

Министерство образования и науки Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

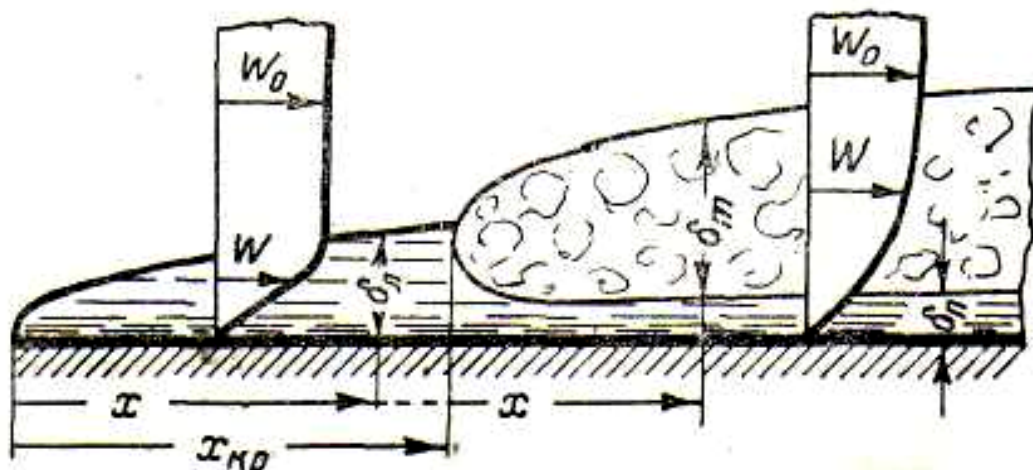
**«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»
ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ**

В.А. Суслов

ТЕПЛОМАССООБМЕН

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Часть 1



Санкт-Петербург
2016

УДК 621.184.64 (075)
ББК 31.31я 7
С 904

Суслов В.А. Тепломассообмен: учеб. пособие / СПбГУПТД ВШ ТиЭ. СПб., 2016. Часть 1. -98 с: ил. 58. – ISBN 978-5-91646-057-5

Учебное пособие содержит основные понятия, определения и расчетные уравнения по теплопроводности, теплоотдаче, тепломассообмену, тепловому излучению, тепловой и гидродинамический расчет теплообменных аппаратов. Первая часть посвящена вопросам теплопроводности и конвективного теплообмена.

Пособие составлено в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов, охватывает минимальный, но необходимый материал по дисциплине, и поэтому может быть использовано в качестве конспекта лекций студента - теплоэнергетика по направлению 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»

Рецензенты: зав. кафедрой атомных станций и промтеплоэнергетики СПб ГПУ, д-р техн. наук, профессор В.В. Сергеев; профессор кафедры процессов и аппаратов химической технологии СПбГУПТД ВШ ТиЭ, д-р техн. наук В.С. Куров

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Высшей школы технологии и инергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна в качестве учебного пособия.

ISBN 978-5-91646-057-5

© Суслов В.А., 2016

© Высшая школа технологии и инергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1 Основные понятия и определения	4
2 Теплопроводность	6
2.1 Коэффициент теплопроводности	6
2.1.1 Коэффициент теплопроводности газов	7
2.1.2 Коэффициент теплопроводности жидкостей	7
2.1.3 Коэффициент теплопроводности металлов.	7
2.1.4 Коэффициент теплопроводности строительных материалов	7
2.2 Дифференциальное уравнение теплопроводности	8
2.3 Условия однозначности для процессов теплопроводности	11
2.3.1 Передача теплоты через плоскую стенку	12
2.3.1.1 Граничные условия первого рода	12
2.3.1.2 Граничные условия третьего рода. Теплопередача	14
2.3.2 Передача теплоты через цилиндрическую стенку	16
2.3.2.1 Граничные условия первого рода	16
2.3.2.2 Граничные условия третьего рода. Теплопередача	18
2.3.2.3 Критический диаметр цилиндрической стенки	20
2.3.2.4 Критический диаметр тепловой изоляции	21
2.3.3 Передача теплоты через шаровую стенку	21
2.3.3.1 Граничные условия первого рода	21
2.3.3.2 Граничные условия третьего рода	22
2.3.4 Интенсификация теплопередачи	23
2.4. Теплопроводность и теплопередача в стержне постоянного поперечного сечения	24
2.5 Примеры с решениями	26
3 Нестационарные процессы теплопроводности	30
3.1 Нестационарные процессы теплопроводности в телах простой формы. Граничные условия третьего рода	31
3.2 Теплопроводность тел, образованных пересечением пластин	37
3.3 Регулярный режим процессов теплопроводности	37
3.4 Численные методы решения задач теплопроводности. Метод конечных разностей	38
3.5 Исследование процессов теплопроводности методом аналогии (электротепловая аналогия)	40
3.6 Примеры с решениями	42
4 Конвективный теплообмен в однородной среде	44
4.1 Основные физические свойства жидкости	45
4.2 Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена	46
4.2.1 Уравнение энергии	46
4.2.2 Уравнение движения	47

4.2.3	Уравнение сплошности	49
4.3	Основы теории подобия и размерностей	50
4.3.1	Условия однозначности	50
4.3.2	Условия подобия и вывод ее основных критериев	51
4.3.3	Теория размерностей	56
4.4.	Примеры с решениями	56
4.5	Теплоотдача при продольном омывании плоской поверхности	59
4.5.1	Гидродинамический пограничный слой	60
4.5.2	Тепловой пограничный слой	62
4.5.3	Теплоотдача в ламинарном пограничном слое	63
4.5.4	Переход ламинарного течения в турбулентное	65
4.5.5	Турбулентный перенос теплоты и количества движения	67
4.5.6	Система уравнений турбулентного пограничного слоя	68
4.5.7	Теплоотдача при турбулентном пограничном слое	69
5	Теплоотдача при вынужденном течении жидкости в трубах	73
5.1	Основные режимы течения в трубах	73
5.2	Теплоотдача при течении жидкости в гладких трубах и каналах	76
5.2.1	Ламинарный режим	76
5.2.2	Турбулентный режим	77
5.2.3	Переходный режим	78
5.2.4	Изогнутые трубы	78
5.2.5	Теплоотдача в шероховатых трубах	79
5.3	Примеры с решениями	80
6	Теплоотдача при вынужденном поперечном омывании труб и пучков труб	88
6.1	Одиночная труба	88
6.2	Теплоотдача при поперечном омывании пучков труб	90
6.3	Примеры с решениями	92
	Рекомендуемая литература	96

ВВЕДЕНИЕ

Теория тепло- и массообмена представляет собой один из важнейших разделов технической физики. Она базируется на таких дисциплинах, как физика, термодинамика, динамика жидкости и газов.

Вопросы тепло- и массообмена в инженерных разработках занимали и будут приобретать все большее значение поскольку решение многих задач промышленности страны, в частности, химической технологии, энергетики, авиационной техники, судостроения, коммунального хозяйства неразрывно связано с теорией теплообмена.

Эффективность и надежность работы теплообменных аппаратов и тепловых двигателей, работающих в промышленности, достигается правильно-стью проведения их тепловых расчетов и определения конструктивных характеристик.

Существенный вклад в развитие теории тепло- и массообмена сделан отечественными учеными: М.В. Кирпичевым, М.А. Михеевым, А.А. Гухманом, Г.Н. Кружилиным, С.С. Кутателадзе, А.В.Лыковым, Б.С. Петуховым, В.П. Исаченко, Д.А. Лабунцовым, А.М. Кутеповым, Л.С. Стерманом, Н.Г. Стюшиным, В.М. Антуфьевым, В.И. Субботиным и многими другими.

Настоящее переработанное и дополненное учебное пособие составлено в соответствии с требованиями образовательных стандартов и охватывает минимальный, но необходимый объем материала по данной дисциплине и поэтому может быть использовано в качестве конспекта лекций бакалавра-теплоэнергетика.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Теплопередача или теплообмен – это учение о самопроизвольных и необратимых процессах распространения теплоты в пространстве, обусловленных неоднородным температурным полем.

Температурным полем называется совокупность мгновенных значений температуры в объеме тела или системы тел для каждого рассматриваемого момента времени:

$$t = f(x, y, z, \tau), \quad (1.1)$$

где t – температура; x, y, z – пространственные координаты; τ – время.

Температурное поле, описываемое уравнением (1.1), в котором температура зависит от времени, называется **нестационарным**. При установившемся тепловом режиме, когда температурное поле не зависит от времени, $dt/d\tau = 0$, температурное поле называется **стационарным**:

$$t = f(x, y, z); \quad \partial t / \partial \tau = 0. \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) являются **многомерными** или пространственными. Для **одномерного** стационарного температурного поля уравнение записывается так:

$$t = f(x), \quad \partial t / \partial y = \partial t / \partial z = 0, \quad \partial t / \partial \tau = 0. \quad (1.3)$$

В этом случае температура в процессе нагрева или охлаждения определяется одной координатой.

Геометрическое место точек в температурном поле, имеющих одинаковую температуру, называют **изотермическими поверхностями**. Изотермические поверхности не пересекаются, они либо оканчиваются на поверхности тела, либо располагаются внутри его. Температура в теле изменяется только в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. Скорость изменения температуры по нормали к изотермической поверхности характеризуется **градиентом температуры** – вектором, направленным по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и численно равным производной от температуры по этому направлению:

$$\text{grad} t = \bar{n}_0 \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (1.4)$$

где n_0 – единичный вектор, нормальный к изотермической поверхности и направленный в сторону возрастания температуры (рис. 1.1).

Количество теплоты, переносимое за единицу времени

через изотермическую поверхность площадью F , называется **тепловым потоком** Q , [Дж/с] или [Вт].

Тепловой поток, проходящий через единицу площади поверхности, называют **плотностью теплового потока**: $q = Q/F$, [Вт/м²]. Вектор q направлен в сторону убывания температуры.

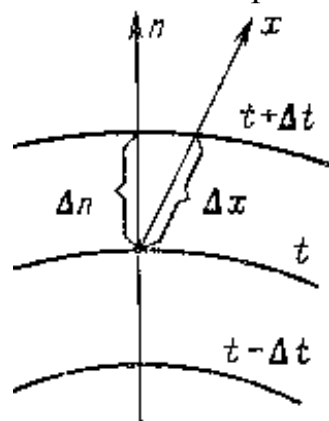


Рис. 1.1. К определению температурного гра-

диента

Если $gradt$ для различных точек изотермической поверхности различен, то количество теплоты, которое пройдет через всю изотермическую поверхность в единицу времени определится следующим образом:

$$Q = \int_F q \cdot dF, \quad [Bm], \quad (1.5)$$

где dF – элемент изотермической поверхности.

Полное количество теплоты Q , прошедшее за время τ через изотермическую поверхность F , найдется по уравнению:

$$Q_\tau = \int_0^\tau \int_F q \cdot dF \cdot d\tau, \quad [Джс]. \quad (1.6)$$

Количество теплоты, проходящее через элементарную площадку dF_ℓ , расположенную под углом φ к плоскости, касательной к изотермической поверхности определяется по уравнению: $dQ_\tau = q \cdot dF_\ell \cdot \cos\varphi \cdot d\tau$. (1.7)

Из уравнения (1.7) следует, что самой большой плотностью теплового потока будет та, которая направлена по нормали к изотермическим поверхностям (рис. 1.2).

Таким образом, для определения количества теплоты, проходящего через какую-либо поверхность твердого тела, необходимо знать температурное поле внутри рассматриваемого тела. Нахождение температурного поля тела, является главной задачей теории теплопроводности.

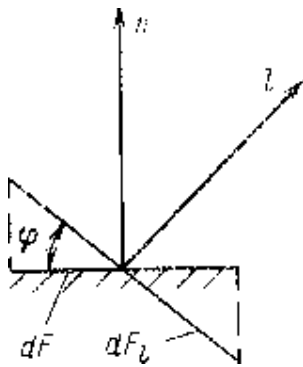


Рис. 1.2. К уравнению 1.7

Различают три вида теплообмена:

а) **теплопроводность**;

б) **конвективный теплообмен**, характеризующийся переносом теплоты самим теплоносителем – макроскопическими элементами среды; плотность конвективного теплового потока на поверхности теплообмена определяется уравнением Ньютона-Рихмана: $q = \alpha (t_{жс} - t_c)$, (1.8)
где α , $[Bm/(m^2 \cdot c)]$ – коэффициент теплоотдачи; $t_{жс}$ и t_c – температуры теплоносителя и стенки.

в) **теплообмен излучением**, характеризующийся тем, что часть внутренней энергии тела преобразуется в энергию излучения и передается через пространство электромагнитными волнами.

В реальных условиях отдельные виды теплообмена – теплопроводность, конвективный теплообмен и лучистый теплообмен – сопутствуют один другому.

Теплопередачей называется теплообмен между двумя теплоносителями через разделяющую их твердую стенку. Плотность теплового потока в этом случае рассчитывается как: $q = k (t_2 - t_1)$, (1.9)
где k , $[Bm/(m^2 \cdot c)]$ – коэффициент теплопередачи; $t_2 - t_1 = \Delta t$ – температурный напор, равный разности температур горячего и холодного теплоносителей, разделенных твердой стенкой.

2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Теплопроводность – процесс молекулярного переноса теплоты в сплошной среде, обусловленный наличием градиента температуры. Перенос теплоты теплопроводностью в телах происходит в результате последовательного обмена энергией движения структурных частиц: от более нагретых к соседним, менее нагретым частям среды. В газах перенос энергии осуществляется путем диффузии молекул и атомов. В жидкостях и твердых телах – путем упругих волн. В металлах перенос энергии осуществляется путем диффузии свободных электронов.

Основной закон теплопроводности формулируется **уравнением Фурье**:

$$q = - \lambda \operatorname{grad} t = - \lambda \cdot n_0 \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (2.1)$$



Рис. 1. Ж. Б. Фурье (1768-1830) – французский математик и физик.

вектор плотности теплового потока, передаваемого теплопроводностью, пропорционален вектору градиента температуры в той же точке и тот же момент времени. Множитель пропорциональности λ , $[Вт/(м \cdot ^\circ К)]$ называется **коэффициентом теплопроводности** и является физическим параметром вещества. Знак “-” в (2.1) учитывает противоположное направление вектора q и вектора $\operatorname{grad} t$.

2.1. Коэффициент теплопроводности

Коэффициент теплопроводности для различных материалов определяется экспериментально:

$$\lambda = \frac{|\vec{q}|}{|\operatorname{grad} t|}, \quad [Вт/(м \cdot ^\circ К)]. \quad (2.2)$$

Согласно (2.2) λ численно равен количеству теплоты, которое проходит в единицу времени через единицу изотермической поверхности при $\operatorname{grad} t = 1$.

При наличии теплообмена тела имеют различную температуру. Поэтому необходимо знать зависимость λ от температуры. Опыты показывают, что для многих материалов эта зависимость близка к линейной:

$$\lambda = \lambda_o [1 + b (t - t_o)], \quad (2.3)$$

где λ_o – коэффициент теплопроводности при t_o ; b – опытная постоянная.

2.1.1. Коэффициент теплопроводности газов

Согласно кинетической теории, в которой газ при обычных давлениях и температурах рассматривается как совокупность молекул, находящихся в хаотическом движении и столкновениях, теплопроводность определяется соотношением:

$$\lambda = \bar{w} l c_v \rho / 3, \quad (2.4)$$

где $\bar{w}$ – средняя скорость перемещения молекул газа; l – средняя длина пробега молекул; c_v – теплоемкость при $v = \text{const}$; ρ – плотность.

При увеличении давления ρ увеличивается, а l – уменьшается. При этом $\rho l = \text{const}$. Поэтому λ остается постоянным при изменении давления. С увеличением температуры $\bar{w}$ и c_v – увеличиваются. Поэтому λ также увеличивается. Для газов $\lambda = 0,006 - 0,6 \text{ [Вт/(м}^\circ\text{К)]}$. λ для водяного пара и других реальных газов отличается от идеальных и зависит, в том числе, и от давления.

2.1.2. Коэффициент теплопроводности жидкостей

Коэффициент теплопроводности жидкости можно определить по уравнению:

$$\lambda = A (c_p \rho^{4/3}) / \mu^{1/3}, \quad (2.5)$$

где μ – молекулярная масса; A – коэффициент, пропорциональный скорости распространения упругих волн в жидкости, зависящий от температуры. Так как ρ убывает с повышением температуры, то для жидкостей при $\mu = \text{const}$, λ – убывает. Исключение составляют вода и глицерин. λ жидкостей = $0,07 - 0,7$. С возрастанием давления λ увеличивается.

2.1.3. Коэффициент теплопроводности металлов

В металлах транспорт теплоты осуществляется, в основном, свободными электронами, которые движутся из более нагретых областей в менее нагретые, где они отдают энергию, и обратно для восполнения ее в более нагретых зонах. С повышением температуры в металлах усиливается рассеивание электронов. Поэтому λ уменьшается. При наличии примесей λ металлов убывает, что связано со структурными неоднородностями металла и связанным с этим рассеиванием электронов. Так λ чистой меди – 396, а λ меди со следами мышьяка – 142. λ сплавов и λ диэлектриков с увеличением температуры увеличиваются.

2.1.4. Коэффициент теплопроводности строительных материалов

Многие строительные и теплоизоляционные материалы имеют пористое строение. Поэтому λ сильно зависит от их плотности, поскольку поры таких тел заполняют воздух, теплопроводность которого низкая. λ пористых материалов в значительной степени зависит от влажности. Так λ влажного кирпича – 1; λ сухого кирпича – 0,35; а λ воды – 0,6. У строительных материалов λ

= 0,023 – 2,9. Материалы, имеющие $\lambda < 0,25$, относят к **теплоизоляционным**.

2.2. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Дифференциальное уравнение теплопроводности необходимо, в том числе и для решения задач, связанных с нахождением температурного поля. Интегрируя это уравнение, можно получить аналитическую зависимость между величинами для всего рассматриваемого промежутка времени.

Рассмотрим в бесконечно малом промежутке времени $d\tau$ бесконечно малый элементарный объем dv со сторонами dx , dy и dz . Введем следующие допущения (рис. 2.1):

- тело однородно и изотропно;
- физические параметры постоянны;
- деформация рассматриваемого объема, связанная с изменением температуры, мала по сравнению с самим объемом;
- внутренние источники теплоты в теле заданы как: $q_v = f(x; y; z; \tau)$ и распределены равномерно.

Вывод дифференциального уравнения теплопроводности основан на законе сохранения энергии. Количество теплоты dQ , сообщенное элементарному объему извне за время $d\tau$ за счет теплопроводности и от внутренних источников, в зависимости от рассмотрения изохорного или изобарного процессов равно изменению внутренней энергии или энтальпии вещества:

$$dQ_1 + dQ_2 = dU + dL = dQ, \quad (2.6)$$

где dQ_1 – [Дж] – количество теплоты, введенное в объем теплопроводностью за время $d\tau$; dQ_2 – количество теплоты, выделившееся за время $d\tau$ в объеме dv от внутренних источников теплоты; dU – изменение внутренней энергии и dL – работы, совершенной телом над окружающей средой или наоборот.

Пусть механическая работа телом не совершается - $dL = 0$. Тогда dQ равно изменению внутренней энергии dU или энтальпии вещества di , содержащегося в элементарном объеме dv , за время $d\tau$.

Количество теплоты, которое подводится к граням элементарного объема за время $d\tau$ в направлении осей x ; y ; z обозначим через dQ_x ; dQ_y ; dQ_z .

При этом количество теплоты, подведенное к грани $dy \cdot dz$ в направлении оси X за время $d\tau$ определится как $dQ_x = q_x \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau$, где q_x – проекция плотности теплового потока на ось X , $dy \cdot dz$ – элементарная площадка.

Количество теплоты, отводимое через противоположные грани в тех же направлениях, обозначим через dQ_{x+dx} ; dQ_{y+dy} ; dQ_{z+dz} .

Относительно оси X оно пишется как:

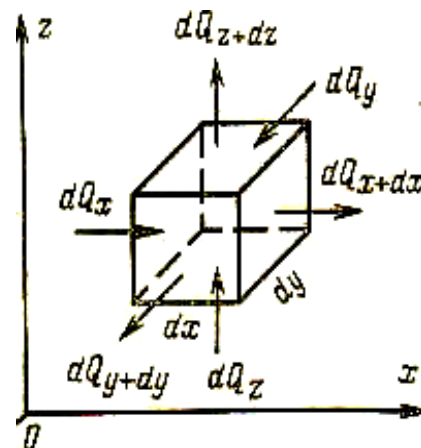


Рис. 2.1. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau.$$

Разница между подведенным и отведенным количеством теплоты от элементарного параллелепипеда за время $d\tau$ в направлении оси X , представляет:

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx} = q_x \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau - q_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau = (q_x - q_{x+dx}) dy \cdot dz \cdot d\tau.$$

Функция q_{x+dx} является непрерывной и в рассматриваемом интервале dx раскладывается в ряд Тейлора:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots$$

Ограничившись ввиду малости остальных двумя первыми членами ряда, получим: $dQ_{x1} = (q_x - q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dy \cdot dz \cdot d\tau$.

Аналогично находится количество теплоты, подводимое к элементарному объему в направлении координатных осей Y и Z .

В результате количество теплоты dQ_1 , подведенное за счет теплопроводности к рассматриваемому объему, будет равно:

$$dQ_1 = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz.$$

Пусть количество теплоты, выделяемое внутренними источниками в единице объема тела в единицу времени будет q_v , [Bm/m^3].

Тогда вторая составляющая левой части уравнения (2.6) будет равна:

$$dQ_2 = q_v \cdot dv \cdot d\tau.$$

Третью составляющую уравнения (2.6) определим в зависимости от термодинамического процесса, протекающего в системе.

В изохорном процессе вся теплота, подведенная к элементарному объему, расходуется на изменение внутренней энергии его объема: $dQ = dU$.

$$\text{Известно, что } dU = C_v \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv = c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv,$$

где C_v – изохорная теплоемкость единицы объема [$Дж/(м^3 \cdot ^\circ K)$]; c_v – изохорная теплоемкость единицы массы, [$Дж/(кг \cdot ^\circ K)$]; ρ – плотность вещества [$кг/м^3$].

Подставим полученные выражения в (2.6):

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau + q_v dv \cdot d\tau,$$

$$\text{или} \quad c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\text{div} \bar{q} + q_v. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) – **дифференциальное уравнение энергии для изохорного процесса переноса теплоты.**

В изобарном процессе вся теплота, подведенная к рассматриваемому объему, расходуется на повышение теплосодержания вещества этого объема.

Известно, что $di = C_p \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv = c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv = \rho \frac{\partial i}{\partial \tau} d\tau \cdot dv$,

где - C_p – изобарная теплоемкость единицы объема, $[Дж/м^3 \cdot ^\circ K]$; C_p – изобарная теплоемкость единицы массы, $[Дж/кг \cdot ^\circ K]$.

Подставим полученные значения dQ_1 , dQ_2 и di в (2.6). Тогда

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v = -div \bar{q} + q_v. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) – **дифференциальное уравнение энергии для изобарного процесса переноса теплоты.**

В твердых телах теплота распространяется в соответствии с законом Фурье: $q = -\lambda grad t$, а $C_p \approx C_v = C$. Тогда (2.7) перепишем как:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = - \frac{1}{c \cdot \rho} div \bar{q} + \frac{q_v}{c \cdot \rho} = \frac{1}{c \cdot \rho} div(\lambda \cdot grad t) + \frac{q_v}{c \cdot \rho}. \quad (2.9)$$

(2.9) - **дифференциальное уравнение теплопроводности.** Перепишем

(2.9) в виде:
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{c \cdot \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c \cdot \rho}.$$

Так как теплофизические характеристики const по условию задачи, то

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c \cdot \rho}, \quad (2.10)$$

где $a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$, $[м^2/с]$ - коэффициент температуропроводности, характеризующий скорость изменения температуры и являющийся мерой теплоинерционных свойств тела. Жидкости и газы обладают большой тепловой инерционностью и, значит, малым «а». Металлы обладают малой тепловой инерционностью, значит у них большой «а».

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \nabla^2 t \text{ - второй оператор Лапласа по температу-}$$

туре.

С учетом обозначений перепишем (2.10):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{q_v}{c \cdot \rho}. \quad (2.11)$$

Если система тел не содержит внутренних источников теплоты $q_v=0$, то

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t. \quad (2.12)$$

При стационарном состоянии температурного поля при наличии внутренних источников уравнение (2.11) запишется как:

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \text{ - уравнение Пуассона.} \quad (2.13)$$

При отсутствии внутренних источников $q_v = 0$ и стационарном режиме (2.11) запишется как: $\nabla^2 t = 0$ - **уравнение Лапласа.** (2.14)

2.3. Условия однозначности для процессов теплопроводности

Явление теплопроводности описываются уравнениями энергии и закона Фурье:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{q_v}{c \cdot \rho}, \quad (2.15)$$

$$dq = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (2.16)$$

Уравнения (2.15) и (2.16) отражают общий характер процесса и имеют множество решений. Для получения конкретного решения, необходимо задание условий однозначности, т.е. дать математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса:

- **геометрические** – определяют форму и размеры тела, в котором протекает процесс;

- **физические** – характеризуют физические свойства среды и тела, то есть определяют числовые значения всех физических параметров тела, входящих в дифференциальное уравнение;

- **временные (начальные)** – определяют распределение температур в начальный момент времени;

- **граничные** – определяют взаимодействие тела с окружающей средой и могут быть заданы следующим образом:

- а) **граничные условия первого рода** характеризуют распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени:

$$t_c = f(x, y, z, \tau);$$

- б) **граничные условия второго рода** - распределение плотности теплового потока на поверхности тела:

$$q_c = f(x, y, z, \tau);$$

- в) **граничные условия третьего рода** задаются температура окружающей среды и закон теплообмена между средой и поверхностью тела:

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c = \alpha (t_{жс} - t_c);$$

- г) **граничные условия четвертого рода** характеризуются равенством тепловых потоков, проходящих через поверхность контакта двух тел:

$$\lambda_1 \left| \frac{\partial t}{\partial n} \right|_1 = \lambda_2 \left| \frac{\partial t}{\partial n} \right|_2.$$

2.3.1. Передача теплоты через плоскую стенку

2.3.1.1. Граничные условия первого рода

Рассмотрим однородную, изотропную, плоскую стенку (рис. 2.2), толщина которой значительно меньше длины и ширины. На поверхностях пластины поддерживаются постоянными температурами t_{c1} и t_{c2} . Теплопроводность материала - λ . В стационарном тепловом режиме для одномерного температурного поля дифференциальное уравнение теплопроводности имеет

$$\text{вид: } \frac{d^2 t}{dx^2} = 0 \quad (2.17)$$

Граничные условия первого рода заданы следующим образом: при $x = 0 \rightarrow t = t_{c1}$; при $x = \delta \rightarrow t = t_{c2}$.

Интегрируем (2.17):

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= C_1, \quad dt = C_1 \cdot dx, \\ t(x) &= C_1 \cdot x + C_2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из (2.18) следует, что при $\lambda = \text{const}$ температура в стенке меняется по линейному закону. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем из граничных условий. При $x = 0 \rightarrow C_2 = t_{c1}$

$$\text{При } x = \delta \rightarrow t_{c2} = C_1 \delta + t_{c1}. \quad C_1 = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta}. \quad (2.19)$$

Подставив C_1 в формулу (2.18), получим

$$t_{(x)} = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x. \quad (2.20)$$

Из (2.20) видно, что распределение температуры в плоской стенке осуществляется по закону прямой.

При подстановке в уравнение Фурье $\frac{\partial t}{\partial x} = C_1$, определим:

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}). \quad (2.21)$$

Из (2.21) следует, что количество теплоты, проходящее через единицу поверхности стенки в единицу времени, прямо пропорционально λ , разности температур на наружных поверхностях стенки и обратно пропорционально толщине стенки.

Величина $\frac{\lambda}{\delta}$ называется **тепловой проводимостью**, а ей обратная - $\frac{\delta}{\lambda}$ - **термическим сопротивлением** стенки. Оно представляет собой падение температуры в стенке на единицу плотности теплового потока.

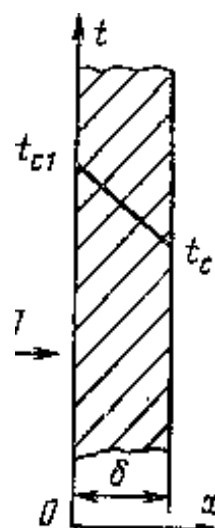


Рис. 2.2 Распределение температуры в плоской стенке

Перепишем (2.21) в виде: $\frac{q}{\lambda} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta}$.

Полученное подставим в (2.20) и получим:

$$t_{(x)} = t_{c1} - \frac{q}{\lambda} x \quad (2.22)$$

Из (2.22) следует, что при прочих равных условиях температура в стенке убывает быстрее при большей плотности теплового потока.

Общее количество теплоты Q_τ , которое передается через стенку за промежуток времени τ , определяют: $Q_\tau = q \cdot F \cdot \tau = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) F \cdot \tau$. (2.23)

Рассмотрим теплопроводность многослойной стенки, показанной на рис. 2.3 и состоящей из n слоев. Поверхности слоев идеально контактируют, поэтому температура соприкасающихся поверхностей одинакова. При стационарном режиме тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же.

Тогда на основании (2.22):

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\lambda_1}{\delta_1} (t_1 - t_2); \\ q &= \frac{\lambda_2}{\delta_2} (t_2 - t_3); \\ q &= \frac{\lambda_3}{\delta_3} (t_3 - t_4). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

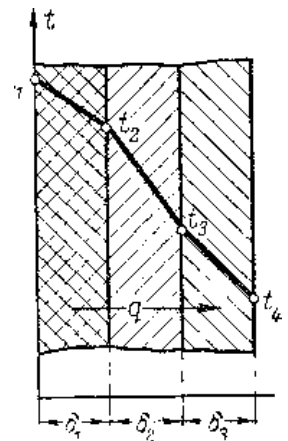


Рис. 2.3. Многослойная плоская стенка

Изменение температуры в каждом слое равно:

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_2 &= q \frac{\delta_1}{\lambda_1}; \\ t_2 - t_3 &= q \frac{\delta_2}{\lambda_2}; \\ t_3 - t_4 &= q \frac{\delta_3}{\lambda_3}. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Сложим, левые и правые части системы (б):

$$q (\delta_1 / \lambda_1 + \delta_2 / \lambda_2 + \delta_3 / \lambda_3) = t_1 - t_4$$

или

$$q = \frac{t_1 - t_4}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}}.$$

Для многослойной стенки, состоящей из n слоев, по аналогии получим:

$$q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}, \quad (2.24)$$

где n – количество слоев в стенке.

Величина $\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$ – **полное термическое сопротивление теплопроводности многослойной стенки**, равное сумме термических сопротивлений всех слоев.

Из рассмотрения многослойной стенки, как однородной и однослойной толщиной $\sum_{i=1}^n \delta_i$, выводится **эквивалентный коэффициент теплопроводности**

$\lambda_{\text{экв}}$ **многослойной стенки**. Он равен коэффициенту теплопроводности однородной стенки, толщина которой равна толщине многослойной, а термическое сопротивление равно термическому сопротивлению рассматриваемой многослойной стенки:

$$q = \frac{\lambda_{\text{экв}}}{\sum_{i=1}^n \delta_i} (t_1 - t_{n+1}). \quad \text{Тогда}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\lambda_{\text{экв}}} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} \rightarrow \lambda_{\text{экв}} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \quad (2.25)$$

Из (2.25) следует, что $\lambda_{\text{экв}}$ зависит только от термических сопротивлений и толщины отдельных слоев.

2.3.1.2. Граничные условия третьего рода. Теплопередача

Передача теплоты от одного теплоносителя к другому через разделяющую их твердую стенку называется **теплопередачей**. Это сложный теплообмен, включающий теплоотдачу от горячего теплоносителя к стенке, теплопроводность внутри стенки и теплоотдачу от стенки к холодному теплоносителю.

Пусть плоская однородная стенка, показанная на рис. 2.4, имеет толщину δ значительно меньшей высоты. Заданы коэффициенты теплопроводности стенки λ , температуры теплоносителей $t_{\text{ж}1}$ и $t_{\text{ж}2}$ и коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 . Режим стационарный. При заданных условиях необходимо найти тепловой поток от горячей жидкости к холодной и температуры на поверхности стенки. Плотность теплового потока от горячего теплоносителя к стенке определяется уравнением Ньютона – Рихмана:

$$q = \alpha_1 (t_{\text{ж}1} - t_{\text{с}1}).$$

При стационарном режиме эта же плотность теплового потока, обусловленная теплопроводностью внутри твердой стенки, находится по уравнению (2.21):

$$q = \lambda / \delta (t_{w1} - t_{w2}) .$$

Эта же плотность теплового потока от стенки к холодному теплоносителю определяется уравнением Ньютона – Рихмана:

$$q = \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2}).$$

Сведем уравнения в систему:

$$\left. \begin{aligned} q \frac{1}{\alpha_1} &= (t_{ж1} - t_{c1}); \\ q \frac{\delta}{\lambda} &= (t_{c1} - t_{c2}); \\ q \frac{1}{\alpha_2} &= (t_{c2} - t_{ж2}). \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

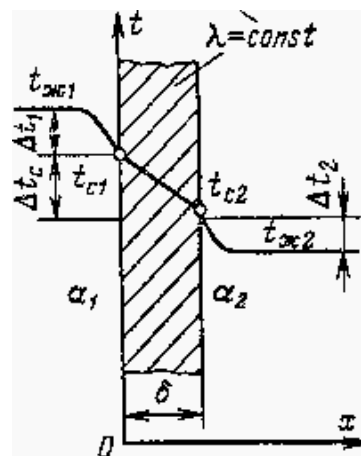


Рис. 2.4. Теплопередача через плоскую стенку

Решаем систему (*) относительно q , складывая равенства, почленно:

$$q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = t_{ж1} - t_{ж2}$$

или

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} , \quad [Bm/m^2] . \quad (2.26)$$

Перепишем (2.26) в виде $q = K (t_{ж1} - t_{ж2})$,

где $K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$, $\left[\frac{Bm}{m^2 \cdot K} \right]$ - коэффициент теплопередачи. (2.27)

K – численно равен количеству теплоты, передаваемой через единицу поверхности стенки в единицу времени от горячего теплоносителя к холодному при разности температур между ними в один градус.

