

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»**
Высшая школа технологии и энергетики
Кафедра промышленной теплоэнергетики

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ИНЖЕНЕРНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Практические занятия

Методические указания для студентов всех форм обучения
по направлению подготовки
13.04.01 — Теплоэнергетика и теплотехника

Составители:
В. Г. Казаков
Е. Н. Громова

Санкт-Петербург
2026

Утверждено
на заседании кафедры ПТЭ
02.04.2026 г., протокол № 9

Рецензент Н. П. Мидуков

Методические указания соответствуют программам и учебным планам дисциплины «Теория и практика инженерного исследования» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника». В указаниях представлены практические задачи для самостоятельной работы по разделам дисциплины. Приведены методики и примеры решения заданий.

Методические указания предназначены для магистров очной и заочной форм обучения.

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД в качестве
методических указаний

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 13.05.2026 г. Рег. № 5242/25

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. Метод Плакетта–Бермана	5
Задачи	9
2. Последовательный симплекс-метод	11
Задачи	16
3. Ротатабельные центральные композиционные планы	17
Задачи	21
4. Метод Бокса–Уилсона (метод крутого восхождения)	22
Задачи	26
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	27

ВВЕДЕНИЕ

В промышленном производстве, лабораторной практике возникает проблема настройки технологического процесса на оптимальный режим или математическое описание некоторой области технологии на основе эксперимента. Обеспечение решения таких задач требует выполнения ряда условий. К таким условиям относятся:

- выбор целевой функции;
- выбор варьируемых параметров, влияющих на численное значение целевой функции;
- план эксперимента, при реализации которого можно аналитически описать область существования этой функции в пределах принятых ограничений либо достигнуть оптимальное ее значение при минимальном количестве числа опытов и затрат времени.

Целевая функция. В качестве целевой функции может выступать технико-экономический критерий, термодинамический критерий, например, КПД, производительность процесса, расход пара и др.

Выбор варьируемых параметров. Выбор варьируемых параметров и их диапазон (шаг) является одним из творческих этапов исследования. Он зависит от опыта исследователя, степени проработки проблемы. При разработке новых процессов трудно определить все варьируемые параметры, влияющие на целевую функцию. Здесь могут помочь специальные методы планирования эксперимента. По этим методам мысленно задается большое количество факторов. Путем варьирования этих факторов на двух уровнях выделяются значимые и незначимые параметры. Обычно выбор значимых параметров сокращается до 3 – 5.

Обычно варьируемые параметры (факторы) задаются в кодированных координатах. Чтобы перейти от кодированных координат к натуральным значениям и наоборот, пользуются следующими соотношениями:

$$x_j = \frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_j^0}{\Delta\tilde{x}_j} \quad (1)$$

$$\text{и } \tilde{x}_j = \tilde{x}_j^0 + \Delta\tilde{x}_j \cdot x_j, \quad (2)$$

где $\tilde{x}_j^0$ – значение фактора с номером j на нулевом уровне в натуральной системе координат;

$\Delta\tilde{x}_j$ – шаг варьирования j -го фактора.

За нулевой уровень принимают численное значение параметра, близкое (по априорной оценке исследователя) к ожидаемому значению.

Шагом варьирования переменных называют отклонение параметра от нулевого уровня.

План эксперимента. План эксперимента – алгоритм, по которому проводится эксперимент. Он задается таблицей (матрицей) из кодированных выбранных факторов. Перевод от кодированных значений факторов в натуральные значения производится по формулам (1) и (2).

1. Метод Плакетта–Бермана

При выборе варьируемых переменных часто встает проблема определения факторов и их количества, влияющих на функцию цели. В этих условиях неопределенности предполагают возможные переменные, которые могут оказывать такое влияние. При этом, если использовать полный факторный план, то необходимо выполнить большое количество опытов. Для проведения таких опытов потребуется много времени и затрат средств. Например, для 16 факторов, варьируя переменные на двух уровнях, необходимо провести $2^{16} = 65536$ опытов. Плакетт и Берман предложили планы эксперимента, при которых оказалось возможным сократить число опытов до числа переменных плюс один.

Таблица 1. Планы Плакетта-Бермана

[illegible]

В таблице 1 приведены первые строки матриц планов, содержащих от 8 до 72 опытов. Факторы варьируются на уровнях +1 (+) и -1 (-). Полные матрицы планов конструируются следующим образом: исходя из заданной первой строки, вторую и последующие строки получают путем сдвига всех элементов предыдущей строки на одну позицию вправо (или влево) и перестановки последнего (первого) элемента на первую (последнюю) позицию. Этот процесс повторяется $(N-2)$ раз.

Последняя строка плана состоит только из элементов -1(-). Матрица плана имеет размерность $N(N-1)$.

Пример построения плана Плакетта–Бермана

Чтобы получить план Плакетта–Бермана для $N=16$, выбирается первая строка плана и применяется сформулированное правило (табл. 2).

Таблица 2. Плакетта–Бермана для $N=16$

N	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
1	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-
2	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+
3	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+
4	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+
5	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+
6	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-
7	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+
8	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-
9	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+
10	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+
11	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-
12	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-
13	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+
14	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-
15	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-
16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Пример. Обработка результатов эксперимента

После реализации плана эксперимента производится обработка его результатов, которая состоит из следующих операций:

1. Расчет эффектов отдельных факторов.

Расчет коэффициентов $\hat{a}_i$ проводится путем вычисления разности между суммами значений целевой функции для фактора x_i на уровнях +1 и -1, поделенной на $N/4$.

$$\hat{a}_i = \frac{\sum_{j=1}^N y^j \cdot x_i^j}{N/4}. \quad (3)$$

Из матрицы плана следует, что оценки эффектов могут быть рассчитаны независимо друг от друга (свойство ортогональности).

