

В. П. Яковлев

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Практикум

**Санкт-Петербург
2025**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики**

В. П. Яковлев

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Практикум

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2025

УДК 519.816(07)
ББК 22.174я7
Я 474

Рецензент

кандидат технических наук, заведующий кафедрой ИИТСУ Высшей школы технологии
и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных
технологий и дизайна
В. И. Сидельников

Яковлев, В. П.

Я 474 Теория принятия решений: Практикум / В. П. Яковлев. — СПб.: ВШТЭ
СПбГУПТД, 2025. — 54 с.

Практикум соответствует программам и учебным планам дисциплины «Теория принятия решений» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника». В практикуме содержится теоретический материал, контрольные вопросы и задания, необходимые для подготовки студентов в ходе проведения практических занятий.

Практикум предназначен для магистров всех форм обучения.

УДК 519.816(07)
ББК 22.174я7

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2025
© Яковлев В. П., 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ.....	5
Практическое задание № 1. Решение задачи линейного программирования средствами Excel.....	5
Практическое задание № 2. Решение транспортной задачи средствами Excel .	8
Практическое задание № 3. Целочисленное программирование в Excel.....	13
Практическое задание № 4. Динамическая задача распределения инвестиций....	18
Практическое задание № 5. Оптимальность по Парето	25
Практическое задание № 6. Оценивание в условиях неопределенности	29
Практическое задание № 7. Матричные игры.....	38
Практическое задание № 8. Решение задач теории игр графоаналитическим методом.....	44
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	54

ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития общества резко повысилась управленческая роль руководителя производства (предприятия). В связи с этим умение находить оптимальные управленческие решения – один из признаков, по которому оцениваются профессионализм и опытность специалиста в области теплоэнергетики. Важными являются навыки по принятию оптимальных решений.

Оптимальное решение – это выбранное по какому-либо критерию оптимизации наиболее эффективное из всех альтернативных вариантов решение. К методам оптимизации относятся анализ, прогнозирование и моделирование. Моделирование может быть физическим и математическим. Физическое моделирует предметы, а математическое – процессы. Математические модели – основное средство решения задач оптимизации любой деятельности. Ценность математических моделей для инженерного анализа и оптимизации решений состоит в том, что они позволяют получить четкое представление об исследуемом объекте, охарактеризовать и количественно описать технологические процессы.

Теоретической основой и практическим инструментом анализа и прогнозирования решений в теплоэнергетике являются математические модели и проводимые по ним расчеты.

Необходимость применения персональных компьютеров в процессе принятия управленческих решений в настоящее время стала особенно актуальна. Для успешного решения задач с помощью Excel необходимо знать основные идеи и методы исследования операций, условия их применения.

Целью издания настоящего практикум является предоставление кратких теоретических сведений, контрольных вопросов и заданий для выполнения студентами всех форм обучения практических работ и систематизации знаний, полученных на лекционных занятиях в процессе формирования у обучающихся компетенций в области применения математических методов обоснования и принятия управленческих и технических решений.

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

Практическое задание № 1. Решение задачи линейного программирования средствами Excel

Математические модели оптимизации позволяют существенно поднять качество планирования и управления при реализации различных проектов. Так, если установлено, что рассматриваемые характеристики зависят друг от друга линейно, причем область допустимых решений задается линейными функциями-ограничениями, то для решения таких задач могут быть использованы линейные математические модели.

Это могут быть задачи о распределении ресурсов, о рационе питания, о планировании перевозок, распределении работ, расстановке кадров и многие другие. При оптимизации переменной величины в случае линейности модели применяются методы линейного программирования. Основное положение в линейном программировании заключается в том, что связь между факторами, влияющими на исследуемую характеристику, линейна. Кроме того, только линейными зависимостями должны быть заданы используемые в задаче функции-ограничения, определяющие область изменения допустимых значений рассматриваемой величины.

Линейное программирование решает задачи нахождения оптимальных значений переменных для линейной целевой функции и системы ее ограничений, заданных линейными алгебраическими уравнениями или неравенствами.

Общей задачей линейного программирования называется задача о нахождении максимума (минимума) линейной функции:

$$F(X) = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n \quad (1.1)$$

при ограничениях:

[illegible]

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, l; \quad l \leq n.$$

Решение $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы ограничений (1.2), при котором функция $F(X)$ принимает максимальное (минимальное) значение, называется **оптимальным планом** задачи линейного программирования. Все остальные решения системы ограничений называются **допустимыми планами**. Функция $F(X)$ называется **целевой функцией**. Ограничения (1.2) называются **основными**.

Стандартной (симметричной) задачей называется задача линейного программирования, в которой все основные ограничения заданы неравенствами и все переменные задачи неотрицательны.

Основной (канонической) задачей называется задача линейного программирования, в которой все ограничения заданы равенствами и все переменные неотрицательны.

Задание

Решить задачу линейного программирования средствами Excel, составить ее математическую модель по описанию производственных процессов и исходным данным (табл. 1.1).

Для изготовления двух видов сырья P_1 и P_2 на предприятии используются три вида различного сырья: A_1, A_2, A_3 . Запасы сырья каждого вида A_i известны и равны b_i , кг, соответственно. Количество единиц сырья A_i , используемое для изготовления единицы продукции вида P_j , равно a_{ij} . Величина прибыли, получаемой от реализации единицы продукции P_j , равна c_j , $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$.

Составить план выпуска продукции таким образом, чтобы при ее реализации предприятие получило максимальную прибыль, и определить величину этой прибыли. При решении задачи учитывать, что переменные удовлетворяют условиям неотрицательности.