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется **полным термическим сопротивлением теплопередачи**:

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} . \quad (2.28)$$

Так как полное термическое сопротивление состоит из частных термических сопротивлений, то, очевидно, что для многослойной стенки необходимо учитывать термическое сопротивление каждого слоя:

$$R = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} \quad \text{или} \quad K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} .$$

Тогда плотность теплового потока через многослойную плоскую стенку определится как:

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} . \quad (2.29)$$

Тепловой поток $Q [Вт]$, через поверхность F твердой стенки равен:

$$Q = q \cdot F = k \cdot \Delta t \cdot F . \quad (2.30)$$

Температуры поверхностей стенки найдем из системы (*)

$$t_{c1} = t_{ж1} - q \frac{1}{\alpha_1}; \quad t_{c2} = t_{ж1} - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} \right); \quad t_{c2} = t_{ж2} + q \frac{1}{\alpha_2} .$$

На основании приведенных уравнений температура на границе любых двух слоев определяется по уравнению

$$t_{c(i+1)} = t_{ж1} - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right) . \quad (2.31)$$

2.3.2. Передача теплоты через цилиндрическую стенку

2.3.2.1. Граничные условия первого рода

Рассмотрим тонкостенную трубу с внутренним диаметром $d_1 = 2 r_1$ и наружным $d_2 = 2 r_2$. На поверхностях стенки заданы постоянными температуры t_1 и t_2 . Теплопроводность материала стенки постоянна. Режим теплопроводности стационарный. Вертикальная ось OZ совмещена с осью трубы. Второй оператор Лапласа дифференциального уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 . \quad (2.32)$$

Поскольку труба тонкостенная, то температура будет меняться только в радиальном направлении. Следовательно, температурное поле – одномерное.

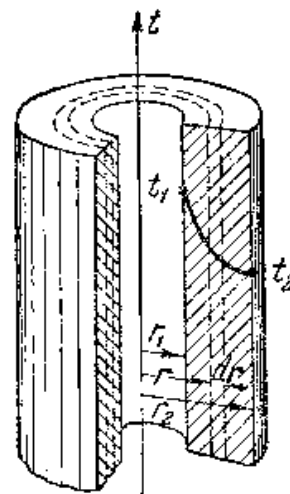


Рис. 2.5. Однородная цилиндрическая стенка

$$\text{Тогда } \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 .$$

В связи с тем, что температуры на поверхностях трубы неизменны, изотермические поверхности – цилиндрические, имеющие с трубой общую ось. Следовательно, температура постоянна по φ , где φ – угол между координатами в горизонтальной плоскости:

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0 .$$

Тогда (2.32) примет вид

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = 0 . \quad (2.33)$$

Зададимся граничными условиями:

$$r = r_1 \rightarrow t = t_1 \quad \text{и} \quad r = r_2 \rightarrow t = t_2 .$$

Введем новую переменную $U = \frac{\partial t}{\partial r}$.

$$\text{Тогда} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} = \frac{\partial U}{\partial r} , \quad \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{U}{r} .$$

Перепишем (2.33) в виде $\frac{\partial U}{\partial r} + U \frac{1}{r} = 0$. Разделим переменные:

$$\frac{\partial U}{U} + \frac{\partial r}{r} = 0 . \quad (2.34)$$

Интегрируем (2.34) и получим: $\ln U + \ln r = \ln C_1$. (2.35)

Потенцируем (2.35), получим: $U \cdot r = C_1$, тогда $U = C_1 \frac{1}{r}$. Перепишем, под-

ставив обозначенное через U : $\frac{\partial t}{\partial r} = C_1 \frac{1}{r}$. (*)

Разделим переменные: $\partial t = C_1 \frac{\partial r}{r}$. Интегрируем полученное выражение:

$$t = C_1 \cdot \ln r + C_2 . \quad (2.36)$$

Уравнение (2.36) – уравнение температурной кривой в цилиндре.

Постоянные C_1 и C_2 в (2.36) находим, используя граничные условия:

при $r = r_1 \rightarrow t = t_1 = C_1 \ln r_1 + C_2$ и при $r = r_2 \rightarrow t = t_2 = C_1 \ln r_2 + C_2$.

Тогда $C_2 = t_1 - C_1 \ln r_1$ и $t_2 = C_1 \ln r_2 + t_1 - C_1 \ln r_1$. Следовательно, перепад температур на стенке определится как: $t_1 - t_2 = C_1 (\ln r_1 - \ln r_2)$ и постоянная

$C_1 = \frac{t_1 - t_2}{\ln r_1 / r_2}$. Подставив C_1 в уравнение температурной кривой, получим

$$t_1 = \frac{t_1 - t_2}{\ln r_1 / r_2} \ln r_1 + C_2 . \quad \text{Откуда} \quad C_2 = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln r_1}{\ln r_1 / r_2} .$$

Подставим постоянные интегрирования в (2.36):

$$\begin{aligned} t &= (t_1 - t_2) \frac{\ln r}{\ln r_1 / r_2} + t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln r_1}{\ln r_1 / r_2} = t_1 + (t_1 - t_2) \left(\frac{\ln r}{\ln r_1 / r_2} - \frac{\ln r_1}{\ln r_1 / r_2} \right) = \\ &= t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln r / r_1}{\ln r_2 / r_1} = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln d / d_1}{\ln d_2 / d_1} . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Из (2.37) следует, что распределение температуры в цилиндрической стенке происходит по логарифмической кривой.

Воспользуемся уравнением Фурье: $Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F$; подставим в него (*):

$$Q = -\lambda \frac{C_1}{r} F = -\lambda \frac{(t_1 - t_2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l}{\ln r_1 / r_2 \cdot r} = \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot l}{\ln r_2 / r_1} (t_1 - t_2) \quad , \quad [Bm] \quad . \quad (2.38)$$

Тепловой поток в (2.38) может быть отнесен либо к единице внутренней или внешней поверхностей. Отнесем его к единице длины. Тогда

$$\frac{Q}{l} = q_l = \frac{\pi(t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda} \ln d_2 / d_1} \quad , \quad [Bm/m] \quad . \quad (2.39)$$

Тепловой поток, отнесенный к единице длины трубы, называется линейной плотностью теплового потока. Как видно из (2.38), q_l при $d_2/d_1 = \text{const}$ не зависит от поверхности цилиндрической стенки.

2.3.2.2. Граничные условия третьего рода. Теплопередача

Рассмотрим однородную Трубу (рис. 26) с постоянным коэффициентом теплопроводности λ . Температуры теплоносителей $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$, коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 постоянны. Длина трубы велика по сравнению с толщиной стенки. Тепловой режим - установившийся и постоянный. Тогда через стенку передается одно и то же количество теплоты. Следовательно, справедливы следующие равенства:

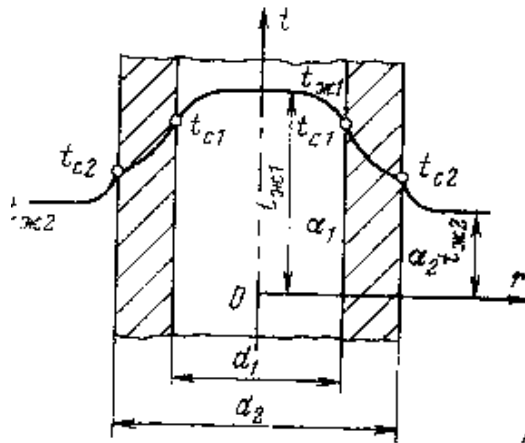


Рис.2.6.
Теплопередача через однородную цилиндрическую стенку

$$\left. \begin{aligned} q_l &= \alpha_1 \cdot \pi \cdot d_1 (t_{ж1} - t_{c1}); \\ q_l &= \frac{\pi(t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln d_2 / d_1}; \\ q_l &= \alpha_2 \cdot \pi \cdot d_2 (t_{c2} - t_{ж2}). \end{aligned} \right\}$$

Перепишем полученную систему следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} t_{ж1} - t_{c1} &= \frac{q_\ell}{\pi} \frac{1}{\alpha_1 d_1}; \\ t_{c1} - t_{c2} &= \frac{q_\ell}{\pi} \left(\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} \right); \\ t_{c2} - t_{ж2} &= \frac{q_\ell}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_2}. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Для определения температурного напора между теплоносителями сложим почленно уравнения системы (*):

$$t_{ж1} - t_{ж2} = \frac{q_\ell}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right).$$

Из полученного уравнения находится линейная плотность теплового потока через цилиндрическую поверхность:

$$q_\ell = \frac{\pi(t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}, \quad [Вт/м]. \quad (2.40)$$

Перепишем (2.40) в виде:

$$q_\ell = K_\ell \cdot \pi(t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.41)$$

где

$$K_\ell = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}, \quad \left[\frac{Вт}{м \cdot К} \right]. \quad (2.42)$$

Величина K_ℓ – **линейный коэффициент теплопередачи**. Она характеризует интенсивность передачи теплоты от одного теплоносителя к другому через разделяющую их стенку и равна количеству теплоты, которое проходит через стенку, длиной l м в единицу времени от одной среды к другой при разности температур между ними в $1 К$.

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется линейным термическим сопротивлением теплопередачи:

$$R_\ell = \frac{1}{K_\ell} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}, \quad (2.43)$$

и равна сумме частных термических сопротивлений (теплоотдачи и теплопроводности). В случае, если $d_2/d_1 < 2$, в практических расчетах можно пользоваться зависимостью

$$Q = K \cdot \pi \cdot d_x \cdot \ell(t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.44)$$

где K рассчитывается согласно (2.26).

Погрешность расчета уменьшится, если в качестве расчетной поверхности в (2.43) брать поверхность, со стороны которой α меньше:

$$1. \alpha_1 > \alpha_2 \rightarrow d_x = d_2;$$

2. $\alpha_2 \gg \alpha_1 \rightarrow d_x = d_1$;
 3. $\alpha_1 \approx \alpha_2 \rightarrow d_x = 0.5 (d_1 + d_2)$.

При рассмотрении теплопередачи через многослойную цилиндрическую стенку система равенств (*) заменяется системой, учитывающей сопротивления теплопроводности всех слоев. После решения этой системы относительно Q_ℓ получим

$$q_\ell = \frac{\pi(t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}} = K_\ell \cdot \pi(t_{ж1} - t_{ж2}) \quad (2.45)$$

где $\frac{1}{K_\ell} = R_\ell = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}$ - полное термическое сопротивление многослойной цилиндрической стенки.

$$\text{Из системы (*) следует, что } t_{c(i+1)} = t_{ж1} - \frac{q_\ell}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right). \quad (2.46)$$

2.3.2.3. Критический диаметр цилиндрической стенки

Термическое сопротивление однородной цилиндрической стенки определяется уравнением (2.43):

$$R_\ell = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}.$$

В условиях эксплуатации α_1 ; d_1 ; λ ; α_2 - const. Поэтому $R_\ell = f(d_2)$.

Исследуем функцию R_ℓ . $R_{\ell 1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} = \text{const.}$

$R_{\ell c} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$ - при увеличении d_2 , будет возрастать.

$R_{\ell 2} = \frac{1}{\alpha_2 d_2}$ - при увеличении d_2 будет уменьшаться.

Таким образом

$$R_\ell = f(R_{\ell c}; R_{\ell 2}) = f(d_2).$$

Возьмем производную от R_ℓ по d_2 и приравняем ее к 0.

$$\frac{d(R_\ell)}{d(d_2)} = \frac{1}{2\lambda \cdot d_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0. \quad (2.47)$$

Значение d_2 из (2.47) соответствует экстремальной точке кривой $R_\ell = f(d_2)$. Из рис. 2.7 видно, что при $d_2 < d_{кр}$ с увеличением d_2 R_ℓ - уменьшается. При $d_2 > d_{кр}$ с увеличением d_2 R_ℓ - возрастает. Исследуя кривую на max и min, увидим, что кривая имеет экстремальную точку, равную $d_2 = \frac{2\lambda}{\alpha_2}$, где термическое сопротивление теплопередачи будет минималь-

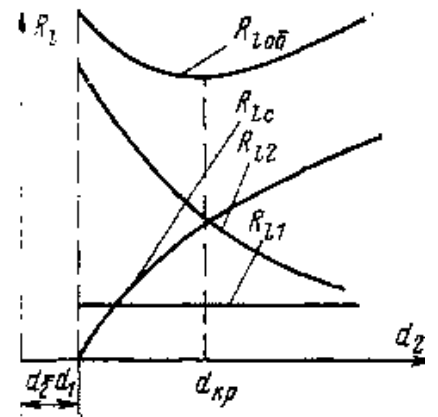


Рис. 2.7. Зависимость термического сопротивления цилиндрической стенки от d_2

ным. Значение внешнего диаметра трубы, соответствующее минимальному полному термическому сопротивлению, называется критическим диаметром.

2.3.2.4. Критический диаметр тепловой изоляции.

Термическое сопротивление трубы с изоляцией составляет

$$R_{\ell} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_c} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{из}} \ln \frac{d_n}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_n}.$$

Так как R_{ℓ} – обратно пропорционально плотности теплового потока при всех прочих постоянных величинах, то $q_{\ell} = f(d_{из})$. Критический диаметр изоляции определяется уравнением $d_{кр.из} = \frac{2\lambda_{из}}{\alpha_2}$. (2.48)

При выборе изоляционного материала необходимо рассчитать критический диаметр по зависимости (2.48).

Согласно рис. 2.8, плотность теплового потока с ростом внешнего диаметра увеличивается, при $d = d_{кр}$ достигает максимума и с дальнейшим ростом d_2 уменьшается. Эту зависимость необходимо учитывать при выборе тепловой изоляции. Если $d_{кр.из} > d_2$, применение выбранного материала в качестве изоляционного, нецелесообразно. Для эффективной работы тепловой изоляции должно выполняться условие: $d_{кр.из} < d_2$.

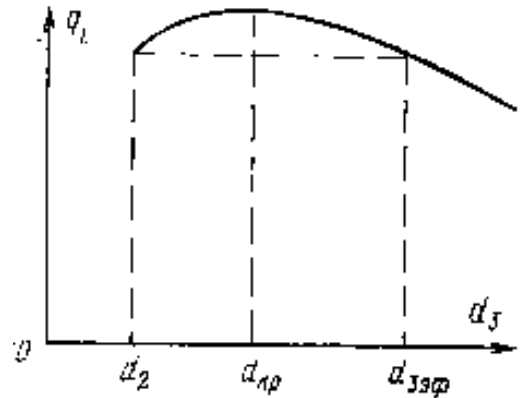


Рис. 2.8. Зависимость тепловых потерь от толщины изоляции трубы

2.3.3. Передача теплоты через шаровую стенку

2.3.3.1. Граничные условия первого рода

Рассмотрим полый шар с радиусами r_1 и r_2 , постоянной теплопроводностью λ и температурами поверхностей t_1 и t_2 , представленный на рис. 2.9. Температура изменяется только в радиальном направлении. Режим теплопроводности постоянный. $\nabla^2 t = 0$. Оператор Лапласа в сферических координатах записывается как:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = \nabla^2 t. \quad (2.49)$$

Граничные условия первого рода:

$$r = r_1 \rightarrow t = t_1; \quad r = r_2 \rightarrow t = t_2.$$

Дважды интегрируя (2.49), получим:

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{c_1}{r^2}; \quad t = c_2 - \frac{c_1}{r}. \quad (2.50)$$

Постоянные интегрирования находим из граничных

$$\text{условий: } c_1 = -\frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}; \quad c_2 = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \frac{1}{r_1}.$$

Подставим постоянные интегрирования в (2.50):

$$t = t_{c1} - \frac{t_1 - t_{c2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right). \quad (2.51)$$

Из (2.51) видно, что температура внутри шаровой стенки изменяется по закону гиперболы.

Количество теплоты, проходящее через шар, поверхностью $F = 4\pi \cdot r^2$ в единицу времени:

$$Q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} F = \frac{4\pi \cdot \lambda \cdot r^2 (t_1 - t_2)}{r^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot \Delta t}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} = \pi \cdot \lambda \frac{d_1 d_2}{\delta} \Delta t, \quad (2.52)$$

где $\delta = \frac{d_2 - d_1}{2}$ - толщина стенки.

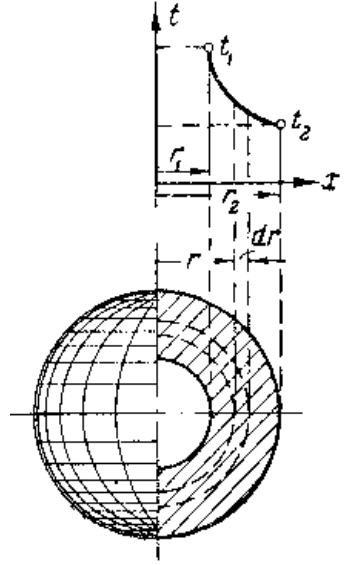


Рис.2.9. Однородная шаровая стенка

2.3.3.2. Граничные условия третьего рода

При граничных условиях третьего рода кроме r_1 и r_2 , t_1 и t_2 , λ , известны температуры горячей и холодной жидкостей $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$ и коэффициенты теплоотдачи на поверхностях шаровой стенки α_1 и α_2 .

Процесс теплопроводности стационарный. Тогда можно записать:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \alpha_1 \pi \cdot d_1^2 (t_{ж1} - t_1); \\ Q &= \frac{2\lambda \cdot \pi}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} (t_1 - t_2); \\ Q &= \alpha_2 \pi \cdot d_2^2 (t_{ж2} - t_2). \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Решая (2.53) относительно Q , получим

$$Q = \frac{\pi(t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}} = K_{ш} \pi \cdot \Delta t, \quad (2.54)$$

где: $K_{ш}$ - коэффициент теплопередачи шаровой стенки, $[Bm^0K]$.

$R_{ш} = \frac{1}{k_{ш}} = \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}$ - термическое сопротивление теплопередачи шаровой стенки.

2.3.4. Интенсификация теплопередачи

Пути интенсификации теплообмена находят в результате анализа коэффициента теплопередачи K , являющегося определяющей величиной при заданных размерах стенки и температурах теплоносителей: $K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$.

При тонких стенках с большим λ :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (2.55)$$

Из (2.55) следует, что K не может быть больше самого малого значения α . Если $\alpha_2 \rightarrow \infty$, то $K \rightarrow \alpha_1$. Если $\alpha_1 \rightarrow \infty$, то $K \rightarrow \alpha_2$. Следовательно, для увеличения K следует уменьшать большее из термических сопротивлений.

При передаче теплоты через цилиндрическую и шаровую стенки термические сопротивления последних определяются не только коэффициентами теплоотдачи, но и размерами поверхностей: $\frac{1}{\alpha \cdot d}$; $\frac{1}{\alpha \cdot d^2}$.

Следовательно, если α мало, то термическое сопротивление теплоотдачи можно уменьшить за счет соответствующей поверхности. Этот результат можно получить за счет их оребрения поверхности (рис. 2.10), поскольку термические сопротивления пропорциональны $\frac{1}{\alpha_1 F_1}$ и $\frac{1}{\alpha_2 F_2}$. Исходя из этого, при $\alpha_1 \ll \alpha_2$, оребряют поверхность со стороны α_1 до тех пор, пока $\alpha_1 F_1 \cong \alpha_2 F_2$.

Дальнейшее увеличение F_1 малоэффективно. На рис. 2.10 представлены рисунки прямых и цилиндрических ребер.

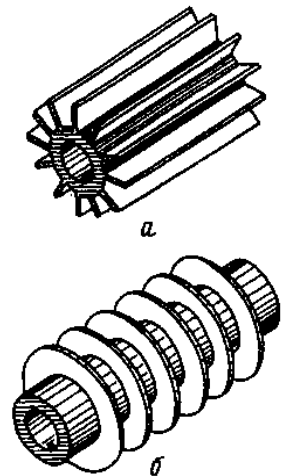


Рис. 2.10. Различные виды оребрения труб

2.4. Теплопроводность и теплопередача в стержне постоянного поперечного сечения

Рассмотрим распространение теплоты в прямом стержне с постоянным поперечным сечением по длине (Рис. 2.11). Площадь поперечного сечения – f , периметр – u . Стержень находится в среде с постоянной температурой $t_{жс}$. Коэффициент теплоотдачи от стержня в окружающую среду постоянный. Значение коэффициента теплопроводности материала стержня λ высокое.

Площадь поперечного сечения пренебрежимо мала по сравнению с его длиной, т.е. температура в стержне изменяется только вдоль его оси.

Отсчет температуры ведем от выбранной температуры $t_{жс}$. Избыточную, в результате этого, температуру стержня обозначим как ϑ . Тогда $\vartheta = t - t_{жс}$, где t – текущая температура стержня; $t_{жс}$ – температура среды, окружающей стержень. При температуре основания стержня t_1 , его избыточная температура определяется как: $\vartheta_1 = t_1 - t_{жс}$.

Выделим элемент стержня длиной dx на расстоянии x от основания стержня. Для этого участка уравнение материального баланса определится:

$$dQ = Q_x - Q_{x+dx}, \quad (2.56)$$

где dQ – количество теплоты, отдаваемое в единицу времени единицей наружной поверхности элемента окружающей среде; Q_x – количество теплоты, входящее в левую грань элемента в единицу времени; Q_{x+dx} – количество теплоты, выходящей из противоположной грани элементарного элемента в этот же промежуток времени.

На основании уравнения Фурье запишем:

$$Q_{x+dx} = -\lambda \frac{d\left(\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx\right)}{dx} f = -\lambda \cdot f \frac{d\vartheta}{dx} - \lambda \cdot f \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx.$$

При этом очевидно, что $Q_x = -\lambda \cdot f \frac{d\vartheta}{dx}$.

Подставим Q_x и Q_{x+dx} в (2.57): $dQ = \lambda \cdot f \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx$.

Вместе с тем $dQ = \alpha \cdot \vartheta \cdot U \cdot dx$, где U – геометрический размер ребра – периметр поперечного сечения ребер: $U = 2b$.

Тогда $\lambda \cdot f \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx = \alpha \cdot \vartheta \cdot U \cdot dx$ или $\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot f} \vartheta$.

Обозначим $m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot f}}$, $[1/m]$. Тогда $\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = m^2 \vartheta$. (2.57)

Пусть $m = const$ при $\alpha = const$ по всей поверхности; $\lambda = const$ в рассматриваемом диапазоне температур и постоянных габаритах ребра.

Проинтегрируем (2.59): $\vartheta = C_1^{mx} + C_2^{-mx}$. (2.58)

Уравнение (2.58) – уравнение изменения избыточной температуры стержня вдоль его длины. Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий в зависимости от длины стержня и его температуры.

Из анализа m следует, что при ребрении следует выбирать материал ребер с $\lambda = max$ и делать тонкие ребра.

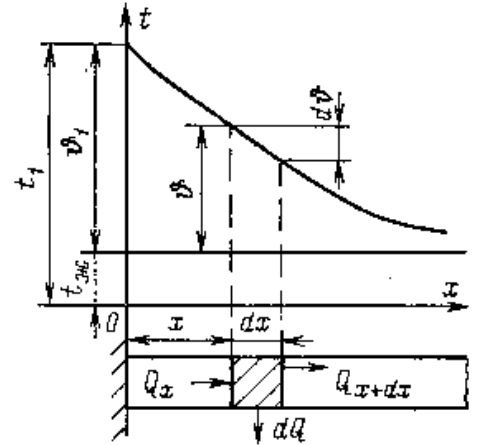


Рис. 2.11. Стержень постоянного поперечного сечения

Используя (2.58), определим количество теплоты, отданное стержнем в окружающую среду:

$$\text{При } x = \infty \quad Q = \lambda \cdot f \cdot m \cdot \vartheta_1 = \vartheta_1 \sqrt{\alpha_p \lambda \cdot U \cdot f}.$$

$$\text{При } x = l \quad Q_p = \lambda \cdot f \cdot m \cdot \vartheta_1 \cdot \text{th}(ml) = \vartheta_1 \sqrt{\alpha_p U \cdot \lambda \cdot f} \cdot \text{th}(ml),$$

где α_p – теплопередача с поверхности ребра; th – гиперболический тангенс.

При рассмотрении теплопередачи через ребристую плоскую стенку (рис. 2.12) найдем расчетное уравнение для определения потока теплоты с поверхности ребра:

$$Q_p = \alpha_p \vartheta_1 F_p \frac{\text{th}\left(\frac{l}{d} \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}}\right)}{\left(\frac{l}{d}\right) \sqrt{2\alpha_p \delta / \lambda}}. \quad (2.59)$$

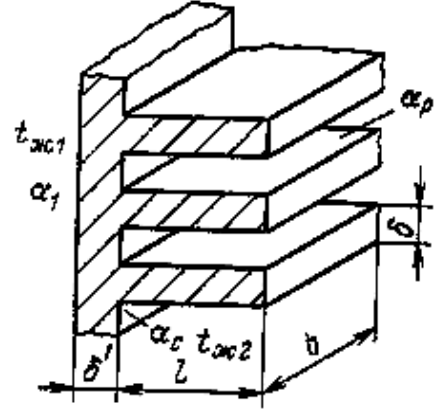


Рис. 2.12. Теплопередача через ребристую стенку

В (2.59) $\alpha_p \delta / \lambda = Bi$ – число Био. Критерий Био представляет собой отношение внутреннего термического сопротивления теплопроводности к внешнему термическому сопротивлению теплоотдачи:

$$Bi = \frac{\delta / \lambda}{1 / \alpha_p}. \quad \text{Перепишем (2.59) как:}$$

$$Q_p = \alpha_p \cdot \vartheta_1 \cdot F_p \cdot E, \quad \text{где} \quad E = \frac{\text{th}\left(\frac{l}{d} \sqrt{2Bi}\right)}{\frac{l}{d} \sqrt{2Bi}} - \text{коэффициент эффективности}$$

ребра. Число E стремится к 1 при $Bi \rightarrow 0$, а $\lambda \rightarrow \infty$.

$$Q = Q_p + Q_c = \alpha_{np} \cdot \vartheta_1 \cdot F_{p.c},$$

где $Q_c = \alpha_c \cdot \vartheta_1 \cdot F_c$ – поток теплоты с гладкой части ребристой поверхности; $F_{p.c} = F_p + F_c$; $\alpha_{np} = \alpha_p E (F_p / F_{p.c}) + \alpha_c (F_c / F_{p.c})$ – приведенный коэффициент теплоотдачи, учитывающий теплоотдачу поверхности ребра, поверхности гладкой стенки и эффективность работы ребра. Тогда общий тепловой поток через стенку определится как:

$$Q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1 F_c} + \frac{\delta'}{\lambda \cdot F_c} + \frac{1}{\alpha_{np} F_{p.c}}}. \quad (2.60)$$

Отнесем (2.60) к единице оребренной поверхности: $\frac{Q}{F_{p.c}} = K_{p.c} (t_{ж1} - t_{ж2})$, где

$$K_{p.c} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} \frac{F_{pc}}{F_c} + \frac{\delta'}{\lambda} \frac{F_{pc}}{F_c} + \frac{1}{\alpha_{np}}}; \quad F_{p.c} / F_c - \text{отношение оребренной поверхности к}$$

гладкой называется коэффициентом оребрения.

Практическое определение эффективности оребрения является более сложной задачей. Во-первых, теоретический коэффициент эффективности ребра E заметно меньше единицы. Как следствие, при высоких значениях высоты ребра возникают сложности по определению α для подстановки в число Био. Во-вторых, раздельное определение α_p и α_c практически невозможно. Поэтому приведенный коэффициент теплоотдачи $\alpha_{пр}$ определяют, как правило, по зависимости

$$\alpha_{пр} = \left(E \cdot \mu_p \cdot \psi \frac{F_{p.}}{F_{p.c.}} + \frac{F_c}{F_{p.c.}} \right) \alpha_k, \quad ,$$

где α_k – условно конвективный коэффициент теплоотдачи, подставляемый в число Би; μ_p – коэффициент, учитывающий уширение ребер к основанию; ψ – поправочный, для коэффициента эффективности E , коэффициент, учитывающий неравномерное распределение теплоотдачи по поверхности ребра. Их значения, как правило, находят по справочным данным.

При заданных соотношениях коэффициентов теплоотдачи при оребрении плоской стенки со стороны малого α с коэффициентом оребрения $F_{p.c.}/F_c = 2$, передача теплоты увеличится примерно в два раза.

2.5. Примеры с решениями

Пример 2-1. Определить потери теплоты от кирпичной стены длиной 10 м, высотой 5 м и толщиной 250 мм. Температуры на поверхностях стенок соответственно равны $t_1 = 25^\circ\text{C}$ и $t_2 = -30^\circ\text{C}$. Коэффициент теплопроводности кирпича $\lambda = 0,7 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$.

Согласно уравнению (2.21)

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_1 - t_2) = \frac{0,7}{0,25} [25 - (-30)] = 154 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2};$$

$$Q = q \cdot F = 154 \cdot 10 \cdot 5 = 7700 \text{ Вт}.$$

Пример 2-2. Найти значение коэффициента теплопроводности материала стенки, если $\delta = 30 \text{ мм}$, $\Delta t = 50^\circ\text{C}$, $q = 200 \text{ кВт/м}^2$.

$$\lambda = \frac{q \cdot \delta}{\Delta t} = \frac{200000 \cdot 0,03}{50} = 120 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}.$$

Пример 2-3. Рассчитать плотность теплового потока, проходящего через стенку котла толщиной $\delta_1 = 20 \text{ мм}$ и коэффициентом теплопроводности материала $\lambda_1 = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$, если с внутренней стороны стенка покрыта слоем накипи толщиной $\delta_2 = 2 \text{ мм}$ с коэффициентом теплопроводности $\lambda_2 = 1,0 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$. Температура наружной поверхности $t_1 = 250^\circ\text{C}$ и внутренней поверхности $t_2 = 200^\circ\text{C}$.

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}} = \frac{250 - 200}{\frac{0,02}{50} + \frac{0,002}{1,0}} = \frac{50}{0,0024} = 20800 \frac{Bm}{m^2}.$$

Для определения температуры поверхности железного листа под слоем накипи используем зависимость (2.22):

$$t_2 = t_1 - q \cdot \frac{\delta_1}{\lambda_1} = 250 - 20800 \cdot 0,0004 = 250 - 8,3 = 241,7 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Пример 2-4. Найти потери теплоты в окружающую среду от кирпичной обмуровки котла толщиной $\delta = 250$ мм и ее температуру, с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 0,7 \frac{Bm}{m \cdot \text{град}}$ при температуре дымовых газов $t_g = 800 \text{ } ^\circ\text{C}$, температуре наружного воздуха $t_e = 15 \text{ } ^\circ\text{C}$, коэффициентах теплоотдачи от дымовых газов к стенке $\alpha_1 = 40 \frac{Bm}{m^2 \cdot \text{град}}$ и от стенки к окружающей среде $\alpha_2 = 10 \frac{Bm}{m^2 \cdot \text{град}}$.

$$\text{Согласно (2.27) } K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{40} + \frac{0,25}{0,7} + \frac{1}{10}} = 2,07 \frac{Bm}{m^2 \cdot \text{град}}.$$

Потери теплоты в окружающую среду с одного метра поверхности обмуровки составят: $q = 2,07(800 - 15) = 1625 \text{ } Bm/m^2$.

Температура обмуровки котла определяется по зависимости (2.22)

$$t_{ст.вн} = t_g - q \cdot \frac{1}{\alpha_1} = 800 - \frac{1624,95}{40} = 759,4 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$t_o = t_e + q \frac{1}{\alpha_2} = 15 + 1625 \frac{1}{10} = 177,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Пример 2-5. Паропровод диаметром 170/160 мм покрыт двухслойной изоляцией. Толщина первого слоя $\delta_2 = 30$ мм и второго слоя $\delta_3 = 50$ мм. Коэффициенты теплопроводности трубы и изоляции соответственно равны: $\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = 0,15$ и $\lambda_3 = 0,08 \frac{Bm}{m \cdot \text{град}}$. Температура внутренней поверхности паропровода $t_{вн} = 300 \text{ } ^\circ\text{C}$ и внешней поверхности изоляции $t_n = 50 \text{ } ^\circ\text{C}$. Определить потерю теплоты 1 м трубопровода и температуры на поверхностях раздела отдельных слоев.

По условиям задачи имеем: $d_1 = 0,16$ м, $d_2 = 0,17$ м, $d_3 = 0,23$ м, и $d_4 = 0,33$ м.

Согласно формуле (2.39) получаем:

$$q_l = \frac{\pi(t_1 - t_n)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2 \cdot \lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} = \frac{3,14 \cdot (300 - 50)}{\frac{1}{2 \cdot 50} \ln \frac{170}{160} + \frac{1}{2 \cdot 0,15} \ln \frac{230}{170} + \frac{1}{2 \cdot 0,08} \ln \frac{330}{230}} = 240,6 \frac{Bm}{m};$$

$$t_2 = 300 - \frac{240,6}{2 \cdot 3,14} 0,0006 = 300 - 0,0229 \approx 300 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$t_3 = 50 + \frac{240,6}{2 \cdot 3,14} 4,525 = 50 + 173,3 = 223,3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Пример 2-6. Стальной паропровод с коэффициентом теплопроводности $\lambda_1 = 40 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$, диаметром $\frac{200}{216} \text{ мм}$ покрыт слоем изоляции толщиной 120 мм ($\lambda_2 = 0,1 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$). Температура пара $t_n = 300 \text{ } ^\circ\text{C}$ и окружающего воздуха $t_в = 25 \text{ } ^\circ\text{C}$. Коэффициенты теплоотдачи со стороны пара и воздуха равны соответственно $\alpha_1 = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$ и $\alpha_2 = 8,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$. Требуется определить линейный коэффициент теплопередачи k_l , линейную плотность теплового потока q_l и температуру изоляции t_n .