2. Проверка значимости параметров

Для выявления существенных факторов используется t -критерий и проверяется условие

$$|\hat{a}_l| \geq t_{кр} \cdot s_l, \quad (4)$$

где $t_{кр}$ – критическое значение температуры распределения для уровня значимости α и φ степеней свободы; s_l – оценка дисперсии коэффициента $\hat{a}_l$. Дисперсия ошибок наблюдений оценивается с помощью специальных экспериментов, например, дублированием наблюдений или введением в план фиктивных факторов от x_{i+1} до x_{N+1} . Если, например, план строится для анализа 12 факторов, то можно добавить к нему 3 фиктивных фактора и применить план типа $N = 16$.

Эффекты этих фиктивных переменных будут равны нулю лишь в том случае, если не имеется воздействия на целевую функцию и измерения являются абсолютно точными. Поскольку на практике это обычно не выполняется, их можно использовать для расчета оценки дисперсии наблюдений.

Обозначим

$$s_l^2 = 4 \cdot k \cdot \frac{(\widehat{a_{l+1}}^2 + \widehat{a_{l+2}}^2 + \dots + \widehat{a_{N-1}}^2)}{(4 \cdot k - l - 1)}. \quad (5)$$

Эта величина является по существу остаточной дисперсией, которая используется в качестве оценки дисперсии ошибок наблюдений

$$s_l = \sqrt{s_l^2}. \quad (6)$$

Уровень значимости обычно выбирают равным $\alpha = 0,005$, и из таблицы t находят значение $t_{0,05}[4k - l - 1]$.

Дисперсия оценок параметров равна

$$s_i^2 = \frac{s_l^2}{4k} \quad (7)$$

Значимость параметров проверяется обычным способом путем проверки неравенства

$$|\hat{a}_l| \geq t_{кр} \cdot s_l. \quad (8)$$

Пусть имеем 10 варьируемых параметров. Выбираем план эксперимента Плакетта–Бермана для 16 опытов. 5 факторов принимаем как фиктивные с целью установления дисперсии ошибок при определении коэффициентов $\hat{a}_l$. Фиктивными переменными принимаем $x_9, x_{12} - x_{15}$. В результате проведения опытов (табл. 3) получены некие функции цели:

- выполнить обработку эксперимента и определить значимые факторы;
- коэффициенты a_i вычислены по формуле (3) и приведены в таблице 4;
- далее по формуле (5) определяем остаточную дисперсию.

$$s_l^2 = 16 \cdot \frac{41,4^2 + 48^2 + 17,5^2 + 16,5^2 + 21^2}{10} = 8059.$$

Вычисляем дисперсию ошибок наблюдений по формуле (7).

$$s_i^2 = \frac{s_l^2}{4k} = \frac{8059}{16} = 503,7$$

$$\text{и } s_i \sqrt{503,7} = 22,44.$$

По таблицам при $t_{0,05}[4k - l - 1]$ определяем критическое значение $t_{кр}=2,228$.

$$|\hat{a}_l| \geq t_{кр} \cdot s_i, \text{ т. е. } |\hat{a}_l| \geq 2,228 \cdot 22,44 = 50.$$

Таблица 3. Результаты опытов

N	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	f
1	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	545
2	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	413
3	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	381
4	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	347
5	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	478
6	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	414
7	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	334
8	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	338
9	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	484
10	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	382
11	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	413
12	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	382
13	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	391
14	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	382
15	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	351
16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	301

Следующим этапом производим сравнение полученных оценок a_i с числом 50. Все факторы, численно равные 50, будут значимыми, меньше 50 – незначимыми и отвергаются как не влияющие на функцию цели.

В таблице:

$x_1 - x_{15}$ – варьируемые параметры;

a_i – коэффициент;

Знач. – значимость $|a_i| \geq 50$ при $\alpha=0,95$.

Анализ результатов таблицы показывает, что из всех 10 варьируемых параметров для оказания воздействия на функцию цели значимым оказались только 4: x_1 , x_4 , x_8 и x_{10} .

Таблица 4. Значения коэффициентов α_i

№	$\hat{a}_i$	знач.
x_1	68	да
x_2	42	нет
x_3	0	нет
x_4	129	да
x_5	43	нет
x_6	4	нет
x_7	20	нет
x_8	155	да
x_9	41	нет
x_{10}	67	да
x_{11}	0.5	нет
x_{12}	48	нет
x_{13}	18	нет
x_{14}	17	нет
x_{15}	21	нет

Задачи

Задача 1.1. Оптимизация работы котла

При наладке парового котла предполагается, что на его КПД (целевая функция, %) могут влиять 10 факторов: коэффициент избытка воздуха, температура питательной воды, температура уходящих газов, толщина слоя шлака, влажность топлива, зольность топлива, тонкость помола угля, нагрузка котла, присосы воздуха в газоход, температура воздуха в цехе. Используя метод Плакетта–Бермана, составьте план эксперимента для выявления 3-5 наиболее значимых факторов. Выберите подходящую размерность плана (N) из таблицы 1 пособия и опишите процедуру построения матрицы планирования.

Задача 1.2. Анализ работы теплообменника

На эффективность работы кожухотрубного теплообменника влияет 9 технологических факторов. Исследователь решил использовать план Плакетта–Бермана с 12 опытами, добавив 2 фиктивные переменные. В результате

эксперимента были получены значения эффектов факторов (коэффициентов a_i). Оценка дисперсии ошибки наблюдений, рассчитанная по фиктивным переменным, составила $s^2=14,5$. Определите критическое значение для проверки значимости факторов при уровне значимости $\alpha=0,05$. Поясните, какие факторы будут считаться значимыми, если известно, что табличное значение критерия Стьюдента $t_{кр} = 2,26$.