Таблица 1.1 – Исходные данные

Номер задачи	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}		a_{22}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
1	9	2	4	6		11	2	414	612	414	6	3
2	9	2	4	6		11	2	345	510	345	6	3
3	6	8	13	12		5	11	918	918	783	2	4
4	2	5	8	6		6	14	290	406	493	9	5
5	11	12	9	2		14	22	429	312	299	5	9
6	3	9	8	2		4	7	224	240	256	2	8
7	2	15	25	7		8	7	448	480	512	4	3
8	5	2	6	1		3	5	372	620	310	2	8
9	8	7	5	7		8	12	1850	1998	2109	3	5
10	5	12	18	6		24	4	828	690	828	5	3
11	9	2	4	6		11	2	238	346	386	6	3
12	5	8	2	3		5	7	284	148	156	8	5
13	10	5	4	12		7	9	148	198	160	4	7
14	12	10	24	16		18	34	205	168	185	7	2
15	11	12	9	2		14	22	338	240	230	5	9
16	13	7	8	9		6	11	144	196	132	3	6
17	8	12	15	22		14	7	248	256	362	7	5
18	1	5	4	6		7	9	117	191	183	5	2
19	4	3	1	2		5	8	136	185	324	1	1
20	2	6	1	5		8	4	124	444	564	2	4

Контрольные вопросы

1. Какие функции применяются в задачах линейного программирования?
2. Какая задача называется стандартной задачей линейного программирования?
3. Как записывается общая задача линейного программирования?
4. Чем характеризуется каноническая задача линейного программирования?
5. Что называется областью допустимых планов задачи линейного программирования?
6. Какой план называется оптимальным?
7. Какое решение задачи линейного программирования называется оптимальным?
8. Какими методами можно решить задачу линейного программирования?
9. Какие переменные называются базисными?
10. Какие переменные называются свободными?
11. Как определить максимально возможное число допустимых планов задачи линейного программирования?
12. Приведите примеры задач, решаемых методами линейного программирования.
13. Чем отличается решение задачи о минимуме функции от стандартной задачи линейного программирования?
14. В чем суть симплексного метода?
15. Каковы критерии симплексного метода?
16. Какими методами определяется опорный план при решении симплексным методом?
17. В чем заключается графический метод решения задачи линейного программирования?
18. Как строится область допустимых планов в случае двух переменных?
19. Как построить нормаль к линии уровня целевой функции?
20. Как построить линии уровня целевой функции?
21. Что характеризует градиент целевой функции?
22. Какие типы решений могут получаться при решении задачи линейного программирования?
23. Когда не существует решения задачи линейного программирования?
24. Что называется базисным решением системы линейных алгебраических уравнений?
25. Какие ограничения существуют для значений разрешающего элемента?

Практическое задание № 2. Решение транспортной задачи средствами Excel

Транспортная задача является особым типом задач целочисленного программирования, для которых разработаны простые и эффективные способы нахождения оптимального решения, не требующие громоздких вычислений. Экономико-математическую модель транспортной задачи рассмотрим на следующем примере.

Пусть имеются три поставщика некоторого товара и четыре потребителя этого товара. Причем известна стоимость перевозки товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Требуется найти объемы перевозок для каждой пары «поставщик-потребитель» так, чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальны, запасы всех поставщиков реализованы и потребности всех потребителей удовлетворены (табл. 2.1).

Таблица 2.1 – Таблица поставок

Поставщики	Потребители				Запасы поставщиков, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 x_{11}	2 x_{12}	4 x_{13}	8 x_{14}	340
A_2	8 x_{21}	9 x_{22}	6 x_{23}	5 x_{24}	200
A_3	3 x_{31}	5 x_{32}	7 x_{33}	2 x_{34}	160
Спрос потребителей b_j	120	170	150	260	$\sum a_i = 700$ $\sum b_j = 700$

В левом верхнем углу произвольной клетки стоит коэффициент, равный стоимости перевозки от поставщика, номер которого указан в этой строке, к потребителю, номер которого указан в столбце.

В теории транспортной задачи таблица 2 называется **таблицей поставок**.

Построим математическую модель данной задачи, обозначив через x_{ij} объем поставляемого товара от i -го поставщика к j -му потребителю. Чтобы запасы каждого поставщика были полностью реализованы, должны быть справедливы уравнения баланса для каждой строки таблицы поставок, т. е. выполняться равенства:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 340 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 160. \end{cases} \quad (2.1)$$

Чтобы спрос каждого из потребителей был удовлетворен, должны быть справедливы уравнения баланса для каждого столбца таблицы поставок, то есть

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 170 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 150 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 260. \end{cases} \quad (2.2)$$

Поскольку объем перевозимого груза – величина неотрицательная, то должны выполняться ограничения на переменные x_{ij} :

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4.$$

Суммарные затраты F на перевозку определяются указанными в таблице поставок (табл. 2) тарифами перевозок и размерами поставок:

$$F = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 a_{ij} x_{ij} = 7x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 8x_{14} + 8x_{21} + 9x_{22} + 6x_{23} + 5x_{24} + 3x_{31} + 5x_{32} + 7x_{33} + 2x_{34}. \quad (2.3)$$

Решить транспортную задачу – значит *на множестве неотрицательных решений системы ограничений найти такое решение, при котором линейная функция принимает минимальные значения.*

Транспортная задача называется **закрытой**, если сумма запасов всех n поставщиков равна сумме потребностей всех m потребителей:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j.$$

В противном случае транспортная задача называется **открытой**. Решение открытой транспортной задачи сводят к решению закрытой транспортной задачи введением фиктивных потребителей, когда сумма запасов превышает сумму потребностей, или фиктивных поставщиков, когда сумма потребностей превышает сумму запасов. При этом тарифы перевозок для фиктивных поставщиков и потребителей принимаются равными нулю.

Задание

Найти решение транспортной задачи для заданных параметров.

В клетках каждой из следующих таблиц указаны значения величины c_{ij} – тарифы перевозки единицы груза из i -го пункта отправления (от поставщика с номером i) в j -ый пункт назначения (потребителю с номером j). В столбце справа записаны запасы a_i груза (продукции, товара) в i -ом пункте отправления; в нижней строке таблицы указаны потребности b_j в грузе в j -ом пункте назначения.

Вариант 1					
1	6	7	4	6	19
6	1	9	5	9	19
7	5	2	6	3	19
9	10	1	3	8	19
15	15	14	16	16	

Вариант 2					
3	2	4	1	9	16
2	1	7	9	8	15
8	1	1	2	5	23
3	5	11	2	9	16
14	18	14	24	10	

Вариант 3					
2	7	1	2	5	18
8	2	9	5	9	18
1	17	4	6	3	18
7	9	21	5	7	18
14	14	14	16	14	

Вариант 4					
4	9	2	1	2	15
1	2	11	1	6	14
7	1	4	5	3	15
10	9	7	12	11	16
12	13	12	11	12	

Вариант 5					
10	11	12	14	6	13
4	1	7	5	3	23
7	5	4	6	3	13
9	2	1	5	7	23
11	19	18	12	12	

Вариант 6					
7	12	1	2	11	16
6	10	9	19	1	16
8	1	15	2	3	16
5	11	10	2	9	16
14	14	15	10	11	

Вариант 7					
2	7	1	4	3	17
8	11	8	5	9	21
7	5	4	1	3	16
2	10	2	6	7	21
15	15	15	14	16	

