partial z}\right) = -\text{div} j_i. \quad (10.8)$

Пусть масса этого компонента переносится концентрационной диффузией и конвекцией, тогда $j_{x,i} = -\rho \cdot D \frac{\partial m_i}{\partial x} + \rho \cdot m_i \cdot w_x$. Аналогично для других осей.

Производная от этой массы: $\frac{\partial j_{x,i}}{\partial x} = -\rho \cdot D \frac{\partial^2 m_i}{\partial x^2} + \rho \left(m_i \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_x \frac{\partial m_i}{\partial x} \right)$. Аналогично для других осей. Просуммируем равенства для всех осей и подставим результаты в (10.8):

$$\rho \frac{\partial m_i}{\partial \tau} = \rho \cdot D \cdot \nabla^2 m_i - \rho \left(w_x \frac{\partial m_i}{\partial x} + w_y \frac{\partial m_i}{\partial y} + w_z \frac{\partial m_i}{\partial z} \right) - \rho \cdot m_i \text{div} \bar{w}.$$

При $\rho = \text{const} \rightarrow \rho \cdot m_i \text{div} \bar{w} = 0$. Тогда

$$\frac{\partial m_i}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial m_i}{\partial x} + w_y \frac{\partial m_i}{\partial y} + w_z \frac{\partial m_i}{\partial z} = D \cdot \nabla^2 m_i. \quad (10.9)$$

$D m_i / dt = D \cdot \nabla^2 m_i$ - дифференциальное уравнение массообмена (уравнение сохранения массы). При $w_x = w_y = w_z = 0$ уравнение (10.9) трансформируется в

$$\frac{\partial m_i}{\partial \tau} = D \nabla^2 m_i. \quad (10.10)$$

Уравнение (10.10) аналогично уравнению теплопроводности при $q_v = 0$.

10.2.2. Уравнение энергии

Рассмотрим бинарную смесь с диффундирующими друг в друга компонентами. Отсутствуют источники теплоты. Теплота трения пренебрежимо мала. Физические параметры постоянны. Выделяем в движущейся смеси неподвижный объём с рёбрами dx, dy, dz (рис. 10.2). Составим для него уравнение теплового баланса. Подведённая к объёму теплота затрачивается на изменение его теплосодержания. При этих условиях уравнение энергии для изобарного процесса переноса теплоты (2.8) запишется как:

$$\rho \frac{\partial J}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) = -\text{div} \bar{q}. \quad \text{Согласно уравне-}$$

нию (10.7) $q = -\lambda \cdot \Delta t + \rho \cdot \bar{w} \cdot i + \sum j \cdot i$.

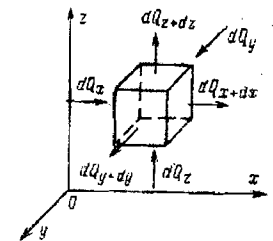


Рис. 10.2. Тепловой баланс в элементарном объеме

Тогда $\frac{\partial q_x}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \rho \left(w_x \frac{\partial i}{\partial x} + i \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \sum j_{x,i} i$.

Аналогично для других осей. Суммируя уравнения проекций на оси x, y, z , полагая $\text{div} w = 0$, получим:

$$-\text{div} \bar{q} = \lambda \cdot \nabla^2 t - \rho \left(w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum j_{xi} i + \frac{\partial}{\partial y} \sum j_{yi} i + \frac{\partial}{\partial z} \sum j_{zi} i \right). \quad (10.11)$$

Подставим полученное выражение для $(-\text{div} \bar{q})$ в дифференциальное уравнение энергии (2.8). Тогда

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho} \nabla^2 t - \left(w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \text{div} \sum \bar{j}_i \cdot i. \quad (10.12)$$

Уравнение (10.11) характеризует локальное изменение удельной энтальпии, вызванной процессами теплопроводности, конвекции и молекулярной диффузии. Перепишем (10.11) в виде

$$\frac{Di}{d\tau} = \lambda \nabla^2 t - \text{div} \sum j_i \cdot i. \quad (10.12)$$

Удельная энтальпия смеси i определяется удельными энтальпиями i_i и относительными концентрациями m_i компонентов согласно правилу аддитивности: $i = \sum m_i i_i$. Считая, что $di_i = C_{p_i} \cdot dT$ и $C_p = \sum m_i \cdot C_{p_i}$, получаем

$$\rho \frac{di}{d\tau} = \rho \sum m_i \frac{Di_i}{d\tau} + \rho \sum i_i \frac{Dm_i}{d\tau} = \rho \sum m_i C_{p_i} \frac{Dt}{d\tau} + \rho \sum i_i \frac{Dm_i}{d\tau} = \rho \cdot C_p \frac{Dt}{d\tau} + \rho \sum i_i \frac{Dm_i}{d\tau}. \quad (10.13)$$

Так как $\rho \frac{dm_i}{d\tau} = -\text{div} j_i$, то подставив (10.8) в (10.13), получим

$$\rho \frac{Di}{d\tau} = \rho \cdot C_p \frac{Dt}{d\tau} - \sum i_i \text{div} j_i. \quad (10.14)$$

Подставив (10.14) в (10.12), получим:

$$\rho \cdot C_p \frac{Dt}{d\tau} = \lambda \nabla^2 t - \text{div} \sum j_i \cdot i + \sum i_i \text{div} j_i. \quad (10.15)$$

$\text{div} \sum j_i \cdot i$ - согласно правилу дифференцирования двух переменных можно преобразовать как: $-\text{div} \sum j_i \cdot i = -\sum i_i \cdot \text{div} j_i - \sum j_i \cdot \text{grad} i_i$. Полученное выражение подставим в (10.16) и получим **уравнение энергии**:

$$\rho \cdot C_p \frac{Dt}{d\tau} = \lambda \cdot \nabla^2 t - \sum C_{p_i} \cdot j_i \cdot \nabla t. \quad (10.16)$$

Если считать, что перенос вещества осуществляется только концентрационной диффузией, то можно записать: $j_i = -\rho \cdot D \cdot \nabla m_i$. Тогда второй член уравнения (10.16): $-(C_{p_1} - C_{p_2}) j_i \cdot \nabla t = (C_{p_1} - C_{p_2}) \rho \cdot D \cdot \nabla m_i \cdot \nabla t$. В этом случае уравнение энергии для двухкомпонентной смеси запишется в следующем виде:

$$\rho \cdot c_p \frac{Dt}{d\tau} = \lambda \cdot \nabla^2 t + (c_{p_1} - c_{p_2}) \rho \cdot D \cdot \nabla m_1 \cdot \nabla t. \quad (10.17)$$

Для описания процесса тепломассообмена необходимо к уравнениям массообмена, энергии добавить уравнение движения и сплошности, записанные для смеси, а также составить условия однозначности.

10.3. Тепло- и массоотдача

Аналогично теплоотдаче конвективный массообмен между жидкой или твердой поверхностью и окружающей средой называют массоотдачей. Теп-

ло- и массоотдача происходят одновременно. Для расчетов теплоотдачи используют закон Ньютона-Рихмана: $q_w = \alpha(t_c - t_0)$.