Задача 1.3. Модернизация паровой турбины

При модернизации паровой турбины рассматривается 8 факторов, потенциально влияющих на удельный расход пара (целевая функция, т/МВт·ч). Был реализован план Плакетта–Бермана для $N=12$. В таблице 5 представлены рассчитанные эффекты факторов (a_i) и оценка дисперсии коэффициента S_i . Проведите проверку значимости факторов, используя критерий Стьюдента ($t_{кр} = 2,23$ для выбранного уровня значимости). Сделайте вывод о том, какие факторы следует исключить из дальнейшего рассмотрения.

Таблица 5

Фактор	Эффект (a_i)	Оценка дисперсии (S_i)
X_1	5,2	2,1
X_2	1,8	2,1
X_3	7,5	2,1
X_4	0,9	2,1
X_5	4,8	2,1
X_6	2,1	2,1
X_7	6,3	2,1
X_8	0,5	2,1
X_9	1,2	2,1
X_{10}	1,9	2,1
X_{11}	0,3	2,1
X_{12}	0,8	2,1

Задача 1.4. Влияние режимов горения на выбросы NO_x

На концентрацию оксидов азота (NO_x) в уходящих газах газовой горелки, по мнению технолога, влияет 15 различных параметров (температура факела, скорость подачи воздуха, состав топлива и т. д.). Бюджет проекта позволяет провести не более 20 опытов. Предложите план отсеивающего эксперимента из пособия. Опишите, как будет оцениваться дисперсия ошибки наблюдений, если все 15 параметров являются реальными, и свободных (фиктивных) переменных не остается.

Задача 1.5. Энергоэффективность здания

Исследуется влияние 10 архитектурно-строительных и инженерных факторов на энергопотребление здания (кВт·ч/м² в год). Был выбран план

Плакетта–Бермана для $N=16$ с 5 фиктивными факторами. В ходе обработки результатов получены эффекты для 10 реальных факторов и суммы квадратов эффектов для 5 фиктивных, равные 120, 95, 110, 105 и 100. Рассчитайте остаточную дисперсию (s^2) по формуле (5), используя ее для оценки дисперсии ошибки наблюдений. Сделайте вывод, для чего используется эта величина.

2. Последовательный симплекс-метод

Этот метод относится к методам экспериментальной оптимизации. Он широко используется в производственной и лабораторной практике. Выбор этого метода планирования эксперимента определяется отсутствием требований к необходимости постановки большого количества опытов (план ненасыщенный) для составления исходной матрицы, а также при определении движения к оптимуму, что весьма важно при большом количестве варьируемых переменных. Кроме того, ошибка в определении целевой функции в этом методе не уводит далеко от стационарной области – потребуется лишь сделать несколько добавочных шагов.

Методика по определению целевой функции состоит в следующем.

1. Составляют матрицу планирования эксперимента из условия получения ее целочисленной или почти целочисленной. Существует много методик по составлению матрицы планирования. Примем для исследований почти целочисленную матрицу (табл. 6).

Таблица 6. Матрица планирования эксперимента

-1	+1	+1	+1	+1
+1	-1	+1	+1	+1
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
+1	+1	+1	+1	-1
δ_k	δ_k	δ_k	δ_k	δ_k

$$\delta_k = 1 - \frac{2}{n} \cdot (\sqrt{n+1} + 1), \quad (9)$$

где n – число варьируемых переменных.

2. Производят расчет координат начального симплекса по методике, рассмотренной выше, и определяют целевую функцию для каждого опыта.

3. Отбрасывают точки плана с наименьшим численным значением целевой функции и строят новый симплекс. Координаты новой точки симплекса x^* рассчитывают из уравнения (в векторной записи):

$$x^* = \frac{2}{n} (x^1 + x^2 + \dots x^{j+1} + x^{j-1} + \dots x^{n+1}) - x' = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} x' - \left[\frac{2}{n} + 1 \right] \cdot x', \quad (10)$$

где j – номер вершины исходного симплекса с наименьшим значением целевой функции.

Для $\widehat{y}^*$ (прогнозируемое значение целевой функции в новой точке):

$$\widehat{y}^* = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \widehat{y}' - \left[\frac{2}{n} + 1 \right] \cdot \widehat{y}'. \quad (11)$$

4. Проводят эксперимент в новой точке x^* и получают соответствующее значение $\widehat{y}^*$ целевой величины.

5. Последовательное перемещение симплекса, в процессе которого на каждом шаге происходит отбрасывание вершины симплекса с наихудшим значением целевой величины и реализация опыта в новой вершине. При этом направление перемещения центра симплекса колеблется около направления градиента.

6. Если при перемещении симплекса на протяжении $n+1$ шагов та или иная вершина сохраняет свое положение, то симплекс совершает оборот вокруг этой вершины. Это означает, что в данной точке находится оптимум целевой функции либо значение целевой функции в этой вершине определено неверно. Чтобы уточнить, какая ситуация имеет место, в этой точке вновь проводится эксперимент и в дальнейшем работают с новым значением целевой величины.

7. Если оказывается, что целевая величина в новой вершине симплекса меньше, чем в остальных вершинах, в соответствии с логикой движения следует возвратиться к предыдущему симплексу. Чтобы предотвратить «зацикливание», в качестве отбрасываемой выбирают вершину с наименьшей (после наихудшей вершины симплекса) величиной целевой функции.

8. Если новая вершина выходит за пределы допустимой области планирования, следует поступать как в п. 7.

9. При достижении области оптимума размер симплекса уменьшают (как правило, на $\frac{1}{4}$ часть начальной величины).

10. Оптимум считается достигнутым, если одна и та же точка входит в последовательные симплексы N раз, где

$$N = 1,65 \cdot n + 0,005 \cdot n^2; \quad (12)$$

$$2 \leq n \leq 30.$$

Выражение получено эмпирически. Другое достижение оптимума может быть получено из выражения

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{(\tilde{y}^i - \widetilde{y}_m)^2}{n}} \leq \varepsilon, \quad (13)$$

где ε – малая величина, $\widetilde{y}_m$ – среднее значение целевых величин в вершинах симплекса.