На основании формулы (2.45) имеем:

$$\begin{aligned} k_l &= \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_3}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{100 \cdot 0,2} + \frac{1}{2 \cdot 40} \ln \frac{216}{200} + \frac{1}{2 \cdot 0,1} \ln \frac{456}{216} + \frac{1}{8,5 \cdot 0,456}} = \\ &= \frac{1}{0,05 + 0,0009 + 3,75 + 0,258} = 0,248 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}. \end{aligned}$$

На основании (2.41) $q_l = k_l \cdot \pi(t_n - t_в) = 0,248 \cdot 3,14 \cdot 275 = 214 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}.$

$$t_n = t_в + \frac{q_l}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_3} = 25 + \frac{214}{3,14} 0,258 = 25 + 17,5 = 42,5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

$$t_{ст,н} = t_в + q \cdot \frac{1}{\alpha_2} = 15 + \frac{1624,95}{10} = 177,5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Пример 2-7. Для паропровода диаметром $150/159 \text{ мм}$ и длиной $l = 350 \text{ м}$, проходящего в закрытом помещении с температурой окружающей среды $t_{жс} = 10 \text{ } ^\circ\text{C}$, требуется рассчитать изоляцию. Пар подается со следующими параметрами: на входе давление и температура пара соответственно равны $P_1 = 1,5 \text{ МПа}$, $t_{n1} = 350 \text{ } ^\circ\text{C}$; на выходе – $P_{n2} = 1,3 \text{ МПа}$, $t_{n2} = 330 \text{ } ^\circ\text{C}$. Скорость протекания пара равна $w = 25 \text{ м/сек}$. Трубопровод сварной, фланцевые соединения отсутствуют. Имеются две задвижки. В течение года паропровод эксплуатируется 7000 ч . Стоимость 1 ГДж теплоты составляет 200 руб. Найти годовую экономию от применения изоляции.

Допустимые тепловые потери определяются исходя из заданного падения температуры пара. Часовой расход пара определяется следующей зависимостью

$$G = \rho \cdot w \cdot f = 7,12 \cdot 25 \frac{3,14 \cdot 0,15^2}{4} = 3,14 \frac{\text{кг}}{\text{с}},$$

где $\rho = 7,12 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ - плотность пара при давлении $P = 1,4 \text{ МПа}$.

По таблицам водяного пара при $p_1 = 1,5 \text{ МПа}$ и $t_{n1} = 350^\circ \text{C}$ находим теплосодержание пара $i_1 = 3147,6 \text{ кДж/кг}$; при $P_2 = 1,3 \text{ МПа}$ и $t_2 = 330^\circ \text{C}$ теплосодержание пара $i_2 = 3108,5 \text{ кДж/кг}$.

Допустимые потери тепла на всей длине паропровода

$$Q = G \cdot (i_1 - i_2) = 3,14 \cdot (3147,6 - 3108,5) = 122,8 \text{ кВт}.$$

Потеря теплоты одним вентилем или задвижкой эквивалентна потере теплоты трубопроводом длиной $l = 6 \text{ м}$. Таким образом, для учета потерь теплоты двумя задвижками необходимо к заданной длине паропровода добавить 12 м .

Допустимые потери теплоты с 1 погонного метра длины паропровода составят

$$q_l = \frac{Q}{l_p} = \frac{122,8}{362} = 0,339 \frac{\text{кВт}}{\text{м}}.$$

При расчете изоляции термическими сопротивлениями теплоотдачи от пара к стенке и самой стенки трубы пренебрегаем. Тогда температура поверхности трубы t_c будет равна температуре пара $t_{n1} = 350^\circ \text{C}$.

Дальнейший расчет проведем для совелитовой мастичной изоляции. Пусть температура поверхности изоляции $t_n = 26^\circ \text{C}$. Тогда средняя температура изоляционного слоя равна $t_{uz} = \frac{t_c + t_n}{2} = \frac{350 + 26}{2} = 188^\circ \text{C}$.

Для мастичного совелита

$$\lambda_{uz} = 0,0901 + 0,000087 \cdot t_{uz} = 0,0901 + 0,000087 \cdot 188 = 0,106 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}.$$

количество переданной теплоты q_l при заданных температурах стенки тру-

бопровода равно:
$$q_l = \frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{uz} (t_{n1} - t_n)}{\ln \frac{d_n}{d_2}},$$

где d_2 — внешний диаметр трубы; d_n — внешний диаметр изоляции.

Тогда
$$\ln \frac{d_n}{d_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{uz} (t_{n1} - t_n)}{q_l} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,106 \cdot (350 - 26)}{339} = 0,636, \quad \frac{d_n}{d_2} = e^{0,636} = 1,902;$$

$$d_n = 1,902 \cdot d_2 = 1,902 \cdot 0,159 = 0,302 \text{ м}$$
 и толщина слоя изоляции
$$\delta_{uz} = \frac{d_n - d_2}{2} = 0,071$$

м.

Проверяем температуру наружного слоя изоляции t_n . При температуре помещения $t_{жс} = 10^\circ \text{C}$ коэффициент теплоотдачи от поверхности изоляции к воздуху составит
$$\alpha = 20 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}},$$
 то

$$t_n = t_{жс} + \frac{q_l}{\pi \cdot d_n \cdot \alpha_2} = 10 + \frac{339}{3,14 \cdot 0,302 \cdot 20} = 27,8^\circ \text{C}$$

Потери теплоты неизолированного паропровода по низшей температуре пара $t_{n2} = 330^{\circ}\text{C}$ могут быть найдены, как $q_l' = \alpha(t_{n2} - t_{жс}) = 20(330 - 10) = 6400 \text{ Bm}/\text{м}$.

Потери теплоты изолированного паропровода составляют $q_l = 339 \text{ Bm}/\text{м}$. Тогда, экономия теплоты определится из $\Delta q_l = q_l' - q_l = 6400 - 339 = 6061 \text{ Bm}/\text{м}$.

Для всей длины паропровода экономия теплоты равна $Q = \Delta q_l \cdot l_p = 6,061 \cdot 363 = 2200,1 \text{ кВт}$ и годовая прибыль от экономии за счет изоляции теплоты

$$Q_{год} = Q \cdot 7000 \cdot 3600 \cdot 200 = 0,0022 \cdot 3600 \cdot 7000 \cdot 200 = 11088504 \text{ руб/год}$$

3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Перенос теплоты за счет теплопроводности, когда температура системы изменяется не только от точки к точке, но и с течением времени называется нестационарным. Эти тепловые процессы всегда связаны с изменением внутренней энергии или энтальпии вещества. Нестационарные процессы существуют при прогреве или охлаждении материала и оборудования при пуске, остановке или изменении технологического режима процесса, производстве стекла, обжиге кирпича и т.д.

Различают две группы процессов:

- процесс стремится к тепловому равновесию при прогреве или охлаждении тел, помещенных в среде с заданным тепловым состоянием;
- температура тела претерпевает периодические изменения в периодически действующих подогревателях (регенераторах).

Аналитическое описание процесса теплопроводности включает в себя дифференциальное уравнение теплопроводности и условия однозначности, состоящие из:

- физических условий $\lambda, c, \rho, \dots$;
- формы и размеров тела $l_0, l_1, l_2 \dots l_n$;
- начальных условий (температура тела в начальный момент времени): $\tau = 0 \rightarrow t = t_0 = f(x, y, z)$.
- граничных условий, которые задаются в виде условий третьего рода:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_{n=0} - t_{жс}).$$

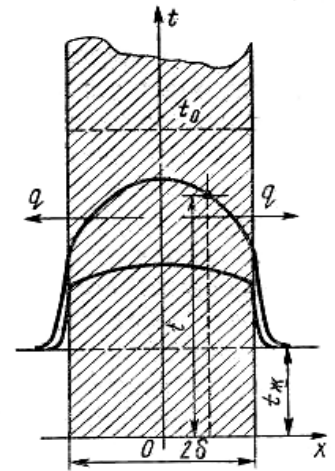


Рис. 3.1. Распределение температуры в пластине

Математическая формулировка рассматриваемой задачи заключается в отыскании функции: $t = f(x; y; z; \tau; \alpha; a; t_o; t_{жс}; l_1; \dots l_n)$, которая бы удовлетворяла уравнению теплопроводности и условиям однозначности.

3.1. Нестационарные процессы теплопроводности в телах простой формы. Граничные условия третьего рода

Рассмотрим неограниченную пластину толщиной 2δ , сделанную из однородного изотропного материала с постоянными физическими характеристиками (рис. 3.1). В начальный момент времени $\tau = 0$ температура в пластине распределена равномерно и равна t_o . Пластина помещена в среду с постоянной температурой $t_{жс} < t_o$. Теплообмен на обеих поверхностях пластины происходит при $\alpha = const$. Требуется найти распределение температуры в пластине: $t = f(x, \tau)$. При поставленных условиях распределение температуры по толщине пластины должно быть симметричным: $\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = 0$, искомая функ-

ция $t(x, \tau)$ должна быть четной функцией координаты x . (График четной функции симметричен относительно оси координат, нечетный - относительно начала координат).

Введем понятие "избыточной" температуры: $\vartheta = t - t_{жс}$. Тогда дифференциальное уравнение теплопроводности для пластины запишется:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

при следующих условиях однозначности:

- начальные условия: при $\tau = 0 \rightarrow \vartheta(x, 0) = \vartheta_o$;
- граничные условия: при $x = \delta \rightarrow \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{x=\delta}$;
- условия симметрии: при $x = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$.

Найдем функцию $\vartheta(x, \tau)$ распределения температуры в пластине в любой момент времени процесса охлаждения или нагревания. Используем метод разделения переменных. Решаем уравнение (3.1) в виде произведения двух функций, одна из которых $\varphi(x)$ – функция координаты, другая – $f(\tau)$ – времени:

$$\vartheta(x, \tau) = \varphi(x) * f(\tau). \quad (3.2)$$

Подставим данную функцию в уравнение (3.1):

$$\frac{\partial [f(\tau)]}{\partial \tau} \varphi(x) = a \frac{\partial^2 [\varphi(x)]}{\partial x^2} f(\tau).$$

Разделим переменные:

$$\frac{1}{f(\tau)} \frac{\partial [f(\tau)]}{\partial \tau} = a \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\partial^2 [\varphi(x)]}{\partial x^2}.$$

Левая часть уравнения зависит от τ , правая – только от x . Известно, что две функции от двух разных и не зависящих друг от друга аргументов могут быть равны при любых значениях последних только в том случае, если они постоянны. Величина эта отрицательна, так как тепловые процессы стремятся к равновесию и обозначаются K . Тогда получим два дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{f(\tau)} \frac{d[f(\tau)]}{d\tau} = -aK^2 ; \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2[\varphi(x)]}{dx^2} + K^2 \cdot \varphi(x) = 0 . \quad (3.4)$$

В (3.3) разделим переменные: $\frac{d[f(\tau)]}{f(\tau)} = -a \cdot K^2 \cdot d\tau .$

Интегрируем полученное уравнение: $\ln[f(\tau)] = -a \cdot \tau \cdot K^2 + \ln C_1 ,$

или $f(\tau) = C_1 e^{-aK^2 \tau} . \quad (3.5)$

Решение уравнения (3.4) имеет вид

$$\varphi(x) = C_2 \cos(kx) + C_3 \sin(kx) . \quad (3.6)$$

Подставим (3.5) и (3.6) в (3.2) и получим

$$\vartheta = [C_2 \cos(Kx) + C_3 \sin(Kx)] C_1 e^{-aK^2 \tau} .$$

Обозначим $C_1 \cdot C_2 = C$ и $C_1 \cdot C_3 = D$.

Тогда $\vartheta = [C \cos(Kx) + D \sin(Kx)] e^{-aK^2 \tau} .$

Постоянные C , D и K определяются из начальных и граничных условий. D – из условий симметрии:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = [-C \cdot K \sin(Kx) + D \cdot K \cos(Kx)] e^{-aK^2 \tau} . \quad (3.7)$$

Поскольку рассматривается тепловой процесс, то при $x=0$: $K \neq 0$; $K \cos(Kx) \neq 0$ и следовательно: $D=0$. Таким образом, $\vartheta = C e^{-aK^2 \tau} \cos(Kx)$. (3.8)

Слагаемое $C \cdot K \cdot \sin(Kx)$ должно быть отброшено, как не удовлетворяющее граничным условиям.

Значения $k = k_n$ найдём, используя граничные условия. На левой поверхности пластины $x = -\delta$. Подставим в граничные условия $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{x=\delta}$

выражения (3.7) и (3.8): $C \cdot K \cdot e^{-aK^2 \tau} \sin(K\delta) = \frac{\alpha}{\lambda} C \cdot e^{-aK^2 \tau} \cos(K\delta) .$

При сокращении подобных получим $ctg(K\delta) = \frac{K\lambda}{\alpha} .$

Умножим числитель и знаменатель правой части уравнения на δ :

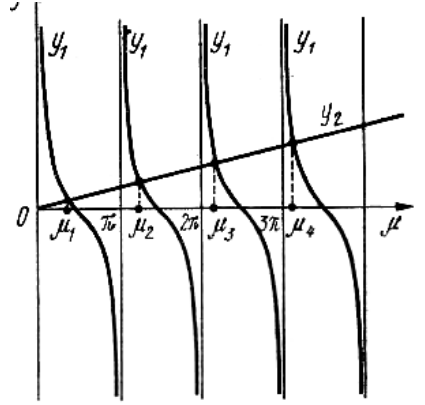
$$ctg(K\delta) = \frac{K\delta}{(\alpha \cdot \delta) / \lambda} = \frac{K \cdot \delta}{Bi} . \quad (3.9)$$

Обозначим $k\delta = \mu$. Тогда (3.9) перепишем: $ctg(\mu) = \mu / Bi . \quad (3.10)$

Характеристическое (с постоянными коэффициентами) трансцендентное (не являющееся алгебраическим) уравнение (3.10) имеет для μ бесчисленное множество решений. Наиболее просто оно решается графическим путём.

Обозначим $\operatorname{ctg}(\mu) = y_1$, а $\mu/Bi = y_2$. Построим графики этих функций:

График y_1 (на рис. 3.2) представляет собой котангенсоиду, являющуюся периодической функцией аргумента μ с периодом π . График y_2 - прямая, тангенс угла наклона которой к абсциссе равен $1/Bi$. Абсциссы точек пересечения этих графиков дают значения корней μ уравнения



(3.10). Как видно из рисунка (3.2), уравнение (3.10) имеет бесчисленное множество корней μ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), удовлетворяющих уравнению (3.10) и граничному условию. Из (3.10) следует также, что значения μ_n , которые называются собственными числами, зависят от порядкового номера n и числа Bi . При $Bi = 0$ прямая $y_2 = \mu/Bi$ совпадает с осью ординат, тогда $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = \pi, \dots, \mu_n = (n-1)\pi$. При $Bi = \infty$ прямая $y = \mu/Bi$ совпадает с осью абсцисс, тогда корни уравнения (3.10) будут равны

$$\mu_1 = \pi/2; \mu_2 = 3\pi/2, \dots, \mu_n = (2n-1)\pi/2.$$

Рис. 3.2. Графический способ определения корней характеристического уравнения

Метод разделения переменных позволяет получить совокупность частных решений $\mathcal{G}$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению теплопроводности и граничным условиям. Каждому значению корня μ_n соответствует частное распределение температуры. Сумма частных решений является общим решением уравнения теплопроводности:

$$\mathcal{G}(x; \tau) = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (3.11)$$

где $Fo = \frac{a \cdot \tau}{\ell^2}$ - критерий Фурье, имеющий смысл обобщенного времени; характеризует связь между скоростью изменения температурного поля, физическими свойствами и размерами тела.

Константа C_n - определяется из начальных условий. При этом C_n становится равным:

$$C_n = \frac{\mathcal{G}_0 \int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx}{\int_{-\delta}^{\delta} \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx} = \frac{\mathcal{G}_0 \frac{2\delta}{\mu_n} \sin \mu_n}{\delta \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right)} = \mathcal{G}_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}. \quad (3.12)$$

Подставив значение C_n в (3.11), получим **уравнение распределения температур в симметрично охлаждаемой однородной пластине:**

$$\mathcal{G} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{G}_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a \tau}{\delta^2}}. \quad (3.13)$$

В безразмерной форме уравнение (3.13) запишется как:

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{t(x, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (3.14)$$

где $A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)}$.

Уравнение (3.14) действительно и для случая прогревания пластины.

Для этого необходимо θ рассчитывать как: $\theta_{нагр} = 1 - \theta_{охл} = \frac{t(x, \tau) - t_0}{t_{жс} - t_0}$.

Так как $\cos(\mu_n x/\delta)$ – величина ограниченная, а $\exp(-\mu_n^2 Fo)$ – величина быстроубывающая, то при $Fo \geq 0,25$ ряд становится быстро сходящимся и может быть заменен только первым членом. В этом случае **распределение температуры в пластине** рассчитывается как:

$$\vartheta = A_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (3.15)$$

Область вырождения функции (3.14) ($Fo \geq 0,25$) в (3.15) называют **регулярным тепловым режимом**.

При заданных координатах x искомая температура θ есть функция критериев Bi и Fo : $\theta = f(Bi, Fo)$.

Для практических расчетов температуры в центре и на поверхности пластины обычно пользуются номограммами $\theta = f(Bi, Fo)$, приведенными на рис. 3.3 и рис. 3.4.

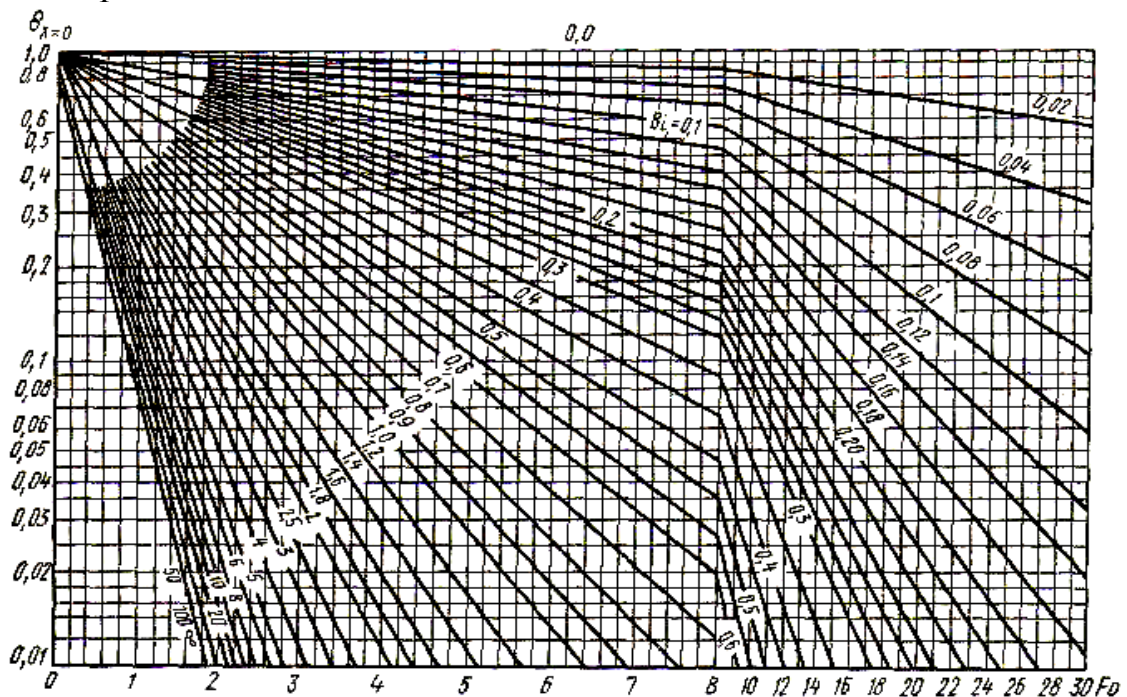


Рис. 3.3. Зависимость безразмерного перепада температур от чисел Фурье и Био для середины пластины

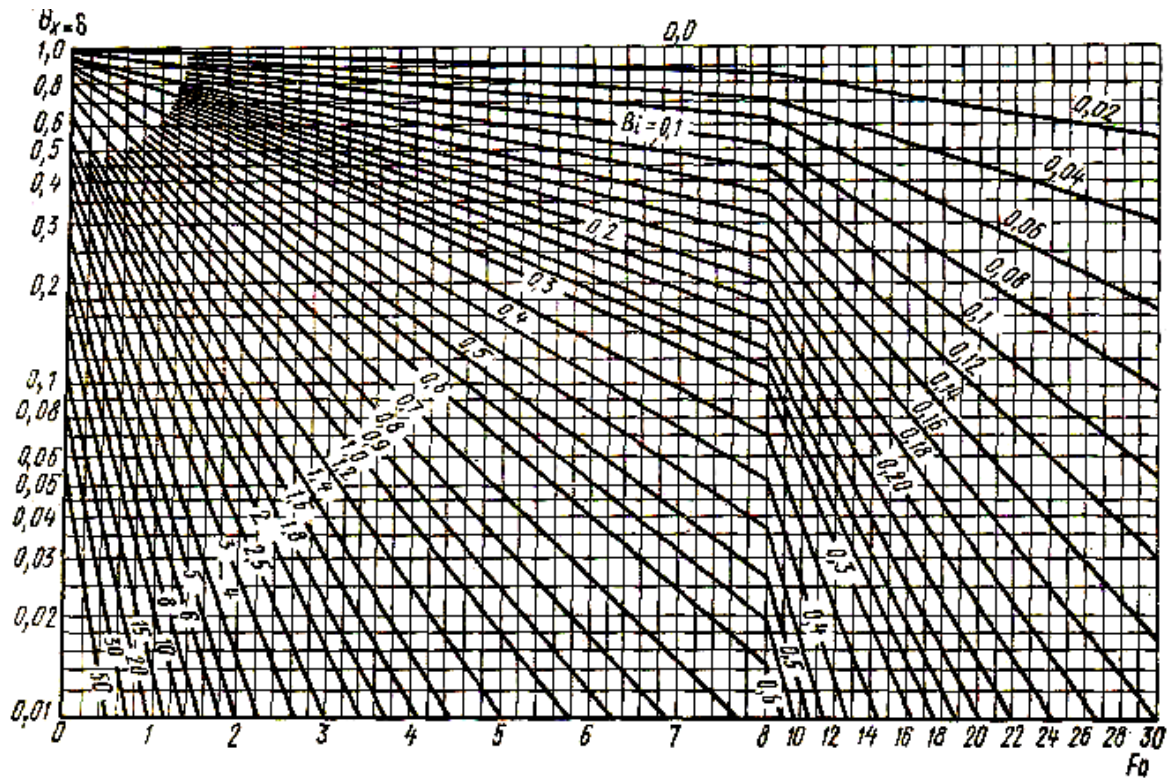


Рис. 3.4. Зависимость безразмерного перепада температур от чисел Фурье и Био для поверхности пластины

Пользуясь этими диаграммами, можно выполнить следующие расчеты:

1. Определить время охлаждения $Fo = \frac{a \cdot \tau}{\delta^2}$ до заданной температуры $\theta_{x=\delta}$ или $\theta_{x=0}$ - по известным условиям теплоотдачи на поверхностях;
2. Определить температуру через заданное время;
3. Определить интенсивность теплоотдачи на поверхностях при заданных Fo и θ .

При $Bi \rightarrow 0$, когда внутреннее термическое сопротивление мало по сравнению с термическим сопротивлением на поверхности, температуры по толщине пластины распределяются равномерно: $\theta = \cos\left(\sqrt{Bi} \frac{x}{\delta}\right) e^{-Bi}$. (3.16)

Безразмерные температуры поверхности и оси пластины практически равны.

Для определения расхода теплоты за произвольный промежуток времени на охлаждение (нагревание) пластины пользуются уравнением вида:

$$Q = C \cdot \rho (t_0 - t_{жс}) (1 - \bar{\theta}), \quad (3.17)$$

где $\bar{\theta}$ - средняя температура по толщине пластины определяется по уравнению при $Fo \geq 0,25$: $\bar{\theta} = B \cdot e^{-\mu^2 Fo}$,

где коэффициент $B = \frac{2Bi}{\mu_1^2(Bi^2 + Bi + \mu_1^2)}$ на практике находится по графику, приведенному на рис. 3.5.

Все принципиальные выводы о влиянии Bi на температурные поля, сделанные для неограниченной пластины остаются в силе и для случая охлаждения бесконечного цилиндра. При $Fo \geq 0,25$ для практических расчетов можно использовать зависимость для расчета **температуры на поверхности цилиндра:**

$\theta_{r=r_n} = A_1 \cdot I_0(\mu_1 R) e^{-\mu^2 Fo}$, (3.18)
где $R = r/r_n$ – безразмерный радиус $0 < R < 1$; $I_0(\mu_1)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка:

$$I_p = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(p+m+1)}.$$

Для оси цилиндра:

$$\theta_{r=0} = A_1 e^{-\mu^2 Fo}. \quad (3.19)$$

Для практического определения температур используют номограммы, аналогичные приведенным на рис. 3.3, рис. 3.4.

Изменение количества теплоты тела за время τ определяется зависимостью

$$Q = c \cdot \rho (\vartheta_0 - \bar{\vartheta}), \quad (3.20)$$

где средняя относительная температура цилиндра $\bar{\vartheta}$ для $Fo \geq 0,25$ определяется как:

$$\bar{\vartheta} = B \cdot \exp(-\mu^2 Fo), \quad (3.21)$$

где $B = \frac{4Bi}{\mu_1^2(\mu_1^2 + Bi^2)}$, или определяемый по номограммам, аналогично рис. 3.5.

Решая уравнение **теплопроводности шара** совместно с краевыми условиями, получим **уравнение для расчета безразмерной температуры** при

$$Fo \geq 0,25: \quad \theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{2Bi\sqrt{\mu_1^2 - (Bi-1)^2}}{\mu_1^2 + Bi^2 - Bi} \frac{\sin \mu_1 R}{\mu_1 R} e^{-\mu_1^2 Fo}. \quad (3.22)$$

Средняя температура шара определяется как:

$$\bar{\vartheta} = B \cdot \exp(-\mu_1^2 Fo), \quad (3.23)$$

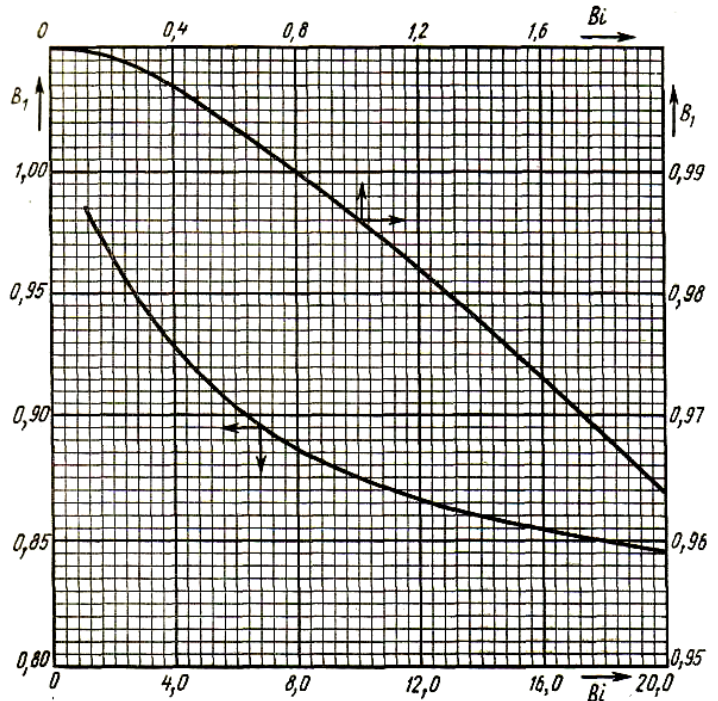


Рис. 3.5. Зависимость между коэффициентом B и критерием Bi для неограниченной пластины

где

$$B = \frac{6Bi}{\mu_1^2 (\mu_1^2 + Bi^2 - Bi)} . \quad (3.24)$$

Температуры и величина B могут быть определены графически по аналогии с пластиной. Расход теплоты определяется уравнением:

$$Q = c \cdot \rho (\vartheta_0 - \bar{\vartheta}). \quad (3.25)$$

3.2. Теплопроводность тел, образованных пересечением пластин

Вопросы теории теплопроводности при охлаждении (нагревании) тел конечных размеров решаются в соответствии с теоремой о перемножении решений. Согласно этой теореме при наличии решений системы уравнений теплопроводности для двух неограниченных пластин:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial t(y, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(y, \tau)}{\partial y^2};$$

температура $t(x, y, \tau)$ в любой точке оси симметрии неограниченного прямоугольного стержня определяется как произведение этих двух функций:

$$t(x, y, \tau) = t(x, \tau) \cdot t(y, \tau). \quad (3.26)$$

Если рассматривать параллелепипед как тело, образованное пересечением трёх неограниченных пластин, то **безразмерная температура в точке параллелепипеда** с координатами x, y, z может быть определена как произведение усредненных температур для трёх пластин: $\bar{\theta} = \bar{\theta}_1 \cdot \bar{\theta}_2 \cdot \bar{\theta}_3$. (3.27)

Для **цилиндра конической длины безразмерная температура** определяется как произведение решений для бесконечного цилиндра и неограниченной пластины, пересекающей цилиндр: $\bar{\theta}_y = \bar{\theta}_1 \cdot \bar{\theta}_2$. (3.28)

Теоремой о перемножении решений пользуются и при определении температуры в телах более сложных пересечений. Так **средняя температура куба** определяется как: $\bar{\theta}_k = \bar{\theta}_1^3$. (3.29)

Необходимо отметить, что для использования данной методики необходимо чтобы начальные условия для составляющих тел в результате умножения воспроизводили начальное условие для рассматриваемого тела, а граничные условия были однородны.

3.3. Регулярный режим процессов теплопроводности

Анализ решений дифференциального уравнения теплопроводности, полученных в виде ряда, показывает, что с ростом времени они все представляют собой быстро сходящийся ряд. Поэтому при $F_0 \geq 0,25$ используют для расчётов только первый член ряда, например, для неограниченной пластины:

$$\vartheta = A_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_1^2 F_0} \quad \text{или} \quad \vartheta = A \cdot P \cdot e^{-m\tau}, \quad (3.30)$$

где A - постоянная, определяемая начальным распределением температуры, в теле; $P = \cos(\mu_1 x / \delta)$ - функция, определяемая координатами и Bi ; $m = \mu_1^2 \frac{a}{\delta^2}$ - темп регулярного режима, $\mu = \kappa \cdot \delta$.

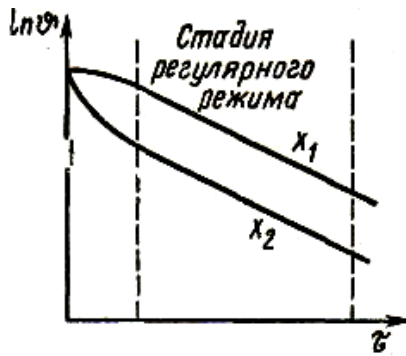


Рис. 3.6. Зависимость логарифма избыточной температуры от времени

Нестационарный процесс теплопроводности, описываемый уравнением (3.30), называется **регулярным тепловым режимом**.

Логарифмируя (3.30), получим $\ln \vartheta = \ln(A \cdot P) - m\tau$ или $\ln \vartheta = -m \cdot \tau + C(x, y, z)$. (3.31)

Из уравнения (3.31) следует, что логарифм относительной температуры - линейная функция времени, что справедливо для любой точки тела. На рис. 3.6 показано изменение температуры в точках x_1 и x_2 при охлаждении тела.

Автоматическая модель относительной температуры ϑ во времени - характерная особенность регулярного режима. Продифференцировав уравнение (3.31), получим

$$m = -\frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \operatorname{tg} \varphi, [1/c]. \quad (3.32)$$

Из уравнения (3.32) видно, что темп регулярного режима охлаждения (нагрева) не зависит ни от координат, ни от времени, представляет собой относительную скорость изменения температуры и в любой точке тела остаётся постоянным. Темп регулярного режима определяется геометрической формой, размерами тела, его физическими свойствами и условиями теплообмена на поверхности тела.

При $Bi \rightarrow \infty$, m пропорционален a :

$$m_{\infty} = \mu_1^2 \frac{a}{\delta^2} \quad \text{или} \quad a = k \cdot m_{\infty}, \quad (3.33)$$

где k - коэффициент формы, зависящий от геометрии форм и размеров тела и равен:

а) для параллелепипеда со сторонами $2\delta_1; 2\delta_2; 2\delta_3$

$$k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2\delta_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\delta_2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\delta_3}\right)^2}; \quad (3.34)$$

б) для цилиндра длиной l и радиусом r_0

$$k = \frac{1}{(2,405/r_0)^2 + (\pi/l)^2}; \quad (3.35)$$

в) для шара радиусом r_0 :

$$k = \frac{1}{(\pi/r_0)^2}. \quad (3.36)$$

3.4. Численные методы решения задач теплопроводности.

Метод конечных разностей

Задачи теплопроводности для тел сложной формы или при сложных краевых условиях не всегда удаётся решить аналитически. Метод конечных разностей позволяет решить практически любую задачу теплопроводности. Сущность метода состоит в замене непрерывной функции $t(x, \tau)$ **сеточной**

функцией, определенной в дискретных точках, соответствующих дискретным значениям аргументов x, τ , которые задаются с некоторым шагом. Совокупность этих дискретных значений называется **сеткой**. Если шаги разбивки являются постоянными, то **сетка** называется **равномерной**.

Дифференциальный оператор уравнения теплопроводности заменяют его **сеточным** или **разностным** аналогом, который содержит значения сеточной функции в нескольких узлах сетки.