Для расчёта массоотдачи используют уравнения:

$$j_{iw} = \beta(b_{i,c} - b_{i,o}), \quad (10.18)$$

$$j_{jw} = \rho \cdot \beta(m_{i,c} - m_{i,o}), \quad (10.19)$$

где $j_{i,c}$ - плотность потока массы, $\text{кг}/\text{м}^2 \cdot \text{с}$; β - коэффициент массоотдачи, отнесённый к разности концентраций диффундирующего вещества, $\text{м}/\text{с}$, индексы «с» и «о» показывают, что концентрация диффундирующего вещества определяется на поверхности раздела фаз и вдали от неё.

Запишем уравнение (10.18) в виде $j_{i,c} = \beta_p \cdot \Delta P$, где β_p - коэффициент массоотдачи, отнесённый к разности парциальных давлений: $\Delta P = P_{i,c} - P_{i,o}$; $\beta = \beta_p \cdot R \cdot T$.

В случае испарения жидкости в парогазовую среду при неизменном давлении и температуре по всему объёму смеси газ, при отсутствии термо- и бародиффузии, должен диффундировать в противоположном направлении диффузии пара. Пар свободно диффундирует в парогазовую среду. Для газа поверхность жидкости - непроницаемая преграда. Поэтому количество газа у поверхности должно постоянно увеличиваться. Но в стационарном режиме изменение распределения концентраций не происходит. Следовательно, перемещение газа к поверхности испарения должно компенсироваться конвективным потоком газовой смеси, направленной от жидкости. Его называют **стефановым потоком**. Суммарный (молекулярный и конвективный) поток пара определится как:

$$j_{n,c} = -\rho \cdot D \frac{1}{m_{г,c}} \left(\frac{\partial m_n}{\partial y} \right)_c. \quad (10.21)$$

Множитель $\frac{1}{m_{г,c}}$ учитывает стефанов конвективный поток, вызванный непроницаемостью поверхности испарения для газа. В этом случае

$$\beta = -D \frac{1}{m_{г,c}} \frac{(\partial m_n / \partial y)_c}{m_{n,c} - m_{n,o}}. \quad (10.22)$$

Рассмотренный случай, когда поверхность является проницаемой для одного компонента и непроницаемой для другого, соответствует условиям полупроницаемой поверхности. Стефанов поток обуславливает поперечный поток пара.

10.4. Диффузионный пограничный слой

Аналогично понятиям гидродинамического и теплового пограничных слоёв вводится понятие диффузионного пограничного слоя (рис.10.3).

В его пределах концентрация активного компонента смеси меняется от $m_{i,c}$ на поверхности раздела фаз до $m_{i,o}$ на

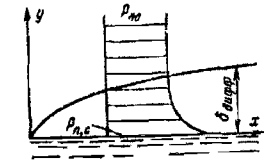


Рис. 10.3. Диффузионный пограничный слой

внешней границе слоя. Поэтому внутри пограничного слоя $\frac{\partial m_i}{\partial y} \neq 0$; на внешней границе слоя $m_i = m_{i0}$; $\frac{\partial m_i}{\partial y} = 0$.

Дифференциальное уравнение диффузионного пограничного слоя имеет вид

$$\rho \left(w_x \frac{\partial m_i}{\partial x} + w_y \frac{\partial m_i}{\partial y} \right) = - \frac{\partial j_{yi}}{\partial y}, \quad (10.23)$$

где j_{yi} – поперечная составляющая плотности потока массы i -го компонента смеси.

Для турбулентного течения $j_{yi} = -\rho(D + \varepsilon_f) \frac{\partial m_i}{\partial y}$, (10.24)

где ε_f – коэффициент турбулентного переноса вещества, $\text{м}^2/\text{с}$.

10.5. Аналогия процессов тепло-и массообмена

Аналогия процессов широко используется на практике. Пусть имеем $\bar{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr})$. По аналогии считаем: $\bar{Nu}_D = \phi(\text{Re}, \text{Pr}_D)$. Функции f и ϕ полагают одинаковыми. $Nu_D = \frac{\beta \cdot l}{D}$ – диффузионное число Nu ; $\text{Pr}_D = \frac{\nu}{D}$; $D/a = Le$ – число Льюиса-Семенова.

Характерной особенностью массообменного процесса является наличие поперечного потока массы ($W_{yx} \neq 0$). Тепло-массообменные процессы протекают совместно, и поперечный поток меняет распределение скоростей, концентраций и температур, что сказывается на интенсивности процесса.

При направлении поперечного потока от поверхности раздела фаз (испарение, сублимация, десорбция) толщина пограничного слоя увеличивается, $\frac{\partial w_x}{\partial y}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$ уменьшаются, α – уменьшается. При обратной картине – к поверхности раздела (конденсация, сорбция) толщина пограничного слоя уменьшается, значения производных увеличиваются, α – увеличивается.

10.6. Тепло- и массообмен при конденсации

Плотность теплового потока к стенке определяется как:

$$q_c = \frac{t_{п0} - t_w}{R_k - R_\phi - R_D}, \quad (10.25)$$

где $\sum R = R_k + R_\phi + R_D = 1/\alpha_{см}$; R_k – сопротивление пленки конденсата; R_ϕ – фазовое сопротивление; $R_D = \frac{t_{п0} - t_{н.с}}{\alpha(t_{п0} - t_{н.с}) + r \cdot \beta(\rho_{п0} - \rho_{н.с})}$ – диффузионное сопротивление.

Так как $R_\phi \ll R_k$ и $R_\phi \ll R_D$, то R_ϕ – пренебрегаем.

При конденсации насыщенного пара на горизонтальных трубах шахматного пучка при поступлении пара сверху при потоках с $Re = 350 - 4800$:

$$\bar{Nu} = C \text{Re}^{0.5} \varepsilon_{Г0}^{-0.6} \pi_D^{-1/3}, \quad (10.26)$$

где $C = 0,47$ – для одиночной трубы; $C = 0,53$ – первый ряд пучка труб; $C = 0,82$ – третий и последующие ряды; $\varepsilon_{Г0} = 0,01 - 0,56$ – начальное содержание воздуха в паре; $\pi_D = \frac{P_{п0} - P_{н.с}}{P}$.

При $\text{Re} = 40 \div 350$ для труб пятого ряда $\bar{Nu}_D = 0,52 \text{Re}^{0.5} \varepsilon_{Г0}^{-0.7} \pi_D^{-1/3}$.

Определяющий размер – d_n ; физические параметры смеси и скорость берутся по состоянию смеси перед трубой или пучком.

11. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

11.1. Общие понятия и законы

Носителем лучистой энергии являются электромагнитные колебания с длиной волны от долей микрона до километров. Это рентгеновские, ультрафиолетовые, видимые – световые, инфракрасные лучи и электромагнитные волны. Наибольший интерес представляют световые инфракрасные лучи, т.е. лучи с длиной волны от 0,4 до 40 мкм. Эти лучи называются тепловыми, а процесс их распространения – тепловым излучением. Лучеиспускание свойственно всем телам, и каждое из них излучает энергию непрерывно. При попадании на другие тела эта энергия частью поглощается, частью отражается и частью проходит сквозь тело. Та часть лучистой энергии, которая поглощается телом, снова превращается в тепловую. Та часть энергии, которая отражается от тела и проходит сквозь него, попадает на другие тела и ими поглощается. После ряда поглощений излучаемая энергия полностью распределяется между окружающими телами. Следовательно, каждое тело не только непрерывно излучает, но и поглощает лучистую энергию. В результате этих явлений, связанных с двойным взаимным превращением энергии (тепловая – лучистая – тепловая), и осуществляется процесс лучистого теплообмена.