Пример.

В многочисленных задачах обработки металлов резанием постоянно возникает проблема выбора оптимальных режимов. Объектом исследования являлся процесс сверления сверлами диаметром 0,5 мм на станке. Обработываемый материал – сталь 45. Отклик – стойкость сверла в минутах. Варьировались два фактора: число оборотов в минуту $\widetilde{x}_1$ и подача в мм на оборот $\widetilde{x}_2$. Из технологических соображений были выбраны следующие нулевые уровни и шаги варьирования факторов:

$$\widetilde{x}_1^0 = 3050, \Delta\widetilde{x}_1 = 1000, \widetilde{x}_2^0 = 0,0036, \Delta\widetilde{x}_2 = 0,0006.$$

Затем был выбран исходный симплекс, матрица представлена в таблице 7.

Таблица 7. Матрица эксперимента

№ опыта	x_1	x_2	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$
1	-1	-1	2050	0,003
2	+1	-1	4050	0,003
3	0	+0,73	3050	0,004

Построенное соответствие дает переход из кодированной системы координат в натуральную.

Результаты опытов в выбранном режиме записываются в специальную таблицу (табл. 8), которая служит рабочим листком для вычисления координат отраженной точки.

Рабочий листок стандартизован для числа факторов от 2 до 7, при необходимости его можно расширить. При меньшем числе факторов используется часть листка. Вычисления удобно вести с помощью полоски бумаги, закрывающей строку, соответствующую отбрасываемой вершине. Тогда все оставшиеся числа в столбце надо сложить в строке (1). В рассматриваемом примере наихудшая вершина № 1, следовательно, закрывается первая строка. Вычисления ведутся для натуральных координат. Средний отклик используется для оценки близости к оптимуму.

Таблица 8. Рабочий листок ПСМ (пример)

	№ опыта	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$				
Координаты точек симплекса	1	1\2050	-1 0,003				13,7
	2	1\4050	-1 0,003				21,5
	3	1\3050	0,73 0,004				32,6
	4						
	5						
	6						
	7						
	8						
Сумма оставленных координат (1)		7100	0,007				
Удвоенное среднее (2)=2·(1)/r		7100	0,007				
Координаты отбрасываемой вершины (3)		2050	0,003				
Координаты новой точки (2) - (3)		5050	0,004				
				Сумма откликов			67,8
				Средний отклик			22,6

Натуральные координаты нового симплекса (№ 2) и результаты опытов выглядят следующим образом:

Таблица 9.

№ опыта	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y
2	4050	0,003	21,5
3	3050	0,004	32,6
4	5050	0,004	25,9

Теперь отбрасывается вершина 2. Чтобы найти координаты новой вершины 5, опять требуется рабочий листок. Итоговые результаты выглядят следующим образом:

Таблица 10.

	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}$	
1	8100	0,008	
2	8200	0,008	
3	4050	0,003	
4	4050	0,005	Вершина 5

Таким образом, новый симплекс (№ 3) и результаты:

Таблица 11.

№ опыта	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y
3	3050	0,004	32,6
4	5050	0,004	25,9
5	4050	0,005	19,2

Возникло колебание, точка 5 наихудшая в новом симплексе. Более того, отражение точки 4 во втором симплексе ведет в точку 1. Следовательно, либо оптимум достигнут, либо в опытах есть ошибка. Для выяснения последняя неопробованная вершина 3 отражается в симплексе № 2:

Таблица 12.

	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	
1	9100	0,007	
2	9100	0,007	
3	3050	0,004	
4	6050	0,003	Вершина 6

Симплекс № 4 выглядит так:

Таблица 13.

№ опыта	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y
2	4050	0,003	22,5
4	5050	0,004	25,9
6	6050	0,003	26,7

Наблюдается небольшое увеличение устойчивости. Отражение наихудшей вершины (№ 2):

Таблица 14.

	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	
1	11000	0,007	
2	11100	0,007	
3	4050	0,003	
4	7050	0,004	Вершина 7

Симплекс № 5:

Таблица 15.

№ опыта	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y
4	5050	0,004	25,9
6	6050	0,003	26,6
7	7050	0,004	62,0

Такой результат можно считать удовлетворительным. Полученные результаты имеют важное практическое значение.

Задачи

Задача 2.1. Оптимизация режима работы теплового насоса

Требуется найти оптимальные параметры работы теплового насоса «воздух-вода», обеспечивающие максимальный коэффициент преобразования (COP). Варьируемые факторы: температура наружного воздуха (x_1 , °C) и температура воды на входе в конденсатор (x_2 , °C). Начальный симплекс задан точками: № 1 (0, -1), № 2 (+1, -1), № 3 (0, +0,73) в кодированных координатах. Значения COP в этих точках: 3.5, 3.8, 4.2 соответственно. Выполните один шаг симплекс-метода (отразите наихудшую вершину). Рассчитайте координаты новой вершины (точки № 4) и спрогнозируйте для нее значение COP по формуле (11).

Задача 2.2. Настройка газотурбинной установки (ГТУ)

Для ГТУ ищется максимум электрической мощности (N , МВт). Влияющие факторы: частота вращения вала (n , об/мин) и температура газов перед турбиной (T , °C). Исходный симплекс (в натуральных значениях): A : ($n=5000$, $T=800$, $N=25$), B : ($n=5500$, $T=800$, $N=27$), C : ($n=5250$, $T=850$, $N=29$). Точка В оказалась наихудшей. Используя рабочий листок (по аналогии с табл. 8 пособия), рассчитайте натуральные координаты новой вершины D . Какой эксперимент нужно провести следующим?