Вариант 8					
5	10	2	19	6	21
19	2	7	28	16	21
6	11	4	5	13	20
3	7	17	15	14	22
23	15	15	15	15	

Вариант 9					
1	7	4	4	10	22
15	12	16	15	9	28
3	5	4	6	13	38
16	2	21	17	8	25
25	23	21	20	24	

Вариант 10					
43	22	44	36	49	17
26	36	39	21	16	17
28	38	41	33	32	21
35	45	31	22	39	45
14	14	40	18	14	

Вариант 11					
23	27	26	31	30	22n
28	22	39	35	29	19n
41	33	24	36	43	19n
22	29	21+n	25	47	19n
15n	15n	16n	18n	15n	

Вариант 12					
14	19	12	13	13	27n
11	12	11+n	18	16	17n
17	18	14	15	10	20n
15	23	16	12	19	16n
14n	14n	24n	18n	10n	

Вариант 13					
n	4	12	14	10	18n
11	12	9	5	19	12n
17	15	4	6	13	19n
3	5	7	8	2	19n
15n	15n	5n	16n	15n	

Вариант 14					
3n	10	13	18	19	26n
2	6	17	9	16	24n
8	1	14	3	15	21n
3	12	11	22	9	16n
14n	14n	14n	17n	20n	

Вариант 15					
23	7n	13	21	14	29n
18	12	19	3	12	22n
11	17	24	6	13	21n
22	19	21	15	7	28n
15n	25n	24n	16n	20n	

Вариант 16					
42	19	26	13	12	22n
11	22	10n	18	16	21n
17	18	14	15	13	28n
25	29	17	18	22	39n
38n	25n	12n	20n	12n	

Вариант 17					
18	15	19	24	13	23n
16	10n	19	15	19	19n
17	15	24	16	10	37n
19	12	12	14	17	41n
25n	45n	15n	25n	15n	

Вариант 18					
3	2n	4	34	19	16n
26	6	7	9	16	18n
8	8	7	3	30	25n
35	25	11	2	9	36n
34n	14n	14n	18n	10n	

Вариант 19					
23	17	15	21	30	18n
18	12	19	5n	9	28n
10	1	24	6	13	48n
12	19	21	15	27	18n
14n	24n	34n	26n	14n	

Вариант 20					
14	9	6n	3	12	15n
21	2	11	18	16	30n
17	18	4	15	13	25n
5	19	17	8	6	15n
12n	12n	22n	27n	12n	

Контрольные вопросы

1. Какая цель ставится при решении транспортной задачи?
2. Сформулируйте математическую постановку транспортной задачи линейного программирования.
3. К чему стремится целевая функция транспортной задачи?
4. Что означают коэффициенты у неизвестных в целевой функции транспортной задачи?
5. Какие экономические величины характеризуют неизвестные транспортной задачи?
6. Какие значения принимают коэффициенты при неизвестных в ограничениях транспортной задачи?
7. Какая транспортная задача называется закрытой?
8. Какая транспортная задача называется открытой?
9. Какие правила следует выполнять при записи численных данных транспортной задачи в таблицу поставок?
10. Когда транспортная задача не имеет решения?
11. Как находится решение открытой транспортной задачи для случая, когда сумма запасов превышает сумму потребностей?
12. Как находится решение открытой транспортной задачи для случая, когда сумма потребностей превышает сумму запасов?
13. Какой прием применяется для обеспечения обязательной перевозки по соответствующим маршрутам определенного заранее количества груза?
14. Как решить транспортную задачу методами Excel?
15. В каком виде выводится решение транспортной задачи при использовании методов Excel?
16. Какой численный метод используется при решении транспортной задачи в Excel?
17. Как решить в Excel транспортную задачу открытого типа?

Практическое задание № 3. Целочисленное программирование в Excel

Значительная часть задач по смыслу может иметь решения только в целых числах; например, число турбин, котлов, трансформаторов может быть только целым числом. Такие задачи решаются методами целочисленного программирования. Общая постановка задачи линейного программирования дополняется требованием о том, чтобы найденные переменные в оптимальном плане были целыми.

Методы целочисленной оптимизации можно разделить на три основные группы: а) методы отсечения; б) комбинаторные методы; в) приближенные методы.

Методы отсечения используют оптимальные решения, найденные для задач линейного программирования. Сужая область допустимых планов до целочисленных границ, т. е. отсекая нецелочисленные допустимые планы, методами отсечения получают решения задач целочисленного программирования.

Комбинаторные методы достигают решений задач целочисленного программирования, рассматривая возможные варианты целочисленных ограничений для задачи оптимизации.

Приближенные методы опираются на приближенные методы нахождения экстремумов функций нескольких переменных и используют различные способы округления полученных нецелочисленных решений до целых значений. Особенно удобно применять приближенные методы в случае решения задачи целочисленного программирования относительно двух переменных.

Метод Гомори решения задач целочисленного программирования является методом отсечения. Сущность его состоит в том, что сначала задача решается как задача линейного программирования без учета условия целочисленности переменных. Если полученное решение задачи линейного программирования является целочисленным, задача целочисленного программирования также решена и найденное решение является оптимальным и для нее. Если же в найденном решении задачи линейного программирования одна или большее число переменных не целые, то для отыскания целочисленного решения задачи добавляется новое ограничение. Это ограничение линейное, и при продолжении решения дополненной задачи симплексным методом с учетом этого ограничения получается целочисленный план.

Метод ветвей и границ – один из комбинаторных методов. Его суть заключается в упорядоченном переборе вариантов и рассмотрении лишь тех из них, которые оказываются по определенным признакам полезными для нахождения оптимального решения.

Метод ветвей и границ состоит в следующем: множество допустимых нецелочисленных решений (планов) некоторым способом разбивается на подмножества, для каждого из которых решается новая задача линейного программирования с целью получения целочисленного решения. При каждом ветвлении получается две новые задачи.

Очевидно, что *возможен один из следующих четырех случаев.*

1. *Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план.* Тогда этот план и значение целевой функции на нем и дают решение исходной задачи.

2. *Одна из задач неразрешима, а другая имеет оптимальный план, среди компонент которого есть дробные числа.* Тогда рассматриваем вторую задачу и в ее оптимальном плане выбираем одну из компонент, значение которой равно дробному числу, и строим две задачи на новых ограничениях по этой переменной, полученных разделением ее ближайших к решению целочисленных значений.