Количество энергии, излучаемое единицей поверхности в единицу времени, называется излучательной или лучеиспускающей способностью тела E , $[\text{Вт}/\text{м}^2]$.

Пусть из всего количества энергии Q_0 , падающей на тело (рис. 11.1), часть Q_A поглощается, Q_R – отражается и Q_D – проходит сквозь тело:

$$Q_A + Q_R + Q_D = Q_0. \text{ Тогда } \frac{Q_A}{Q_0} + \frac{Q_R}{Q_0} + \frac{Q_D}{Q_0} = 1,$$

где $\frac{Q_A}{Q_0}$ – поглощательная способность тела A ;

$\frac{Q_R}{Q_0}$ – отражательная способность R ; $\frac{Q_D}{Q_0}$ – пропускательная способность тела D .

Следовательно, $A + R + D = 1$.

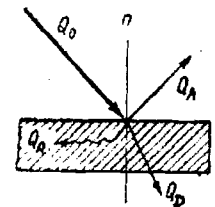


Рис. 11.1. Схема распределения падающей лучистой энергии

Абсолютно чёрных, белых и прозрачных тел в природе нет.

11.2.1. Закон Планка

$$E_{o\lambda} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1}, \quad (11.1)$$

11.2.2. Закон Вина

Закон Вина устанавливает связь между T и λ : $\lambda \cdot T = 2,9$ [мм.°C]. (11.2)
С повышением температуры максимум излучения смещается в сторону более коротких волн.

11.2.3. Закон Стефана-Больцмана

Полное количество энергии, излучаемой 1 м^2 абсолютно чёрного тела, равно

$$E_0 = \int_0^{\infty} E_{0\lambda} \cdot d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{c_1 \cdot d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{c_2/\lambda T} - 1 \right)} = \frac{6,494 \cdot c_1}{c_2^4} \cdot T^4 = \sigma_0 \cdot T^4, \left[\frac{Bm}{M^2} \right], \quad (11.3)$$

где $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$, [Вт/м²·°К⁴] - константа излучения абсолютно чёрного тела.

Следовательно, энергия излучения пропорциональна четвёртой степени абсолютной температуры. Доказано, что этот закон может быть применен к серым телам: $E = C(T/100)^4$. (11.4)

Для различных тел C - различно. Его значение определяется природой тела, состоянием поверхности и температурой: $C = 0 - 5,67$. Отсюда степень черноты тела: $\varepsilon = C/C_0 = E/E_0$. Тогда $E = \varepsilon \cdot 5,67 \left(T/100 \right)^4$. (11.5)

11.2.4. Закон Кирхгофа

Устанавливает связь между излучательной и поглощательной способностями тела.

Рассмотрим две поверхности, одна из которых серая, другая - абсолютно чёрная (рис. 11.3). Расположены они параллельно и на таком расстоянии, что излучение каждой из них обязательно попадает на другую. Температура, излучательная и поглощательная способности этих поверхностей соответственно равны T , E , A , T_0 , E_0 и $A_0 = 1$, причём $T > T_0$. Составим для серой поверхности энергетический баланс. С единицы поверхности в единицу времени серая поверхность излучает энергию в количестве E . Попадая на чёрную поверхность, эта энергия полностью ею поглощается. В свою очередь, чёрная поверхность излучает энергию в количестве E_0 . Попадая на серую поверхность, эта энергия частично в количестве AE_0 поглощается ею, остальная часть в количестве $(1-A)E_0$ отражается, снова попадает на чёрную поверхность и полностью ею поглощается. Таким образом, для серой поверхности приход энергии равен AE_0 .

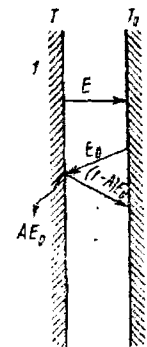


Рис. 11.3. Лучистый теплообмен между телами

а расход - E . Следовательно, баланс лучистого теплообмена составим в виде:

$$E_{\text{рез}} = q = E - AE_0, \quad \left[\frac{Bm}{M^2} \right] \quad (11.6)$$

Лучистый обмен между поверхностями происходит и при $T = T_0$. В этом случае система находится в подвижном тепловом равновесии и $q = 0$. Тогда из (11.6) получаем

$$E = A \cdot E_0 \text{ или } E/A = E_0. \quad (11.7)$$

Полученное соотношение (11.7) можно распространить на любые тела, и поэтому можно написать

$$E_1/A_1 = E_2/A_2 = E_3/A_3 = \dots = E_o/A_o = E_o = f(T), \quad (11.8)$$

Из (11.8) следует, что отношение лучеиспускательной способности к поглощательной для всех тел одинаково, равно лучеиспускательной способно-

сти абсолютно черного тела при той же температуре и зависит только от температуры.

Подставив уравнение Стефана-Больцмана в (11.8), получим

$$C_1/A_1 = C_2/A_2 = C_3/A_3 = \dots = C_0. \quad (11.9)$$

Из (11.9) следует, что лучеиспускательная способность серых тел всегда меньше при той же температуре лучеиспускательной способности абсолютно черного тела. Следовательно, при любой температуре лучеиспускание абсолютно черного тела является максимальным.

Из сопоставления (11.9): $C_1 = A_1 \cdot C_0$; $C_2 = A_2 \cdot C_0$ и т.д., а также соотношения (11.7) с законом Стефана-Больцмана, имеем $A = \varepsilon$, т.е. поглощательная способность и степень черноты тела численно равны между собой.

Уравнение (11.8) получено для интегрального излучения. В применении к монохроматическому излучению напомним

$$E_{1\lambda}/A_{1\lambda} = E_{2\lambda}/A_{2\lambda} = \dots = E_{0\lambda}/A_{0\lambda} = E_{0\lambda} = f(T, \lambda). \quad (11.10)$$

11.2.5. Закон Ламберта

Закон Стефана-Больцмана определяет количество энергии, излучаемое телом по всем направлениям. Каждое направление определяется углом φ , который оно образует с нормалью к поверхности. Изменение излучения по отдельным направлениям определяется законом Ламберта. Наибольшей интенсивностью обладает излучение по нормали к поверхности E_n . По остальным направлениям оно меньше, равно E_φ и определяется по формуле

$$E_\varphi = E_n \cdot \cos \varphi, \quad (11.11)$$

где φ – угол между направлением излучения и нормалью (рис. 11.4).

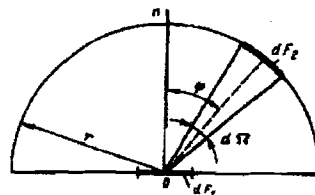


Рис. 11.4. Излучение поверхностью тела в полусферу

Из закона Ламберта следует, что количество энергии, излучаемое элементом поверхности dF_1 в направлении элемента dF_2 , пропорционально количеству энергии, излучаемой по нормали dE_n , умноженному на величину пространственного угла $d\Omega$ и т.е. $dQ_\varphi = E_n \cdot d\Omega \cdot \cos \varphi \cdot dF$, (11.12)

где dQ_φ – энергия излучения по нормали к dF . В уравнении (11.12) неизвестно E_n . Для его определения необходимо уравнение проинтегрировать по поверхности полусферы, лежащей над плоскостью dF_1 , и полученное выражение сопоставить с уравнением Стефана-Больцмана:

$$E_n = \frac{E}{\pi} = \frac{1}{\pi} C \left(\frac{T}{100} \right)^4 = \frac{\varepsilon}{\pi} C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4, \text{ т.е. лучеиспускательная способность в направлении нормали в } \pi \text{ раз меньше полной лучеиспускательной способности тела. Отсюда} \quad dQ_\varphi = \frac{\varepsilon}{\pi} C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4 d\Omega \cdot \cos \varphi \cdot dF_1. \quad (11.13)$$

11.3. Лучистый теплообмен между телами

Если тело расположено обособленно от других, то в этом случае количество энергии, теряемое телом в окружающую среду, может находиться в соответствии с законом Кирхгоффа: $q_1 = E_{1\text{эф}} - E_{2\text{эф}} = E_1 - A_1 E_{2\text{эф}}$, где $E_{1\text{эф}} = E_1 + (1 - A_1) E_{2\text{эф}}$ – эффективное излучение тела; $E_{2\text{эф}}$, [Вт/м²] – падающее извне на тело эффективное излучение окружающих тел. Оно может быть определено путем измерения при помощи специальных приборов: радиометров или актинометров.