Задача 2.3. Минимизация потерь теплоты в теплотрассе

Исследуется процесс теплоизоляции трубопровода. Цель – минимизировать потери теплоты (q , Вт/м). Факторы: толщина изоляции (δ , мм) и коэффициент теплопроводности материала (λ , Вт/(м·К)). Начальный симплекс задан. После нескольких шагов симплекс начал вращаться вокруг одной из вершин, и значение потерь теплоты в ней минимальное. Каковы ваши действия по алгоритму (см. п. 6-7 пособия)? Что может означать такая ситуация?

Задача 2.4. Оптимизация состава топливной смеси

На теплоэлектростанции сжигается смесь угля и природного газа. Цель – минимизировать стоимость тонны условного топлива (руб./т у.т.). Варьируются два фактора: доля газа в смеси (X_1 , %) и температура дутья (X_2 , °С). После серии шагов симплекс-метода координаты одной из новых вершин вышли за допустимые технологические пределы (например, доля газа стала > 100 % или < 0 %). Как следует поступить экспериментатору согласно методологии (п.8 пособия)?

Задача 2.5. Определение критерия останова в симплекс-методе

В задаче оптимизации работы парового котла с тремя варьируемыми факторами ($n=3$) симплекс-методом было выполнено 15 шагов. Координаты вершин симплекса перестали существенно меняться, и одна и та же точка входит в последовательные симплексы уже 5 раз. Используя формулу (12) из пособия $N = 1,65 \cdot n + 0,005 \cdot n^2$, определите, достаточно ли 5 повторений для принятия решения о достижении оптимума при $n=3$. Является ли это условие достаточным? Какое еще условие можно проверить (формула 13)?

3. Ротатабельные центральные композиционные планы

Рассматривая недостатки симплекс-метода, мы отмечали его малую информативность по области оптимума, а также влияние отдельных варьируемых факторов на целевую функцию. Для того, чтобы получить математическую модель процесса, оценить значимость каждого исследуемого фактора на целевую функцию, часто процесс описывают регрессионным уравнением первого, второго или третьего порядка. Иногда бывает целесообразно комплексное проведение исследований: вначале выявить незначимые факторы по методу Плакетта–Бермана, затем с оставшимися варьируемыми переменными по симплекс-методу найти оптимальные значения этих переменных и, наконец, провести эксперимент с этими переменными по ротатабельному центральному композиционному плану. После проведения ротатабельного композиционного плана можно исследовать регрессионное уравнение аналитическими методами на оптимум целевой функции и тем самым проверить достигнутый оптимум в последовательном симплекс-методе. При таком подходе часто оказывается возможным существенно сократить число опытов.

Матрица этого плана состоит из ядра плана, звездных точек и центра плана. В качестве ядра плана может быть использован полный 2^n факторный план. Величина плеча α для ротatableльного плана второго порядка вычисляется по формуле:

$$\alpha = 2^{\frac{n}{4}},$$

где n – число варьируемых переменных.

Таблица 16. Параметры центральных ротatableльных композиционных планов

Размерность	Ядро плана	Число звездных точек	n_0	N	α
1	2^2	4	5	13	1,414
2	2^3	6	6	20	1,682
3	2^4	8	7	31	2,000
5	2^5	10	10	52	2,378
6	2^6	12	15	91	2,828
7	2^7	14	21	163	3,333

В таблице 16 приведены значения числа опытов n_0 точек, плеча α в центре плана, звездных точек и общего числа точек N для ротatableльных униформ-планов второго порядка. В таблице 17 приведена матрица ротatableльного центрального композиционного плана для $n=3$. Обратим внимание на то, что центральная точка фигурирует n_0 раз. Это значит, что при вычислении оценок коэффициентов мы будем использовать результат каждого параллельного измерения в центре плана, а не их среднее значение. Заметим, что параллельные опыты в центре плана позволяют рассчитать оценку дисперсии ошибок и наблюдений. Обработка экспериментальных данных и получение регрессионного уравнения ведут по специальной программе на ПК.

Пример

Определить влияние общего температурного напора и числа ступеней выпаривания концентрирующей сульфатной выпарной установки на себестоимость выпаривания. Получить математическую модель в виде регрессионного уравнения и выполнить аналитическую оптимизацию параметров с целью получения минимальной себестоимости выпаривания.

Уровни варьирования факторов приведены в таблице 17.

Таблица 17. Уровни варьирования факторов

Факторы	Кодовое обозначение	$x_1=-1,414$ (звездные точки)	$x_1=-1$ (нижний уровень)	$x_1=0$ (основной уровень)	$x_1=+1$ (верхний уровень)	$x_1=+1,414$ (звездные точки)
Общий температурный напор	x_1	88,7	89,5	91,5	93,5	94,3
Число ступеней выпаривания	x_2	5	6	8	10	11

Матрица планируемого эксперимента и результаты себестоимости процесса выпаривания руб./ч в табл. 10.

Таблица 18. Матрица планирования эксперимента и результаты расчета себестоимости выпаривания

Ядро плана	№ опыта	x_1	x_2	C
Ядро плана	1	-1	-1	5332,537
	2	+1	-1	5364,498
	3	-1	+1	4786,474
	4	+1	+1	4690,78
Звездные точки	5	-1,414	0	4715,817
	6	+1,414	0	4669,805
	7	0	-1,414	6320,449
	8	0	+1,414	5065,067
Центр плана	9	0	0	4689,798
	10	0	0	4689,798
	11	0	0	4689,798
	12	0	0	4689,798
	13	0	0	4689,798

Переход от кодированных значений к переменным осуществим по формулам

$$\hat{x}_i^n = \frac{x_i^n - x_i^0}{\Delta x_i},$$

тогда

$$x_i^n = \hat{x}_i^n \cdot \Delta x_i + x_i^0,$$

где i – номер варьируемой переменной;

n – номер опыта;

$\hat{x}_i^n$ – кодированное значение переменной;

x_i^n – натуральное значение переменной;

x_i^0 – натуральное значение переменной на нулевом уровне;

Δx_i – шаг варьирования переменных.