3. *Обе задачи разрешимы.* Одна из задач имеет оптимальный целочисленный план, а в оптимальном плане другой задачи есть дробные числа. Тогда вычисляем значения целевой функции на этих планах и сравниваем их между собой. Для определенности здесь и далее полагаем, что решается задача о максимуме целевой функции. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно ее значению на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то данный целочисленный план является оптимальным для исходной задачи и вместе со значением целевой функции на нем дает искомое решение.

Если же значение целевой функции больше на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то следует взять одно из таких чисел и для задачи, план которой рассматривается, произвести ветвление по дробной переменной и построить две новые задачи.

4. *Обе задачи разрешимы,* и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда вычисляем значение целевой функции на данных оптимальных планах и рассматриваем ту из задач, для которой значение целевой функции является наибольшим. В оптимальном плане этой задачи выбираем одну из компонент, значение которой является дробным числом, и производим ветвление на две новые задачи, разбивая область изменения этой переменной на две, ограниченные целыми числами справа и слева соответственно.

Таким образом, процесс построения все новых и новых задач может быть представлен на рисунке в виде ветвистого дерева с вершиной и отходящими от этой вершины ветвями.

Такая последовательность действий при нахождении оптимального решения задачи целочисленного программирования нашла свое отражение в названии этого метода.

Задание

1. Изучить алгоритмы методов Гомори, Ветвей и границ.
2. Решить задачу целочисленного программирования средствами Excel согласно варианту.

1.

$$\begin{aligned}
F(X) &= 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\
\begin{cases} 30x_1 - 15x_2 + 20x_3 + 21x_4 \leq 324 \\ 21x_1 + 51x_2 + 28x_3 + 25x_4 \leq 483; \\ 12x_1 - 44x_2 + 32x_3 + 62x_4 \leq 367 \end{cases} \\
x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\
x_i - \text{целые, } i = \overline{1,4}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
F(X) &= 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\
\begin{cases} 63x_1 + 19x_2 + 12x_3 + 37x_4 \leq 768 \\ 21x_1 + 59x_2 + 14x_3 - 75x_4 \leq 635; \\ 71x_1 - 36x_2 + 44x_3 - 82x_4 \leq 961 \end{cases} \\
x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\
x_i - \text{целые, } i = \overline{1,4}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
F(X) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\
\begin{cases} 14x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 19x_4 \leq 551 \\ 11x_1 + 35x_2 + 14x_3 - 17x_4 \leq 512; \\ 82x_1 + 63x_2 + 54x_3 - 92x_4 \leq 767 \end{cases} \\
x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\
x_i - \text{целые, } i = \overline{1,4}.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
F(X) &= 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \max; \\
\begin{cases} 9x_1 + 16x_2 + 27x_3 + 33x_4 \leq 455 \\ 14x_1 + 23x_2 - 18x_3 - 41x_4 \leq 512; \\ 5x_1 - 9x_2 + 72x_3 - 12x_4 \leq 739 \end{cases} \\
x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\
x_i - \text{целые, } i = \overline{1,4}.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
F(X) &= -x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min; \\
\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \geq 45 \\ 15x_1 + 11x_2 - 14x_3 + 6x_4 \geq 32; \\ 7x_1 + 23x_2 - 18x_3 - 12x_4 \geq 13 \end{cases} \\
x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\
x_i - \text{целые, } i = \overline{1,4}.
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
F(X) &= 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min; \\
\begin{cases} 88x_1 + 83x_2 + 91x_3 + 55x_4 \geq 151 \\ 81x_1 + 13x_2 - 27x_3 + 59x_4 \geq 167; \\ 84x_1 + 17x_2 + 23x_3 + 37x_4 \geq 184 \end{cases} \\
x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\
x_i - \text{целые, } i = \overline{1,4}.
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
F(X) &= x_1 + x_2 - x_3 + 8x_4 \rightarrow \max; \\
\begin{cases} 22x_1 - 21x_2 - 17x_3 - 41x_4 \leq 461 \\ 25x_1 + 52x_2 + 44x_3 - 77x_4 \leq 489; \\ 21x_1 - 46x_2 - 55x_3 - 83x_4 \leq 591 \end{cases} \\
x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\
x_i - \text{целые, } i = \overline{1,4}.
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
F(X) &= 5x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 \rightarrow \min; \\
\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \geq 151 \\ 3x_1 - 13x_2 - 4x_3 + 6x_4 \geq 162; \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \geq 213 \end{cases} \\
x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\
x_i - \text{целые, } i = \overline{1,4}.
\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
F(X) &= x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 \rightarrow \min; \\
\begin{cases} 9x_1 + 12x_2 + 28x_3 + 25x_4 \geq 77 \\ 21x_1 - 11x_2 - 24x_3 + 46x_4 \geq 93; \\ 17x_1 + 17x_2 - 12x_3 - 12x_4 \geq 39 \end{cases} \\
x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\
x_i - \text{целые, } i = \overline{1,4}.
\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
F(X) &= -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\
\begin{cases} 12x_1 - 23x_2 + 25x_3 + 41x_4 \leq 579 \\ 21x_1 - 7x_2 + 14x_3 + 37x_4 \leq 945; \\ 82x_1 - 44x_2 + 54x_3 + 92x_4 \leq 831 \end{cases} \\
x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\
x_i - \text{целые, } i = \overline{1,4}.
\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}
F(X) &= -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max; \\
\begin{cases} 15x_1 + 17x_2 + 23x_3 + 67x_4 \leq 851 \\ 21x_1 + 55x_2 + 14x_3 + 7x_4 \leq 812; \\ 45x_1 + 46x_2 + 54x_3 - 13x_4 \leq 863 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\ x_i - \text{целые}, i = \overline{1,4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}
F(X) &= 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \rightarrow \max; \\
\begin{cases} 18x_1 + 7x_2 + 14x_3 + 32x_4 \leq 627 \\ 32x_1 - 15x_2 + 19x_3 + 37x_4 \leq 841; \\ 64x_1 - 16x_2 + 54x_3 + 92x_4 \leq 932 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\ x_i - \text{целые}, i = \overline{1,4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}
F(X) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\
\begin{cases} 5x_1 + 15x_2 - 35x_3 + 33x_4 \leq 924 \\ x_1 + 25x_2 + 15x_3 - 21x_4 \leq 928; \\ 3x_1 + 26x_2 + 14x_3 + 12x_4 \leq 863 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\ x_i - \text{целые}, i = \overline{1,4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned}
F(X) &= x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min; \\
\begin{cases} 23x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 31x_4 \geq 119 \\ 31x_1 - 11x_2 + 31x_3 + 39x_4 \geq 202; \\ 17x_1 + 41x_2 - 61x_3 + 7x_4 \geq 189 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\ x_i - \text{целые}, i = \overline{1,4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