Рассмотрим "круговорот" лучистой энергии между двумя параллельными поверхностями (рис. 11.5).

Температура, лучеиспускательная и поглощательная способность этих поверхностей соответственно равны: T_1 ; E_1 ; A_1 ; T_2 ; E_2 ; A_2 .

Первая поверхность излучает E_1 . (a)

Из этого количества вторая поверхность поглощает $E_1 A_2$ (b)

и обратно отражает $E_1 (1 - A_2)$. (c)

Из этого количества первая поверхность поглощает $E_1 (1 - A_2) A_1$ (d)

и отражает $E_1 (1 - A_2) (1 - A_1)$. (e)

Вторая поверхность снова поглощает

$$E_1 (1 - A_2) (1 - A_1) A_2 \quad (f)$$

и отражает $E_1 (1 - A_2)^2 (1 - A_1)$. (g)

Из этого количества первая снова

поглощает $E_1 (1 - A_2)^2 (1 - A_1) A_1$ (h)

и т.д. до бесконечности. Аналогичные рассуждения можно привести по отношению к излучению второй поверхности.

Чтобы найти энергию $q_{1,2}$, которую первая поверхность путем лучеиспускания передает второй, надо из первоначально испускаемой энергии E_1 вычесть, во-первых, то, что возвращается и снова поглощается, и, во-вторых – ту энергию, которая поглощается из излучения второй поверхности. Первое вычитаемое может быть получено путем суммирования выражений (d), (h) и т.д.: $E_1 (1 + p + p^2 + \dots) (1 - A_2) A_1$, где $p = (1 - A_2) (1 - A_1)$.

Так как $p < 1$, то сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $1 + p + p^2 + \dots = \frac{1}{1 - p}$. Подставляя это выражение в (d), получим

$$\frac{E_1 (1 - A_2) \cdot A_1}{1 - p} \quad (j)$$

Второе вычитаемое имеет следующее значение:

$$E_2 \cdot A_1 (1 + p + p^2 + \dots) = \frac{E_2 \cdot A_1}{1 - p} \quad (k)$$

$$\text{Имея эти данные, находим} \quad q_{1,2} = E_1 - \frac{E_1 (1 - A_2) A_1}{1 - p} - \frac{E_2 \cdot A_1}{1 - p} \quad (l)$$

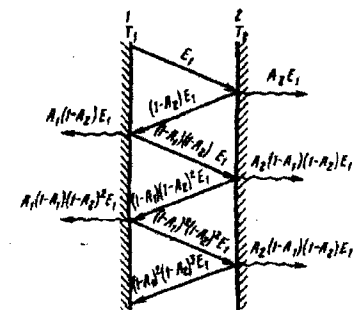


Рис. 11.5. Радиационный теплообмен между параллельными плоскостями

Приводя (I) к общему знаменателю, и учитывая, что $1-p = 1 - (1 - A_1 - A_2 + A_1 A_2) = A_1 + A_2 - A_1 A_2$, окончательно получим следующее выражение:

$$q_{1,2} = \frac{E_1 \cdot A_2 - E_2 \cdot A_1}{A_1 + A_2 - A_1 \cdot A_2}. \quad (m)$$

Согласно закону Стефана-Больцмана

$$E_1 = A_1 \cdot C_0 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \text{ и } E_2 = A_2 \cdot C_0 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4.$$

Подставляя эти значения в (m) и произведя преобразования, получим

$$q_{1,2} = A_n \cdot C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = C_n \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad [Вт/м^2], \quad (n)$$

где $A_n = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}$ — **приведенный коэффициент поглощения системы**;

$$C_n = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0}} \text{ — приведенный коэффициент лучеиспускания}$$

системы.

Описанным методом также может быть решена задача лучистого теплообмена между двумя поверхностями в замкнутом пространстве, когда одна из поверхностей обтекает другую. Окончательная расчетная формула имеет

$$\text{следующей вид: } Q_{1,2} = \varepsilon_n \cdot C_0 \cdot F_p \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \varphi_{1,2}, \quad (11.14)$$

где $\varepsilon_n = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$ — **приведенная степень черноты**; в качестве рас-

четной поверхности принимается меньшая из поверхностей; $\varphi_{1,2}$ — угловой коэффициент — чисто геометрический параметр, определяемый формой поверхностей, их размерами, взаимным расположением и расстоянием между ними. Значения $\varphi_{1,2}$ приводятся в справочной литературе.

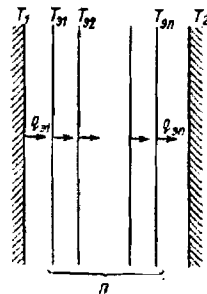
11.4. Защитные экраны

Для снижения теплоотдачи излучением, когда температура тела изменять нельзя, обычно применяют экраны.

Пусть имеются две плоские параллельные между собой поверхности и между ними тонкостенный экран (рис. 11.6). Температура поверхностей соответственно равна T_1 , T_3 , и T_2 . Коэффициенты лучеиспускания или степени черноты экрана и поверхностей одинаковы.

При отсутствии экрана, согласно уравнению (n), количество теплоты, переданное $1м^2$ поверхности, определится как:

Рис. 11.6. Распространение теплоты между поверхностями через экраны



$$q_{1,2} = C_n \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad [Вт/м^2].$$

При наличии экрана количество теплоты, передаваемое от первой поверхности к экрану, равно

$$q_{1,3} = C_n \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 \right], \quad (o)$$

$$\text{и от экрана } q_{3,2} = C_n \left[\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

При установившемся тепловом состоянии всей системы: $q_{1,3} = q_{3,2}$, следовательно,

$$\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 = \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4. \quad (p)$$

Отсюда $\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 + \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$.

Подставив (p) в уравнение (o), получим $q_{1,3} = q_{2,3} = \frac{1}{2} C_n \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$. (r)

Сопоставляя уравнения (n) и (r), имеем $q_{1,3} = 1/2 q_{1,2}$. Последнее означает, что при наличии одного экрана количество передаваемой теплоты уменьшится в два раза. Можно показать, что при наличии двух экранов количество передаваемой теплоты уменьшится в три раза, а при наличии n экранов в $(n+1)$ раз. Следовательно, путем применения большого числа экранов теплоотдачу излучением можно снизить, как угодно сильно.