Для неограниченной пластины дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (3.37)$$

Заменим дифференциалы в уравнении (3.37) на их сеточные аналоги. Для этого заменим непрерывную координату x сеткой с шагом $\Delta x (x_i = i \cdot \Delta x)$, а время τ сеткой с шагом $\Delta \tau (\tau = j \cdot \Delta \tau)$. Рассмотрим точку сетки с координатами $i = n, j = k$. При этом t_{nk} означает температуру в пространственной точке $x = n \cdot \Delta x$ в момент времени $\tau = k \cdot \Delta \tau$. Заменим производные температуры в (3.54) разностными (сеточными) выражениями. Тогда в простейшем вариан-

$$\begin{aligned} \text{те } \frac{\partial t}{\partial \tau} &\approx \frac{t_{(k+1),n} - t_{k,n}}{\Delta \tau}; & \frac{\partial t}{\partial x} &\approx \frac{t_{k,(n+1)} - t_{k,n}}{\Delta x}; & \frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{t_{k,n} - t_{k,(n-1)}}{\Delta x}; \\ \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{t_{k,(n+1)} - t_{k,n}}{\Delta x} - \frac{t_{k,n} - t_{k,(n-1)}}{\Delta x} \right] = \frac{t_{k,(n+1)} - 2t_{k,n} + t_{k,(n-1)}}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения производной от температуры в уравнение теплопроводности (3.37):

$$\frac{t_{(k+1),n} - t_{k,n}}{\Delta \tau} = \frac{a}{\Delta x^2} [t_{k,(n+1)} - 2t_{k,n} + t_{k,(n-1)}] \quad (3.38)$$

Уравнение (3.38) является **разностным аналогом уравнения теплопроводности**. Решим (3.38) относительно $t_{(k+1),n}$:

$$\begin{aligned} (t_{(k+1),n} - t_{k,n}) &= \frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} [t_{k,(n+1)} - 2t_{k,n} + t_{k,(n-1)}] \\ t_{(k+1),n} &= \frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} [t_{k,(n+1)} + t_{k,(n-1)}] + \left(1 - \frac{2a \Delta \tau}{\Delta x^2}\right) t_{k,n} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Уравнение (3.39) является решением сеточного уравнения (3.38). Оно устанавливает связь между искомой температурой в точке n и температурами в предыдущий расчётному интервалу времени k в соседних узлах сетки $(n-1)$ и $(n+1)$. Выбор значений $\Delta \tau, \Delta x$ должен определяться по условию устойчивости

$$\frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.40)$$

обеспечивающему положительность коэффициента при $t_{n,k}$ в уравнении (3.39)

Уравнение (3.37) описывает нестационарное температурное поле в бесконечной пластине. При граничных условиях третьего рода температуры поверхностей пластины определяются условиями теплообмена:

$$\alpha(t_{\text{жс}} - t_{c,0}) = \frac{\lambda}{\Delta x} (t_{c,0} - t_{c,1}) \quad (3.41)$$

Температура на поверхности пластины

$$t_{c,0} = \frac{\frac{\alpha \cdot \Delta x}{\lambda} t_{\text{ж}} + t_{c,1}}{\frac{\alpha \cdot \Delta x}{\lambda} + 1} . \quad (3.42)$$

В каждом расчетном интервале времени $\Delta\tau$ уравнения (3.38) и (3.39) решаются столько раз, сколько интервалов (Δx) содержится в пространственной сетке. **Разностная схема** [уравнения (3.39)] **называется явной**, поскольку температуры $t_{i,j}+1$ определяются по известным значениям $t_{i,j}$ в предыдущий расчетный момент времени. Точность расчета увеличивается при уменьшении $\Delta\tau$ и Δx .

3.5. Исследование процессов теплопроводности методом аналогии (электротепловая аналогия)

Сходство аналогичных явлений заключается в одинаковом характере протекания процессов. Отдельные тепловые и электрические явления описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями и условиями однозначности, хотя физическое содержание и размерность входящих в них величин различны:

$$dQ = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n_m} dF_m ; \quad (3.43)$$

$$dI = -\sigma \frac{\partial U}{\partial n_{\text{э}}} dF_{\text{э}} ; \quad (3.44)$$

где dQ и dI – элементарные потоки теплоты и электричества, прошедшие в единицу времени через площадки dF_m и $dF_{\text{э}}$ в направлении нормалей n_m и $n_{\text{э}}$; t и U – температура и электрический потенциал; λ и σ – коэффициенты теплопроводности и электропроводности.

Для двумерной задачи уравнения теплопроводности и электропроводности имеют вид:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y_m^2} = 0 ; \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_{\text{э}}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_{\text{э}}^2} = 0 , \quad (3.46)$$

то есть уравнения имеют одинаковую структуру.

Аналогичные явления должны протекать в геометрически подобных системах. Задаемся граничными условиями третьего рода:

$$-\lambda \operatorname{grad} t = \alpha \Delta t ; \quad -\operatorname{grad} t = \Delta t / (\lambda / \alpha) = \Delta t / l_m , \text{ где: } l_m = \lambda / \alpha ; \quad -\operatorname{grad} U = \Delta U / l_{\text{э}} .$$

Для установления количественной связи между аналогичными физическими величинами математические описания приводят к безразмерной форме. Для этого в качестве масштаба для температурного напора принимают величину Δt_0 ; для электропотенциала – ΔU_0 ; для линейных размеров – сходственные линейные отрезки l_{m0} и $l_{\text{э}0}$. Тогда

$$x_m / l_{m0} = X_m ; \quad y_m / l_{m0} = Y_m ; \quad l_m / l_{m0} = L ; \quad \Delta t / \Delta t_0 = \theta .$$

Отсюда получаем отношения: $x_m = X_m l_{m0}$; $y_m = l_{\text{э}0} Y_m$; $\Delta t = \Delta t_0 \theta$.

Аналогичные соотношения будут иметь место для величин электрического поля. После подстановки этих соотношений в дифференциальные уравнения тепло- и электропроводности, последние будут иметь вид:

$$\Delta t_o / l_{om}^2 (d^2 \theta / dx_m^2 + d^2 \theta / dy_m^2) = 0 \text{ или } d^2 \theta / dx_m^2 + d^2 \theta / dy_m^2 = 0; \quad (3.47)$$

$$\Delta U_o / l_{o\theta}^2 (d^2 U / dx_\theta^2 + d^2 U / dy_\theta^2) = 0 \text{ или } d^2 U / dx_\theta^2 + d^2 U / dy_\theta^2 = 0. \quad (3.48)$$

Тождественность приведенных уравнений имеет место при любом выборе сходственных масштабов для температуры и электропотенциала.

Граничные условия в безразмерном виде имеют вид:

$$\text{grad } \theta = \theta / L_m; \quad - \text{grad } U = U / L_\theta.$$

Уравнения тождественно одинаковы. Следовательно, решения безразмерных дифференциальных уравнений теплопроводности и электропроводности тождественно одинаковы при выполнении условия:

$$L_m = L_{эл} \text{ или } l_m / l_{mo} = l_\theta / l_{\theta o}. \quad (3.49)$$

Поскольку $l_m = \lambda / \alpha$, то получим зависимость для выбора линейных размеров электрических моделей явления: $l_\theta = l_{\theta o} / l_{mo} \lambda / \alpha$.

При $l_{\theta o} = l_{mo}$, $l_\theta = \lambda / \alpha$.

При $\alpha = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$, тогда $l_\theta = \text{const}$.

При выполнении условия (3.49) безразмерная температура и безразмерное электрическое напряжение в сходственных точках систем имеют численно одинаковые значения: $\theta_1 = U_1$ или $\Delta t_1 / \Delta t_o = \Delta U_1 / \Delta U_o$;

$$\theta_2 = U_2 \text{ или } \Delta t_2 / \Delta t_o = \Delta U_2 / \Delta U_o .$$

.....

$$\text{Тогда } \Delta t_1 / \Delta U_1 = \Delta t_2 / \Delta U_2 = \dots = \Delta t_o / \Delta U_o = C_{m,u} = \text{const}. \quad (3.50)$$

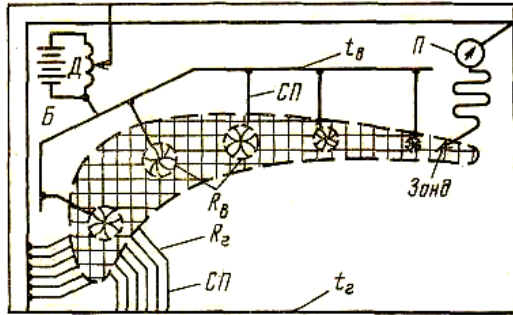
Соотношение (3.50) показывает, что при заданных условиях распределение температуры и электрического потенциала являются подобными.

Изменение теплового потока пропорционально изменению теплоемкости и температуры: $dQ = C_m (\partial t / \partial \tau_m) d\tau_m$.

Изменение электрического тока пропорционально емкости и изменению напряжения: $dI = C_\theta (\partial U / \partial \tau_\theta) d\tau_\theta$ - подобное уравнение.

В моделях теплоемкости заменяются соответствующими электрическими емкостями.

При разработке электрических моделей, имитирующих процессы теплопроводности, применяются два способа. **В первом способе** (рис. 3.7) - **электрические модели повторяют геометрию тепловой системы** и изготавливаются из материала с непрерывной проводимостью: тонкие листовые электропроводящие материалы или слои, нанесенные на пластинки, или жидкие электролиты. **Во втором способе** (рис. 3.8) - **применяются электрические модели с сосредоточенными параметрами процесса**. В них тепловые системы заменяются моделирующими электрическими цепями. Свойства исследуемой системы сосредотачиваются в отдельных узловых точках расположенных вдоль электрических цепей. Таким образом исследуются распределения температурных полей внутри здания; внутри турбинных лопаток,



с. 3.7. Проволочная модель турбинной лопатки котлоагрегатах и т.д.

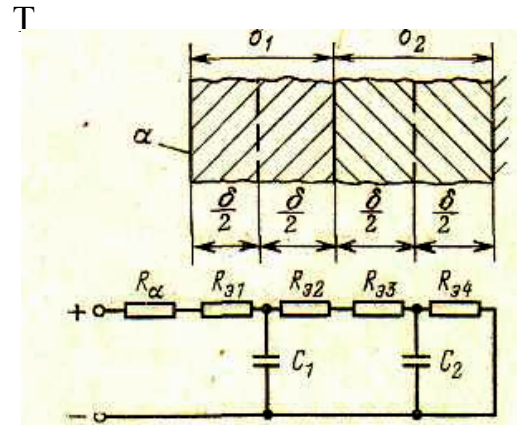


Рис. 3.8. Электрическая модель двухслойной плоской стенки

3.6. Примеры с решениями

Пример 3-1. Картонный лист толщиной $2\delta=2$ мм после сушки в картоноделательной машине с температурой $t_0=140^\circ\text{C}$ помещен в цеху, где омывается воздухом с температурой $t_g=20^\circ\text{C}$.

Определить температуры в середине и на поверхности листа через $\tau=30$ мин после начала охлаждения.

Коэффициент теплопроводности картона $\lambda=0,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$, коэффициент теплоотдачи от поверхности картона к окружающему воздуху $\alpha = 35 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$.

Плотность картона $\rho=350 \text{ кг/м}^3$, теплоемкость картона $C=1,5 \frac{\text{кДж}}{(\text{кг} \cdot \text{град})}$.

Рассчитываем коэффициент температуропроводности

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} = \frac{0,2}{350 \cdot 1500} = 0,381 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

$$\text{Находим } Bi = \frac{35 \cdot 0,001}{0,2} = 0,175, \quad Fo = \frac{0,381 \cdot 10^{-6} \cdot 1800}{(0,002)^2} = 171.$$

Температуры в середине и на поверхности картона при его охлаждении в среде с постоянной температурой определяем с помощью графика $\theta_{x=0} = f_1(Bi, Fo)$, представленного на рис. 3.3 и графика $\theta_{x=\delta} = f_2(Bi, Fo)$, на рис. 3.4 - $\theta_{x=0}=0,01$; $\theta_{x=\delta}=0,01$. В условиях охлаждения листа картона для безразмерной температуры справедливо $\theta = \frac{t-t_g}{t_0-t_g}$. Тогда, температуры в середине и на поверхности листа $t_{x=0} = t_g + \theta_{x=0}(t_0 - t_g) = 20 + 0,01(140 - 20) = 21,2^\circ\text{C}$; $t_{x=\delta}=21,2^\circ\text{C}$.

Пример 3-2. Стальной брусок с размерами граней 100; 300 и 600 мм и температурой $t_0=10^0\text{ C}$ помещен в муфельную печь, где температура ее объема составляет 1600^0 C .

Определить температуру в центре бруска через два часа после загрузки его в печь, если коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно $\lambda=18 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ и $a=3,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, а коэффициент теплоотдачи на поверхности бруска составляет $\alpha=200 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$.

Безразмерная температура бруска определяется как произведение безразмерных температур трех безграничных пластин, пересечением которых определяется тело бруска. Тогда, $\theta_{\text{ц}} = \frac{t_{\text{жс}} - t_{\text{ц}}}{t_{\text{жс}} - t_0} = \theta_{x=0} \cdot \theta_{y=0} \cdot \theta_{z=0}$.

Температуры пластин $\theta_{x=0}$, $\theta_{y=0}$, $\theta_{z=0}$ находятся по графику на рис. 3.3 зависимости температуры середины безграничной пластины от критериев Bi и Fo .

$$\text{Для пластины толщиной } 2\delta_x=100 \text{ мм, } Fo_x = \frac{3,5 \cdot 10^{-6} \cdot 7200}{(0,05)^2} = 10,1, \\ Bi_x = \frac{200 \cdot 0,05}{18} = 0,55.$$

По графику на рис. 3.4 определяем $\theta_x=0,016$.

$$\text{Для пластины толщиной } 2\delta_y=300 \text{ мм, } Fo_y = \frac{3,5 \cdot 10^{-6} \cdot 7200}{(0,15)^2} = 1,12, \\ Bi_y = \frac{200 \cdot 0,15}{18} = 1,7, \quad \theta_y=0,3.$$

$$\text{Для пластины толщиной } 2\delta_z=600 \text{ мм, } Fo_z = \frac{3,5 \cdot 10^{-6} \cdot 7200}{(0,3)^2} = 0,28, \\ Bi_z = \frac{200 \cdot 0,3}{18} = 3,3, \quad \theta_z=0,7.$$

Следовательно, $\frac{t_{\text{жс}} - t_{\text{ц}}}{t_{\text{жс}} - t_0} = 0,016 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,00336$ и температура в центре бруска

$$t_{\text{ц}} = t_{\text{жс}} - 0,00336(t_{\text{жс}} - t_0) = 1600 - 0,00336(1600 - 10) = 1594,5^0\text{ C}.$$

Пример 3-3. Внутренняя часть реактора выполнена из кислотостойкого материала. Внешняя часть представляет собой тепловую изоляцию. Коэффициент теплопроводности кислотостойкого слоя толщиной $\delta=250 \text{ мм}$ составляет $\lambda=1,86 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$, а коэффициент температуропроводности $a=3,8 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$.

Температура реактора равна $t_0=40^0\text{ C}$. Рассчитать температуру внутренней и внешней поверхности реактора через 10 часов после принятия реактором

раствора с температурой $300\text{ }^{\circ}\text{C}$. Коэффициент теплоотдачи от раствора к стенке реактора $\alpha = 350 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{град}}$.

$$Fo = \frac{3,8 \cdot 10^{-7} \cdot 3600 \cdot 12}{(0,25)^2} = 0,263, \quad Bi = \frac{350 \cdot 0,25}{1,86} = 47,0.$$

Так как $Fo > 0,25$, то установился регулярный режим и можно ограничиться первым членом ряда $\theta = N \cdot \exp(-\varepsilon_1^2 Fo) \cos\left(\varepsilon_1 \frac{x}{\delta}\right)$. Значения величин N , P , ε_1 и ε_1^2 в зависимости от Bi приведены в таблицах приложений [2]. В рассматриваемом случае при $Bi = 47,0$ из таблицы находим: $N = 1,272$, $P = 0,043$, $\varepsilon_1^2 = 2,364$. Тогда безразмерные температуры на внешней ($x=0$) и внутренней ($x=l$) поверхностях будут соответственно равны:

$$\theta_{x=0} = N \cdot \exp(-\varepsilon_1^2 Fo) = 1,272 \cdot \exp(-2,364 \cdot 0,263) = 0,682,$$

$$\theta_{x=l} = P \cdot \exp(-\varepsilon_1^2 Fo) = 0,043 \cdot \exp(-2,364 \cdot 0,263) = 0,023.$$

Температура на внутренней поверхности реактора

$$t_{x=\delta} = 300 - 0,023 \cdot (300 - 40) = 294\text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Температура на внешней поверхности реактора

$$t_{x=0} = 300 - 0,682(300 - 40) = 123\text{ }^{\circ}\text{C}.$$

4. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Теплообмен между движущейся средой и поверхностью твердого тела называется **конвективным теплообменом** или **теплоотдачей**. Конвекция возможна только в движущейся среде. Под **конвекцией теплоты** понимают процесс переноса теплоты при перемещении объемов жидкости и газа в пространстве, имеющих разные температуры в отдельных частях. При этом перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды.

Конкретные характеристики движения текущих жидкостей определяются **кривой течения** и **режимом течения**.

Кривая течения может быть записана в двух вариантах:

- как связь между поперечным градиентом скорости и касательными напряжениями (s) $s = f(dw/dy)$ (используется чаще всего);

- как связь между касательными напряжениями и скоростью сдвига.

Во втором варианте градиент скорости dw/dy представляется в виде

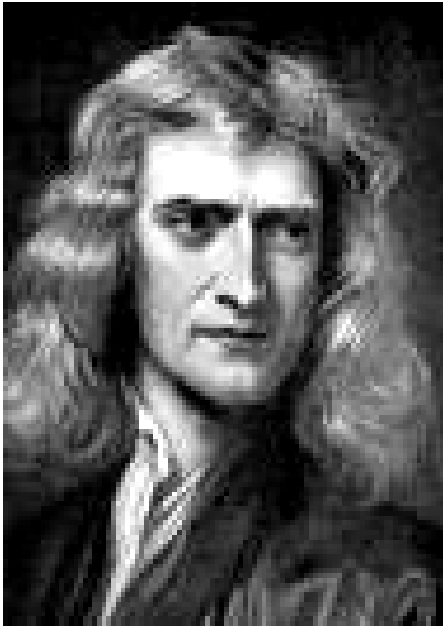
$$\frac{dw}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma',$$

где γ' – скорость сдвига.

Простейшей кривой течения является линейная связь между касательными напряжениями и градиентом скорости (или скоростью сдвига). Жидкости, подчиняющиеся этому закону, называются **ньютоновскими** или **ли-**

нейными. Коэффициент пропорциональности в линейном законе носит название **вязкости** или динамического коэффициента вязкости.

$$s = \mu \frac{dw}{dy} = \mu \frac{d\gamma}{d\tau}. \quad (4.1)$$



К ньютоновским жидкостям относятся все газы и большинство жидкостей при достаточно высокой температуре. Мы практически будем иметь дело лишь с ньютоновскими жидкостями.

4.1. Основные физические свойства жидкости

В качестве теплоносителей в технике применяются разнообразные вещества: воздух, вода, масла, нефть, спирты, ртуть, расплавленные металлы и др. Особенности жидкости как теплоносителя определяются ее физическими — свойствами.

Рис. 4.1. Исаак Ньютон (1642-1727) английский математик, механик, астроном и физик В зависимости от физических свойств жидкостей, являющихся функцией параметров состояния, процесс теплообмена может протекать различно. Большое влияние оказывают коэффициент теплопроводности λ , удельная теплоемкость C_p , плотность ρ , коэффициент температуропроводности A , встречавшиеся ранее в разделе теплопроводности.

Все жидкости обладают вязкостью. При движении жидкости возникает сила трения, противодействующая движению $S = \mu \frac{dw}{dn}$. Эта сила определяется динамическим коэффициентом вязкости μ [Па·с]. При $\frac{dw}{dn} = 1 \Rightarrow S = \mu$. В теплотехнике часто пользуются кинематическим коэффициентом вязкости $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, [м²/с]. У капельных жидкостей вязкость слабо зависит от давления, но резко уменьшается с повышением температуры. У газов вязкость увеличивается как с повышением давления, так и температуры.

На теплоотдачу оказывает влияние сжимаемость жидкости или коэффициент сжатия тела: $\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_t$, [1/Па]. (4.2)

Изотермической сжимаемостью при постоянной температуре называют величину, представляющую собой относительное изменение плотности вещества при изменении давления. Для капельных жидкостей сжимаемостью можно пренебречь, но для газов он в 20000 раз выше, чем у жидкостей. Если скорость газа менее 1/4 скорости звука, то к нему можно применять законы несжимаемой жидкости.

Имеет значение для теплообмена тепловое расширение жидкости, которое оценивается температурным коэффициентом объемного расширения:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p, \quad [1/K], \quad (4.3)$$

представляющее собой относительное изменение объема при изменении температуры на один градус. Для жидкостей β мал. Для воды при температуре $t > 4^\circ \text{C}$ β может быть отрицательным.

Для идеального газа $\beta = 1/T$.

4.2. Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена

Для описания полей температур, скоростей и определения плотности теплового потока необходимо иметь соответствующий математический аппарат.

4.2.1. Уравнение энергии

Рассмотрим однородную и изотропную жидкость. Пусть ее физические параметры будут постоянны, а энергия деформации мала по сравнению с изменением внутренней энергии. Выделим в потоке жидкости неподвижный относительно координат элементарный параллелепипед с ребрами dx , dy и dz , представленный на рис. 4.2. Теплота через грани параллелепипеда переносится теплопроводностью и конвекцией, а также может выделяться внутренними источниками.

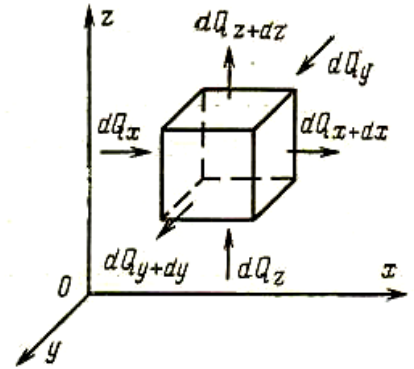


Рис. 4.2. Параллелепипед в потоке жидкости

Вывод уравнения энергии, соответствующего принятым условиям, рассматривался ранее при выводе уравнения теплопроводности:

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\text{div} \bar{q} + q_v, \quad (4.4)$$

где $\text{div} \bar{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$; ρ – плотность жидкости. У капельных жидкостей ρ слабо зависит от температуры. У газов плотность с повышением температуры значительно уменьшается.

Поскольку конвекция теплоты всегда сопровождается теплопроводностью, так как при движении жидкости или газа происходит соприкосновение частиц с различными температурами, то конвективный теплообмен можно рассчитать по уравнению $\bar{q} = q_{\text{мпр}} + q_{\text{конв}} = -\lambda \nabla t + \rho \cdot w \cdot i$. (4.5)

Согласно (4.5) проекции плотности теплового потока q на координатные оси

$$Q_x, Q_y, Q_z: \quad q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} + \rho \cdot w_x \cdot i; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} + \rho \cdot w_y \cdot i; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} + \rho \cdot w_z \cdot i.$$

Подставив проекции в (4.3), получим

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) - \rho \left(w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} \right) - \rho \cdot i \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + q_v.$$

Для несжимаемых жидкостей ($\rho = \text{const}$): $\text{div} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$.

$$\text{Тогда } \frac{\partial i}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{\rho}.$$

Так как $i = \int_t C_p \cdot dt$, то

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{\rho \cdot C_p}. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) является **уравнением энергии**. Многочлен в левой части этого уравнения – полная производная от температуры по времени: $\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau}$, где $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ – локальная производная по t ; $w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}$ – характеризует изменение температуры по потоку, т.е. это конвективная производная по t .

Пользуясь обозначением оператора Лапласа, уравнение (4.6) запишем в виде

$$\frac{Dt}{d\tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{\rho \cdot C_p}.$$

При $w_x = w_y = w_z = 0$ уравнение (4.6) превращается в уравнение теплопроводности. Как видно, температурное поле в движущейся жидкости зависит от скорости. Поэтому в систему, описывающую процесс конвективного теплообмена, необходимо добавить уравнение движения.

4.2.2. Уравнение движения

Выделим в потоке жидкости элементарный объём с размерами рёбер dx, dy и dz (рис. 4.3). Скорость потока изменяется только в направлении оси y .

Вывод уравнения движения базируется на втором законе Ньютона $F = m \cdot a$.

На элементарный объём действуют следующие силы: сила тяжести, равнодействующая сил давления и равнодействующая сил трения. Найдём проекции этих сил на ось OX .

1. Проекция силы тяжести на ось OX равна произведению проекции ускорения свободного падения g_x на массу элемента: $df_1 = \rho \cdot g_x \cdot dv$.

2. Так как на верхней грани элемента давление жидкости равно p , то на площадку $dy \cdot dz$ действует сила $p \cdot dy \cdot dz$. На нижней грани давление равно

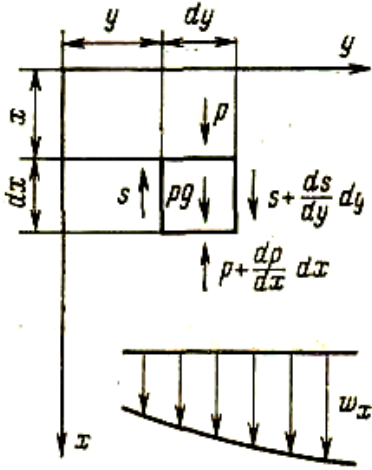


Рис. 4.3. Элементарный объем в потоке жидкости направлен против движения и равен $S \cdot dx \cdot dz$. У правой грани скорость частиц потока больше, чем в самом элементе. Поэтому на участке « $y+dy$ » сила трения направлена в сторону движения.

Равнодействующая сил трения $df_3 = \left(S + \frac{dS}{dy} dy \right) dx dz - S dx dz = \frac{dS}{dy} dv$.

Так как $S = \mu \left(\frac{dw_x}{dy} \right)$, то $df_3 = \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} dv$.

Проекция на ось OX , равнодействующих всех сил, приложенных к объёму, определяется как сумма df_1, df_2, df_3 : $df = \left(\rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} \right) dv$. (а)

Согласно второму закону механики, эта равнодействующая сила, учитывающая силы инерции, равна $df = \rho \frac{dw_x}{d\tau} dv$. (б)

Тогда $\rho \frac{dw_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}$.

В случае трёхмерного движения несжимаемой жидкости с постоянными физическими параметрами скоростное поле описывается системой уравнений движения в проекциях на оси OX, OY и OZ :

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dw_x}{d\tau} &= \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{dw_y}{d\tau} &= \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{dw_z}{d\tau} &= \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (4.7)$$

Уравнения системы (4.7) называются уравнениями Навье-Стокса. Поскольку составляющие скорости w_x, w_y, w_z изменяются во времени и про-

странстве, то член левой части уравнений (4.7) должен представлять собой полную производную от скорости по времени:

$$\frac{Dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \quad (4.8)$$

Аналогично для других осей.

В векторной форме уравнения системы (4.7) запишутся как:

$$\rho \frac{D\bar{w}}{d\tau} = \rho \bar{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \bar{w}. \quad (4.9)$$

Известно, что $\rho = \rho_0(1 - \beta \cdot \vartheta)$, где β - коэффициент объемного расширения; $\vartheta = t - t_0$; t_0 - фиксированная температура. Тогда **уравнение движения**

можем записать в виде
$$\frac{D\bar{w}}{d\tau} = -\bar{g} \cdot \beta \cdot \vartheta - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \bar{w}. \quad (4.10)$$

Так как в систему уравнений, описывающих процесс теплообмена, вошла неизвестная величина ΔP - давление, то система оказалась незамкнутой. Поэтому необходимо добавить уравнение сплошности.

4.2.3. Уравнение сплошности

Выделим в потоке движущейся жидкости неподвижный параллелепипед со сторонами dx , dy и dz . Подсчитаем массу жидкости, протекающей через него в направлении осей OX , OY , OZ за время $d\tau$ (рис. 4.4).

В направлении оси OX в элементарный объем втекает масса жидкости

$$dM_x = \rho \cdot w_x \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau, \quad (a)$$

где $\rho \cdot w_x$ - количество массы, протекающей в единицу времени через грань $dy \cdot dz$.

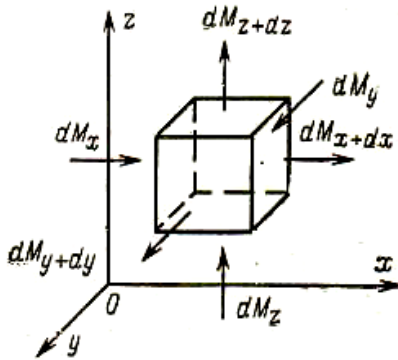


Рис. 4.4. Параллелепипед в потоке неподвижной жидкости

Из противоположной грани вытекает количество жидкости $dM_{x+dx} = \rho \cdot w_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau$. Взяв два первых члена ряда разложения, получим, что масса жидкости dM_{x+dx} , вытекающая из объема в направлении оси OX :

$$dM_{x+dx} = \left[\rho w_x + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx \right] dy dz d\tau. \quad (б)$$

Вычтем (a) из (б). Получим излишек массы жидкости, вытекающей из объема в направлении оси OX :

$$dM_{x+dx} - dM_x = \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx dy dz d\tau. \quad (в)$$

Аналогично по направлениям OY и OZ :

$$dM_{y+dy} - dM_y = \frac{\partial(\rho \cdot w_y)}{\partial y} dv \cdot d\tau ; \quad (г)$$

$$dM_{z+dz} - dM_z = \frac{\partial(\rho \cdot w_z)}{\partial z} dv \cdot d\tau . \quad (д)$$

Суммируя (в), (г) и (д), получим полный избыток массы, вытекающей из объёма. Он обусловлен изменением плотности жидкости в объёме dv и равен изменению массы объёма во времени $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} dv d\tau$. Сократив сумму на dv и $d\tau$ и перенося все члены в правую часть равенства, получим **дифференциальное уравнение сплошности или неразрывности**

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0 . \quad (4.11)$$

Для несжимаемых жидкостей при $\rho = \text{const}$:

$$\frac{\partial(w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(w_z)}{\partial z} = 0 \quad (4.12)$$

или

$$\text{div} \bar{w} = 0 . \quad (4.13)$$

4.3. Основы теории подобия и размерностей

Решение системы дифференциальных уравнений теплообмена средствами математического анализа связано с большими трудностями, иногда непреодолимыми. Поэтому такие задачи решаются либо численными методами с применением ЭВМ, либо экспериментальным путем. Вследствие этого обобщение полученных решений ограничено. При изменении аргументов требуется новое решение. Преодолеть эти трудности позволяет теория подобия.

4.3.1. Условия однозначности

Для выделения конкретно рассматриваемого процесса из бесчисленного множества, описываемого полученными дифференциальными уравнениями, к ним необходимо добавить **условия однозначности**. Они состоят из:

- 1) **геометрических условий;**
- 2) **физических условий;**
- 3) **временных или начальных условий;**
- 4) **граничных условий.**

Система дифференциальных уравнений в совокупности с условиями однозначности представляет собой математическую формулировку краевой задачи, которая является основой теории подобия.

Пусть поверхность твёрдого тела размером l_0 омывается жидкостью с постоянными вдали от тела температурой t_0 и скоростью w_0 . Поверхность тела имеет температуру t_c ; $t_c > t_0$. Физические параметры жидкости постоян-

ны. Процесс стационарный и описывается уравнениями энергии, движения и сплошности. Граничные условия процесса:

1) вдали от тела ($y=\infty$) $\rightarrow \vartheta = t - t_0 = \vartheta_0 = 0; w_x = w_0; w_y = 0;$ где t - текущая температура жидкости;

2) на поверхности тела ($y = 0; 0 \leq X \leq \ell_0; -\infty \leq Z \leq +\infty$) -

$$\vartheta = \vartheta_c = t_c - t_0 = \text{const}; w_x = w_y = w_z = 0.$$

Различают три вида величин:

- независимые переменные: координаты x, y ;
- зависимые переменные: v, w_x, w_y - определяются значениями независимых переменных при задании величин, входящих в условие однозначности;
- постоянные величины: $w_0, t_0, l_0, v_c, \nu, a, g, \beta, \dots$ - задаются условиями однозначности и не являются функцией независимых переменных.

Для приведения к безразмерному виду граничных условий выбираем масштабы приведения: l_0, w_0, ϑ_c .

Обозначим безразмерные величины:

$$X = \frac{x}{l_0}; Y = \frac{y}{l_0}; W_x = \frac{w_x}{w_0}; W_y = \frac{w_y}{w_0}; \theta = \frac{v}{v_w}.$$

Тогда граничные условия в безразмерном виде:

1) вдали от тела ($Y=\infty$) $\theta = \theta_0 = 0; W_x = 1; W_y = 0;$

2) на поверхности тела ($Y = 0; 0 \leq X \leq 1$); $\theta = \theta_c = 1; W_x = W_y = 0$.

Из граничных условий в безразмерном виде следует, что при w_0, t_c, t_0 , имеющих различные условные значения, безразмерные величины θ_0, θ_c, W имеют вполне конкретные значения.

4.3.2. Условия подобия и вывод ее основных критериев

Теория подобия – это учение о подобных явлениях. Как известно, геометрические фигуры одинаковой формы подобны, если соответственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны.

$$\text{Тогда} \quad \frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} = \frac{l''}{l'} = C_\ell,$$

где x, y, z, ℓ - координаты сходственных точек и сходственные отрезки. В этом случае C_ℓ - константа геометрического подобия.

Понятие подобия может быть распространено на любые физические явления. Однако физические явления могут рассматриваться как подобные, если они относятся к классу явлений одной и той же природы.