19.

$$\begin{aligned}
F(X) &= x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max; \\
\begin{cases} 17x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 21x_4 \leq 851 \\ 42x_1 + 5x_2 + 14x_3 - 37x_4 \leq 912; \\ 57x_1 - 46x_2 + 54x_3 - 92x_4 \leq 763 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\ x_i - \text{целые}, i = \overline{1,4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}
F(X) &= x_1 - 9x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\
\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 11x_3 + 17x_4 \leq 256 \\ 16x_1 + 9x_2 + 22x_3 - 32x_4 \leq 287; \\ 31x_1 - 16x_2 + 14x_3 + 12x_4 \leq 299 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\ x_i - \text{целые}, i = \overline{1,4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned}
F(X) &= 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\
\begin{cases} 10x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 13x_4 \leq 337 \\ 21x_1 + 25x_2 - 34x_3 + 17x_4 \leq 484; \\ 31x_1 + 36x_2 + 27x_3 + 29x_4 \leq 365 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\ x_i - \text{целые}, i = \overline{1,4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned}
F(X) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min; \\
\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 + 11x_4 \geq 77 \\ 21x_1 + x_2 + 14x_3 + 16x_4 \geq 84; \\ 7x_1 + 12x_2 + 22x_3 + 12x_4 \geq 79 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\ x_i - \text{целые}, i = \overline{1,4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned}
F(X) &= 3x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min; \\
\begin{cases} 41x_1 - 13x_2 - 21x_3 + 15x_4 \geq 51 \\ 72x_1 - 15x_2 - 24x_3 - 16x_4 \geq 112; \\ 53x_1 - 12x_2 - 22x_3 + 32x_4 \geq 263 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\ x_i - \text{целые}, i = \overline{1,4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

20.

$$\begin{aligned}
F(X) &= x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\
\begin{cases} 27x_1 + 78x_2 + 29x_3 + 14x_4 \leq 351 \\ 51x_1 + 45x_2 + 14x_3 - 17x_4 \leq 312; \\ 88x_1 + 56x_2 + 54x_3 - 42x_4 \leq 763 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\ x_i - \text{целые}, i = \overline{1,4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Контрольные вопросы

1. Какая задача называется задачей целочисленного программирования?
2. Какие методы существуют для решения задач целочисленного программирования?
3. Сформулируйте алгоритм решения задачи целочисленного программирования методом ветвей.
4. Запишите алгоритм метода Гомори.
5. Какие решения могут быть потеряны при применении метода Гомори?
6. Какие решения считаются оптимальными для задачи целочисленного программирования?
7. Как найти решение задачи целочисленного программирования средствами Excel?
8. Сколько раз можно применять метод Гомори при поиске оптимального решения задачи целочисленного программирования?

Практическое задание № 4. Динамическая задача распределения инвестиций

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, разработанный для решения некоторого класса задач математического программирования путем их разложения на относительно небольшие и, следовательно, менее сложные задачи. Специфика метода динамического программирования состоит в том, что для отыскания оптимального управления планируемая операция разделяется на ряд последовательных шагов или этапов. Соответственно и сам процесс планирования операции становится многошаговым и развивается последовательно, от этапа к этапу, причем каждый раз оптимизируется управление только на одном шаге.

Некоторые операции естественно распадаются на этапы, в других это деление приходится вводить искусственно. Примером «естественно многоэтапной» операции может служить планирование работы предприятия на некоторый период времени, состоящий из нескольких хозяйственных лет или кварталов.

Особенно следует подчеркнуть, что принцип динамического программирования отнюдь не предполагает, что, выбирая управление на одном отдельном шаге, можно забыть обо всех остальных. Напротив, управление на каждом шаге должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем. Динамическое программирование – это планирование дальновидное, с учетом перспективы.

Однако из этого правила есть исключение. Среди всех шагов существует один, который может планироваться попросту, «без оглядки на будущее». Это – последний шаг. Спланировав оптимальным образом этот последний шаг, можно к нему «пристраивать» предпоследний, а затем предпредпоследний и т. д. Поэтому процесс динамического программирования разворачивается от конца к началу.

Сначала делаются различные предположения о том, чем кончился предпоследний шаг, и для каждого из них выбирается управление на последнем. Затем делаются различные предположения о том, чем кончился предпредпоследний шаг, т. е. рассматриваются различные состояния системы на третьем от конца шаге и выбираются управления на втором от конца шаге так, чтобы оно вместе с уже выбранным управлением на последнем шаге обеспечивало наилучший эффект на двух последних шагах, и так далее, вплоть до первого от начала шага, с которого начинался процесс.

Следует учесть, что в начале процесса состояние системы известно, и делать какие-то предположения не нужно. Поэтому, имея ввиду, что все последующие шаги спланированы для различных состояний системы, остается выбрать управление на первом шаге таким образом, чтобы оно было оптимальным с учетом всех управлений, уже принятых наилучшим образом на всех последующих шагах.

Состояние системы на каждом шаге характеризуется некоторой переменной величиной, которая называется **параметром состояния**.

Наилучший эффект на данном этапе вместе с уже рассмотренными шагами характеризуется **функцией состояния**. Решение конкретной задачи методом динамического программирования сводится к выбору параметра состояния, составлению функции состояния и рекуррентных соотношений, связывающих функции состояния для двух соседних последовательных этапов, и их применению для выбора оптимального управления.

Для знакомства с методом динамического программирования рассмотрим нелинейную задачу распределения ресурсов между предприятиями одного производственного объединения. Для определенности можно считать, что речь о распределении капитальных вложений.

Предположим, что указано n пунктов, где требуется построить или реконструировать предприятия одной отрасли, для этого выделено b рублей. Обозначим через $f_j(\xi)$ прирост мощности или прибыли на j -м предприятии, если оно получит ξ рублей капитальных вложений.

В динамической задаче распределения инвестиций требуется найти такое распределение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост мощности или прибыли

$$z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

при ограничении по общей сумме инвестиций

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = b.$$

Будем считать, что все переменные x_j принимают только целые неотрицательные значения:

$$x_j = 0 \quad \text{или} \quad 1 \quad \text{или} \quad 2 \quad \text{или} \quad 3 \quad \text{и т. д.}$$

Функции $f_j(x_j)$ будем считать заданными, так как их определение является достаточно трудной задачей.