11.5. Лучеиспускание газов

Газы также обладают способностью испускать и поглощать лучистую энергию, но для различных газов эта способность различна. Для одно- и двухатомных газов, в частности, для азота, кислорода и водорода она ничтожна. Эти газы для тепловых лучей прозрачны — диатермичны. Значительной излучательной и поглощательной способностями обладают многоатомные газы, в частности, углекислота, водяной пар, сернистый ангидрид, аммиак и др.

По сравнению с твердыми телами излучение и поглощение газов имеет ряд особенностей.

Твердые тела имеют сплошные спектры излучения; они излучают и поглощают лучистую энергию всех длин волн от 0 до ∞ . Газы же излучают и поглощают энергию лишь в определенных интервалах длин волн. Для лучей других длин волн, вне этих интервалов, газы прозрачны, и их энергия излучения равна нулю. Таким образом, излучение и поглощение газов имеют избирательный характер.

В отношении твердых тел, которые для тепловых лучей непрозрачны, можно считать, что испускание и поглощение лучистой энергии происходит в поверхностном слое. В газах же излучение и поглощение энергии происхо-

дит в объеме. При прохождении тепловых лучей через газ их энергия вследствие поглощения уменьшается. Это уменьшение определяется количеством встреченных на пути молекул. Последнее пропорционально длине пути луча l и парциальному давлению P . Поэтому поглощательная способность газа для какой-либо длины волны A_λ является функцией произведения pl . Кроме того, она зависит от температуры газа T_g , следовательно, $A_\lambda = f(T_g, pl)$.

Тела, поглощающие лучистую энергию, согласно закону Кирхгофа обладают способностью ее излучать. Следовательно, излучательная способность газа также является функцией T_g и pl , т.е. $E_\lambda = f(T_g, pl)$.

Энергия излучения газов может быть вычислена по спектру. В этом случае энергия каждой полосы равна: $E_\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_\lambda \cdot d\lambda$.

Общая лучеиспускающая способность газа равна сумме $E_{\Delta\lambda}$ для всех полос, т.е. $E_g = \sum E_{\Delta\lambda}$.

Окончательная расчетная формула лучистого теплообмена между газом и оболочкой имеет следующий вид: $q_{g,c} = \varepsilon'_c \cdot C_0 \left[\varepsilon_g \left(\frac{T_g}{100} \right)^4 - A_g \left(\frac{T_c}{100} \right)^4 \right]$, (11.15)

где $q_{g,c}$ – количество теплоты, передаваемое путем излучения от газа к оболочке, [Вт/м²]; $\varepsilon'_c = 0,5(\varepsilon_c + 1)$ – эффективная степень черноты оболочки; $\varepsilon_g = (\varepsilon_{CO_2} + \beta \cdot \varepsilon_{H_2O} - \Delta\varepsilon_g)$ – степень черноты газа при температуре газа T_g , определяется по номограммам в специальной литературе; ε_c – степень черноты оболочки, приведена в справочных таблицах для различных материалов; ε_{CO_2} – степень черноты углекислоты; ε_{H_2O} – степень черноты водяных паров; β – поправочный множитель, зависящий от парциального давления P_{H_2O} ;

$A_g = A_{CO_2} + A_{H_2O} - \Delta A_g$ – поглощательная способность газа при температуре

оболочки t_c , °C; $A_{CO_2} = \varepsilon_{CO_2} \left(\frac{T_g}{T_c} \right)^{0,65}$; ε_{CO_2} – выбирается по t_c – по номограммам;

$A_{H_2O} = \beta \cdot \varepsilon_{H_2O}$ – выбирается по t_c – по номограммам; $\Delta A_g = \Delta\varepsilon_g$ – выбирается по номограммам, в технических расчетах можно полагать, что $\varepsilon_g = A_g$ и $\Delta\varepsilon_g = \Delta A_g = 0$.

Для технических расчетов целесообразно также ввести понятие эффективной степени черноты газового тела ε'_g , учитывая его лучистый

теплообмен с оболочкой: $q_{g,c} = \varepsilon'_c \cdot \varepsilon'_g \cdot C_0 \left[\left(\frac{T_g}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_c}{100} \right)^4 \right]$, [Вт/м²]. (11.16)

Сопоставляя приведенные зависимости, получим

$$\varepsilon'_g = \frac{\varepsilon_g - A_g \left(\frac{T_c}{T_g} \right)^4}{1 - \left(\frac{T_c}{T_g} \right)^4}$$

12. ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ

12.1. Классификация теплообменных аппаратов

Теплообменник – это устройство, предназначенное для передачи теплоты от греющей среды к нагреваемой. Теплообменники применяются в процессах нагревания, охлаждения, испарения, конденсации, плавления, кристаллизации и т.д.

Теплообменные аппараты делят на **поверхностные** и **смесительные**. К поверхностным относятся **рекуперативные**, если теплоносители разделены теплообменной поверхностью (стенкой), и **регенеративные** (рис. 12.2), если

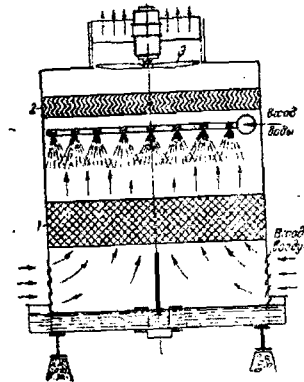


Рис. 12.1. Схема смесительного аппарата: 1-насадка; 2-сепаратор; 3-вентилятор

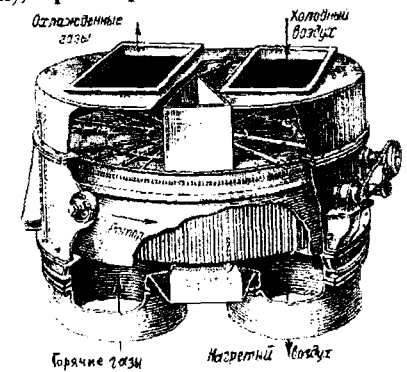


Рис. 12.2. Схема регенеративного воздухоподогревателя

одна и та же поверхность теплообмена омывается периодически то горячим, то холодным теплоносителем. В смесительных аппаратах теплообмен происходит при смешении теплоносителей без разделяющей их твердой поверхности теплообмена (рис. 12.1).

Тепловые трубы – это испарительно-конденсационные устройства, представляющие собой закрытую камеру, внутренняя полость которой выложена слоем капиллярно-пористого материала (фитиль). Один конец тепловой трубы – зона подвода теплоты, противоположный – зона отвода.

За счет подвода теплоты жидкость, насыщающая фитиль, испаряется. Пар под действием возникшей разности давлений перемещается к зоне конденсации, где конденсируется, отдавая теплоту парообразования. Конденсат

за счет действия капиллярных сил возвращается по фитилю в испарительную зону.

Тепловые трубы не требуют затрат энергии на перекачку теплоносителя, работают при низких температурных напорах, обладают большой эффективной теплопроводностью (на несколько порядков выше теплопроводности серебра и меди).

В теплообменниках с внутренними источниками энергии работает только один теплоноситель, отводящий теплоту, выделенную в самом аппарате: ядерные реакторы, электронагреватели и т.д.

12.2. Основные уравнения теплового расчета

Целью проектного (конструктивного) теплового расчета, выполняемого при проектировании аппарата, является определение его поверхности теплообмена.

В случае известной поверхности теплообмена, когда требуется определить количество переданной теплоты и конечные температуры рабочих жидкостей, выполняются **поверочные** тепловые расчеты.