По этому признаку в физическом подобии выделяют:

- **кинематически подобные процессы**, если подобны движения потоков жидкости;
- **динамическое подобие** означает подобие силовых полей;
- **тепловое подобие** означает подобие температурных полей и тепловых потоков.

Обязательной предпосылкой физического подобия является геометрическое подобие. Сопоставлять можно только **однородные величины** (размерность которых и смысл одинаковы) в **сходственных точках** пространства и в **сходственные моменты времени**. Сходственными точками называются точки, удовлетворяющие условию геометрического подобия $\frac{l''}{l'} = C_l$. Тогда при кинематическом подобии имеем подобие полей скоростей и равенство $\frac{w''}{w'} = C_w$. При динамическом подобии - подобие полей давления: $\frac{p''}{p'} = C_p$. При тепловом - подобие температурных полей $\frac{t''}{t'} = C_t$. Значения констант подобия C показывают во сколько раз физические величины одной системы отличаются от тех же величин другой. Константы подобия C_w, C_p, C_t для подобных систем сохраняют одно и то же значение $C_w = idem; C_p = idem; C_t = idem$ в сходственные моменты времени. Два промежутка времени τ'', τ' называются сходственными, если они имеют общее начало отсчёта и связаны равенством $\frac{\tau''}{\tau'} = C_\tau = idem$.

Рассмотрим подобие двух систем, описываемых уравнениями энергии, движения и теплообмена на границе с теплообменной поверхностью. Эти системы должны удовлетворять трем условиям подобия:

- подобные явления должны быть качественно одинаковы: они должны иметь одинаковую физическую природу, относиться к одному и тому же роду и описываться одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями; величины, характеризующие подобие явлений, должны быть подобны, то-есть в сходственных точках и в сходственные моменты времени однородные величины φ'' одной системы и φ' другой системы пропорциональны – связаны константой подобия: $\varphi'' = C_\varphi \varphi'$;

- условия однозначности подобных процессов должны протекать в геометрически подобных системах и быть одинаковыми во всем, кроме числовых значений размерных постоянных, содержащихся в этих условиях;

- одноименные определяющие безразмерные переменные подобных процессов должны иметь одинаковое числовое значение.

Первая система будет состоять из

уравнения энергии :

$$\frac{\partial t'}{\partial \tau'} + w'_x \frac{\partial t'}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial t'}{\partial y'} + w'_z \frac{\partial t'}{\partial z'} = a' \cdot \nabla^2 t' + \frac{q'_v}{c_p \cdot \rho'};$$

уравнения движения :

$$\frac{\partial w'_x}{\partial \tau'} + w'_x \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial w'_x}{\partial y'} + w'_z \frac{\partial w'_x}{\partial z'} = g'_x \cdot \beta' \cdot g' - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial P'}{\partial x'} + \nu' \cdot \nabla^2 w'_x;$$

уравнения теплообмена :

$$\alpha' \cdot \Delta t' = -\lambda' \frac{\partial t'}{\partial x'}.$$

(a)

Вторая система будет состоять из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t''}{\partial \tau''} + w_x'' \frac{\partial t''}{\partial x''} + w_y'' \frac{\partial t''}{\partial y''} + w_z'' \frac{\partial t''}{\partial z''} &= a'' \cdot \nabla^2 t'' + \frac{q_v''}{c_p'' \cdot \rho''}; \\ \frac{\partial w_x''}{\partial \tau''} + w_x'' \frac{\partial w_x''}{\partial x''} + w_y'' \frac{\partial w_x''}{\partial y''} + w_z'' \frac{\partial w_x''}{\partial z''} &= g_x'' \cdot \beta'' \cdot g'' - \frac{1}{\rho''} \frac{\partial P''}{\partial x''} + \nu'' \cdot \nabla^2 w_x''; \\ \alpha'' \cdot \Delta t'' &= -\lambda'' \frac{\partial t''}{\partial x''}. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

В соответствии со вторым условием подобия однородные величины должны быть подобны, т.е.

$$t''/t' = C_t, \quad \tau''/\tau' = C_\tau, \quad \omega''/\omega' = C_\omega, \quad l''/l' = C_l, \quad a''/a' = C_a, \quad \beta''/\beta' = C_\beta, \\ p''/p' = C_p, \quad \rho''/\rho' = C_\rho, \quad \nu''/\nu' = C_\nu, \quad \lambda''/\lambda' = C_\lambda, \quad \text{и т. д.}$$

Выразим переменные второй системы через переменные первой и подставим в уравнения второй системы. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_t}{C_\tau} \frac{\partial t'}{\partial \tau'} + \frac{C_w \cdot C_t}{C_\ell} \left(w_x' \frac{\partial t'}{\partial x'} + w_y' \frac{\partial t'}{\partial y'} + w_z' \frac{\partial t'}{\partial z'} \right) &= \frac{C_a \cdot C_t}{C_\ell^2} a' \nabla^2 t' + \frac{C_q}{C_\rho \cdot C_c} \frac{q_v'}{C_p' \cdot \rho'}; \\ \frac{C_w}{C_\tau} \frac{\partial w'}{\partial \tau'} + \frac{C_w^2}{C_\ell} \left(w_x' \frac{\partial w_x'}{\partial x'} + w_y' \frac{\partial w_x'}{\partial y'} + w_z' \frac{\partial w_x'}{\partial z'} \right) &= C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta t} \cdot g_x' \cdot \rho' \cdot \Delta t' - \\ - \frac{C_p}{C_\rho \cdot C_\ell} \frac{1}{\rho'} \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{C_\nu \cdot C_w}{C_\ell^2} \nu' \cdot \nabla^2 w'; \\ C_\alpha \cdot C_t \cdot \alpha' \cdot \Delta t' &= C_\lambda \frac{C_t}{C_\ell} \left(-\lambda \frac{\partial t'}{\partial x'} \right). \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Для подобных систем уравнения должны быть тождественны. На этом основании уравнения системы (а) должны быть тождественны уравнениям системы (в).

Для этого необходимо, чтобы комплексы из констант подобия в уравнениях (в) сократились, т. е. должны быть равенства:

$$\frac{C_t}{C_\tau} = \frac{C_w \cdot C_t}{C_\ell} = \frac{C_a \cdot C_t}{C_\ell^2} = \frac{C_q}{C_\rho \cdot C_c}; \quad (4.14)$$

$$\frac{C_w}{C_\tau} = \frac{C_w^2}{C_\ell} = C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta t} = \frac{C_p}{C_\rho \cdot C_\ell} = \frac{C_\nu \cdot C_w}{C_\ell^2}; \quad (4.15)$$

$$C_\alpha \cdot C_t = C_\lambda \frac{C_t}{C_\ell}. \quad (4.16)$$

Уравнения (4.14) ÷ (4.16) – есть искомые условия подобия, которыми ограничивается произвольный выбор констант подобия.

Рассматривая члены соотношения (4.14) попарно, получим

$$\frac{C_t}{C_\tau} = \frac{C_a \cdot C_t}{C_\ell^2} \text{ или } \frac{C_a \cdot C_\tau}{C_\ell^2} = 1. \quad (4.17)$$

$$\frac{C_w \cdot C_t}{C_\ell} = \frac{C_a \cdot C_t}{C_\ell^2} \text{ или } \frac{C_w \cdot C_\ell}{C_a} = 1. \quad (4.18)$$

$$\frac{C_a \cdot C_t}{C_\ell^2} = \frac{C_q}{C_\rho \cdot C_c} \text{ или } \frac{C_q \cdot C_\ell^2}{C_a \cdot C_t \cdot C_\rho \cdot C_c} = 1. \quad (4.19)$$

Из соотношения (4.15):

$$\frac{C_w}{C_\tau} = \frac{C_w^2}{C_\ell} \text{ или } \frac{C_w \cdot C_\tau}{C_\ell} = 1. \quad (4.20)$$

$$\frac{C_w^2}{C_\ell} = C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta t} \text{ или } \frac{C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta t} \cdot C_\ell}{C_w^2}. \quad (4.21)$$

$$\frac{C_w^2}{C_\ell} = \frac{C_p}{C_\rho \cdot C_\ell} \text{ или } \frac{C_p}{C_w^2 \cdot C_\rho} = 1. \quad (4.22)$$

$$\frac{C_w^2}{C_\ell} = \frac{C_v \cdot C_w}{C_\ell^2} \text{ или } \frac{C_w \cdot C_\ell}{C_v} = 1. \quad (4.23)$$

$$\text{Из соотношения (4.16) } C_\alpha \cdot C_t = C_\lambda \frac{C_t}{C_\ell} \text{ или } \frac{C_\alpha \cdot C_\ell}{C_\lambda} = 1. \quad (4.24)$$

Подставим в уравнения (4.17) ÷ (4.24) значения констант подобия, величины сгруппируем по индексам и получим условия подобия двух систем в новом выражении:

$\frac{a \cdot \tau}{\ell^2} = Fo = idem$ – **критерий Фурье**, характеризует связь между скоростью изменения температурного поля, физическими свойствами и размерами тела;

$\frac{w \cdot \ell}{a} = Pe = idem$ – **критерий Пекле**, является мерой отношения конвективного и молекулярного переносов теплоты в потоке.

$\frac{w \cdot \tau}{\ell} = Ho = idem$ – **критерий гомохронности**, характеризует скорость изменения поля скоростей при течении среды во времени.

$\frac{\Delta P}{\rho \cdot w^2} = Eu = idem$ – **критерий Эйлера**, характеризует подобие полей давления и является мерой отношения сил давления и инерционных сил.

$\frac{w \cdot \ell}{\nu} = Re = idem$ – **критерий Рейнольдса**, характеризует гидродинамический режим потока, являясь мерой отношения сил инерции и сил вязкого трения.

$\frac{\alpha \cdot \ell}{\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda/\ell} = Nu = idem$ – **критерий Нуссельта**, характеризует интенсивность передачи теплоты конвекцией к интенсивности передачи теплоты теплопроводностью в слое толщиной l .

При делении $Pe/Re = \nu/a = Pr$ – **критерий Прандтля**, мера подобия температурных и скоростных полей в потоке.

Если (4.20) $\frac{g \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot \ell}{w^2}$ умножить на $Re^2 \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot \ell^3}{\nu^2} = Gr$ – **число Грасгофа**, характеризует подъемную силу, возникающую в жидкости из-за разности плотностей.

Так как $\beta \cdot \Delta t = \frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho_0}$, то можно записать более общую модификацию:

$$\frac{g \cdot \ell_0^3}{\nu^2} \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \right) = Ar - \text{число Архимеда.}$$

Безразмерные величины $\theta, W_x, W_y, X, Y, Nu, Re, Pe, Gr \dots$ можно рассматривать как новые переменные. Их можно поделить на:

- **независимые переменные** – безразмерные координаты X, Y – соответствуют поверхности теплоотдачи;
- **зависимые переменные** – θ, W_x, W_y, Nu – определяются значениями независимых переменных;
- **постоянные величины** – Re, Pe, Gr ; они заданы условиями однозначности и для конкретной задачи постоянны. Можно написать:

$$Nu = f_1(X, Y, Pr, Re, Gr) = F_1(X, Y, Pr, Re, Gr);$$

$$\theta = f_2(X, Y, Pr, Re, Gr) = F_2(X, Y, Pr, Re, Gr);$$

$$W_x = f_3(X, Y, Pr, Re, Gr) = F_3(X, Y, Pr, Re, Gr);$$

$$W_y = f_4(X, Y, Pr, Re, Gr) = F_4(X, Y, Pr, Re, Gr);$$

Приведенные уравнения называются **уравнениями подобия**. На основании этих уравнений безразмерные переменные делятся на:

- **определяемые** – числа, в которые входят искомые зависимые переменные: $\alpha, \vartheta, w_x, w_y, \theta, W_x, W_y, Nu$;
- **определяющие** – числа, составленные из независимых переменных и постоянных величин, входящих в условия однозначности: X, Y, Pr, Re, Gr .

Основные положения теории подобия формулируются в виде трех теорем.

1. Подобные между собой явления имеют одинаковые критерии подобия. Теорема устанавливает связь между константами подобия и позволяет выявить критерии подобия: запись дифференциальных уравнений должна быть одинаковой.

2. Условия однозначности подобных процессов должны быть одинаковыми во всём, кроме числовых значений размерных постоянных, содержащихся в этих условиях: теорема позволяет сократить число переменных в задачах теплообмена.

Из 1 и 2 теорем следует, что подобные процессы должны описываться одинаковыми безразмерными дифференциальными уравнениями и безразмерными граничными условиями.

3. Подобны те явления, которые имеют подобные условия однозначности и одинаковые определяющие критерии.

Критерии, представляющие собой безразмерную форму условий однозначности, **называются определяющими**. Понятие “определяющий” не является свойством, присущим определённым критериям. Так в задачах конвективного теплообмена критерий Nu есть величина определяемая.

Для подобия необходимо, чтобы одноименные определяющие безразмерные переменные были численно равны.

4.3.3. Теория размерностей

Для получения замкнутой системы дифференциальных уравнений, описывающих то или иное явление, приходится с целью уменьшения числа переменных вводить комплексные переменные, как правило, безразмерные. Неправильное определение числа безразмерных переменных, актуальных для рассматриваемого процесса, может привести к серьёзным ошибкам при описании экспериментальных данных в виде уравнений подобия.

Различают: **первичные физические величины**, которые непосредственно без связи с другими величинами характеризуют физическое явление (длина, время.....);

вторичные физические величины выражаются через первичные на основании физических законов (скорость). Физические величины характеризуются также числовыми значениями. Числовые значения первичных величин получают путём прямого измерения, вторичных - косвенным путём по числовым значениям первичных величин.

Символическое выражение вторичной величины через первичные называется **размерностью**. Размерность можно представить в виде степенной формулы:

$$[\varphi] = L^{n_1} M^{n_2} T^{n_3} \theta^{n_4} I^{n_5} j^{n_6},$$

где $[\varphi]$ - произвольная единица измерения; n_i - действительные числа.

Число безразмерных переменных указывает **π -теорема**: физическое уравнение, содержащее $n \geq 2$ размерных величин, из которых $k \geq 1$ величин имеют независимую размерность (первичные величины), после приведения к безразмерному виду будет содержать $n - k$ безразмерных величин.

4.4. Примеры с решениями

Пример 4 – 1. Для нахождения распределения температуры в процессе изготовления стального сердечника гранитного вала бумагоделательной машины диаметром $d = 350$ мм через $\tau = 3$ ч после загрузки его в печь необходимо провести соответствующее исследование в муфельной печи на геометрически подобной стальной модели вала. Для проведения исследования необходимо определить диаметр модели вала и интервал времени выдержки модели в печи, после которой проводится измерение распределения температуры в модели.

Коэффициент теплоотдачи к валу в печи составляет $\alpha = 92 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}$.

Необходимые физические параметры материала вала и модели составляют: для вала: $\lambda_g = 39 \frac{Вт}{м \cdot град}$; $a = 1,2 \cdot 10^{-5} м^2/с$;

для модели: $\lambda_m = 18 \frac{Вт}{м \cdot град}$; $a_m = 0,8 \cdot 10^{-5} м^2/с$, $\alpha_m = 120 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}$.

Подобие температурных полей вала и модели определяется равенством критериев для образца и модели:

$$Bi_m = Bi_g \quad \text{и} \quad Fo_m = Fo_g.$$

Для вала критерии Био и Фурье равны:

$$Bi = \frac{\alpha \cdot r}{\lambda} = \frac{92 \cdot 0,175}{39} = 0,413;$$

$$Fo = \frac{a \cdot \tau}{r^2} = \frac{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 10800}{(0,175)^2} = 4,23.$$

Находим диаметр модели сердечника вала при $Bi_m = Bi_g$:

$$d_m = 2 \frac{\lambda_m \cdot Bi}{\alpha_m} = 2 \frac{18 \cdot 0,413}{120} = 0,062 м.$$

Находим интервал времени выдержки модели в печи при $Fo_m = Fo_g$:

$$\tau_m = \frac{r_m^2 \cdot Fo}{a_m} = \frac{(0,031)^2 \cdot 4,23}{0,8 \cdot 10^{-5}} = 508 с = 8,5 мин.$$

Пример 4 – 2. На паропроводе перегретого пара диаметром $d = 320$ мм установлена измерительная диафрагма без предварительной тарировки.

Найти тарировочную зависимость $\Delta P = f(G)$ в паропроводе для течения атмосферного пара с температурой $t_{нар} = 270$ °С в автомодельной области и указать границы ее применимости. ΔP – перепад статических давлений в диафрагме; G – расход пара.

Для определения расхода пара по тарировочной зависимости и проведения тарировочных исследований была изготовлена модель в $1/4$ натуральной величины. Тарировку проводили на модели с водой при температуре

$t_g = 20^\circ \text{C}$. Результаты измеренных перепадов давлений на диафрагме, установленной на модели трубопровода при различных расходах воды представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

$\Delta P_{\text{в}}, \text{н/м}^2$	382	942	3616	14440	57760
$G_{\text{в}}, \text{кг/с}$	1,78	3,55	7,10	14,21	28,42

Физические параметры воды при $t_g = 20^\circ \text{C}$: $\rho_{\text{в}} = 998 \text{ кг/м}^3$; $\nu_{\text{в}} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$

Проводим обработку опытных данных, полученных в модели на воде, по зависимости $Eu = f(Re)$. Критериальная зависимость согласно теории подобия будет справедлива при движении пара в натурном паропроводе.

Число Эйлера - $Eu = \frac{\Delta P_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}} \cdot w_{\text{в}}^2}$.

Скорость воды находим из уравнения расхода

$$w_{\text{в}} = \frac{4G_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}} \cdot \pi \cdot d_{\text{м}}^2} = \frac{4 \cdot G_{\text{в}}}{998 \cdot 3,14 \cdot (0,08)^2} = 0,199 \cdot G_{\text{в}},$$

где $d_{\text{м}}$ – диаметр трубопровода модели $d_{\text{м}} = 0,25 \cdot d_{\text{н}} = 0,25 \cdot 0,32 = 0,08 \text{ м}$.

Подставив значение найденной скорости в число Eu , получим

$$Eu = \frac{\Delta P_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} \left(\frac{\rho_{\text{в}} \cdot \pi \cdot d_{\text{м}}^2}{4G_{\text{в}}} \right)^2 = \frac{\rho_{\text{в}} \cdot \Delta P_{\text{в}}}{G_{\text{в}}^2} \left(\frac{\pi \cdot d_{\text{м}}^2}{4} \right).$$

$$Eu = 998 \left(\frac{3,14 \cdot (0,08)^2}{4} \right)^2 \frac{\Delta P_{\text{в}}}{G_{\text{в}}^2} = 2,52 \cdot 10^{-2} \frac{\Delta P_{\text{в}}}{G_{\text{в}}^2}.$$

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{w_{\text{в}} \cdot d_{\text{м}}}{\nu_{\text{в}}} = \frac{4G_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}} \cdot \pi \cdot d_{\text{м}} \cdot \nu_{\text{в}}} = \frac{4G_{\text{в}}}{998 \cdot 3,14 \cdot 0,08 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 15955 \cdot G_{\text{в}}.$$

В полученные зависимости подставим значения $\Delta P_{\text{в}}$ и $G_{\text{в}}$, полученные при тарировке на модели и представленные в табл. 4.1.

Результаты расчетов представим в табл. 4.2.

Таблица 4.2

№ п/п	$\Delta P_{\text{в}},$ н/м^2	$G_{\text{в}},$ кг/с	$W_{\text{в}},$ м/с	Eu	Re
1	382	1,78	0,354	3,038	5648
2	942	3,55	0,706	1,884	11264
3	3616	7,10	1,413	1,808	113280
4	14440	14,21	2,828	1,802	226720
5	57760	28,42	5,656	1,802	453441

По данным табл. 4.2 строим график зависимости $Eu = f(Re)$ на рис. 4.5.

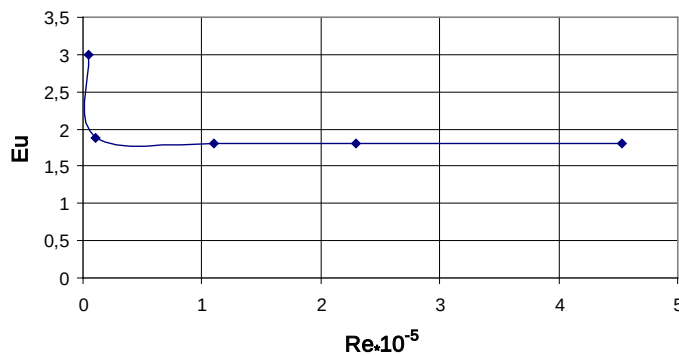


Рис. 4.5. Зависимость числа Eu от числа Re

Из табл. 4.2 и рис. 4.5 следует, что при $Re > 1,132 \cdot 10^5$ $Eu = const = 1,8$ (автомодельная область). Следовательно, при течении пара в паропроводе при $Re > 1,132 \cdot 10^5$ число $Eu = 1,8$.

Используем последнее равенство для нахождения искомой зависимости в паропроводе $\Delta P = Eu \cdot \rho \cdot w^2 = \frac{1,8}{\nu} w^2 = \frac{1,8}{2,5} w^2 = 0,72 \cdot w^2$, где $\nu = 2,5 \text{ м}^3/\text{кг}$ при $p = 0,98 \text{ бар}$ и $t_{\text{нар}} = 270^\circ\text{C}$.

Из уравнения расхода найдем скорость $w = \frac{G \cdot \nu}{0,785 \cdot d^2}$ и подставим ее в искомую зависимость для перепада давлений

$$\Delta P = 0,72 \left(\frac{2,5}{0,785 \cdot (0,32)^2} \right)^2 \cdot G^2 = 696,4 \cdot G^2 \text{ при } Re > 1,132 \cdot 10^5.$$

4.5. Теплоотдача при продольном омывании плоской поверхности

Рассматривается плоская поверхность, омываемая потоком несжимаемой жидкости. Скорость и температура жидкости постоянны и равны w_0 и t_0 .

Поток направлен вдоль пластины, температура поверхности тела во времени не меняется. Внутренние источники теплоты в жидкости отсутствуют. Теплота трения пренебрежимо мала.

Из гидродинамики вязкой жидкости известно, что частицы жидкости, непосредственно прилегающие к твёрдому телу, адсорбируются или прилипают к его поверхности и их скорость становится равной нулю относительно поверхности тела. Этот слой “прилипшей” жидкости рассматривается как бесконечно тонкий слой. Скорость жидкости на стенке остаётся равной нулю до тех пор, пока она представляет собой сплошную среду. В газах, по мере увеличения разрежения ослабляется взаимодействие газа со стенкой, и молекулы газа у стенки начинают проскальзывать.



Рис. 4.6. Мартин Ханс Кристиан Кнудсен (1871-1949) датский физик

(рис. 4.7) толщина пограничного слоя δ увеличивается, поскольку по мере движения жидкости вдоль тела влияние вязкости распространяется в глубину невозмущённого потока.

Течение жидкости внутри пограничного слоя определяется условием: $\frac{\partial \omega_x}{\partial y} \neq 0$; вне пограничного слоя и на его внешней границе: $\frac{\partial \omega_x}{\partial y} = 0$; $\omega_x = \omega_0$.

4.5.1. Гидродинамический пограничный слой

В технике чаще всего приходится иметь дело с потоками жидкости, ограниченными твердыми поверхностями. За счет «прилипания» жидкости к

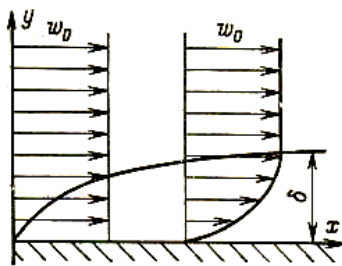


Рис. 4.7. Распределение скорости в пограничном слое

поверхности ее скорость на ней равна нулю. По мере удаления от стенки, скорость быстро возрастает. Поэтому даже в потоках, характеризующихся большими значениями числа Рейнольдса, вблизи стенки имеется область с большими градиентами скорости, в которой течение определяется действием сил вязкого трения. Эта область называется пограничным слоем. За пределами пограничного слоя находится внешний поток - (ядро потока), в котором определяющую роль играют инерционные силы. Хотя объем пограничного слоя чаще всего мал по сравнению с объемом, занимаемым ядром потока, его значение чрезвычайно велико, так как он определяет гидродинамическое сопротивление при движении жидкости относительно твердого тела.

Резкой границы между внешним потоком и пограничным слоем нет, поскольку средняя скорость жидкости по сечению потока изменяется монотонно, без скачков. Обычно **толщину пограничного слоя** определяют условно,

Степень разрежения потока характеризуется **числом Кнудсена** $K_n = \frac{\bar{\ell}}{\ell_0}$, где $\bar{\ell}$ - средняя длина свободного пробега молекул газа; ℓ_0 - характерный размер твёрдого тела (диаметр).

При $\frac{\bar{\ell}}{\ell_0} > 0,001$ газ не рассматривается **сплошной средой** и условия прилипания нарушаются. Мы рассматриваем сплошные среды, где около пластины образуется тонкий слой заторможенной жидкости, в пределах которого скорость изменяется от нуля на поверхности тела до скорости невозмущённого потока вдали от поверхности. Этот слой заторможенной жидкости Л. Прандтль назвал **гидродинамическим пограничным слоем**. С увеличением расстояния x от передней кромки пластины

толщина пограничного слоя δ увеличивается, поскольку по мере движения жидкости вдоль тела влияние вязкости распространяется в глубину невозмущённого потока.

исходя из того, что на его внешней границе скорость составляет 99% от скорости внешнего потока. Под толщиной пограничного слоя δ подразумевают некоторое расстояние от стенки, на котором скорость будет отличаться от скорости потока вдали от тела на определённую заранее заданную малую величину.

Пограничный слой образуется как в ламинарных, так и в турбулентных потоках, но структура этих пограничных слоев различна. При обтекании твердого тела ламинарным потоком жидкости с постоянной по сечению скоростью тормозящее действие обтекаемой поверхности проявляется вначале в тонком пристенном слое. По мере удаления от входной кромки увеличивается толщина слоя.

Напишем систему дифференциальных уравнений, описывающих стационарное поле скоростей при омывании плоской пластины, бесконечной в направлении оси OZ :

$$\begin{cases} \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{g} \frac{\partial P}{\partial x}; \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\begin{cases} \omega_x \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{g} \frac{\partial P}{\partial y}; \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

При движении потока вдоль оси x в пределах пограничного слоя $w_y \ll w_x$. Следовательно $\frac{\partial w_x}{\partial y} \gg \frac{\partial w_x}{\partial x}$. Поэтому слагаемые в левой части уравнения (4.25) одного порядка. Величина $\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$ и ей можно пренебречь. Ввиду малой толщины пограничного слоя примем, что поперёк его давление не меняется: $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$. При постоянной скорости внешнего потока ω_0 , давление во внешнем потоке на основании уравнения Бернулли не меняется: $P + \frac{g \omega_0^2}{2} = \text{const}$. Такое течение в гидродинамике называют **безградиентным течением**. Поскольку $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ - для пограничного слоя; $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ - для внешнего потока, то по аналогии и для пограничного слоя $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$.

Для пограничного слоя уравнение (4.26) можно опустить, так как члены уравнения движения на ось OY малы по сравнению с членами уравнения (4.25). Связь между двумя неизвестными величинами w_x и w_y определяется уравнением неразрывности. Поэтому для плоского безградиентного стационарного течения

нарного течения вязкой жидкости в пограничном слое у плоской поверхности можно записать:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}; \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (4.29)$$

Граничными условиями для системы уравнений (4.28) и (4.29) являются $w_x = 0, w_y = 0$ при $y = 0$, т. е. равенство нулю компонентов скорости жидкости на границе со стенкой, и $w_x = w$ при $y = \delta$, где w — скорость жидкости во внешнем потоке, а δ — толщина пограничного слоя. Уравнение (4.28) можно записать в виде $w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial S}{\partial y}$ — уравнение Кармана, где $S = \mu \frac{\partial w_x}{\partial y}$ — касательное напряжение трения в плоскости, параллельной плоскости XZ.



Рис.4.8. Теодор фон Карман (1881-1963) — учёный в области механики.

Проведем интегрирование (4.27) в пределах $y = 0$ и $y = \delta$.

$$\text{Правая часть: } \int_0^\delta \frac{\partial S}{\partial y} dy = S. \quad (*)$$

Левая часть: w_y выразим из уравнения сплошности (4.27): $dw_y = -\frac{\partial w_x}{\partial x} dy$. Так как при $y = 0$ $w_y = 0$, то

$$w_y = -\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy.$$

Подставим w_y в (4.28) и проинтегрируем левую часть:

$$\int_0^\infty \left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) dy = \int_0^\infty w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dy - \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \right) dy. \quad (**)$$

Второй интеграл правой части данного уравнения возьмем по частям в соответствии с формулой:

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b a \cdot du.$$

$$\text{Получаем } \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \right) dy = \int_0^\infty \left(\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \right) dy = w_0 \int_0^\infty \frac{\partial w_x}{\partial x} dy - \int_0^\infty w \frac{\partial w_x}{\partial x} dy = \int_0^\infty (w_0 - w) \frac{\partial w_x}{\partial x} dy.$$

Полученное значение подставим в (**):

$$\int_0^\infty w_x \frac{\partial w}{\partial x} dy - \int_0^\infty (w_0 - w) \frac{\partial w_x}{\partial x} dy = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} [w_x (w_0 - w)] dy = - \frac{d}{dx} \int_0^\infty w_x (w_0 - w) dy.$$

Приравняем полученные значения правой и левой частей уравнения и получим

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta w_x (w_0 - w_x) dy = \frac{S_c}{\rho}. \quad (4.30)$$

Уравнение (4.30) — интегральное уравнение импульсов для гидродинамического слоя.

4.5.2. Тепловой пограничный слой

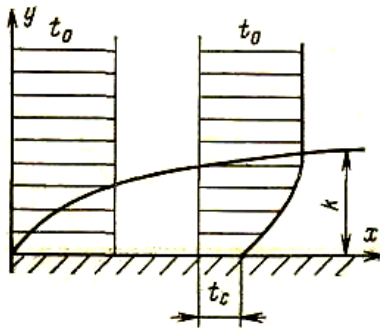


Рис. 4.9. Распределение температуры внутри теплового пограничного

Тепловой пограничный слой (рис. 4.9) - это слой жидкости у стенки, в пределах которого температура изменяется от значения, равного температуре стенки, до значения температуры жидкости вдали от тела. Условие распределения температуры внутри теплового пограничного слоя $\frac{\partial t}{\partial y} \neq 0$; вне границ теплового пограничного

- $\frac{\partial t}{\partial y} = 0; t = t_0$. K - толщина теплового пограничного слоя. Толщины гидродинамического δ и теплового слоя K пограничных слоёв,

как правило, не совпадают. Это зависит от рода жидкости и параметров процесса её течения и теплообмена. Ввиду малого K можно пренебречь теплопроводностью вдоль слоя по сравнению с поперечным переносом теплоты, т.е. $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0$. Тогда уравнение энергии примет вид $w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$. (4.31)

Так как $q_y = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)$, а $\frac{\partial q_y}{\partial y} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$, то правую часть (4.31) можно записать в виде $-\frac{1}{\rho \cdot c_p} \frac{\partial q_y}{\partial y}$. Тогда $w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{1}{\rho \cdot c_p} \frac{\partial q_y}{\partial y}$ - уравнение Кружилина.

Чтобы замкнуть задачу к уравнению (4.31) добавляют систему из уравнений (4.28) и (4.29).

Из сравнения уравнений Кружилина и Кармана видна их полная аналогия. Тогда интегрируя уравнением Кружилина от $y = 0$ до $y = \infty$ (или «к») и выполняя аналогичные с выводом уравнения (4.29) преобразования, получим **интегральное уравнение теплового потока для теплового пограничного слоя** в следующем виде:

$$\frac{d}{dx} \int_0^k w_x (t_0 - t) dy = -\frac{q_c}{\rho \cdot c_p} . \quad (4.32)$$

При известных распределениях скорости и температуры с помощью (4.32) можно определить изменение толщины теплового пограничного слоя по длине $k = k(x)$.

4.5.3. Теплоотдача в ламинарном пограничном слое

Для расчета теплоотдачи в слое по уравнению (4.32) необходимо знать в нем распределение скорости, Карман и Польшаузен предложили описывать распределение скоростей в ламинарном пограничном слое как функцию расстояния от стенки в виде полинома четвертой степени, который близок к па-

раболе: $w_x = a + b \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot y^3$ (кубическая парабола). Коэффициенты параболы определяются из граничных условий. На поверхности тела $y = 0 \rightarrow w_x = 0$. При этом полагаем, что $\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right)_{y \rightarrow \delta} = 0$. На внешней границе по-

граничного слоя: $y = \delta$, $w_x = w_0$, $\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_{y=\delta} = 0$. Из (4.27), когда силы инерции

пренебрежимо малы, получаем условие $\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0$. Уравнение распределе-

ния скорости будет удовлетворять граничным условиям при постоянных:

$a = 0$; $b = \frac{3}{2} \frac{w_0}{\delta}$; $C = 0$; $d = -\frac{1}{2} \frac{w_0}{\delta^3}$. Тогда уравнение распределения скорости

примет вид: $w_x / w_0 = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$. (*)

Согласно этому распределению скорости, из уравнения импульсов (4.29) получаем толщину гидродинамического пограничного слоя:

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{w_0}} \approx 4,64 \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{w_0}}. \quad (4.33)$$

Из (4.33) видно, что δ меняется пропорционально квадратному корню из расстояния от переднего края пластины до данной точки. В безразмерном виде

(4.33) может быть записано как: $\delta / x = \frac{4,64}{\sqrt{\frac{w_0 \cdot x}{\nu}}} = \frac{4,64}{\sqrt{\text{Re}_x}}$. (4.34)

Пусть $t_c = \text{const}$, т.е. t_c не зависит от x . Обозначим: $\vartheta = t - t_c$; $\vartheta_0 = t_0 - t_c$; где t_0 – температура жидкости за пределами пограничного слоя.