Для решения задачи используем метод динамического программирования. Введем параметр состояния и определим функцию состояния. За **параметр состояния** ξ примем денежную сумму, выделяемую нескольким предприятиям, а **функцию состояния** $F_k(\xi)$ определим как максимальную прибыль на первых k предприятиях, если они вместе получают ξ рублей. Параметр ξ может изменяться от 0 до b .

Если из ξ рублей k -е предприятие получит x_k рублей, то каково бы ни было это значение, остальные $(\xi - x_k)$ рублей естественно распределить между

предприятиями от первого до $(k - 1)$ -го так, чтобы была получена максимальная прибыль $F_{k-1}(\xi - x_k)$.

Тогда прибыль k предприятий будет равна $f_k(x_k) + F_{k-1}(\xi - x_k)$. Надо выбрать такое значение x_k между 0 и ξ , чтобы эта сумма была максимальной, в результате приходим к рекуррентному соотношению

$$F_k(\xi) = \max_{0 \leq x_k \leq \xi} \{f_k(x_k) + F_{k-1}(\xi - x_k)\}$$

для $k = 2, 3, \dots, n$.

Если же $k = 1$, то $F_1(\xi) = f_1(\xi)$.

Задание

Производственное объединение состоит из четырех предприятий ($n = 4$). Общая сумма капитальных вложений равна 700 млн руб. ($b = 700$), выделяемые предприятиям суммы кратны 100 млн руб. Если j -е предприятие получает инвестиции в объеме ξ млн руб., то прирост годовой прибыли на этом предприятии составит $f_j(\xi)$ млн руб. в год ($j = 1, 2, 3, 4$). Значения функций $f_j(\xi)$ известны, и для каждого варианта компактно записаны в таблице, в следующем виде:

$f_1(0) \ f_1(100) \ f_1(200) \ f_1(300) \ f_1(400) \ f_1(500) \ f_1(600) \ f_1(700)$
 $f_2(0) \ f_2(100) \ f_2(200) \ f_2(300) \ f_2(400) \ f_2(500) \ f_2(600) \ f_2(700)$
 $f_3(0) \ f_3(100) \ f_3(200) \ f_3(300) \ f_3(400) \ f_3(500) \ f_3(600) \ f_3(700)$
 $f_4(0) \ f_4(100) \ f_4(200) \ f_4(300) \ f_4(400) \ f_4(500) \ f_4(600) \ f_4(700)$

Требуется найти такое распределение инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост прибыли на всех предприятиях вместе. Для этого необходимо составить математическую модель динамической задачи распределения инвестиций и решить ее методом динамического программирования, обосновывая каждый шаг вычислительного процесса.

Пример решения. Исходная таблица имеет вид (таблица 4.1):

Таблица 4.1

ξ	0	100	200	300	400	500	600	700
$f_1(\xi)$	0	20	34	46	53	55	60	60
$f_2(\xi)$	0	18	29	45	62	78	90	98
$f_3(\xi)$	0	25	41	52	74	82	88	90
$f_4(\xi)$	0	30	52	76	90	104	116	125

На основании исходных данных строим и заполняем таблицу 4.2. Для этого значения $f_2(\xi)$ складываем со значениями $F_1(\xi - x_2) = f_1(\xi - x_2)$ и на каждой северо-восточной диагонали находим наибольшее число (которое выделяем жирным шрифтом и обводим рамкой и указываем соответствующее значение $x_2^*(\xi)$).

Таблица 4.2

$\begin{matrix} \xi - x_2 \\ x_2 \end{matrix}$		$\xi - x_2$							
		$F_1(\xi - x_2)$							
$f_2(x_2)$		0	100	200	300	400	500	600	700
0	0	0	20	34	46	53	55	60	60
100	18	18	38	52	64	71	73	78	
200	29	29	49	63	75	82	84		
300	45	45	65	79	91	98			
400	62	62	82	96	108				
500	78	78	98	112					
600	90	90	110						
700	98	98							

Затем заполняем таблицу 4.3.

Таблица 4.3

ξ	0	100	200	300	400	500	600	700
$F_2(\xi)$	0	20	38	52	65	82	98	112
$x_2^*(\xi)$	0	0	100	100	300	400	500	500

Продолжая процесс, табулируем функции $F_3(\xi), x_3^*(\xi)$ и так далее (табл. 4.4 – 4.5).

Таблица 4.4

$\begin{matrix} \xi - x_3 \\ x_3 \end{matrix}$		$\xi - x_3$							
		$F_2(\xi - x_3)$							
$f_3(x_3)$		0	100	200	300	400	500	600	700
0	0	0	20	38	52	65	82	98	112
100	25	25	45	63	77	90	107	123	
200	41	41	61	79	93	106	123		
300	52	52	72	94	112	126			
400	74	74	94	112	126				
500	82	82	102	120					
600	88	88	106						
700	90	90							

Таблица 4.5

ξ	0	100	200	300	400	500	600	700
$F_3(\xi)$	0	25	45	63	79	94	112	126
$x_3^*(\xi)$	0	100	100	100	200	400	400	400

В таблице 4.6 заполняем только одну диагональ для значения $\xi = 700$.
В нашем примере наибольшее число для этой диагонали

$$z_{max} = 155 \text{ млн руб.},$$

Причем четвертому предприятию должно быть выделено

$$x_4^* = x_4^*(700) = 300 \text{ млн руб.}$$

Таблица 4.6

		$\xi - x_i$	0	100	200	300	400	500	600	700
x_i	$F_3(\xi - x_i)$		0	25	45	63	79	94	112	126
	$f_i(x_i)$									
0	0									
100	30									
200	52									
300	76									
400	90									
500	104									
600	116									
700	125									

На долю остальных трех предприятий остается 400 млн руб. Из таблицы 4.5 видно, третьему предприятию должно быть выделено

$$x_3^* = x_3^*(700 - x_4^*) = x_3^*(400) = 200 \text{ млн руб.}$$

Продолжая обратный процесс, находим

$$x_2^* = x_2^*(700 - x_4^* - x_3^*) = x_2^*(200) = 100 \text{ млн руб.}$$

На долю первого предприятия остается

$$x_1^* = 700 - x_4^* - x_3^* - x_2^* = 100 \text{ млн руб.}$$

Таким образом, наилучшим является следующее распределение капитальных вложений по предприятиям:

$$x_1^* = 100, x_2^* = 100, x_3^* = 200, x_4^* = 300.$$

Оно обеспечивает производственному объединению наибольший возможный прирост 155 млн руб.