Для установившегося теплового режима при постоянном давлении **уравнение теплового баланса** запишется в виде $Q = G_1 \cdot \Delta i_1 \cdot \eta_{an} = G_2 \cdot \Delta i_2$, (12.1) где Δi - перепад энтальпий теплоносителя на входе i' и выходе i'' , Дж/кг; G - массовый расход теплоносителей, кг/с; Q - количество передаваемой теплоты, Вт; η_{an} - коэффициент полезного действия аппарата, учитывающий потери теплоты в окружающую среду; в общем случае: $\Delta i_1 = i_1' - i_1''$; $\Delta i_2 = i_2' - i_2''$.

Полагая $c_p = \text{const}$ и $di = c_p dt$, уравнение (12.1) перепишем в виде

$$Q = G_1 \cdot c_{p1} (i_1' - i_1'') \eta_{an} = G_2 \cdot c_{p2} (i_2' - i_2''). \quad (12.2)$$

Поскольку удельная теплоемкость $c_p = f(t)$, в практических расчетах в (12.2) выбираются значения средних теплоемкостей для необходимых интервалов температур $\bar{i}_1$ и $\bar{i}_2$.

В тепловых расчетах часто пользуются понятием **водяного эквивалента** или полной теплоемкостью массового расхода теплоносителя в единицу времени: $W = G \cdot c_p$. (12.3)

Из уравнения (12.2) следует, что $\frac{W_1}{W_2} = \frac{i_2' - i_2''}{i_1' - i_1''} = \frac{\delta i_2}{\delta i_1}$, (12.4)

где δi - температурный перепад по данному теплоносителю.

Из (12.4) следует, что отношение изменений температур однофазных теплоносителей (отношение теплоперепадов) обратно пропорционально отношению их водяных эквивалентов.

В случае применения двухфазных жидкостей (конденсация, кипение) $\Delta i = r \cdot \Delta x$, где r - теплота фазового перехода; Δx - изменение паросодержания.

Для определения поверхности теплообмена пользуются уравнением теплопередачи: $Q = k(\bar{i}_1 - \bar{i}_2)F$, (12.5)

где k - коэффициент теплопередачи; $\bar{i}_1$ и $\bar{i}_2$ - средние температуры горячего и холодного теплоносителей; F - площадь поверхности теплообмена.

Значения температур t_1 и t_2 изменяются по поверхности теплообмена, следовательно, меняются и температурный напор $\Delta t = \bar{i}_1 - \bar{i}_2$, и коэффициент теплопередачи. Таким образом, уравнение (12.5) справедливо лишь для элемента поверхности теплообмена: $dQ = k \cdot \Delta t \cdot dF$. (12.6)

Общий тепловой поток через всю поверхность теплообмена определится

как: $Q = \int_0^F k \cdot \Delta t_{cp} \cdot dF$. (12.7)

Для решения (12.7) необходимо знать законы изменения Δt и k по поверхности. Коэффициент теплопередачи изменяется незначительно и в большинстве случаев его принимают постоянным. В обратном случае k усредняют по поверхности теплообмена.

Как правило, $k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}$.

Величина Δt_{cp} называется **средним температурным напором**. Значение Δt_{cp} зависит от схемы взаимного движения теплоносителей.

Если теплоносители движутся параллельно в одном направлении - **прямоток**; параллельно, но в противоположных направлениях - **противоток** (рис. 12.3).

Если жидкости протекают во взаимно перпендикулярных направлениях - **перекрестный ток** (рис. 12.4).

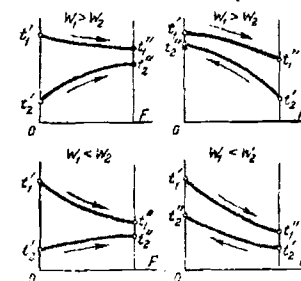


Рис. 12.3. Схемы изменения температур теплоносителей при прямо- и противотоке

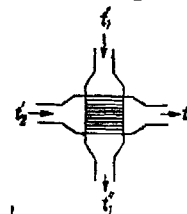


Рис. 12.4. Схема изменения температур теплоносителей при перекрестном токе

Пусть теплообменник работает по схеме прямотока (рис. 12.5). Для элемента поверхности теплообмена dF уравнение теплопередачи запишется как: $dQ = k(\bar{i}_1 - \bar{i}_2)dF = k \cdot \Delta t \cdot dF$. Температура первичного теплоносителя понизится на dt_1 , вторичного - повысится на dt_2 . Тогда $dQ = -W_1 \cdot dt_1 = W_2 \cdot dt_2$ и $dt_1 = -\frac{dQ}{W_1}$; $dt_2 = \frac{dQ}{W_2}$.

Изменение температурного напора определяется как:

$$d(t_1 - t_2) = dt_1 - dt_2 = -\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right)dQ = -m \cdot dQ,$$

где $m = \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right)$.

Подставим вместо dQ ее значение из уравнения теплопередачи:

$$d(t_1 - t_2) = -m \cdot k \cdot \Delta t_x \cdot dF. \text{ Тогда } \frac{d(\Delta t)}{\Delta t_x} = -m \cdot k \cdot dF.$$

Пусть m и k будут постоянными.

Интегрируя последнее равенство, получим:

$$\int_{\Delta t'}^{\Delta t} \frac{d(\Delta t)}{\Delta t_x} = -m \cdot k \int_0^F dF. \quad (12.8)$$

Или $\ln \frac{\Delta t}{\Delta t'} = -m \cdot k \cdot F$. Откуда $\Delta t_x = \Delta t' \cdot e^{-m \cdot k \cdot F}$.

Из (12.8) видно, что температурный напор вдоль поверхности теплообмена изменяется по экспоненте. Отсюда в прямоточных аппаратах температурный напор вдоль поверхности теплообмена непрерывно убывает.

При противотоке температуры обоих теплоносителей относительно поверхности теплообмена в направлении оси F убывают (см. рис. 12.3). При этом $dQ = -W_1 \cdot dt_1 = -W_2 \cdot dt_2$. Известно, что $d(t_1 - t_2) = -m \cdot dQ$, где $m = \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2}\right)$.

Отсюда видно, что в противоточных аппаратах Δt уменьшается по ходу первичного (горячего) теплоносителя при $W_1 < W_2$ ($m > 0$).

При $W_1 > W_2$ ($m < 0$) Δt увеличивается.

Температурный напор $\Delta t = (t_1 - t_2)$, относящийся к элементу поверхности теплообмена определяется уравнением (12.8). Температурный напор на поверхности F определится как: $\Delta \bar{t} = \frac{1}{F} \int_0^F \Delta t \cdot dF$. Тогда

$$\Delta \bar{t} = \frac{\Delta t' \cdot F}{F} \int_0^F e^{-mkF} dF = \frac{\Delta t'}{m \cdot k \cdot F} (e^{-mkF} - 1). \quad (12.9)$$

Подставим в (12.9) значения из (12.8). Тогда

$$\Delta \bar{t} = \frac{\Delta t'}{\ln \frac{\Delta t}{\Delta t'}} \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'} - 1 \right) = \frac{\Delta t - \Delta t'}{\ln \frac{\Delta t}{\Delta t'}}. \quad (12.10)$$

Для полной поверхности теплообмена $\Delta t = \Delta t''$. Тогда

$$\Delta \bar{t} = \frac{\Delta t'' - \Delta t'}{\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} = \frac{\Delta t_6 - \Delta t_m}{\ln \frac{\Delta t_6}{\Delta t_m}}. \quad (12.11)$$

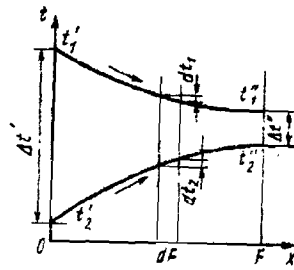


Рис. 12.5. Изменение температур теплоносителей при прямотоке

Уравнение (12.11) используется как при прямо, так и при противотоке.