Значения нулевого уровня для варьируемых переменных определим из практических данных. Пусть имеем:

общий температурный напор в выпарной батарее – 91,5 град.

количество ступеней выпаривания – 8.

Таким образом, с учетом принятия шага для варьирования полезного температурного напора 2 град., для числа ступеней выпаривания – 2 ступени, будем иметь:

$$x_1^0 = 91,5 \text{ град.}; \Delta x_1 = 2 \text{ град.}; x_1^{+1,414} = 94,3 \text{ град.}; x_1^{-1,414} = 88,7 \text{ град.};$$

$$x_2^0 = 8 \text{ град.}; \Delta x_2 = 2 \text{ град.}; x_2^{+1,414} = 12,8 \text{ град.}; x_2^{-1,414} = 5,2 \text{ град.};$$

В натуральных значениях параметров матрицу планирования эксперимента можно представить в виде таблицы (табл. 19).

Подставив в таблицу 19 численные значения стоимости выпаривания, можно обработать выражения для стоимости выпаривания функцией двух переменных (общий температурный напор по выпарной батарее и число ступеней выпаривания) полиномом второй степени.

Этот полином имеет вид:

$$C = 4689,8 - 16,1005 \cdot x_1 - 374,395 \cdot x_2 - 35,7966 \cdot x_1^2 - 31,9137 \cdot x_1 \cdot x_2 + 464,177 \cdot x_2^2.$$

Таблица 19. Матрица планирования эксперимента в натуральных значениях параметров

Ядро плана	№ опыта	x_1	x_2	C
Ядро плана	1	89,5	6	5332,537
	2	93,5	6	5364,498
	3	89,5	10	4786,474
	4	93,5	10	4690,78
Звездные точки	5	88,672	8	4715,817
	6	94,328	8	4669,805
	7	91,5	5,2 (5)	6320,449
	8	91,5	12,828 (13)	5065,067
Центр плана	9	91,5	8	4689,798

Значения критерия Фишера для модели $F=1$ при критических значениях $F_{кр}(0,01)=16,7$; $F_{кр}(0,05)=6,59$. Отсюда следует, что математическая модель адекватна.

Анализ полученной математической модели показывает, что на эффект себестоимости процесса выпаривания в большей степени влияет число ступеней

выпаривания и в меньшей степени – общий температурный напор. Так, коэффициенты как при линейных, так и квадратичных членах при числе ступеней выпаривания существенно выше, чем при общем температурном напоре.

Вычислив частные производные и приравняв их к нулю, получим два уравнения с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial x_1} &= -16,1005 - 71,5932 \cdot x_1 - 31,9137 \cdot x_2; \\ \frac{\partial C}{\partial x_2} &= -374,395 - 31,9137 \cdot x_1 + 928,354 \cdot x_2.\end{aligned}$$

Решив уравнения относительно x_1 и x_2 найдем значения для оптимизируемых переменных.

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} -16,1005 - 71,5932 \cdot \widetilde{x}_1 - 31,9137 \cdot \widetilde{x}_2 = 0 \\ -374,395 - 31,9137 \cdot \widetilde{x}_1 + 928,354 \cdot \widetilde{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Решение системы уравнений позволяет получить:

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_1 &= -0,39 \\ \widetilde{x}_2 &= 0,38\end{aligned}$$

Численные значения этих параметров соответствуют для числа ступеней выпаривания 8,84; для общей полезной разности температур 90,72 градусов. Принимаем число ступеней выпаривания $n = 9$ и полезную разность температур $\Delta t = 9$ град.

Задачи

Задача 3.1. Моделирование процесса горения

Для изучения процесса горения в топке котла построена математическая модель зависимости температуры факела (Y , °C) от двух факторов: расхода топлива (X_1 , кг/с) и расхода воздуха (X_2 , м³/с). Исследователь планирует использовать РЦКП для $n=2$. Используя данные таблицы 9 пособия, определите:

1. Тип ядра плана.
 2. Количество звездных точек.
 3. Величину «звездного плеча» (α).
 4. Общее количество опытов (N), если в центре планируется 5 опытов (n_0).
- Составьте структуру матрицы планирования в кодированных переменных.

Задача 3.2. Анализ работы конденсационной установки

По результатам РЦКП для двух факторов (температура охлаждающей воды и ее расход) было получено уравнение регрессии второго порядка для давления в конденсаторе (P , кПа):

$$P = 4,5 - 0,3 \cdot x_1 - 0,8 \cdot x_2 + 0,1 \cdot x_1^2 + 0,15 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0,4 \cdot x_2^2.$$

Проведите аналитическую оптимизацию (как в примере пособия). Найдите координаты стационарной точки (x_1, x_2) , решив систему частных производных. Определите характер экстремума (минимум или максимум) в этой точке.

Задача 3.3. Оценка адекватности модели

В задаче 3.1 после реализации РЦКП была получена математическая модель. Дисперсия адекватности ($S_{ад}^2$) составила 12,5, а дисперсия воспроизводимости ($S_{воспр}^2$), рассчитанная по параллельным опытам в центре плана, равна 5,2. Рассчитайте расчетное значение критерия Фишера ($F_{расч}$) и сравните его с критическим значением $F_{кр}(0,05)=4,5$ для данных условий. Является ли модель адекватной? Ответ обоснуйте.

Задача 3.4. Выбор плана для многофакторного эксперимента

Необходимо построить квадратичную модель процесса выпаривания, на который влияет 5 независимых факторов. Оцените трудоемкость эксперимента, рассчитав общее количество опытов N для РЦКП, используя данные таблицы 9 для $n=5$. Сравните это число с количеством опытов в полном факторном эксперименте. Какой вывод можно сделать об эффективности РЦКП?