Распределение температуры в слое описывается уравнением, аналогичным уравнению распределения скорости (*), т.е. $\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = 1,5 \left(\frac{y}{k}\right) - 0,5 \left(\frac{y}{k}\right)^2$, откуда

$$\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right)_{y=0} = \frac{1,5 \cdot \vartheta_0}{k}. \quad (**)$$

Решая интегральное уравнение теплового потока для теплового пограничного слоя (4.32) с использованием зависимости для распределения скоростей и температуры, приняв $k < \delta$, получим в конечном итоге

$$k / \delta = \frac{1}{\sqrt[3]{\text{Pr}}}. \quad (4.35)$$

Подставив δ из (4.34) в (4.35), получим $k = \frac{4,64x}{\sqrt{\text{Re}_x} \sqrt[3]{\text{Pr}}}$, (4.36)

где $\text{Re} = \frac{w_0 \cdot x}{\nu}$.

При известном температурном поле плотность теплового потока от стен-

ки к слою определяется уравнением Фурье: $q_c = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=1}$. Согласно уравнению Ньютона – Рихмана эта же плотность равна $q_c = \alpha (t_c - t_{жс})$. Решая эти уравнения относительно α , получим уравнение теплоотдачи:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{t_c - t_{жс}} \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n \rightarrow 0}. \quad (4.37)$$

Опустив в (4.37) знак минус и решая его в соответствии с уравнением распределения температуры (**), получим $\alpha = \frac{\lambda}{\vartheta_0} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y \rightarrow 0} = \frac{3}{2} \lambda / K$. (4.38)

Из (4.38) следует, что α обратно пропорционален толщине пограничного слоя.

После умножения левой и правой частей (4.38) на x/λ и подставления в него k из (4.36) получим $Nu_x = 0,33 \sqrt{\text{Re}_x} \sqrt[3]{\text{Pr}}$, (4.39)

где: $Nu_x = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda} = \frac{\alpha \cdot \ell}{\lambda} \frac{x}{\ell} = Nu_\ell \cdot X$; $\text{Re} = \frac{w_0 \cdot x}{\nu} = \frac{w_0 \cdot \ell}{\nu} \frac{x}{\ell} = \text{Re}_\ell \cdot X$; $X = \frac{x}{\ell}$;

ℓ – длина пластины вдоль потока.

Перепишем (4.39) в виде $Nu_\ell = 0,33 X^{-0,5} \text{Re}_\ell^{0,5} \text{Pr}^{1/3}$. (4.40)

Тогда $Nu_\ell = a \cdot X^{-0,5}$ или $\alpha = C \cdot X^{-0,5}$.

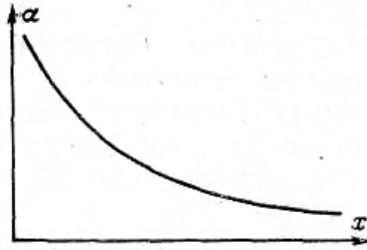


Рис. 4.10. Изменение α по длине пластины при ламинарном пограничном слое

Величины a и C независимы от x . При $x = 0$ значение α бесконечно велико. При увеличении x α принимает конечные и постоянно уменьшающиеся значения (рис. 4.10). Это, как следует из уравнений (**) и (4.36), объясняется постоянством температурного напора $\vartheta_0 = t_0 - t_c$ пластины при непрерывно уменьшающемся температурном градиенте с ростом x . Физические параметры, входящие в приведенные выше уравнения, выбирают по температуре набегающего потока t_0 . Уравнение (4.40) получено при постоянных физических параметрах потока. Для учета переменности физических параметров потока жидкости и направления теплового потока М.А. Михеевым был предложен множитель:

$$\left(\frac{\text{Pr}_{жс}}{\text{Pr}_c} \right)^{0,25}.$$

4.5.4. Переход ламинарного течения в турбулентное

Имеются два основных режима течения: **ламинарный** и **турбулентный**. При ламинарном режиме частицы жидкости движутся без перемешивания, слоисто. При турбулентном – неупорядоченно, хаотически, когда направление и значения скоростей отдельных частиц непрерывно меняются. Эти режимы течения наблюдаются и в пограничном слое. В области контакта

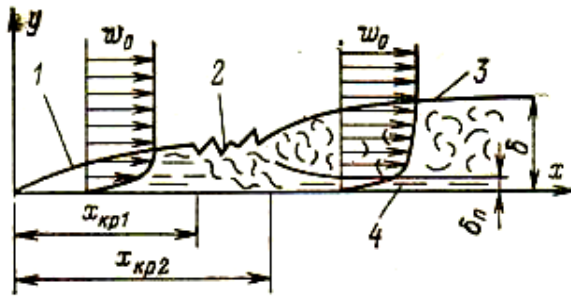


Рис. 4.11. Пограничный слой:

1- ламинарный пограничный слой; 2- переходная область; 3- турбулентный пограничный слой; 4- вязкий ламинарный подслой

турбулентного потока с обтекаемой поверхностью при малых значениях продольной координаты x , отсчитываемой от передней кромки поверхности, в пограничном слое сначала образуется ламинарный пограничный слой, где справедливы уравнения 4.28, 4.29 и 4.31. О режиме течения судят по **критическим значениям числа Re** :

$$Re_{кр.1} = \frac{w_0 \cdot x_{кр.1}}{\nu}; \quad Re_{кр.2} = \frac{w_0 \cdot x_{кр.2}}{\nu};$$

$$Re_{кр} = \frac{w_0 \cdot x_{кр}}{\nu} = 10^4 \div 4 \cdot 10^6.$$

Как видно на рис. 4.11, толщина пограничного слоя δ возрастает и при достижении критического размера x , ламинарное движение в пограничном слое становится неустойчивым из-за развития турбулентности.

В переходной зоне турбулентность распространяется на всю толщину



пограничного слоя, за исключением тонкой прослойки вблизи стенки, называемой вязким подслоем. В нем имеет место струйное течение, которое подвергается интенсивным внешним возмущениям, вследствие проникновения турбулентных пульсаций из ядра потока. Эти пульсации затухают и не приводят к развитию турбулентности, поскольку в вязком подслое определяющую роль играют силы вязкости.

На преобразование режима течения

Рис. 4.12. Осборн Рейнольдс (1842 – 1912) - английский инженер и физик влияют характеристики внешнего потока: степень турбулентности, масштаб турбулентности, частота пульсаций и т.д., параметры омываемого тела (волнистость, шероховатость, вибрация и т.д.), интенсивность теплообмена. При

сравнительно малых значениях степени турбулентности $Tu = \sqrt{\frac{2E}{3w_0^2}}$ смена ре-

жима не зависит от Tu внешнего потока, а определяется характеристиками ламинарного слоя. Увеличение Tu приводит к уменьшению $Re_{кр}$.

Течение в переходной области не является стабильным. Турбулентность появляется в некоторой части пограничного слоя, затем турбулентно текущая жидкость уносится потоком. Смена ламинарных и турбулентных состояний

течения происходит через разные промежутки времени. Такой характер течения характеризуют **коэффициентом перемежаемости** ω – доля определенного промежутка времени, в которой существует турбулентное течение. $\omega = 1$ – турбулентное течение. $\omega = 0$ – ламинарное.

Резкой границы между вязким подслоем *I* и турбулентным пограничным слоем нет (рис. 4.11). Между ними имеется небольшая переходная область. В связи с малой толщиной вязкого подслоя измерить экспериментально распределение скоростей в нем не удастся. Поэтому нет сведений относительно изменения толщины вязкого подслоя по длине. Обычно считают, что его толщина в турбулентном пограничном слое остается по длине неизменной. Теплоотдача существует во внешней области; *Б* – пристенная область; *I* – вязкий подслой; *II* – кольцевой промежуточный слой

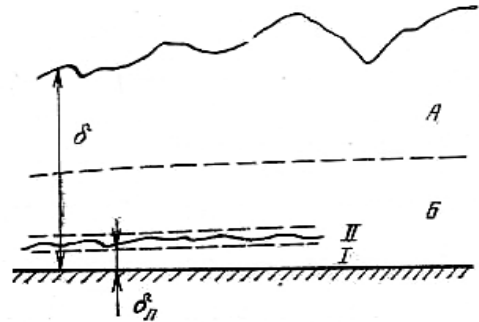


Рис. 4.13. Схема строения турбу-

лентного пограничного слоя: *A* –длине неизменной. Теплоотдача существует во внешней области; *Б* – пристенная область; *I* – вязкий подслой; *II* –кольку перенос теплоты при ламинарном течении определяется теплопроводностью.

Законы теплообмена, определяемые режимом течения при ламинарном и турбулентном режимах различны.

4.5.5.Турбулентный перенос теплоты и количества движения

При турбулентном течении мгновенная скорость частиц пульсирует около среднего во времени значения. Кроме того, дополнительно к изменению абсолютной величины w происходит ещё и изменение направления мгновенной скорости. Отклонение мгновенной скорости w от средней во времени $\bar{w}$ называют **пульсациями скорости** (пульсационные скорости) $w = \bar{w} + w'$, таким образом, турбулентное движение состоит как бы из регулярного течения, описываемого осреднёнными значениями скоростей, и из наложенного на него хаотического пульсационного течения.

При наличии в потоке температурного поля происходит перенос теплоты, из-за чего возникают **пульсации температур**. Аналогично обозначению скоростей: $t = t' + \bar{t}$. Пульсации скорости и температуры приводят к пульсациям давления и физических свойств. Таким образом, турбулентное течение является квазистационарным процессом. Проведя определённые преобразования, выдвинув ряд гипотез, можно получить систему дифференциальных уравнений для осреднённого турбулентного течения. Однако в строгой постановке этот вопрос не решён.

Рассмотрим (рис. 4.14) в некоторый момент времени $\tau + d\tau$ и в некоторой точке турбулентный поток со скоростью, имеющей свои компоненты w_x, w_y . Температура жидкости в данной точке $A - t$. Контрольная поверхность *A-A* расположена у фиксированной точки и параллельна плоскости *XZ*.

За время $d\tau$ через поверхность *A-A* прохо-

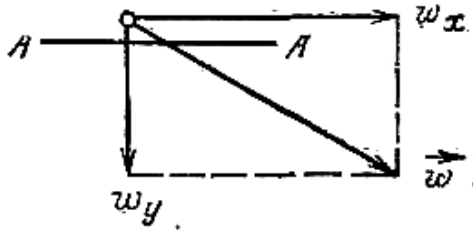


Рис. 4.14. Мгновенное значение скорости в плоском турбулентном потоке

дит масса $\rho \cdot w_y \cdot d\tau$, $[кг/м^2]$. В направлении оси OY проходят относительно оси OX : количество движения $\rho \cdot w_y \cdot w_x \cdot d\tau$ и теплота $\rho \cdot w_y \cdot i \cdot d\tau \approx \rho \cdot c_p \cdot w_y \cdot t \cdot d\tau$ (пусть $\rho, c_p - \text{const}$).

Поскольку компоненты скорости постоянно меняются, среднеинтегральное значение плотности теплового потока в направлении OY : -

$$q_y = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+d\tau} \rho \cdot c_p \cdot w_y \cdot t \cdot d\tau = \rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_y \bar{t}. \quad (4.41)$$

Используя свойства среднеинтегрального осреднения, запишем (4.41) в виде:

$$q_y = \rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_y \cdot \bar{t} + \rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_y' \bar{t}'. \quad (4.42)$$

Среднеинтегральное значение количества движения относительно OX , переносимое в направлении OY за единицу времени через единицу поверхности, аналогично (4.42) запишем как:

$$S = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+d\tau} \rho \cdot w_x \cdot w_y \cdot d\tau = \rho \cdot \bar{w}_x \bar{w}_y = \rho \cdot \bar{w}_x \cdot \bar{w}_y + \rho \cdot \bar{w}_x' \bar{w}_y'; \quad (4.43)$$

В соответствии с уравнениями (4.42) и (4.43) **конвективный перенос** складывается из **осреднённого и пульсационного** (турбулентного) **переноса**.

$$\text{Обозначим: } q_{n.m.} = q_m = \rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_y' \bar{t}'; \quad (4.44)$$

$$S_{xy.m} = S_m = -\rho \cdot \bar{w}_x' \bar{w}_y'. \quad (4.45)$$

Знак (-) в (4.45) поставлен из-за противоположного направления пульсационного переноса количеству движения.

Поскольку теплота переносится, а количество движения осуществляется на отрезке ℓ , где пульсация существует, то можно записать:

$$q_m = -\rho \cdot C_p \cdot \bar{w}_y' \bar{\ell}' \frac{d\bar{t}}{dy}; \quad (4.46)$$

$$S_m = \rho \cdot \bar{w}_y' \bar{\ell}' \frac{d\bar{w}_x}{dy}. \quad (4.47)$$

Из (4.46) и (4.47) следует, что q_m и S_m пропорциональны производным $\frac{d\bar{t}}{dy}$ и $\frac{d\bar{w}_x}{dy}$. Тогда перепишем (4.46) и (4.47) в виде:

$$q_m = -\rho \cdot C_p \cdot \varepsilon_q \frac{d\bar{t}}{dy} = -\lambda_m \frac{\partial \bar{t}}{\partial y}; \quad (4.48)$$

$$S_m = \rho \cdot \varepsilon_s \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \mu_m \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}; \quad (4.49)$$

где λ_m, μ_m - коэффициенты турбулентного переноса теплоты и количества

движения; $\varepsilon_q = \frac{\lambda_m}{(\rho \cdot c_p)}$; $\varepsilon_s = \frac{\mu_m}{\rho}$ - кинематические коэффициенты турбулентного переноса теплоты и количества движения. Размерность $\lambda_m, \mu_m; \varepsilon_q; \varepsilon_s$ соответствует λ, μ, a, ν при молекулярном переносе.

Теплота и количество движения в направлении оси OY переносятся одновременно и молекулярным механизмом. Тогда $q_y = -(\lambda + \lambda_m) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y}$; (4.50)

$$S_{xy} = (\mu + \mu_m) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}. \quad (4.51)$$

4.5.6. Система уравнений турбулентного пограничного слоя

На основании изложенного для турбулентного пограничного слоя уравнение энергии $w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$, движения $w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$ и

сплошности $\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$ могут быть записаны в виде:

$$\rho \cdot C_p \left(\bar{w}_x \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda + \lambda_m) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \right]; \quad (4.52)$$

$$\rho \left(\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} [(\mu + \mu_m) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}]; \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial y} = 0. \quad (4.54)$$

Из (4.45) следует, что турбулентный перенос $S_m = -\rho \bar{w}_x' \bar{w}_y'$.

Введя в (4.47) величину ℓ , называемую **длиной пути смещения** или **масштабом турбулентности** получим $S_m = \rho \cdot \ell^2 \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2$. (4.55)

Из (4.47) и (4.55) имеем: $\bar{w}_y' \bar{\ell}' = \ell^2 \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}$. (4.56)

Подставив (4.56) в (4.46), получим:

$$q_m = -\rho \cdot c_p \cdot \ell^2 \left| \frac{dw_x}{dw_y} \right| \frac{d\bar{t}}{dy}. \quad (4.57)$$

В пристенной области турбулентного течения масштаб турбулентности должен уменьшаться по мере приближения к стенке. Согласно Прандтлю:

$$\ell = \aleph \cdot y, \quad (4.58)$$

где $\aleph = 0,4$ – безразмерная величина. $\varepsilon_s = \varepsilon_q = \ell^2 \left| \frac{d\bar{w}_x}{dy} \right| = (\aleph \cdot y)^2 \left| \frac{d\bar{w}_x}{dy} \right|$. (4.59)

Из (4.59) следует, что существует аналогия между переносом количества движения и переносом теплоты.

Турбулентное течение характеризуется также **кинетической энергией турбулентного течения** E :



Рис. 4.15. Людвиг Прандтль
(1875 – 1953) – немецкий физик

$$E = \frac{1}{2} \left[(\overline{w'_x})^2 + (\overline{w'_y})^2 + (\overline{w'_z})^2 \right] \quad (4.60)$$

и степенью турбулентности Tu :

$$Tu = \sqrt{\frac{2E}{3w_0^2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \left[(\overline{w'_x})^2 + (\overline{w'_y})^2 + (\overline{w'_z})^2 \right]}}{w_0}, \quad (4.61)$$

где w'_x ; w'_y ; w'_z – пульсационные составляющие скорости в определенной точке турбулентного потока; w_0 – характерная скорость процесса (скорость набегающего потока).

4.5.7. Теплоотдача при турбулентном пограничном слое

Схема строения турбулентного пограничного слоя представлена на рис. 4.13. Уравнение переноса теплоты (4.50) и количества движения (4.51) поперек пограничного слоя можно записать в следующем виде:

$$q = -\lambda \left(1 + \frac{Pr}{Pr_m} \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y}; \quad (4.62)$$

$$S = \rho \cdot \nu \left(1 + \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}; \quad (4.63)$$

где Pr_m – турбулентное число Pr , характеризует $\varepsilon_s/\varepsilon_q$. ε_s ; ε_q – кинематический коэффициент переноса количества движения и теплоты соответственно.

С учетом (4.62) и (4.63) дифференциальные уравнения энергии (4.52) и движения (4.53) для турбулентного пограничного слоя можно записать в следующем виде:

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} = a \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{Pr}{Pr_m} \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} \right]; \quad (4.64)$$

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right]. \quad (4.65)$$

Для решения уравнений (4.64) и (4.65) необходимо знать коэффициенты турбулентного переноса теплоты и количества движения, а также распределения скорости и температуры в турбулентном потоке.

Запишем уравнения (4.55), введя обозначения (4.58):

$$S_m = \rho \cdot \ell^2 \left(\frac{dw_x}{dy} \right)^2 = \rho (\aleph \cdot y)^2 \left(\frac{dw_x}{dw_y} \right)^2; \quad \sqrt{\frac{S_m}{\rho}} = \ell \frac{dw_x}{dy} = \aleph \cdot y \frac{dw_x}{dy};$$

где ℓ – длина пути смешения.

Пусть касательное напряжение турбулентного течения не меняется в направлении y . Тогда: $\sqrt{S_m/\rho} = \sqrt{S_c/\rho} = \text{const}$. Обозначим $\sqrt{S_c/\rho} = w_*$ – динамическая скорость. Тогда $w_* = \aleph \cdot y \frac{dw_x}{dy}$, $dw_x = \frac{w_*}{\aleph} \frac{dy}{y}$ и $\bar{w}_x = \frac{w_*}{\aleph} \ln y + C$. (4.66)

Уравнение (4.66) характеризует логарифмическое распределение осредненной скорости турбулентного течения в пристенной области. Слой жидкости у стенки, в котором преобладают силы вязкости, и являющийся составной частью турбулентного пограничного слоя называется **вязким подслоем**. Уравнение движения для него запишется в виде $d^2 \bar{w}_x / dy^2 = 0$. Откуда

$$\bar{w}_x = C_1 y + C_2, \text{ то есть в вязком подслое скорость меняется по линейному закону. Тогда } S = S_c = \mu \frac{d\bar{w}_x}{dy} = \text{const} \text{ и } S_c = \mu \frac{w_m}{\delta_n} = \rho \cdot w_*^2, \quad (4.67)$$

где δ_n – толщина вязкого подслоя; $w_m = \bar{w}_x(\delta_n)$ – скорость на внешней границе вязкого подслоя. Согласно (4.67), $\delta_n = \nu \cdot \frac{w_m}{w_*^2}$. Постоянная интегрирования

С из (4.67) определится из граничных условий: $y = \delta_n = \nu \frac{w_m}{w_*^2}$; $w_x = w_m$. Тогда

$$C = w_m - \frac{w_*}{\aleph} \ln \delta_n = w_m - \frac{w_*}{\aleph} \ln \frac{\nu \cdot w_m}{w_*^2}.$$

Подставив постоянную С в (4.66) и проведя необходимые преобразования получим универсальное логарифмическое распределение осредненной скорости в пристенной области турбулентного потока. Оно представлено на рис. 4.16 и имеет следующий вид:

$$W^+ = \frac{\bar{w}_x}{w_*} = \frac{1}{\aleph} \lg y + \eta, \quad (4.68)$$

$$\text{где: } y_* = \frac{w_* \cdot y}{\nu}; \quad \eta = \frac{w_m}{w_*} - \frac{1}{\aleph} \ln \frac{w_m}{w_*}.$$

На рис. 4.16 кривой 1 показано линейное изменение скорости в вязком

$$\text{подслое I: } w_x = w_* \cdot y_* = \frac{w_*^2}{\nu} y = \frac{S_c}{\mu} y. \quad (4.69)$$

Кривой 2 изображено логарифмическое распределение осредненной скорости в пристенной турбулентной части B (рис. 4.13) пограничного слоя:

$$\frac{\bar{w}_x}{w_*} = 5,61 \cdot \lg y_* + 4,9. \quad (4.70)$$

Пересечению кривых 1 и 2 соответствует $y_* = \frac{w_* \cdot y}{\nu}$, примерно равное 12.

При этом расчетная **толщина вязкого подслоя** равна

$$\delta_n \approx 12 \frac{\nu}{w_*} = 12 \nu \sqrt{\rho / S_c}. \quad (4.71)$$

Вязкий подслой (рис. 4.13) не имеет строго ламинарного течения. В него проникают пульсации, граница подслоя четко не определена. Она является генератором пульсационного движения. Пристенная область составляет

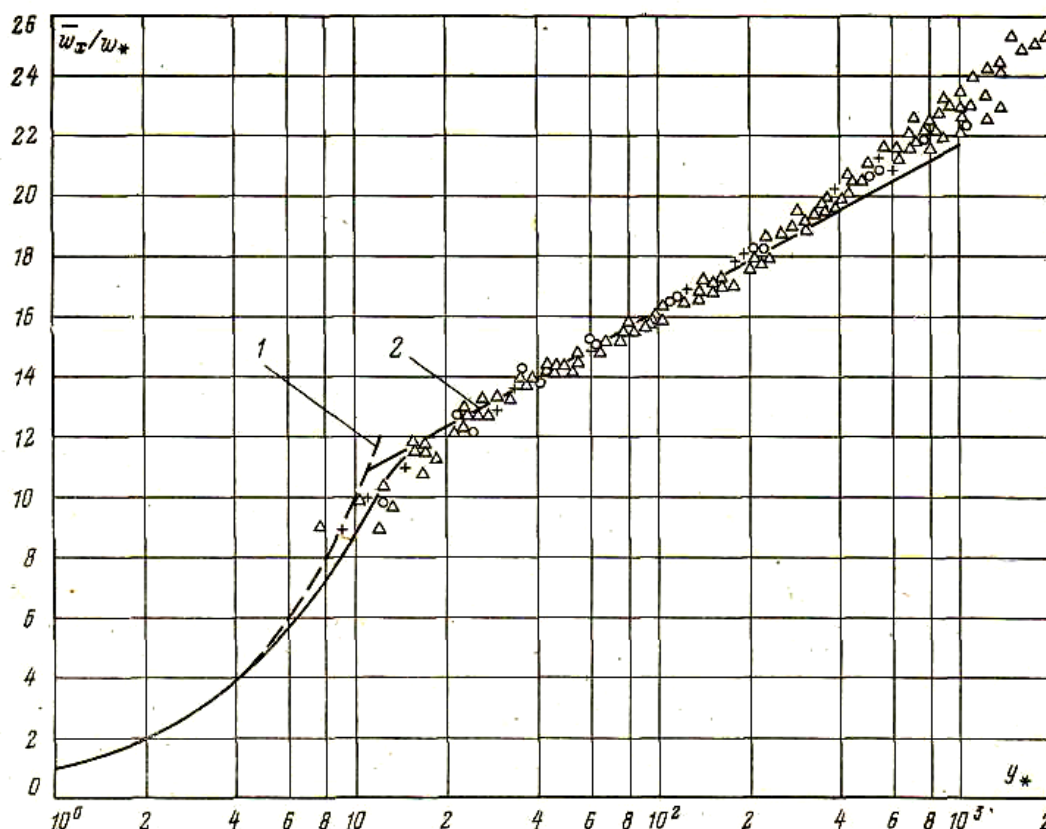


Рис. 4.16. Распределение безразмерной скорости по толщине турбулентного пограничного слоя

примерно 20 % толщины пограничного слоя; толщина вязкого подслоя около 2 %; толщина внешней области примерно 80 %.

Аналогично вязкому подслою у стенки можно выделить **тепловой под-слой**. Он характеризуется преобладанием переноса теплоты теплопроводностью над турбулентным переносом. Пульсации, проникающие в вязкий под-слой, не являются определяющими для теплового подслоя. Основной механизм передачи – это молекулярный вязкостный перенос ($Pr > 1$). Для жидко-

стей – малотеплопроводные, вязкие среды с большими числами $Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda}$ – тепловой подслой является основным термическим сопротивлением.

Ввиду интенсивного турбулентного переноса, толщины теплового K и динамического δ пограничных слоев практически совпадают. При турбулентном течении толщина пограничного слоя δ больше, чем при ламинарном вследствие влияния турбулентной вязкости.

В тепловом подслое перенос теплоты определяется теплопроводностью, поэтому температура по его толщине изменяется по закону прямой. Представим распределение температуры в вязком подслое, где скорость меняется по линейному закону, как:

$$\theta = Pr \cdot y_*, \quad (4.72)$$

где $\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_*}$; $\vartheta_* = \frac{q_c}{\rho \cdot c_p \cdot w_*}$; $y_* = \frac{w_* \cdot y}{\nu}$.

Распределение температуры в зоне логарифмического распределения осредненной скорости запишется как: $\theta = \frac{Pr_m}{8} \ln y_* + C_q f(Pr)$, (4.73)

где $C_q = f(Pr)$ – учитывает изменение температуры, связанное с неравенством толщин подслоев K_n и δ_n .

Зная распределения скорости и температуры, с помощью уравнений теплового потока (4.32) и импульса (4.30) можно рассчитать теплоотдачу.

Поскольку скорости температуры в вязком и тепловом подслоях изменяются по линейному закону, то $S_c = \mu \frac{w_m}{\delta_n}$; $q_c = \lambda \frac{\vartheta_m}{K_n}$.

S и q постоянны внутри K_n и δ_n . Тогда

$$q_c = S_c \frac{\lambda}{\mu} \frac{\vartheta_m}{w_m} \frac{\delta_n}{K_n}, \quad (4.74)$$

где $\vartheta_m = t_m - t_c$; t_m – температура на внешней границе теплового подслоя; $y = K_n$; w_m – скорость при $y = \delta_n$; t_c – температура поверхности стенки.

Для турбулентной части пограничного слоя молекулярный перенос теплоты и количества движения пренебрежимо мал. Поэтому распределение осредненных скорости и температуры идентичны. Тогда с помощью уравнений переноса теплоты (4.46) и количества движения (4.47) найдем плотность теплового потока на стенке

$$q_c = \frac{S_c \cdot c_p (t_0 - t_c)}{w_0 \left[1 + \frac{12}{w_0} \sqrt{\frac{S_c}{\rho}} \left(Pr^{2/3} - 1 \right) \right]}. \quad (4.75)$$

Обозначим $C_f = \frac{2S_c}{\rho \cdot w_0^2}$ – коэффициент трения, характеризующий касательное напряжение трения на стенке S_c . Подставим C_f в (4.75) и, поделив левую и правую его части на $\rho \cdot c_p \cdot w_0 (t_0 - t_c)$, получим

$$\frac{\alpha}{\rho \cdot c_p \cdot w_0} \equiv St = \frac{C_f / 2}{1 + 12 \sqrt{\frac{C_f}{2}} \left(Pr^{2/3} - 1 \right)}. \quad (4.76)$$

где $St = \frac{\alpha}{\rho \cdot C_p \cdot w_0} = \frac{Nu}{Re \cdot Pr}$. (4.77)

При $Pr=1$ (4.76) переходит в $St = C_f / 2$. (4.78)

$St = C_f / 2$ – математическое выражение аналогии переноса теплоты и количества движения. Используя формулу Прандтля $C_f = \frac{0,0592}{Re_{f,x}^{0,2}}$, (4.79)

и введя поправку $(Pr_f / Pr_w)^{0,25}$, получим

$$Nu_{f,x} = 0,0296 Re_{f,x}^{0,8} Pr_{f,x}^{0,43} \left(\frac{Pr_f}{Pr_c} \right)^{0,25}. \quad (4.80)$$

За определяющую температуру принята температура жидкости вдали от тела - t_0 . Определяющим размером является координата x , от начала участка теплообмена. Распределение интенсивности теплообмена внутри пограничного слоя представлено на рис. 4.11.

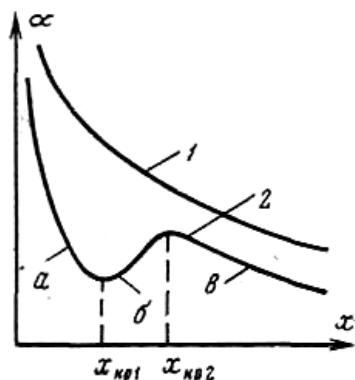


Рис.4.17. Распределение интенсивности теплообмена внутри пограничного слоя: 1- турбулентное течение; 2- смешанное течение; а - ламинарное; б - переходное; в - турбулентное

5. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

5.1. Основные режимы течения в трубах

Течение жидкости в трубах классифицируют на **ламинарное** и **турбулентное** в зависимости от значения числа Re : $Re = \frac{\bar{w} \cdot d}{\nu}$, где $\bar{w}$ - средняя скорость жидкости.

При $Re < Re_{кр} \approx 2000$ - течение ламинарное. $Re_{кр1}$ - нижнее критическое число Re . В случае $Re > 2000$ и возмущении потока, ламинарный режим течения нарушается. Развитое турбулентное течение устанавливается при $Re > Re_{кр2} \sim 10^4$. Течение при $Re = 2 \cdot 10^3 \div 10^4$ называют переходным.

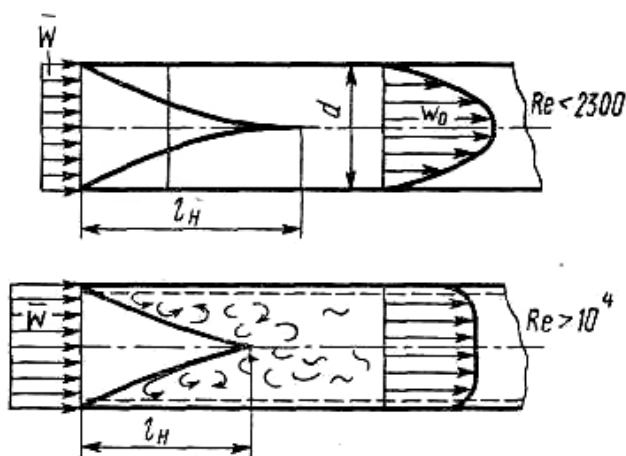


Рис. 5.1. Влияние начального участка на образование пограничного слоя

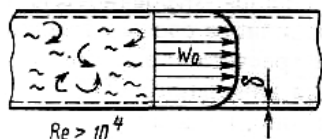
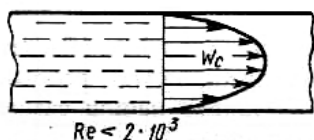
При движении у стенок трубы образуется **гидродинамический пограничный слой**, толщина которого непрерывно возрастает. На определенном расстоянии от входа пограничный слой заполняет все поперечное сечение. Расстояние от входа в трубу до слияния пограничных слоёв называется длиной гидродинамического начального участка или **участком гидродинамической стабилизации** l_H .

Гидродинамический начальный участок, существует при всех режимах течения. Однако при $Re > 2000$ в начальном участке может существовать ламинарный режим пограничного слоя, который при достижении критической толщины переходит в турбулентный. С течением времени толщина турбулентного слоя увеличивается, и слой заполняет всё сечение. Поток в зоне изменения режима течения характеризуется перемежаемостью движения.

При $Re > 5 \cdot 10^4$ – начиная с входа в трубу развивается **турбулентный пограничный слой**.

Длина гидродинамического начального участка зависит от Re , степени турбулентности потока на входе и других факторов.

Для ламинарного изотермического движения скорости по сечению потока,



когда он гидродинамически стабилизирован ($x > l_H$), распределяются по параболе:

$$w_x = w_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \text{ где } r_0 - \text{радиус трубы; } w_{\max} -$$

скорость на оси трубы.

При турбулентном течении большая часть трубы заполнена турбулентным потоком. При высоких значениях Re толщина ламинарного подслоя min , хотя именно вязкий подслой определяет термическое сопротивление теплоотдачи.

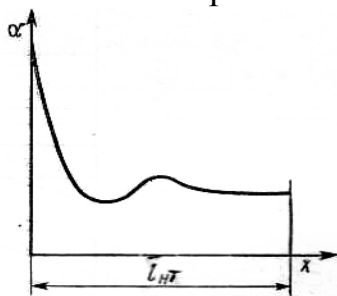
Рис. 5.2. Распределение скорости при ламинарном и турбулентном течении потока

При турбулентных потоках, скорость по сечению трубы распределяется по усечённой параболе [1]. В пределах вязкого подслоя можно принять линейное изменение скорости. Чем больше Re , тем резче изменяется скорость у стенки вследствие меньшей толщины подслоя.

При наличии теплообмена наблюдается нагрев или охлаждение пристенных слоёв, в то время как температура ядра потока остаётся равной температуре выхода, т.е. всё изменение температуры на этом участке осуществляется в пристенном слое.

При заполнении трубы жидкостью на ее поверхности, начиная от входного сечения, образуется **тепловой пограничный слой**, толщина которого постоянно увеличивается. Через определенное расстояние $l_{H.T}$, тепловой пограничный слой заполняет все сечение трубы, где $l_{H.T}$ - участок термической стабилизации или начальный тепловой участок. При $x > l_{H.T}$ - теплообмен считают стабилизированным. Изменение температуры потока по сечению трубы на начальном ее участке $\frac{\partial t}{\partial r}$ происходит значительно быстрее температурного напора $\Delta t = \bar{t} - t_c$, где $\bar{t}$ - среднемассовая по сечению температура жидкости. Поэтому, в соответствии с уравнением теплоотдачи

$\alpha = -\frac{\lambda}{\Delta t} \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)$, α на участке тепловой стабилизации резко падает и становится постоянным при стабилизации теплообмена.