$\Delta \bar{t}$ - называют среднелогарифмическим температурным напором. При равенстве водяных эквивалентов в случае противотока $m = 0$ и, как следует из (12.8), $\Delta t = \text{const}$.

При незначительном изменении температуры теплоносителей $\frac{\Delta t_6}{\Delta t_m} < 2$ можно использовать среднеарифметическое значение температурного напора: $\Delta \bar{t} = \frac{1}{2}(\Delta t_6 - \Delta t_m)$. (12.12)

Для более сложных схем движения теплоносителей (смешанное, перекрестное и др.) средний температурный напор меньше $\Delta \bar{t}$ противотока и рассчитывается как: $\Delta \bar{t} = \varepsilon \cdot \Delta t_{\text{прот}}$, (12.13)

где ε - поправка, определяемая графически по рис. 12.6 и по справочным данным для более сложных схем как функция температур теплоносителей:

$$\varepsilon = f(P, R); \quad P = \frac{t_2'' - t_2'}{t_1' - t_2'} = \frac{\alpha_2}{\Delta t_{\text{max}}} \text{ и } R = \frac{t_1' - t_1''}{t_2'' - t_2'} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}; \quad \alpha_1 = t_1' - t_1'' \text{ и } \alpha_2 = t_2'' - t_2' - \text{перепады температур по «горячему» и «холодному» теплоносителям.}$$

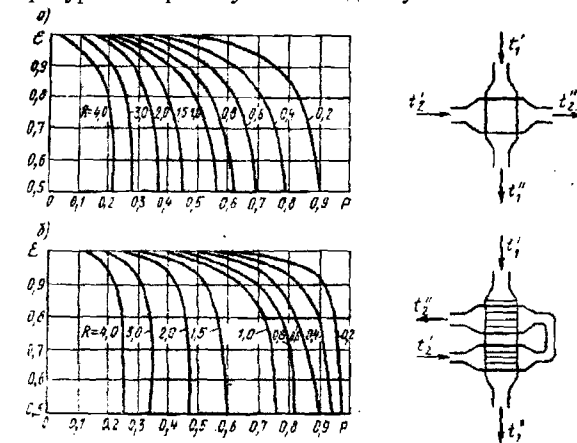


Рис. 12.6. Графики для определения поправки $\varepsilon = f(P, R)$

Прямоточная и противоточная схемы равноценны только при очень больших и очень малых значениях W_1/W_2 и малых значениях $\frac{k \cdot F}{W_1}$, когда

изменение температуры одного из теплоносителей мало или когда $\Delta \bar{t}$ велик, по сравнению с изменением температуры рабочей жидкости. Во всех остальных случаях при противотоке передается больше теплоты.

12.3. Гидродинамический расчет теплообменных аппаратов

Гидравлическое сопротивление в теплообменных аппаратах можно рассчитывать только приближенно. Гидравлические сопротивления различают как

сопротивления трения, которое обусловлено вязкостью жидкости, и местные сопротивления, создаваемые местными препятствиями движению потока. Эти два вида сопротивлений существуют в изотермическом потоке. В условиях теплообмена возникает дополнительное сопротивление, связанное с ускорением потока и сопротивлением самотяги. Последнее сопротивление обусловлено тем, что на нисходящих участках канала потоку противодействует подъемная сила, направленная вверх.

$$\Delta P = \sum \Delta P_m + \sum \Delta P_{\text{ж}} + \sum \Delta P_y + \sum \Delta P_c. \quad (12.14)$$

Потери давления на преодоление сил трения при движении несжимаемой жидкости в каналах при безотрывном течении определяются по формуле

Дарси:
$$\Delta P_m = \zeta \frac{l}{d_s} \frac{\rho \cdot w^2}{2}, \quad [\text{Па}], \quad (12.15)$$

где l – длина канала; $d_s = \frac{4f}{\Pi}$ – эквивалентный диаметр; f – поперечное сечение канала; Π – периметр канала; ρ – средняя плотность жидкости; w – средняя скорость потока; ζ – коэффициент сопротивления трения, характеризует отношение сил трения и инерционных сил.

При $\frac{l}{d} > 30$, $\zeta = \text{const}$. При $l < 30d$ – необходимо учитывать его изменения на входном участке. ζ – зависит от режима течения потока.

Для ламинарного изотермического течения ζ определяется законом Пуазейля:

$$\zeta_{\text{из}} = \frac{64\varphi}{\text{Re}_{\text{ж}}}, \quad (12.16)$$

где φ – коэффициент, учитывающий форму канала и выбирается по справочным данным. Для круглой трубы $\varphi = 1$. Для плоского канала $\varphi = 1,5$.

При вязкостном ламинарном неизоотермическом течении ζ определяют по формуле Б. С. Петухова:

$$\zeta = \zeta_{\text{из}} \left(\frac{\mu_c}{\mu_{\text{ж}}} \right)^n, \quad (12.17)$$

где $n = c \left(\text{Pe}_{\text{ж}} \frac{l}{d} \right)^{-m} \left(\frac{\mu_c}{\mu} \right)^{-0,062}$.

При $60 < \text{Pe}_{\text{ж}} (l/d) < 1500 \rightarrow c = 2,3; m = 0,3$.

При $1500 < \text{Pe}_{\text{ж}} (l/d) < 3 \cdot 10^4 \rightarrow c = 0,535; m = 0,1$.

При турбулентном изотермическом течении

$$\zeta_{\text{из}} = \frac{1}{(1,82 \lg \text{Re}_{\text{ж}} - 1,64)^2}. \quad (12.18)$$

При турбулентном неизоотермическом течении: $\zeta = \zeta_{\text{из}} \left(\frac{\text{Pr}_c}{\text{Pr}_{\text{ж}}} \right)^{1/3}$.

Местные сопротивления определяются по формуле

$$\Delta P_m = \varphi \frac{\rho \cdot w^2}{2}, \quad [\text{Па}], \quad (12.19)$$

где φ – коэффициент местного сопротивления, определяемый по справочной литературе.

Потеря давления на ускорение потока из-за изменения объема теплоносителя при постоянном сечении канала находится по формуле

$$\Delta P_y = \rho_2 \cdot w_2^2 - \rho_1 \cdot w_1^2, \quad [\text{Па}], \quad (12.20)$$

где 1, 2 – входной и выходной участки.

Для капельных жидкостей ΔP_y – пренебрегают.

Сопротивление самотяги рассчитывается по формуле

$$\Delta P_c = \pm g \cdot \Delta \rho \cdot h, \quad [\text{Па}] \quad (12.21)$$

где h – расстояние по вертикали между входом и выходом из участка; $\Delta \rho$ – перепад плотностей между теплоносителем и окружающим воздухом; g – ускорение свободного падения; “+” – опускное движение; “-” – подъемное движение.

Если теплообменник не сообщается с окружающей средой, то $\Delta P_c = 0$.