Задача 3.5. Переход от кодированных значений к натуральным

В примере пособия (табл. 11 – 12) для выпарной установки использовался РЦКП с факторами: общий температурный напор (x_1) и число ступеней (x_2). Для опыта № 5 (звездная точка) в кодированных переменных заданы значения $x_1 = -1,414$, $x_2 = 0$. Используя данные об уровнях варьирования из таблицы 9 ($x_1^0 = 91,5$, $\Delta x_1 = 2$; $x_2^0 = 8$, $\Delta x_2 = 2$), подтвердите расчетом, что натуральные значения для этого опыта составят $x_1 = 88,7$ °С, $x_2 = 8$. Восстановите натуральные значения для опыта №8 ($x_1 = 0$, $x_2 = +1,414$).

4. Метод Бокса–Уилсона (метод крутого восхождения)

Стратегия метода Бокса–Уилсона при исследовании поверхности отклика с целью нахождения экстремума состоит в следующем. На основе малой серии опытов находится локальное описание поверхности отклика в некоторой исходной области с помощью модели линейного вида. В центре области рассчитывается линейное приближение градиента, и в направлении градиента, т. е. в направлении наискорейшего подъема (крутом восхождении), проводятся опыты до достижения стационарной области, в которой расположен экстремум. Если найденное линейное приближение градиента для центра области существенно отличается от значения градиента в некоторой точке по направлению движения, то можно найти новое описание поверхности отклика с помощью полиномов первого порядка в окрестности этой точки и рассчитать новое значение градиента. В стационарной области линейная модель оказывается уже не адекватной, и для описания поверхности отклика в этой области, как правило, используются полиномы второй и даже третьей степени. В

стационарной области требуется провести большее количество экспериментов, так как здесь необходимо получить более точное описание.

Если модель линейная, т. е.

$$y = a_0x_0 + a_1x_1 + \dots a_nx_n,$$

компоненты градиента и нормированного градиента полученной линейной модели зависят от выбора основного уровня и интервалов варьирования переменных.

Необходимо стремиться выбирать интервалы варьирования, чтобы величины коэффициентов (в случае их значимости) имели бы одинаковый порядок. В этом случае применение метода крутого восхождения является наиболее эффективным.

Метод Бокса–Уилсона состоит из следующих шагов:

Построение линейной модели. Предполагается, что эксперимент начинается с точки, достаточно удаленной от оптимума (или так называемой стационарной области); поэтому для описания поверхности отклика в окрестности начальной точки можно использовать линейную модель. С помощью факторного планирования можно найти точки проведения наблюдений и рассчитать оценки коэффициентов. Статистический анализ результатов завершает этот этап.

Пошаговое улучшение величины целевой функции. Чтобы осуществить движение в направлении оптимума, необходимо рассчитать направление градиента и определить величину шага до следующего опыта. Координаты 1-й точки наблюдения по направлению градиента находятся по формуле:

$$x_i^l = x_i^{l-1} + \lambda \check{a}_i, \quad l = 1(1)L,$$

где $\check{a}_i$ – оценка i -го коэффициента. Здесь и далее λ – нормированная величина шага движения в направлении градиента. Кроме того, через x_i обозначены нормированные значения факторов, а через x_i^* – значения факторов в натуральных единицах.

Так как градиент всегда проходит через центр плана, $x_i^0 = 0$, то

$$x_i^l = l \lambda \check{a}_i,$$

где λ – выбранная величина нормированного шага. При выборе величины шага имеют значения, близкие к тем, которые используются при выборе интервала варьирования. Величину шага для k -го фактора λ_k выбирают из физических соображений (целесообразно, чтобы этим фактором была переменная, в наибольшей степени влияющая на целевую функцию), выражая ее в натуральных единицах (°C, секунды, концентрация и т. д.), затем рассчитывают

$$\lambda = \frac{\lambda_k}{\Delta_k |a_k|},$$

где Δ_k – интервал варьирования $\Delta_k = 1/2(x_{kmax} - x_{kmin})$.

Для определения величины шага λ_i по остальным переменным в натуральных единицах используется следующее соотношение:

$$\lambda_i = \lambda |a_i| \Delta_i,$$

При этом получается, что величины шагов λ_i всегда соотносятся друг с другом так же, как модули величин $a_i \Delta_i$, т. е.

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n = |a_1 \lambda_1| : |a_2 \lambda_2| : \dots : |a_n \lambda_n|.$$

Важную роль в методе крутого восхождения играют «мысленные» эксперименты. Мысленным экспериментом называют расчет выходной величины по модели в точках, расположенных в направлении градиента. На основе этих расчетов исследуется поведение поверхности отклика в направлении градиента.

Если модель адекватна, то реализацию мысленных экспериментов начинают обычно с точки, лежащей вне области, ограниченной точками начального плана. В примере это опыт под номером 7. Величина выходной переменной, рассчитанная в этой точке с помощью модели, приведена в таблице 20. При реализации опытов в направлении градиента могут быть использованы две различные стратегии: в первом случае все выбранные для реализации опыты проводятся одновременно, во втором – последовательно по некоторой программе. Одновременную реализацию всех опытов проводят обычно тогда, когда исследуемый процесс подвержен временному дрейфу, а реализация каждого опыта не требует больших временных или материальных затрат. В случае, когда постановка опытов связана с большими временными или материальными затратами, предпочтительнее последовательная стратегия.

Пример

В таблице 20 для двумерного случая указаны условия проведения эксперимента, план эксперимента (типа 2^2) и результаты наблюдений, полученные путем вычисления среднего по двум опытам в каждой точке плана. Требуется рассчитать величину шага и координаты дальнейших опытов в направлении крутого восхождения, приняв величину шага по переменной, x_2^* , равной 0,5. Результаты расчетов приводятся в нижней части таблицы 20. В таблице шаг указан со знаком, определяющим направление изменения соответствующего фактора.