Длина участка тепловой стабилизации $l_{H.T}$ зависит от большого количества факторов: λ жидкости, Re , распределения температур на входе, наличия гидродинамической стабилизации. При ламинарном режиме течения жидкости и постоянных ее физических параметрах при $t_c = const \rightarrow l_{H.T} = 0,55Pe \cdot d$; при $q_c = const \rightarrow l_{H.T} = 0,07Pe \cdot d$.

Рис.5.3. Изменение α по длине трубы при турбулентном течении потока

При турбулентном течении $l_{H.T} = (10 \div 15)d$.

При ламинарном течении может быть **вязкостный** ($Gr \cdot Pr < 8 \cdot 10$) режим потока, когда преобладают силы вязкости над подъемными силами, при малых диаметрах труб и температурных напорах, но большой вязкости жидкости.

Может быть **вязкостно - гравитационный** режим течения, когда подъемные и вязкостные силы соизмеримы.

При вязкостном режиме распределение скоростей по сечению трубы зависит от направления теплового потока (рис. 5.4).

В случае нагревания жидкости ее температура у стенки будет больше, чем при охлаждении, и соответственно - меньше вязкость. Поэтому скорость жидкости у стенки при нагревании больше, чем при охлаждении. Следовательно, α выше.

При вязкостно-гравитационном режиме значительное влияние на теплообмен оказывает направление токов естественной конвекции, вызванной разностью плотностей нагретых и холодных частиц, и её интенсивность.

В зависимости от направления вынужденного и свободного движения различают:

1. Направления вынужденного и свободного движений совпадают (рис. 5.5) при нагревании жидкости и её подъемном движении в вертикальной трубе: 1- суммарная кривая скорости; 2 - распределение скорости при вынужденном движении; 3 - при свободном движении.

2. Направления свободной и вынужденной конвекции взаимно перпендикулярны. Наблюдаются в горизонтальных трубах (рис. 5.6).

При нагревании жидкости у стенки возникают восходящие токи и нисходящие - в середине трубы. Жидкость движется, напоминая винтовую линию. За счет турбулизации теплоотдача увеличивается. α в данном случае выше.

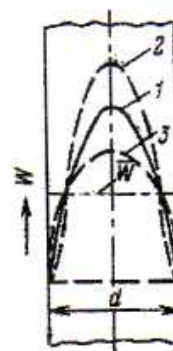


Рис. 5.4. Распределение скорости по сечению канала при вязкостном режиме течения жидкости: 1- изотермическое; 2- охлаждение; 3- нагревание

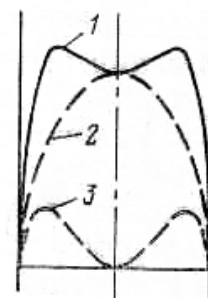


Рис. 5.5. Распределение скоростей в канале при подъёмном течении жидкости

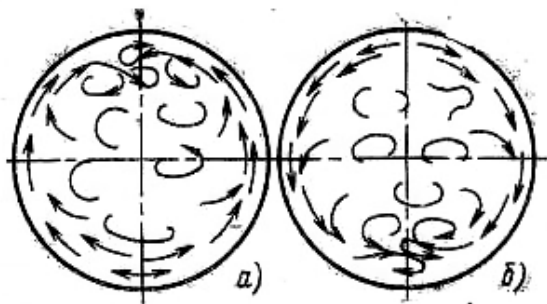
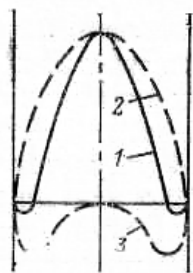


Рис. 5.6. Поперечные токи в горизонтальной трубе при течение жидкости: а) нагревание; б) охлаждение



5.7. Обозначения, как на рис. 5.5

- 3. Направления вынужденной и свободной конвекции противоположны: восходящее течение в вертикальной трубе и охлаждение (рис. 5.7). Скорость жидкости у стенки из-за противоположных по направлению токов свободной конвекции, уменьшается. Иногда возникают возвратные течения (вихревые). Расчет интенсивности теплообмена проводится - как при турбулентном течении жидкости. Рис.

5.2. Теплоотдача при течении жидкости в гладких трубах и каналах

5.2.1. Ламинарный режим

Известно, что при гидродинамическом стабилизированном ламинарном течении жидкости с постоянными физическими свойствами ее скорость в канале распределяется по закону параболы

$$w_x = 2\bar{w}_x \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right],$$

и при $q_c = \text{const} \rightarrow Nu_d = 4,36$.

При $t_c = \text{const} \rightarrow Nu = 3,66$.

Такие значения могут быть получены для параболического распределения скоростей, когда постоянны физические параметры жидкости при малых температурных напорах. Поэтому необходимая адекватность полученного результата по приведённым зависимостям и реальным данным может быть недостигнута. Кроме того, данные зависимости не учитывают теплоотдачу начального участка. На начальном участке условия теплообмена в трубе близки к условиям при продольном омывании пластины, поэтому можно воспользоваться рассмотренными расчетными зависимостями в предыдущем разделе [2].

Учёт переменности физических параметров и ряда других факторов значительно усложняют задачу. Поэтому практические расчёты ведут по эмпирическим формулам, полученным для нагревания или охлаждения жидкости при различных положениях трубы. Приближённая оценка среднего ко-

эффициента теплоотдачи для вязкостно-гравитационного режима может быть получена по **зависимости М.А. Михеева:**

$$Nu_{\text{жсд}} = 0,15 Re_{\text{жсд}}^{0,33} Pr_{\text{жсд}}^{0,33} (Gr_{\text{жсд}} \cdot Pr_f)^{0,1} \left(\frac{Pr_{\text{жс}}}{Pr_c} \right)^{0,25} \varepsilon_\ell \quad (5.1)$$

В (5.1) определяющей температурой является средняя температура жидкости в трубе $t_{\text{жс}} = 0,5(t_{\text{вх}} + t_{\text{вых}})$; определяющий размер - внутренний диаметр трубы. ε_ℓ - поправка на длину трубы. При $l/d > 50$ - $\varepsilon_\ell = 1$. При $l/d < 50$ значения поправки выбираются по табл. 5.1.

Таблица 1.

ℓ/d	1	2	5	10	15	20	30	40	50
ε_ℓ	1,9	1,7	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1

5.2.2. Турбулентный режим

Для определения плотности теплового потока на стенке при турбулентном пограничном слое было получено уравнение (4.75):

$$q_w = \frac{s_c \cdot c_p (t_0 - t_c)}{w_0 \left[1 + \frac{12}{w_0} \sqrt{\frac{s_c}{\rho}} \left(Pr^{2/3} - 1 \right) \right]},$$

где s_c - касательное напряжение на стенке.

Пусть $w_0 = \bar{w}$, $t_0 = \bar{t}$ - средние по сечению скорость и температура жидкости.

В случае безотрывного течения, когда гидравлическое сопротивление определяется силами трения, S_c находят, зная гидравлическое сопротивление ζ для стабилизированного течения.

Если перепад давления на участке идёт на преодоление трения стенки, то $\Delta P \cdot f = S_c \cdot F$, где f - поперечное сечение трубы; F - поверхность рассматриваемого участка трубы. Перепад давления находим по закону Дарси: $\Delta P = \zeta \frac{l}{d} \frac{\rho \bar{w}^2}{2}$. Тогда $S_c = \Delta P \frac{f}{F} = \zeta \frac{l}{d} \frac{\rho \bar{w}^2}{2} \frac{f}{F}$. Для круглой трубы: $\frac{\ell}{d} \cdot \frac{f}{F} = \frac{1}{4}$.

$$\text{Отсюда} \quad S_c = \frac{\zeta}{8} \rho \cdot w^2 \quad (5.2)$$

Подставим (5.2) в уравнение плотности теплового потока на стенке (4.75) и разделим его правую и левую части на $\rho \cdot c_p \cdot \bar{w}(t - t_c)$. После деления получим

$$St = \frac{\alpha}{\rho \cdot C_p \cdot \bar{w}} = \frac{\frac{\zeta}{8}}{1 + 12 \sqrt{\frac{\zeta}{8}} (Pr^{2/3} - 1)} \quad (5.3)$$

$$\text{При } Pr = 1 \rightarrow St = \frac{\zeta}{8} \quad \text{или} \quad Nu = \frac{\zeta}{8} Re \cdot Pr \quad (5.4)$$



Рис. 5.8. В. Нуссельт –
(1882-1957) немецкий теплофизик

Если в (5.4) подставить экспериментально найденную функцию $f(Pr) = 0,91Pr^{0.43}$, а ζ рассчитывать, как $\zeta = 0,184Re_d^{-0.2}$, то получим

$$Nu_{жд} = 0,021Re_{жд}^{0.8} Pr_{жс}^{0.43} (Pr_{жс}/Pr_c)^{0.25} \varepsilon_\ell. \quad (5.5)$$

При $l/d > 50 \rightarrow \varepsilon_\ell = 1$. При $l/d < 50 \rightarrow \varepsilon_\ell \approx 1 + \frac{2}{\ell/d}$.

Определяющая температура - $t_{жс} = 0,5(t_{вх} + t_{вых})$.

Определяющий размер – эквивалентный диаметр:

$$d_s = \frac{4f}{\Pi}.$$

5.2.3. Переходный режим

При числах $Re = 2 \cdot 10^3 \div 10^4$ теплоотдача зависит от большого числа факторов, трудно поддающихся учёту. При $Re = const$ коэффициент перемежаемости возрастает с увеличением расстояния от входа в трубу, а также возрастает и с увеличением Re . Чем больше Re , тем на меньшей длине трубы может быть ламинарный режим. Переход от ламинарного режима течения к турбулентному может не одновременно происходить в ядре потока и в пограничном слое. Чем больше степень турбулентности на входе в трубу, тем меньше длина ламинарного пограничного слоя. Обобщённые методики расчёта теплообмена в переходной области отсутствуют. Приближённая оценка max и min значений может быть получена по уравнениям для турбулентного и ламинарного режимов течения.

5.2.4. Изогнутые трубы

При движении в таких трубах в жидкости возникают центробежные силы, создающие в поперечном сечении **циркуляционные токи** (вторичную циркуляцию). В результате возникает движение жидкости по винтовой линии. С уменьшением радиусагиба R влияние центробежного эффекта увеличивается. Вторичная циркуляция может наблюдаться как при турбулентном, так и при ламинарном течении.

$$Re'_{кр} \approx 2000. \quad Re''_{кр} = 18500 \left(\frac{d}{2R} \right)^{0,28}; \quad Re < Re'_{кр} - \text{ламинарное течение}$$

без вторичной циркуляции. При $Re'_{кр} < Re < Re''_{кр}$ – **ламинарное течение со вторичной циркуляцией.** Коэффициент теплоотдачи α рассчитывается по уравнению (5.5). При $Re > Re''_{кр}$ – **турбулентное течение со вторичной циркуляцией.** В этом случае расчёт ведётся по уравнению (5.5) с умножением на поправку $\varepsilon_{изг} = 1 + 1.8 \frac{d}{R}$.

5.2.5. Теплоотдача в шероховатых трубах

При течении жидкости в данных условиях происходят дополнительные гидродинамические преобразования, связанные с высотой бугорка шероховатости δ и толщиной вязкого подслоя δ_n . Рассматривают два основных случая:

- **бугорки шероховатости глубоко нагружены в подслой** ($\delta < \delta_n$). В этом случае течение в подслое не нарушается, бугорки обтекаются жидкостью без её отрыва.

- **бугорки шероховатости выходят за пределы вязкого подслоя** ($\delta > \delta_n$). В этом случае происходит отрывное, турбулентное обтекание жидкостью бугорков. Пульсации у стенки заметно увеличиваются. Всё это приводит к возрастанию теплоотдачи [3].

При ламинарном течении ни коэффициент α , ни гидравлическое сопротивление не зависят от относительной шероховатости. Теплосъём может быть увеличен за счёт большей поверхности теплообмена шероховатой стенки.

При турбулентном течении эти факторы влияют на α . С уменьшением δ/d возрастает $Re_{кр}$, после которого меняется α . С увеличением α увеличивается гидравлическое сопротивление.

Характеристикой шероховатости труб служит **оптимальный относительный шаг искусственной шероховатости**: $(S/d)_{опт} = 12 - 14$; где S - расстояние между соседними неровностями. Для расчёта средней теплоотдачи может быть использована зависимость:

$$Nu_{ж.д.экв} = 0,022 Re_{ж.д}^{0,8} Pr_{ж}^{0,47} (Pr_{ж}/Pr_c)^{0,25} \cdot \varepsilon_{ш}, \quad (5.6)$$

где

$$\varepsilon_{ш} = \exp \left[0,85 \frac{(S/\delta)_{опт}}{S/\delta} \right]; \quad \text{при } \frac{S}{\delta} > \left(\frac{S}{\delta} \right)_{опт};$$

$$\varepsilon_{ш} = \exp \left[0,85 \frac{S/\delta}{(S/\delta)_{опт}} \right]; \quad \text{при } \frac{S}{\delta} < \left(\frac{S}{\delta} \right)_{опт}.$$

Определяющие температура и линейный размер аналогичны уравнению (5.5).

5.3. Примеры с решениями

Пример 5-1. Верхняя панель колпака бумагоделательной машины длиной $l_0 = 40$ м и шириной $a = 3,0$ м, обтекается продольным потоком воздуха. Скорость и температура набегающего потока равны соответственно $w_0 = 0,5$ м/с и $t_0 = 24^\circ\text{C}$. Температура поверхности колпака $t_c = 46^\circ\text{C}$. Определить средний по длине пластины коэффициент теплоотдачи и количество теплоты, отдаваемой колпаком воздуху.

Решение.

Находим параметры воздуха при $t_0 = 24^\circ\text{C}$: $\nu = 15,03 \cdot 10^{-6}$ м²/с;
 $\lambda = 2,63 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м·град); $Pr = 0,702$.

Находим число Рейнольдса

$$Re = \frac{w_0 \cdot \ell_0}{\nu} = \frac{0,5 \cdot 12}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 3,99 \cdot 10^5 < 5 \cdot 10^5, \text{ следовательно, рас-}$$

четное число Re меньше критического числа. Откуда следует, что режим течения в пограничном слое ламинарный. Тогда средний по длине коэффициент теплоотдачи может быть рассчитан по формуле $Nu_\ell = 0,67 \cdot Re_\ell^{0,5} \cdot Pr^{1/3}$,

$$\text{где } Nu_\ell = \frac{\alpha \cdot \ell_0}{\lambda}; \quad Re = \frac{w_0 \cdot \ell_0}{\nu}.$$

$$Nu_\ell = 0,67(3,99 \cdot 10^5)^{0,5} \cdot (0,702)^{0,33} = 0,67 \cdot 631,66 \cdot 0,89 = 376,6;$$

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{\ell_0} = \frac{376,6 \cdot 2,63 \cdot 10^{-2}}{12} = 0,825 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}.$$

Количество отдаваемой верхней панелью колпака теплоты определится как $Q = \alpha(t_c - t_0)F = 0,825(46 - 24)40 \cdot 3 = 2178 \text{ Вт}$.

Пример 5-2. Найти для условий задачи 6-2 толщину гидродинамического пограничного слоя и значения местных коэффициентов теплоотдачи на разных расстояниях от передней кромки верхней панели колпака бумагоделательной машины: $x = (0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,7; 0,9; 1,0)l_0$. Построить график зависимости толщины гидродинамического пограничного слоя δ_η и коэффициента теплоотдачи от расстояния x/l_0 .

Решение.

Толщина пограничного слоя и локальный коэффициент теплоотдачи в нем на расстоянии x от передней кромки панели колпака при ламинарном режиме течения жидкости, когда $Re_x < Re_{кр} = 5 \cdot 10^5$, определяется по формулам:

$$\delta_\eta = \frac{4,64x}{\sqrt{Re_x}} \text{ и } Nu = 0,33 Re_x^{0,5} Pr^{1/3},$$

$$\text{где } Nu_x = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda} \text{ и } Re_x = \frac{w_0 \cdot x}{\nu}.$$

$$\text{На расстоянии } x = 0,1l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 0,1 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 13,31 \cdot 10^4; \quad \delta_\eta = \frac{4,64 \cdot 0,1 \cdot 40}{\sqrt{13,31 \cdot 10^4}} = 0,051 \text{ м.}$$

$$Nu_x = 0,33(13,31 \cdot 10^4)^{1/2} (0,702)^{1/3} = 0,33 \cdot 364,8 \cdot 0,889 = 107,0;$$

$$\alpha_x = Nu_x \frac{\lambda}{x} = 107,0 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{0,1 \cdot 40} = 0,7 \frac{Вт}{м^2 \cdot град};$$

$$x = 0,2l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 0,2 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 26,61 \cdot 10^4; \quad \delta_\eta = \frac{4,64 \cdot 0,2 \cdot 40}{\sqrt{26,61 \cdot 10^4}} = 0,072 \text{ м.}$$

$$Nu_x = 0,33(26,61 \cdot 10^4)^{1/2} (0,702)^{1/3} = 0,33 \cdot 515,85 \cdot 0,889 = 151,33;$$

$$\alpha_x = 151,33 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{0,2 \cdot 40} = 0,5 \frac{Вт}{м^2 \cdot град};$$

$$x = 0,3l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 0,3 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 39,92 \cdot 10^4; \quad \delta_\eta = \frac{4,64 \cdot 0,3 \cdot 40}{\sqrt{39,92 \cdot 10^4}} = 0,088 \text{ м.}$$

$$Nu_x = 0,33(39,92 \cdot 10^4)^{1/2} (0,702)^{1/3} = 0,33 \cdot 631,82 \cdot 0,889 = 185,35;$$

$$\alpha_x = 185,35 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{0,3 \cdot 40} = 0,41 \frac{Bm}{m^2 \cdot \text{град}};$$

$$x = 0,4l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 0,4 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 53,22 \cdot 10^4; Re_x = 5,32 \cdot 10^5 > Re_{кр} = 5 \cdot 10^5.$$

Следовательно, при $x = 0,4l_0$ ламинарный режим течения в слое при данных параметрах переходит в турбулентный, когда среднее значение теплоотдачи при обтекании колпака воздухом определяется по формуле $Nu = 0,032 Re^{0,8}$, локальный коэффициент теплоотдачи и толщина турбулентного гидродинамического пограничного слоя определяется по формулам:

$$Nu_x = 0,0255 Re_x^{0,8} \text{ и } \delta_m = \frac{0,37x}{\sqrt[5]{Re_x}} \text{ соответственно. } \delta_m = \frac{0,37x}{\sqrt[5]{Re_x}} = \frac{0,37 \cdot 0,4 \cdot 40}{\sqrt[5]{53,22 \cdot 10^4}} = 0,424$$

м.

$$Nu_x = 0,0255 \cdot (53,22 \cdot 10^4)^{0,8} = 971,40; \alpha_x = 971,4 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{0,4 \cdot 40} = 1,6 \frac{Bm}{m^2 \cdot \text{град}}.$$

$$x = 0,5l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 0,5 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 66,53 \cdot 10^4; \delta_m = \frac{0,37 \cdot 0,5 \cdot 40}{\sqrt[5]{66,53 \cdot 10^4}} = 0,506 \text{ м.}$$

$$Nu_x = 0,0255 \cdot (66,53 \cdot 10^4)^{0,8} = 1161,32; \alpha_x = 1161,32 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{0,5 \cdot 40} = 1,53 \frac{Bm}{m^2 \cdot \text{град}}.$$

$$x = 0,7l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 0,7 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 93,15 \cdot 10^4; \delta_m = \frac{0,37 \cdot 0,7 \cdot 40}{\sqrt[5]{93,15 \cdot 10^4}} = 0,663 \text{ м.}$$

$$Nu_x = 0,0255 \cdot (93,15 \cdot 10^4)^{0,8} = 1520,15; \alpha_x = 1520,15 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{0,7 \cdot 40} = 1,43 \frac{Bm}{m^2 \cdot \text{град}}.$$

$$x = 0,9l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 0,9 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 119,76 \cdot 10^4; \delta_m = \frac{0,37 \cdot 0,9 \cdot 40}{\sqrt[5]{119,76 \cdot 10^4}} = 0,811 \text{ м.}$$

$$Nu_x = 0,0255 \cdot (119,76 \cdot 10^4)^{0,8} = 1858,61; \alpha_x = 1858,61 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{0,9 \cdot 40} = 1,36 \frac{Bm}{m^2 \cdot \text{град}}.$$

$$x = 1,0l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 1,0 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 133,07 \cdot 10^4; \delta_m = \frac{0,37 \cdot 1,0 \cdot 40}{\sqrt[5]{133,07 \cdot 10^4}} = 0,882 \text{ м.}$$

$$Nu_x = 0,0255 \cdot (133,07 \cdot 10^4)^{0,8} = 2022,11; \alpha_x = 2022,11 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{1,0 \cdot 40} = 1,33 \frac{Bm}{m^2 \cdot \text{град}}.$$

Результаты расчетов представлены в табл. 5.2 и на рис. 5.9, 5.10.

Таблица 5.2

x/l_0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	0,9	1,0
$\delta_x, \text{мм}$	51	72	88	424	506	663	811	882
$\alpha_x, \frac{Bm}{m^2 \cdot \text{град}}$	0,7	0,5	0,4	1,6	1,53	1,43	1,36	1,33



Рис. 5.9. Изменение толщины гидродинамического пограничного слоя по длине колпака машины

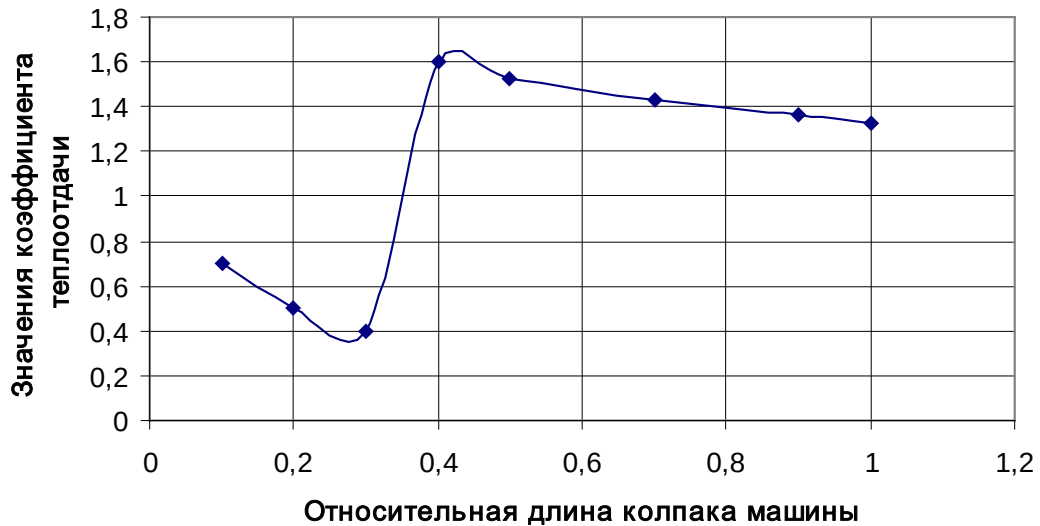


Рис. 5.10. Изменение коэффициента теплоотдачи по длине гидродинамического пограничного слоя

Пример 5 – 3.

Вычислить средний коэффициент теплоотдачи и температуры на входе и выходе из трубы при течении трансформаторного масла в трубах, диаметром $d = 16$ мм и длиной $l = 1,5$ м; системы смазки подшипников бумагоделательной машины. Определить падение давления по длине трубки. Скорость масла в трубе составляет $w = 0,3$ м/с. Средняя температура масла в трубе $t_{жс} = 70^\circ\text{C}$, средняя температура стенки трубы $t_c = 25^\circ\text{C}$.

Решение.

По значению числа Re определяем режим течения масла.

При $t_{жс} = 70^\circ\text{C}$ находим коэффициент кинематической вязкости масла

$$\nu_{жс} = 4,54 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

$$Re_{жс} = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{0,3 \cdot 0,016}{4,54 \cdot 10^{-6}} = 1057.$$

Режим течения ламинарный, поскольку $Re_{жс} < 2300$. В этих условиях необходимо найти величину влияния, оказываемого естественной конвекцией на теплоотдачу. Для этого рассчитываем комплекс $(GrPr)_Г$. Находим определяющую температуру пленки $t_Г = 0,5(t_{жс} + t_c) = 0,5(70 + 25) = 47,5^\circ \text{C}$. При этой температуре находим значения физических свойств масла

$$\nu_Г = 8,26 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \quad \beta_Г = 7,037 \cdot 10^{-4}, 1/\text{град}; \quad Pr_Г = 119,75.$$

$$(Gr \cdot Pr)_Г = g \cdot \beta_Г \frac{(t_{жс} - t_c)d^3}{\nu_Г^2} Pr = 0,81 \cdot 7,037 \cdot 10^{-4} \frac{(70 - 25)(0,016)^3}{(8,26 \cdot 10^{-6})^2} 119,75 = 1,8 \cdot 10^5.$$

Поскольку $(Gr \cdot Pr)_Г < 8 \cdot 10^5$, влиянием естественной конвекции на теплоотдачу можно пренебречь, и режим течения масла считать вязкостным.

Средний коэффициент теплоотдачи при вязкостном режиме течения жидкости в трубах при $Re_{жс} < 2300$ можно рассчитывать по формуле

$$Nu_Г = 1,5 \left(Pe_Г \frac{d}{l} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_{жс}}{\mu_c} \right)^{0,14} \varepsilon,$$

$$\text{где } Nu_Г = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda_Г}; \quad Pe_Г \frac{d}{l} = \frac{4G \cdot c_{pГ}}{\pi / \lambda_Г}; \quad \alpha = \frac{q}{t_{жс} - t_c}; \quad \text{индексы «с» и «Г» означают, что физические свойства жидкости находятся по справочникам при температуре стенки } t_c \text{ и определяющей температуре } t_Г \text{ соответственно.}$$

Поправка на участок гидродинамической стабилизации

$$\varepsilon = 0,6 \left(\frac{1}{Re_{жс}} \cdot \frac{l}{d} \right)^{-1/7} \left(1 + 2,5 \frac{1}{Re_{жс}} \cdot \frac{l}{d} \right) \quad \text{вводится в случаях, когда перед обогреваемым участком трубы отсутствует участок гидродинамической стабилизации и}$$

$$\frac{1}{Re} \frac{l}{d} < 0,1; \quad \frac{1}{Pe_Г} \frac{l}{d} \leq 0,05; \quad (Gr \cdot Pr)_Г \leq 8 \cdot 10^5; \quad 0,07 \leq \frac{\mu_c}{\mu_{жс}} \leq 1500.$$

Для расчета теплоотдачи по средней температуре масла $t_{жс} = 70^\circ \text{C}$, температуре стенки $t_c = 25^\circ \text{C}$ и температуре пленки $t_Г = 47,5^\circ \text{C}$ находим необходимые значения его физических параметров $\rho_{жс} = 850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $\mu_{жс} = 38,6 \cdot 10^{-4}$

$$\frac{\text{Н} \cdot \text{С}}{\text{м}^2}; \quad \lambda_Г = 0,1084 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}; \quad C_{pГ} = 1,831 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}; \quad \mu_c = 163,3 \frac{\text{Н} \cdot \text{С}}{\text{м}^2}.$$

Определяем расход масла в трубе

$$G = \rho_{жс} \cdot w \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 850 \cdot 0,3 \frac{3,14 \cdot (0,016)^2}{4} = 0,0512 \text{ кг/с}.$$

Проверяем условия ввода поправки на участок гидродинамической стабилизации

$$Pe_Г \frac{d}{l} = \frac{w \cdot l}{a} \frac{d}{l} = \frac{4G \cdot d \cdot \rho_Г \cdot C_{pГ}}{\rho_{жс} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \lambda_Г} = \frac{4G \cdot C_{pГ}}{\pi \cdot d \cdot \lambda_Г} = \frac{4 \cdot 0,0512 \cdot 1,831}{3,14 \cdot 0,016 \cdot 0,1084} = 68,8.$$

Таким образом $\frac{1}{Pe_r} \frac{l}{d} = \frac{1}{68,8} = 0,014 \leq 0,05$. Следовательно, одно из условий ввода поправки на участок гидродинамической стабилизации выполнено.

$$\frac{1}{Re_{жс}} \frac{l}{d} = \frac{1}{1057} \frac{1,5}{0,016} = 0,087 < 0,1.$$

Поправка на участок гидродинамической стабилизации

$$\varepsilon = 0,6(0,087)^{-1/7} (1 + 2,5 \cdot 0,087) = 0,6 \cdot 1,414 \cdot 1,217 = 1,03.$$

$$\text{Число Нуссельта } Nu_r = 1,55(68,8)^{1/3} \left(\frac{38,6}{163,3} \right)^{0,14} \cdot 1,03 = 1,55 \cdot 4,092 \cdot 0,817 \cdot 1,03 = 5,33.$$

Коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = 5,33 \frac{0,1084}{0,016} = 36,1 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}.$$

Для нахождения температур масла на входе и выходе из трубы определяем количество передаваемой в ней теплоты

$$Q = \alpha(t_{жс} - t_c) \cdot F = \alpha(t_{жс} - t_c) \pi \cdot d \cdot l = 36,1 \cdot (70 - 25) \cdot 3,14 \cdot 0,016 \cdot 1,5 = 122,4 \text{ Вт}.$$

Находим разность температур на входе и выходе из трубы

$$\delta_t = t_{вых} - t_{вх} = \frac{Q}{G \cdot C_{ржс}} = \frac{122,4}{0,0512 \cdot 1,964 \cdot 10^3} = 1,2 \text{ } ^\circ \text{C},$$

где $C_{ржс} = 1,964 \frac{кДж}{кг \cdot град}$ теплоемкость масла при $t_{жс} = 70 \text{ } ^\circ \text{C}$.

Среднее арифметическое значение температуры масла $t_{жс} = 0,5 \cdot (t_{вх} + t_{вых}) = 70 \text{ } ^\circ \text{C}$. Следовательно, $t_{вх} = 71 \text{ } ^\circ \text{C}$ и $t_{вых} = 69 \text{ } ^\circ \text{C}$.

При вязкостном неизотермическом течении жидкости в трубах коэффициент сопротивления трения определяется по формуле $\xi = \xi_u \left(\frac{\mu_c}{\mu_{жс, вх}} \right)^n$,

где $\xi_u = \frac{64}{Re}$ - коэффициент сопротивления трения при изотермическом тече-

нии; $n = C \left(Pe_{вх} \frac{d}{l} \right)^m \left(\frac{\mu_c}{\mu_{вх}} \right)^{-0,032}$; при $Pe_{вх} \frac{d}{l} \leq 1500 \Rightarrow C = 2,3$; $m = -0,3$;

при $Pe_{вх} \frac{d}{l} > 1500 \Rightarrow C = 0,535$; $m = -0,1$.

$$Pe_{вх} \frac{d}{l} = \frac{4G \cdot C_{р, вх}}{\pi \cdot d \cdot \lambda_{вх}} = \frac{4 \cdot 0,0512 \cdot 1,97}{3,14 \cdot 0,016 \cdot 0,106} = 75,8 < 1500; C = 2,3; m = -0,3.$$

$$n = 2,3(75,8)^{-0,3} \left(\frac{163,3}{37,8} \right)^{-0,032} = 0,599.$$

$$\xi = \frac{64}{Re_{жс}} \left(\frac{\mu_c}{\mu_{вх}} \right)^n = \frac{64}{1057} \left(\frac{163,3}{37,8} \right)^{0,599} = 0,145.$$

$$\text{Падение давления } \Delta P = \xi \frac{l}{d} \frac{\rho_{жс} \cdot w^2}{2} = 0,145 \frac{1,5}{0,016} \frac{850 \cdot (0,3)^2}{2} = 520 \text{ Н/м}^2.$$

Пример 5-4. В вертикальном подогревателе вода с температурой на входе $t_{\text{вх}}=15^\circ\text{C}$ снизу вверх течет по трубам диаметром $d=32\text{ мм}$. Температура стенок труб теплообменника поддерживается равной $t_c=160^\circ\text{C}$. Определить длину труб подогревателя, если температура при расходе воды $G=0,02\text{ кг/с}$ на выходе составляет $t_{\text{вых}}=80^\circ\text{C}$.

Решение.

По средней температуре воды $t_{\text{жс}} = 0,5(t_{\text{вх}} + t_{\text{вых}}) = 0,5(15 + 80) = 47,5^\circ\text{C}$ находим ее физические параметры $\rho_{\text{жс}} = 989,1\text{ кг/м}^3$; $C_{p\text{жс}} = 4,174 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$;

$\mu_{\text{жс}} = 575,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$. По t_c находим $\lambda_c = 0,6835 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$. Рассчитываем число Re :

$$Re = \frac{4 \cdot G}{\pi \cdot d \cdot \rho_{\text{жс}}} = \frac{4 \cdot 0,02}{3,14 \cdot 0,032 \cdot 989,1 \cdot 10^{-6}} = 1384 < 2300.$$

Режим течения ламинарный. Выбираем физические параметры воды по температуре пленки $t_\Gamma = 0,5(t_c + t_{\text{жс}}) = 0,5(160 + 47,5) = 103,7^\circ\text{C}$; $\beta_\Gamma = 7,73 \cdot 10^{-4} \text{ 1/град}$; $\nu_\Gamma = 0,286 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $a_\Gamma = 16,94 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$; $Pr = 1,69$.