Для проверки правильности решения необходимо выполнить проверку выполнения равенства:

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) = z_{max}.$$

Задание

Найти такое распределение инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост прибыли на всех предприятиях вместе, согласно исходных данных варианта.

№ вар.	Исходные данные								№ вар.	Исходные данные							
1	0	20	44	55	63	67	70	70	11	0	15	26	38	45	52	58	63
	0	18	29	49	72	87	100	108		0	10	17	23	29	34	38	41
	0	25	41	52	74	82	88	90		0	11	19	26	30	33	35	36
	0	30	52	76	90	104	116	125		0	25	34	41	46	50	53	56
2	0	15	24	30	36	40	43	45	12	0	25	41	55	65	75	80	85
	0	18	26	34	39	42	44	46		0	30	52	76	90	104	116	125
	0	16	27	37	44	48	50	56		0	50	68	82	92	100	107	112
	0	10	17	23	29	34	38	41		0	61	80	93	100	106	112	116
3	0	42	58	71	80	89	95	100	13	0	20	33	42	48	53	56	58
	0	30	49	63	68	69	65	60		0	22	37	49	59	68	76	82
	0	22	37	49	59	68	76	82		0	10	29	42	52	60	65	69
	0	50	68	82	92	100	107	112		0	16	27	37	44	48	50	56
4	0	37	64	87	105	120	134	145	14	0	8	13	17	20	23	25	27
	0	48	75	98	120	132	144	156		0	10	17	23	29	34	38	41
	0	85	100	111	118	124	129	132		0	11	19	26	30	33	35	36
	0	47	70	80	86	91	94	98		0	10	20	30	38	43	49	52
5	0	10	20	30	38	43	49	52	15	0	75	90	100	108	113	115	117
	0	13	25	37	47	55	61	66		0	85	100	111	118	124	129	132
	0	6	13	20	27	33	38	41		0	42	58	71	80	89	95	100
	0	24	36	42	46	48	48	49		0	28	45	6	78	90	102	113
6	0	5	10	14	17	19	21	22	16	0	28	42	51	57	61	64	66
	0	8	13	18	21	23	21	17		0	5	20	29	36	41	45	47
	0	10	16	21	24	27	29	30		0	8	26	37	47	53	58	61
	0	11	19	26	30	33	35	36		0	22	37	49	59	68	76	82
7	0	28	45	65	78	90	102	113	17	0	70	93	104	110	114	117	119
	0	25	41	55	65	75	80	85		0	61	80	93	100	106	112	116
	0	15	25	40	50	62	73	82		0	83	105	114	119	121	126	130
	0	20	33	42	48	53	56	58		0	75	90	100	102	101	100	97
8	0	28	42	51	57	61	64	66	18	0	12	20	26	37	41	44	45
	0	20	27	30	31	32	32	33		0	16	27	37	44	48	50	56
	0	8	26	37	47	53	58	61		0	10	16	21	24	27	29	30
	0	5	20	29	36	41	45	47		0	11	19	25	29	30	28	21
9	0	5	10	14	17	19	21	22	19	0	14	22	3	39	45	51	56
	0	20	34	45	50	48	40	40		0	9	15	22	31	39	45	49
	0	15	24	30	38	46	52	53		0	15	25	35	40	45	50	50
	0	26	30	35	40	45	48	50		0	35	46	52	55	57	59	60
10	0	3	5	7	8	9	10	10	20	0	15	25	40	50	62	73	82
	0	5	8	10	12	13	14	15		0	30	49	63	69	68	62	55
	0	8	13	17	20	23	25	27		0	50	68	82	92	100	107	112
	0	6	10	13	15	16	16	16		0	83	105	114	116	115	110	105

21	0	15	26	37	46	53	59	63	29	0	10	16	21	24	27	29	30
	0	15	24	30	36	40	43	45		0	11	19	26	30	33	35	36
	0	9	30	33	31	39	45	49		0	8	15	23	29	34	38	41
	0	24	36	42	46	48	49	49		0	14	26	37	46	49	48	44
22	0	37	64	87	105	120	134	145	30	0	20	27	27	31	32	32	33
	0	70	93	104	110	114	117	119		0	8	26	37	47	53	58	61
	0	61	80	93	100	106	112	116		0	5	20	29	36	41	45	47
	0	28	45	65	78	90	102	113		0	20	33	42	48	53	56	58
23	0	10	20	30	38	43	49	52	31	0	16	26	39	42	46	50	54
	0	13	25	37	47	55	61	66		0	9	15	23	31	39	45	49
	0	16	27	37	44	48	50	49		0	18	26	34	39	42	44	46
	0	10	17	23	29	34	38	41		0	15	25	32	38	42	46	48
24	0	6	13	20	27	33	38	41	32	0	20	27	28	31	32	32	33
	0	24	36	42	46	48	49	49		0	8	26	37	47	53	58	61
	0	25	41	52	57	59	57	53		0	5	20	29	36	41	45	47
	0	18	28	37	45	51	56	59		0	20	33	42	48	53	56	58
25	0	30	49	63	75	84	91	97	33	0	5	8	10	12	13	14	15
	0	22	37	49	59	68	76	82		0	5	10	14	17	19	21	22
	0	18	26	34	39	42	44	46		0	8	13	18	21	23	25	27
	0	16	27	37	44	48	50	56		0	6	13	20	27	33	38	41
26	0	6	13	20	27	35	38	41	34	0	10	20	34	38	43	49	52
	0	24	36	44	46	47	49	49		0	13	25	37	47	55	61	66
	0	25	41	52	57	58	57	53		0	16	27	37	44	48	50	49
	0	18	28	37	45	51	56	59		0	10	17	23	29	34	38	41
27	0	30	49	63	75	84	91	97	35	0	10	16	21	23	27	29	30
	0	22	37	46	59	68	76	82		0	11	19	26	30	35	35	36
	0	18	26	34	39	42	44	46		0	8	15	23	29	36	38	41
	0	16	27	37	44	48	50	56		0	14	26	37	46	49	48	44
28	0	28	42	52	57	61	64	66									
	0	5	20	29	37	41	45	47									
	0	8	26	37	47	53	58	61									
	0	22	37	49	59	68	76	82									

Практическое задание № 5. Оптимальность по Парето

Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Обозначим буквой E некоторую обобщенную характеристику произвольной инвестиционной операции, которую назовем *эффективностью* операции (в качестве E можно взять доход, доходность в процентах от вложенной суммы, доходность в процентах годовых, внутреннюю форму доходности и т. п.). Часто невозможно заранее точно предсказать эффективность той или иной операции, и такие операции рассматривают как *случайные величины*. При этом в качестве ожидаемой эффективности такой инвестиционной операции используют *математическое ожидание* ME случайной величины E .