Здесь через x_i^* обозначены факторы в натуральных единицах.

Таблица 20. План и результаты эксперимента

Переменные		x_1^*	x_2^*	$\bar{y}$
Основной уровень		1,5	7	
Интервал варьирования		0,5	1	
Верхний уровень		2	8	
Нижний уровень		1	6	
Нормированные значения факторов (переменных)		x_1	x_2	
Опыты:				
	1	-1	-1	95
	2	1	-1	90
	3	-1	1	85
	4	1	1	82
$\hat{a}_i \hat{a}_0 = 88,0$		-2	-4,5	
$\hat{a}_i$ x интервал варьирования		-1	-4,5	
Шаг при изменении x_2^* на 0,5		-0,011	-0,5	
Округленная величина шага		-0,1	-0,5	
Опыты в направлении крутого восхождения		x_1^*	x_2^*	$\hat{y}$
	5	1,4	6,5	
	6	1,3	6	
	7	1,2	5,5	95
	8	1,1	5	98,6
	9	1	4,5	

Пояснения к таблице примера

После выполнения первичной матрицы планирования эксперимента определяем линейное регрессионное уравнение:

$$y = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots a_n x_n.$$

Находим a_0 как среднее (по модулю) значение целевых функций $|y|$. Тогда

$$a_0 = (95,0+90,0+85,0+82,0)/4=88,$$

$$a_1 = (-95,0+90,0-85,0+82,0)/4=-2,$$

$$a_2 = (-95,0-90,0+85,0+82,0)/4= -4,5.$$

Уравнение имеет вид:

$$y = 88 - 2x_1 - 4,5x_2 .$$

С учетом изменения шага (при изменении x_2^* на 0,5) имеем:

$$\frac{a_1 \Delta_1}{a_2 \Delta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

$$\lambda_1 = \frac{a_1 \Delta_1 \lambda_2}{a_2 \Delta_2} = \frac{2 * 0,5 * 0,5}{4,5 * 1} = 0,11.$$

Округленная величина $\lambda_1=0,10$.

В формуле введены следующие обозначения:

a_1, Δ_1, λ_1 – коэффициент при регрессионном уравнении, интервал варьирования и шаг при x_1^* , соответственно. Шаг равен интервалу варьирования;

a_2, Δ_2, λ_2 – коэффициент при регрессионном уравнении, интервал варьирования и шаг при x_2^* , соответственно. Шаг равен интервалу варьирования минус 0,5 (по заданию).

Таким образом:

Опыт 5

$$x_1^* = x_0^* - \lambda_1 = 1,5 - 0,1 = 1,4,$$

$$x_2^* = x_0^* - \lambda_2 = 7 - 0,5 = 6,5.$$

Аналогично поступаем для получения точек x_1^* и x_2^* для их определения в опытах 6–9. Причем опыты 5–7 проводим как мысленные. опыты 8 и 9 проводим как физические. В них получаем функции цели: 95 и 96 соответственно.

Задачи

Задача 4.1. Интенсификация процесса теплообмена

Исследуется процесс нагрева воздуха в калорифере. Цель – максимизировать температуру воздуха на выходе (Y , °C). Варьируются два фактора: скорость воздуха (X_1^* , м/с) и температура пара (X_2^* , °C). Основной уровень: $X_1^0=5$ м/с, $X_2^0=120$ °C. Интервалы варьирования: $\Delta_1=1$ м/с, $\Delta_2=10$ °C. Реализован план ПФЭ 2^2 . Получены значения температуры: в точке (-1,-1): 80°C; (+1,-1): 85°C; (-1, +1): 90°C; (+1,+1): 95°C. Рассчитайте коэффициенты линейного уравнения регрессии.

Задача 4.2. Расчет шага крутого восхождения

Используя данные и результаты задачи 4.1, выполните первый шаг метода крутого восхождения. Технолог предлагает изменить температуру пара (X_2) на 5 °C в сторону возрастания. Рассчитайте величину соответствующего изменения для скорости воздуха (X_1). Определите координаты точки для следующего «мысленного» эксперимента (опыт № 5). Используйте методику, аналогичную примеру в таблице 20 пособия.

Задача 4.3. Планирование «мысленных» экспериментов

Для условий задачи 4.2 спланируйте серию из 3-4 «мысленных» экспериментов в направлении крутого восхождения (двигаясь от основного уровня). Заполните таблицу, аналогичную нижней части таблицы 20 пособия, предварительно рассчитав координаты точек и спрогнозировав в них значение температуры Y , используя полученное ранее уравнение регрессии.

Задача 4.4. Выбор стратегии движения к оптимуму

При оптимизации процесса сжигания топлива в большой промышленной печи методом крутого восхождения каждый эксперимент требует длительного выхода на режим и значительных материальных затрат. Какую стратегию проведения опытов в направлении градиента вы предложите: одновременную реализацию всех запланированных опытов или последовательную? Ответ обоснуйте, опираясь на текст пособия.

Задача 4.5. Переход к нелинейной модели

В ходе крутого восхождения было замечено, что при движении от исходной точки прирост целевой функции (температуры в печи) сначала был значительным, а затем стал уменьшаться. В очередной новой точке линейная модель перестала адекватно описывать процесс. Каковы должны быть дальнейшие действия исследователя согласно стратегии метода Бокса-Уилсона? Ответ поясните.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казаков, В. Г. Планирование экспериментальных исследований и статистическая обработка данных. Основы научных исследований в промышленной теплоэнергетике: учебное пособие / В. Г. Казаков, П. В. Луканин, Е. Н. Громова; М-во науки и высшего образования РФ, С.-Петербург. гос. ун-т пром. технологий и дизайна, Высш. шк. технологии и энергетики. – 2-е изд., доп. – Санкт-Петербург: ВШТЭ СПбГУПТД, 2021. – 95 с.