При совпадении направлений вынужденной и свободной конвекции и вязкостно-гравитационном режиме движения расчет теплоотдачи проводим по формуле

$$Nu_c = 0,35 \left(Pe_\Gamma \frac{d}{l} \right)^{0,3} \left[(Gr \cdot Pr)_\Gamma \frac{d}{l} \right]^{0,18}.$$

$$\text{Уравнение справедливо при } \left(Pe_\Gamma \frac{d}{l} \right)_{ac} \leq Pe_\Gamma \frac{d}{l} \leq 1100; \quad 20 \leq \frac{l}{d} \leq 130;$$

$$8 \cdot 10^5 \leq (Gr \cdot Pr)_\Gamma \leq 4 \cdot 10^8,$$

$$\text{где асимптотическое значение числа Пекле } \left(Pe_\Gamma \frac{d}{l} \right)_{ac} \approx 1,5 \cdot \left((Gr \cdot Pr)_\Gamma \frac{d}{l} \right)^{0,25}.$$

Для решения уравнения с двумя неизвестными α и l используем уравнение теплового баланса $Q = G \cdot C_{p\text{жс}}(t_{\text{вых}} - t_{\text{вх}}) = \alpha(t_c - t_{\text{вх}})\pi \cdot d \cdot l$.

$$Pe_\Gamma = \frac{w \cdot d}{a_\Gamma} = \frac{4 \cdot G}{\pi \cdot d \cdot \rho_{\text{жс}} \cdot a_\Gamma} = \frac{4 \cdot 0,02}{3,14 \cdot 0,032 \cdot 989,1 \cdot 16,94 \cdot 10^{-8}} = 4752.$$

Находим коэффициент теплоотдачи из критериального уравнения Нуссельта

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda_c \cdot 0,35 \cdot (Pe_\Gamma)^{0,3} (Gr \cdot Pr)_\Gamma^{0,18} d^{-0,52} l^{-0,48} = \\ &= 0,6835 \cdot 0,35 \cdot (4752)^{0,3} \left(\frac{7,73 \cdot 10^{-4} \cdot 9,81 \cdot (0,032)^3}{(0,286 \cdot 10^{-6})^2} (160 - 47,5) \cdot 1,69 \right)^{0,18} (0,032)^{-0,52} l^{-0,48} = \\ &= 348 \cdot l^{-0,48}. \end{aligned}$$

Находим коэффициент теплоотдачи из уравнения теплового баланса

$$\alpha = \frac{G \cdot C_{p\text{жс}}(t_{\text{вых}} - t_{\text{вх}})}{\pi \cdot d \cdot (t_c - t_{\text{вх}})l} = \frac{0,02 \cdot 4174 \cdot (80 - 15)}{3,14 \cdot 0,032 \cdot (160 - 15) \cdot l} = \frac{372}{l}.$$

Приравниваем найденные значения коэффициентов теплоотдачи

$$348 \cdot l^{-0,48} = \frac{372}{l} \cdot l^{0,52} = \frac{372}{348} = 1,069. \quad l = 1,14 \text{ м.}$$

Проверяем применимость критериального уравнения Нуссельта

$$\begin{aligned} \frac{l}{d} &= \frac{1,14}{0,032} = 35,6; \quad Pe_r \frac{d}{l} = 4752 \frac{1}{35,6} = 133,5; \quad \left(Pe_r \frac{d}{l} \right)_{ac} \approx 1,5 \cdot \left((Gr \cdot Pr)_r \frac{d}{l} \right)_r^{0,25} = \\ &= 1,5 \left(5,8 \cdot 10^8 \cdot \frac{1}{35,6} \right)^{0,25} = 95,2. \end{aligned}$$

Поскольку $20 \leq \frac{l}{d} \leq 130$ и $\left(Pe_r \frac{d}{l} \right)_{ac} \leq Pe_r \frac{d}{l} \leq 1100$, то критериальное уравнение Нуссельта применимо для данных условий.

Пример 5-5. Определить коэффициент теплоотдачи от стенки трубки конденсатора паротурбинной установки к охлаждающей воде, количество передаваемой теплоты и длину трубки. Средняя по длине температура стенки $t_c = 32^\circ \text{C}$. Внутренний диаметр трубки $d = 28 \text{ мм}$. Температура воды на входе равна $t_{вх} = 15^\circ \text{C}$, на выходе – $t_{вых} = 24^\circ \text{C}$. Средняя скорость воды поддерживается равной $w = 1,5 \text{ м/с}$.

Решение.

Определяем среднюю температуру воды $t_{жс} = 0,5(t_{вх} + t_{вых}) = 0,5(15 + 24) = 19,5^\circ \text{C}$ и находим ее физические параметры $\nu_{жс} = 1,021 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $C_{P_{жс}} = 4,183 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$; $\lambda_{жс} = 0,598 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$; $\rho_{жс} = 998,2 \text{ кг/м}^3$; $Pr_{жс} = 7,035$. По $t_c = 32^\circ \text{C} - Pr_c = 5,2$. Число $Re_{жс} = \frac{w \cdot d}{\nu_{жс}} = \frac{1,5 \cdot 0,028}{1,021 \cdot 10^{-6}} = 41,14 \cdot 10^3 > 1 \cdot 10^4$.

Таким образом, режим движения турбулентный и расчет теплоотдачи можно произвести по формуле Михеева $Nu_{жс} = 0,021 \cdot Re_{жс}^{0,8} \cdot Pr_{жс}^{0,43} \cdot \left(\frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25} \cdot \varepsilon_l$, где индексы «ж» и «с» означают выбор параметров воды по ее средней температуре; ε_l – поправка на начальный участок, значения которой приведены в табл. 5.3.

Более точные результаты при значениях $Re_{жс} > 1 \cdot 10^5$ или $Pr_{жс} > 5$ могут быть получены по формуле

Таблица 5.3

$Re_{жс}$	l/d								
	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$1 \cdot 10^4$	1,65	1,5	1,34	1,23	1,17	1,13	1,07	1,03	1
$2 \cdot 10^4$	1,51	1,4	1,27	1,18	1,13	1,10	1,05	1,02	1
$5 \cdot 10^4$	1,34	1,27	1,18	1,13	1,10	1,08	1,04	1,02	1
$1 \cdot 10^5$	1,28	1,22	1,15	1,10	1,08	1,06	1,03	1,02	1

$$Nu_{жс} = \frac{\frac{\xi}{8} Re_{жс} Pr_{жс}}{12,7 \sqrt{\frac{\xi}{8} \cdot (Pr_{жс}^{2/3} - 1) + 1,07} \left(\frac{\mu_{жс}}{\mu_c} \right)^n},$$

где $\xi = \frac{1}{(1,82 \cdot \lg Re_{жс} - 1,64)^2}$ - коэффициент сопротивления трения при изотермическом турбулентном течении жидкости в гладких трубах. При нагревании $n = 0,11$; при охлаждении $n = 0,25$.

При неизвестной длине трубки расчет ведем методом последовательных приближений. Поправку на начальный участок принимаем $\varepsilon_l = 1$. Находим коэффициент теплоотдачи от стенки трубы к воде

$$Nu_{жс} = 0,021(41,14 \cdot 10^3)^{0,8} (7,035)^{0,43} \left(\frac{7,035}{5,2} \right)^{0,25} = 220,1;$$

$$\alpha = Nu_{жс} \frac{\lambda_{жс}}{d} = 220,1 \frac{0,598}{0,028} = 4700 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}.$$

Рассчитываем расход воды через трубку

$$G = w \cdot \rho_{жс} \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 1,5 \cdot 998,2 \frac{3,14 \cdot (0,028)^2}{4} = 0,921 \text{ кг/с};$$

количество передаваемой теплоты

$$Q = G \cdot C_{P,жс} (t_{вых} - t_{вх}) = 0,921 \cdot 4183 \cdot (24 - 15) = 34673 \text{ Вт}.$$

Находим среднелогарифмический температурный напор

$$\Delta t = \frac{t_{вых} - t_{вх}}{2,3 \lg \frac{t_c - t_{вх}}{t_c - t_{вых}}} = \frac{24 - 15}{2,3 \cdot \lg \frac{32 - 15}{32 - 24}} = 11,9^\circ C$$

$$\text{и длину трубки } l = \frac{Q}{\alpha \cdot \Delta t \cdot \pi \cdot d} = \frac{34673}{4700 \cdot 11,9 \cdot 3,14 \cdot 0,028} = 7,05 \text{ м}.$$

Рассчитываем $\frac{l}{d} = \frac{7}{0,028} = 250$. При расчете принято $\varepsilon_l = 1$, что справедли-

во при $\frac{l}{d} > 50$, тогда производить следующее приближение не требуется.

Пример 5-6. По трубке с внутренним диаметром $d = 18 \text{ мм}$ и $l/d > 50$ перекачивается вода со скоростью $w = 1,5 \text{ м/с}$, нагреваясь от $t_{вх} = 10^\circ C$ до $t_{вых} = 60^\circ C$. Температура внутренней стенки трубы составляет $t_c = 105^\circ C$. Определить коэффициент сопротивления трения и сравнить его со значением коэффициента при изотермическом течении.

Решение.

Находим среднюю температуру воды $t_{жс} = 0,5(t_{вх} + t_{вых}) = 35^\circ C$ и определяем ее физические параметры $\nu_{жс} = 0,732 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $Pr_{жс} = 4,865$;

$$\mu_{жс} = 727,4 \cdot 10^{-6} \frac{Н \cdot с}{м^2}; \quad \mu_c = 270,7 \cdot 10^{-6} \frac{Н \cdot с}{м^2}.$$

$$\text{Рассчитываем число } Re_{жс} = \frac{w \cdot d}{\nu_{жс}} = \frac{1,5 \cdot 0,018}{0,732 \cdot 10^{-6}} = 36885.$$

При турбулентном режиме движения несжимаемой жидкости в гладких трубах в неизотермических условиях коэффициент сопротивления трения при $3,3 \cdot 10^3 < Re_{жс} < 2,5 \cdot 10^5$; $0,3 < \frac{\mu_c}{\mu_{жс}} < 38$ и $1,3 < Pr_{жс} < 178$ рассчитывается по

$$\text{формуле} \quad \xi = \xi_u \left(\frac{\mu_c}{\mu_{жс}} \right)^n,$$

где $\xi_u = \frac{1}{(1,82 \cdot \lg Re_{жс} - 1,64)^2}$ - коэффициент сопротивления в изотермических условиях; $\frac{\mu_c}{\mu_{жс}}$ - отношение коэффициентов динамической вязкости жидкости, выбранных при температурах стенки и средней температуре жидкости; $n = 0,14$ при нагревании жидкости и $n = 0,28 Pr_{жс}^{-0,25}$ при ее охлаждении.

$$\xi_u = \frac{1}{(1,82 \cdot \lg Re_{жс} - 1,64)^2} = \frac{1}{(1,82 \cdot \lg 36885 - 1,64)^2} = 0,0224;$$

$$\xi = \xi_u \left(\frac{\mu_c}{\mu_{жс}} \right)^n = 0,0224 \left(\frac{270,7}{727,4} \right)^{0,14} = 0,0195; \quad \frac{\xi}{\xi_u} = 0,87.$$

6. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ПОПЕРЕЧНОМ ОМЫВАНИИ ТРУБ И ПУЧКОВ ТРУБ

6.1. Одиночная труба

Плавное, безотрывное обтекание цилиндра, как показано на рис. 6.1, существует до $Re = 5 = \frac{w_0 \cdot d}{\nu}$, где w_0 – скорость набегающего потока, d – внешний диаметр. При $Re > 5$ картина меняется. Пограничный слой, образующийся на передней половине трубы, в кормовой части отрывается от поверхности и позади цилиндра образуются два симметричных вихря. Вихри периодически отрываются от *Рис. 6.1. Безотрывное* трубы и уносятся потоком жидкости, образуя вихревую *омывание цилиндра* дорожку (рис.6.2). Частота отрыва вихря растет до $Re \approx 10^3$. Затем рост частоты прекращается и при $Re = 10^3 \div 2 \cdot 10^5$ становится постоянной величиной, характеризуемой **числом Струхали** $Sh = \frac{f \cdot d}{w_0} = 0,2$, где f – частота отрыва.

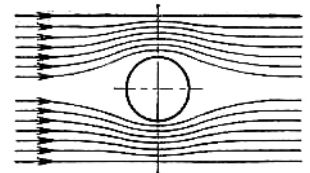




Рис. 6.2. В. Струхаль (1850-1922) чешский физик и гидродинамик

Отрыв пограничного слоя происходит из-за снижения скорости в кормовой части трубы ($\varphi > 90^\circ$), повышения вследствие этого статического давления, под действием которого возникают возвратные течения, оттесняющие пограничный слой с поверхности тела. При невысоких числах Re и малой степени турбулентности набегающего потока происходит отрыв ламинарного пограничного слоя (рис. 6.2, а; $\varphi_{кр} \approx 82^\circ$).

При высоких числах Re , рост статического давления приводит не к отрыву, а к переходу режима течения в слое в турбулентное, обладающего боль-

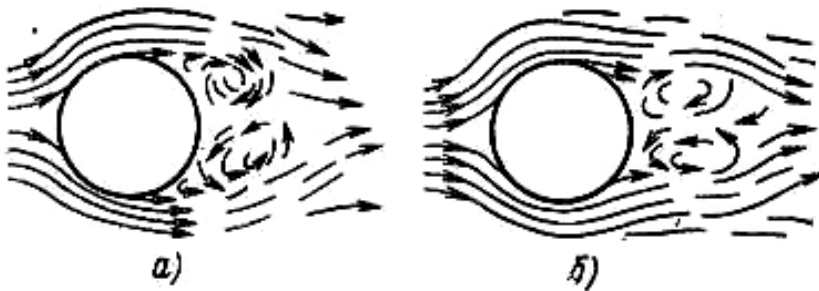


Рис. 6.3. Обтекание цилиндра при отрыве ламинарного (а) и турбулентного (б) пограничного слоя

шей кинетической энергией. В результате место отрыва турбулентного слоя резко смещается по потоку (рис. 6.2, б; $\varphi_{кр} \approx 140^\circ$). При постоянных числах Re повышение степени турбулентности приводит к уменьшению φ (рис. 6.4). Кривая 1 соответствует теплоотдаче при отрыве ламинарного пограничного слоя, кривая 2 – турбулентного.

Падение α на лобовой части трубы происходит из-за роста толщины ламинарного пограничного

слоя. Минимум α на кривой 1 соответствует месту отрыва слоя. В кормовой части трубы наблюдается сложный вихревой характер движения. При малых Re теплоотдача на корме трубы невысокая. С возрастанием Re α могут сравняться с интенсивностью теплообмена ружности цилиндра на лобовой части. На кривой 2 первый минимум α соответствует переходу ламинарного течения в слое в турбулентное. α резко возрастает. Второй минимум α соответствует месту отрыва турбулентного пограничного слоя. По-

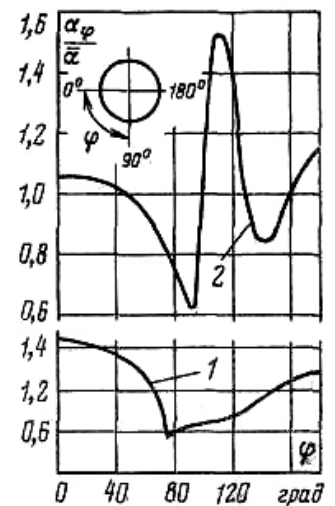


Рис. 6.4. Изменение теплоотдачи по окружности цилиндра

сле отрыва труба омывается вихрями. Вследствие этого α возрастает. Расчетные зависимости по теплоотдаче были обобщены А. Жукаускасом:

$$5 < Re < 10^3 \rightarrow Nu_{жс} = 0,5 Re_{жс}^{0,5} Pr_{жс}^{0,38} \left(\frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}; \quad (6.1)$$

$$10^3 < Re < 2 \cdot 10^5 \rightarrow Nu_{жс} = 0,25 Re_{жс}^{0,6} Pr_{жс}^{0,38} \left(\frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}; \quad (6.2)$$

$$Re = 2 \cdot 10^5 \div 2 \cdot 10^6 \rightarrow Nu_{жс} = 0,023 Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,38} \left(\frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}. \quad (6.3)$$



В уравнениях (6.1 - 6.3) определяющий линейный размер – d . Скорость взята в узком сечении канала. Определяющая температура: $t_{жс} = 0,5(t_{вх} + t_{вых})$.

С увеличением степени турбулентности потока α увеличивается: $Nu = Nu_0[1 + 0,09(Re \cdot Tu)^{0,2}]$, где Nu_0 – определяется по (6.2).

6.2. Теплоотдача при поперечном омывании пучков труб

Рис. 6.5. А. Жукаускас

(1923-1997) - литовский физик, которые классифицируются как **коридорные** и **шахматные**.

Основными характеристиками пучка являются **поперечный шаг** S_1 и **продольный шаг** S_2 (рис.6.6). Форма течения жидкости в пучке зависит от характера течения до пучка. При низких Re течение может оставаться ламинарным. Турбулентный пограничный слой на стенках труб пучка может появиться при меньших Re , чем при омывании одиночной трубы: $Re_{кр} = 10^5$. При $Re < 10^5$ передняя часть труб омывается ламинарным пограничным слоем, а кормовая – отдельными неупорядоченными вихрями. Таким образом, общий характер течения – смешанное. Соответственно выделяются три режима омывания: ламинарное, смешанное и турбулентное.

Для смешанного режима - $Re = 1 \cdot 10^3 \div 1 \cdot 10^5$.

Омывание первого ряда труб шахматного и коридорного пучков аналогично омыванию одиночного цилиндра. Характер омывания остальных труб

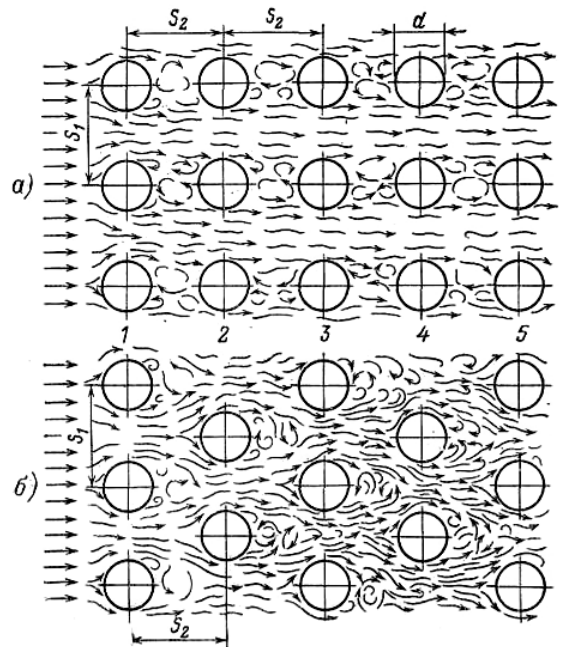


Рис. 6.6. Характер движения жидкости в коридорном (а) и шахматном (б) пучках труб

зависит от типа пучка. Трубы второго и последующего рядов коридорного пучка находятся в вихревой зоне, образованной впереди стоящими трубками. Однако основной поток проходит в продольных коридорах между рядами. Поэтому как лобовая, так и кормовая часть труб коридорного пучка омываются с меньшей интенсивностью по сравнению с аналогичными трубками первого ряда. Характер омывания труб шахматного пучка практически аналогичен трубкам первого ряда.

Изменения α по окружности труб первого ряда коридорного и шахматного пучков соответствуют распределению α для одиночной трубы (рис. 6.7). Для остальных труб коридорного пучка максимум α наблюдается при $\varphi \approx 50^\circ$. Два максимума α приходятся на удар набегающих струй. Лобовая часть труб интенсивному воздействию потока не подвергается. Поэтому α не высокие. В трубах шахматного пучка максимум теплоотдачи приходится на лобовую часть.

Средняя теплоотдача труб первых рядов определяется начальной турбулентностью потока. Начиная с третьего ряда, теплоотдача стабилизируется, поскольку степень турбулентности потока определяется компоновкой пучка.

Теплоотдача первого ряда шахматного пучка составляет 60 % теплоотдачи третьего ряда, второго – 70 %. В коридорных пучках на первый ряд приходится 60 % от α третьего, а α второго – 90 % от α третьего. Возрастание теплоотдачи по рядам объясняется дополнительной турбулизацией потока в пучке. Если же поток дополнительно турбулизирован до пучка, то α первых рядов может быть выше α глубинных.

При смешанном режиме α_{cp} третьего ряда может определяться согласно зависимости:

$$Nu_{жс} = c Re_{жс}^n Pr_{жс}^{0,33} \left(\frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25} \varepsilon_s. \quad (6.4)$$

Для шахматных пучков $c = 0,41$; $n = 0,6$.

Для коридорных пучков $c = 0,26$; $n = 0,65$.

ε_s – учитывает влияние относительных шагов: S_1/d – относительный поперечный и S_2/d – относительный продольный шаги. $\varepsilon_s = (S_2/d)^{-0,15}$ – для коридорного; $\varepsilon_s = (S_1/S_2)^{1,6}$ при $S_1/S_2 < 2$ для шахматного и при $S_1/S_2 \geq 2$: $\varepsilon_s = 1,12$. Определяющий размер – внешний диаметр. Скорость жидкости берется по узкому сечению пучка. Определяющая температура – средняя температура жидкости: $t_{жс} = 0,5(t_{вх} + t_{вых})$.

Средний для пучка труб коэффициент теплоотдачи определяется как:

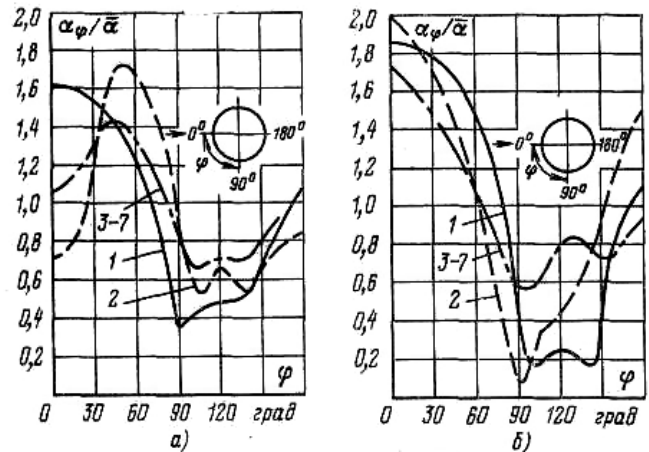


Рис. 6.7. Изменение α по периметру труб для различных рядов коридорных (а) и шахматных (б) пучков

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + (n-2)\alpha_3}{n}.$$

6.3. Примеры с решениями

Пример 6 - 1. Труба, диаметром $d = 32$ мм, охлаждается поперечным потоком воды. Скорость движения и средняя температура воды составляют $w = 2,5$ м/с; $t_{жс} = 20^\circ \text{C}$. Определить необходимую температуру поверхности трубы для поддержания плотности теплового потока, равного $q = 60 \cdot 10^4$ Вт/м²; рассчитать значение коэффициента теплоотдачи.

Решение.

Определяем физические параметры воды по $t_{жс} = 20^\circ \text{C}$: $\nu_{жс} = 1,006 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\lambda_{жс} = 0,599 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$; $Pr_{жс} = 7,02$.

Рассчитываем режим движения воды $Re_{жс} = \frac{w \cdot d}{\nu_{жс}} = \frac{2,5 \cdot 0,032}{1,006 \cdot 10^{-6}} = 79523$.

Поскольку $1 \cdot 10^5 \leq Re_{жс} \leq 2 \cdot 10^5$, то расчет ведем по формуле

$$Nu_{жс} = 0,25 \cdot Re_{жс}^{0,6} \cdot Pr_{жс}^{0,38} \cdot \left(\frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}.$$

Вследствие того, что в формулу входит Pr_c , определяемое по t_c , которую необходимо найти по условию задачи, то решение необходимо проводить либо графическим методом, либо методом последовательных приближений.

Используем первый метод – графический.

Зададимся тремя значениями температуры стенки трубы: $t_{c1} = 40^\circ \text{C}$; $t_{c2} = 60^\circ \text{C}$; $t_{c3} = 80^\circ \text{C}$. Вычислим для этих температур плотность теплового потока и построим график $q = f(t_c)$. Для $t_{c1} = 40^\circ \text{C}$, $Pr_{c1} = 4,31$ рассчитаем значение коэффициента теплоотдачи и плотность теплового потока

$$Nu_1 = 0,25 \cdot (79523)^{0,6} \cdot (7,02)^{0,38} \cdot \left(\frac{7,02}{4,31} \right)^{0,25} = 0,25 \cdot 871,6 \cdot 2,1 \cdot 1,13 = 517,08;$$

$$\alpha_1 = Nu_1 \frac{\lambda_{жс}}{d} = 517,08 \frac{0,599}{0,032} = 9679 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{C}};$$

$$q_1 = \alpha_1 \cdot \Delta t_1 = 9679 \cdot (40 - 20) = 193580 \text{ Вт/м}^2.$$

Для $t_{c2} = 60^\circ \text{C}$, $Pr_{c2} = 2,98$ значение коэффициента теплоотдачи будет отличаться от α_1 только из-за изменения Pr_c . Следовательно,

$$\alpha_2 = \alpha_1 \left(\frac{Pr_{c1}}{Pr_{c2}} \right)^{0,25} \quad \text{и} \quad q_2 = q_1 \left(\frac{Pr_{c1}}{Pr_{c2}} \right)^{0,25} \frac{t_{c2} - t_{жс}}{t_{c1} - t_{жс}}.$$

$$\alpha_2 = 9679 \cdot \left(\frac{4,31}{2,98} \right)^{0,25} = 10614 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{C}} \quad \text{и} \quad q_2 = 193580 \cdot \left(\frac{4,31}{2,98} \right)^{0,25} \frac{60 - 20}{40 - 20} = 425876 \text{ Вт/м}^2.$$

$$\text{При } t_{c3} = 80^\circ \text{C}, \quad Pr_{c3} = 2,21 \quad \alpha_3 = 9679 \cdot \left(\frac{4,31}{2,21} \right)^{0,25} = 11438 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{C}}$$

$$\text{и} \quad q_2 = 193580 \cdot \left(\frac{4,31}{2,21} \right)^{0,25} \frac{80 - 20}{40 - 20} = 686283 \text{ Вт/м}^2.$$

По вычисленным значениям на графике, рис. 6.8, строим функцию $q = f(t_c)$



Рис. 6.8. Зависимость плотности теплового потока от температуры стенки

Из рис. 6.8 находим $t_c = 74^\circ \text{C}$ при $q = 60 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$. $Pr_c = 2,41$.

По найденной температуре находим коэффициент теплоотдачи

$$Nu_{жс} = Nu_1 \cdot \left(\frac{Pr_{c1}}{Pr_c} \right)^{0,25} = 517,08 \cdot \left(\frac{4,31}{2,41} \right)^{0,25} = 598;$$

$$\alpha = Nu_{жс} \frac{\lambda_{жс}}{d} = 598 \frac{0,0599}{0,032} = 11194 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}.$$

Пример 6 - 2. В воздухоподогревателе шахматный пучок труб обтекает поперечным потоком воздуха. Внешний диаметр труб в пучке $d = 32 \text{ мм}$. Поперечный шаг $s_1 = 2,5d$; продольный шаг $s_2 = 1,5d$. Средняя скорость в узком сечении пучка и средняя температура воздуха составляют соответственно $w = 9 \text{ м/с}$ и $t_{жс} = 160^\circ \text{C}$. Найти коэффициент теплоотдачи от поверхности труб к воздуху для третьего ряда пучка труб при условии, что температура поверхности труб $t_c = 500^\circ \text{C}$, а угол атаки равен $\varphi = 90^\circ$ и $\varphi = 60^\circ$.

Решение. По средней температуре воздуха находим его физические параметры $\nu_{жс} = 30,09 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\lambda_{жс} = 0,0364 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$; $Pr_{жс} = 0,682$.

При $t_c = 500^\circ \text{C}$ $Pr_c = 0,687$. Рассчитываем число Рейнольдса

$$Re_{жс} = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{9 \cdot 0,032}{30,09 \cdot 10^{-6}} = 9571.$$

Поскольку $1000 < Re_{жс} < 10^5$ применяем формулу

$$Nu_{жс} = C \cdot Re_{жс}^n \cdot Pr_{жс}^{0,33} \cdot \left(\frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25} \cdot \varepsilon_s.$$

Так как $\frac{s_1}{s_2} = \frac{2,5}{1,5} = 1,66 < 2$, то $\varepsilon_s = \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^{1/6} = (1,66)^{1/6} = 1,08$.

Для третьего ряда шахматного пучка

$$Nu_{\text{жс}} = 0,41 \cdot Re_{\text{жс}}^{0,6} \cdot Pr_{\text{жс}}^{0,33} \cdot \left(\frac{Pr_{\text{жс}}}{Pr_c} \right)^{0,25} \cdot \varepsilon_s = 0,41 \cdot (9571)^{0,6} \cdot (0,682)^{0,33} \cdot \left(\frac{0,682}{0,687} \right)^{0,25} \cdot 1,08 =$$

$$= 0,41 \cdot 245 \cdot 0,881 \cdot 0,998 \cdot 1,08 = 95,4.$$

Коэффициент теплоотдачи при $\varphi = 90^\circ$

$$\alpha = Nu_{\text{жс}} \frac{\lambda_{\text{жс}}}{d} = 95,4 \frac{0,0364}{0,032} = 108 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}$$

При обтекании пучков труб под углом атаки φ , не равным 90° , $\alpha_\varphi = \varepsilon_\varphi \cdot \alpha$, где ε_φ - поправка на угол атаки, значения которой в зависимости от φ приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

φ	90	80	70	60	50	40	30	20	10
ε_φ	1	1	0,98	0,94	0,88	0,78	0,67	0,52	0,42

При $\varphi = 60^\circ$, $\varepsilon_\varphi = 0,94$ коэффициент теплоотдачи составит

$$\alpha_{\varphi=60^\circ} = 0,94 \cdot 108 = 101,5 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}.$$

Пример 6 - 3. Трубчатый теплоуловитель бумагоделательной машины проектируется с коридорным расположением труб, $d = 38 \text{ мм}$, поперечными и продольными шагами $s_1 = s_2 = 2,5d$. Число труб в одном ряду по ходу потока $m = 16$, число рядов труб $n = 30$. Температура воздуха из зала БДМ, поступающего в теплоуловитель, $t_{\text{вх}} = 20^\circ \text{С}$, на выходе из аппарата $t_{\text{вых}} = 40^\circ \text{С}$. Температура стенки трубы составляет $t_c = 60^\circ \text{С}$. Найти длину трубок теплоуловителя, чтобы при скорости воздуха в узком сечении пучка $w = 7 \text{ м/с}$ трубки обеспечивали теплосъем $Q = 125 \text{ кВт}$.

Решение. Находим физические параметры воздуха по его средней температуре $t_{\text{жс}} = 0,5 \cdot (t_{\text{вх}} + t_{\text{вых}}) = 0,5 \cdot (20 + 40) = 30^\circ \text{С}$; $\nu_{\text{жс}} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $Pr_{\text{жс}} = 0,701$;

$$\lambda_{\text{жс}} = 0,0267 \frac{Вт}{м \cdot град}. \quad \text{Определяем число Рейнольдса}$$

$$Re_{\text{жс}} = \frac{w \cdot d}{\nu_{\text{жс}}} = \frac{7 \cdot 0,038}{16 \cdot 10^{-6}} = 16625.$$

Так как $10^3 \leq Re_{\text{жс}} \leq 10^5$, то используем для расчета следующую зависимость для труб третьего ряда коридорного пучка $Nu_{\text{жс}} = 0,26 \cdot Re_{\text{жс}}^{0,65} \cdot Pr_{\text{жс}}^{0,33} \cdot \varepsilon_s$. Поскольку для воздуха величина числа Pr меняется незначительно, то для данного диапазона изменения температур уравнение принимает следующий вид: $Nu_{\text{жс}} = 0,23 \cdot Re_{\text{жс}}^{0,65} \cdot \varepsilon_s$,

$$\text{где } \varepsilon_s = \left(\frac{s_2}{d} \right)^{-0,15} = (2,5)^{-0,15} = 0,872.$$

$$Nu_{жс} = 0,23 \cdot (16635)^{0,65} \cdot 0,872 = 111.$$

Коэффициент теплоотдачи для третьего ряда

$$\alpha_3 = Nu_{жс} \frac{\lambda_{жс}}{d} = 111 \frac{0,0267}{0,038} = 78 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}.$$

Средний коэффициент теплоотдачи коридорного пучка при $n = 30$

$$\bar{\alpha} = \alpha_3 \left(1 - \frac{0,5}{n}\right) = 78 \cdot \left(1 - \frac{0,5}{30}\right) = 76,7 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}.$$

Определяем плотность теплового потока и необходимую поверхность теплообмена

$$q = \bar{\alpha} \cdot (t_c - t_{жс}) = 76,7 \cdot (60 - 30) = 2301 \text{ Вт/м}^2,$$

$$F = \frac{Q}{q} = \frac{125 \cdot 10^3}{2301} = 54,3 \text{ м}^2.$$

Находим требуемую длину труб $\ell = \frac{F}{\pi \cdot d \cdot m \cdot n} = \frac{54,3}{3,14 \cdot 0,038 \cdot 16 \cdot 30} = 0,95 \text{ м}.$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ягов В.В. Теплообмен в однофазных средах и при фазовых превращениях [Текст]: учебное пособие для вузов / В.В. Ягов. – Издательский дом МЭИ, 2014. – 542 с.: ил....
2. Готовский М.А., Суслов В.А. Тепломассообмен в технологических установках ЦБП [Текст]: учебное пособие М.А. Готовский, В.А. Суслов / СПб ГТУ РП. СПб, 2013. Часть 3. - 120 с.: ил. 84. – ISBN 978-5-91646-038-4...
3. Суслов В.А., Антуфьев С.В. и др. Тепломассообменное оборудование ТЭС и АЭС [Текст]: учеб. пособие / В.А. Суслов, С.В. Антуфьев. СПб ГТУ РП. СПб., 2015. - 84 с: ил. 67