Мощность на валу насоса определяют по формуле

$$N = \frac{V \cdot \Delta P}{\eta} = \frac{G \cdot \Delta P}{\rho \cdot \eta}, \quad [\text{Вт}], \quad (12.22)$$

где V – объемный расход жидкости, $\text{м}^3/\text{с}$; G – массовый расход жидкости, $\text{кг}/\text{с}$; ΔP – полное сопротивление, Па ; ρ – плотность жидкости, $\text{кг}/\text{м}^3$; η – коэффициент полезного действия двигателя насоса.

При конструировании принимают оптимальное соотношение между поверхностью теплообмена аппарата и мощностью, необходимой для перекачки теплоносителя, на основе технико-экономических расчетов.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гимбутис Г. И. Теплообмен при гравитационном течении пленки жидкости [Текст] / Г. И. Гимбутис. – Вильнюс: Мокслас, 1988. – 233 с.
2. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача [Текст] / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. – М.: Энергия, 1981. – 416 с.
3. Кутепов А. М. Гидродинамика и теплообмен при парообразовании [Текст]: учеб. пособие для ВТУЗов / А. М. Кутепов, Л. С. Стерман, Н. Г. Стюшин. – 3-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 1986. – 352 с.
4. Михеев М. А. Основы теплопередачи [Текст] / М. А. Михеев. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1956. – 392 с.
5. Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи [Текст] / М. А. Михеев, И. М. Михеева. – М.: Энергия, 1973. – 320 с.
6. Теория тепломассообмена: учебник для технических университетов и вузов [Текст] / С. И. Исаев, И. А. Кожинов, В. И. Кофанов и др.; под ред. А. И. Леонтьева. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. – 683 с.

Введение	3
1 Основные понятия и определения	4
2 Теплопроводность	6
2.1 Коэффициент теплопроводности	6
2.1.1 Коэффициент теплопроводности газов	6
2.1.2 Коэффициент теплопроводности жидкостей	7
2.1.3 Коэффициент теплопроводности металлов	7
2.1.4 Коэффициент теплопроводности строительных материалов	7
2.2 Дифференциальное уравнение теплопроводности	7
2.3 Условия однозначности для процессов теплопроводности	10
2.3.1 Передача теплоты через плоскую стенку	11
2.3.1.1 Граничные условия первого рода	11
2.3.1.2 Граничные условия третьего рода. Теплопередача	14
2.3.2 Передача теплоты через цилиндрическую стенку	16
2.3.2.1 Граничные условия первого рода	16
2.3.2.2 Граничные условия третьего рода. Теплопередача	18
2.3.2.3 Критический диаметр цилиндрической стенки	20
2.3.2.4 Критический диаметр тепловой изоляции	20
2.3.3 Передача теплоты через шаровую стенку	21
2.3.3.1 Граничные условия первого рода	21
2.3.3.2 Граничные условия третьего рода	22
2.3.4 Обобщенный метод решения задач теплопроводности в телах элементарных форм	22
2.3.5 Интенсификация теплопередачи	23
2.4 Теплопроводность и теплопередача в стержне постоянного поперечного сечения	24
2.5 Теплопроводность при наличии внутренних источников теплоты	26
2.5.1 Теплопроводность однородной неограниченной пластины	26
2.5.2 Теплопроводность однородного цилиндра	28
3 Нестационарные процессы теплопроводности	29
3.1 Нестационарные процессы теплопроводности в телах простой формы. Граничные условия третьего рода	29
3.2 Нестационарное температурное поле пластины с внутренними источниками теплоты	36
3.3 Нестационарное температурное поле в объеме, где осуществляются химические процессы	37
3.4 Теплопроводность тел, образованных пересечением пластин	38
3.5 Регулярный режим процессов теплопроводности	39
3.6 Численные методы решения задач теплопроводности. Метод конечных разностей	40

3.7 Исследование процессов теплопроводности методом аналогии (электротепловая аналогия)	40
4 Конвективный теплообмен в однородной среде	42
4.1 Основные физические свойства жидкости	43
4.2 Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена	44
4.2.1 Уравнение энергии	44
4.2.2 Уравнение движения	46
4.2.3 Уравнение сплошности	47
4.3 Основы теории подобия и размерностей	48
4.3.1 Условия однозначности	48
4.3.2 Условия подобия и вывод ее основных критериев	49
4.3.3 Теория размерностей	54
4.4 Теплоотдача при продольном омывании плоской поверхности	55
4.4.1 Условия прилипания	55
4.4.2 Гидродинамический пограничный слой	56
4.4.3 Тепловой пограничный слой	57
4.4.4 Турбулентный перенос теплоты и количества движения	58
4.4.5 Система уравнений турбулентного пограничного слоя	59
4.4.6 Теплоотдача в ламинарном пограничном слое	62
4.4.7 Переход ламинарного течения в турбулентное	63
4.4.8 Теплоотдача при турбулентном пограничном слое	64
5 Теплоотдача при вынужденном течении жидкости в трубах	69
5.1 Основные режимы течения в трубах	69
5.2 Теплоотдача при течении жидкости в гладких трубах и каналах	72
5.2.1 Ламинарный режим	72
5.2.2 Турбулентный режим	73
5.2.3 Переходный режим	74
5.2.4 Изогнутые трубы	74
5.2.5 Теплоотдача в шероховатых трубах	74
6 Теплоотдача при вынужденном поперечном омывании труб и пучков труб	75
6.1 Одиночная труба	75
6.2 Теплоотдача при поперечном омывании пучков труб	77
7 Теплоотдача при свободном движении жидкости	79
8 Кипение	81
8.1 Теплообмен при пузырьковом кипении жидкости в большом объеме	81
8.2 Теплообмен при кипении в условиях направленного движения жидкости	87
8.2.1 Режимы течения восходящего двухфазного потока	89
8.2.2 Гравитационно стекающий двухфазный поток в вертикальных трубах.	91
9 Теплообмен при конденсации чистого пара	93

10 Тепло - и массообмен в двухкомпонентных средах	96
10.1 Основные понятия и законы	96
10.2 Дифференциальные уравнения тепломассообмена	98
10.2.1 Уравнение массообмена	98
10.2.2 Уравнение энергии	99
10.3 Тепло - и массоотдача	100
10.4 Диффузионный пограничный слой	101
10.5 Аналогия процессов тепло-и массообмена	102
10.6 Тепло - и массообмен при конденсации	102
11 Тепловое излучение	103
11.1 Общие понятия и законы	103
11.2 Основные законы теплового излучения	104
11.2.1 Закон Планка	104
11.2.2 Закон Вина	104
11.2.3 Закон Стефана-Больцмана	104
11.2.4 Закон Кирхгофа	105
11.2.5 Закон Ламберта	106
11.3 Лучистый теплообмен между телами	107
11.4 Защитные экраны	108
11.5 Лучеиспускание газов	109
12 Теплообменные аппараты	111
12.1 Классификация теплообменных аппаратов	111
12.2 Основные уравнения теплового расчета	112
12.3 Гидродинамический расчет теплообменных аппаратов	115
12.4 Рекомендуемая литература	117

Учебное издание

Вячеслав Александрович Суслов

ТЕПЛОМАССООБМЕН

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор и техн. редактор Л.Я. Титова

**Подп. к печати 08.04.2008. Формат 60х84/16. Бумага тип. № 1. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 7,5. Усл.-печ. л. 7,5. Тираж 100 экз. Изд. № 40. Цена «С». Заказ 1653.**

Ризограф ГОУ ВПО Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4