Под *риском инвестиционных операций* будем понимать отклонение реальных значений эффективности инвестиционной операции от прогнозируемой эффективности (как в меньшую, так и в большую сторону).

Если E – случайная эффективность инвестиционной операции, и в качестве ожидаемой эффективности операции выбирают математическое ожидание ME случайной величины E , то в качестве измерителя риска операции берут *среднее квадратичное отклонение*.

$$\sigma_E = \sqrt{DE}$$

(здесь DE – дисперсия случайной величины E).

Знание только математических ожиданий и средних квадратичных отклонений случайных величин довольно-таки важно при анализе группы случайных величин, оно помогает выбрать из множества случайных величин, оптимальные по Парето, отбросив заведомо «плохие».

Пусть на финансовом рынке существует возможность осуществить несколько инвестиционных операций, ожидаемые эффективности и риски которых известны и равны, соответственно, $ME_1, ME_2, \dots, ME_n$ и $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.

Говорят, что i -я операция доминирует j -ю, если

$$\begin{cases} ME_i \geq ME_j, \\ \sigma_i < \sigma_j \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} ME_i > ME_j, \\ \sigma_i \leq \sigma_j. \end{cases}$$

Операция называется *оптимальной по Парето*, если не существует операций, которые бы ее доминировали.

Пример. Инвестор рассматривает четыре инвестиционные операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами E_1, E_2, E_3, E_4 с рядами распределения:

E_1	2	5	8	4
p	1/6	1/2	1/6	1/6

E_2	2	3	4	12
p	1/2	1/6	1/6	1/6

E_3	3	5	8	10
p	1/6	1/6	1/2	1/6

E_4		1	2	4	8
p		1/2	1/6	1/6	1/6

Требуется определить, какие из этих операций оптимальны по Парето.

Решение. Ожидаемые эффективности и риски равны соответственно $ME_1 = 4,81$, $\sigma_1 = 1,77$, $ME_2 = 4,16$, $\sigma_2 = 3,57$, $ME_3 = 7,00$, $\sigma_3 = 2,30$, $ME_4 = 2,81$, $\sigma_4 = 2,54$.

Нанесем точки (ME_i, σ_i) на единый график (рис. 1). Проведем анализ полученных результатов, учитывая, что i -я операция доминирует j -ю, если точка соответствующая i -й операции, находится на графике правее и ниже точки, соответствующей j -й операции.

Видно, что первая операция доминирует вторую и четвертую, третья операция также доминирует вторую и четвертую. При этом первая операция не доминирует третью, а третья не доминирует первую. Таким образом, первая и третья операции оптимальны по Парето.

Отметим, что операции, оптимальные по Парето, не обязательно являются «самыми лучшими» (и даже просто «хорошими») – эти операции *не являются худшими*. Выбор операций среди оптимальных по Парето осуществляется на основе склонности лица, принимающего решение (ЛПР), к риску.

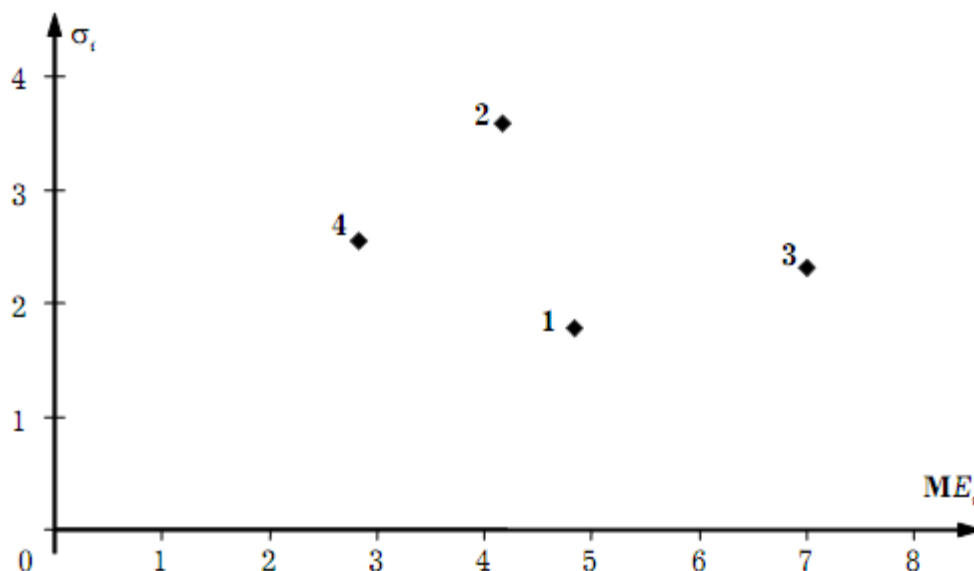


Рисунок 1 – График «Риск-доходность»

В некоторых ситуациях предпочтительнее оказывается операция, в которой ожидаемая эффективность вообще отрицательна. Например, если перед нами стоит выбор из двух операций:

- потерять 1 руб.;
- с вероятностью получить 1 000 000 руб. и с вероятностью 0,5 потерять 100 000,

то обе эти операции окажутся оптимальными по Парето ($ME_1 = -1$, $\sigma_1 = 0$, $ME_2 = 550\,000$, $\sigma_2 = 450\,000$), но, скорее всего, мы склонимся к выбору первой операции, несмотря на то, что ожидаемый доход по ней составляет отрицательное число (-1 руб.), тогда как ожидаемый доход от исполнения второй

операции составляет 550 000 руб. – слишком велик риск у второй операции, слишком велика вероятность потерь.

Рассмотренный подход может быть применен и при анализе других задач многокритериальной оптимизации.

В произвольной задаче выбора операции по нескольким критериям **операция i доминирует операцию j , если операция i по каждому из критериев не хуже операции j и, хотя бы по одному из критериев, строго лучше.**

Операция i называется оптимальной по Парето, если не существует операций, которые бы ее доминировали.

Например, в ситуации с частичной неопределенностью можно рассмотреть в качестве критериев **ожидаемый доход MQ** (операция i не хуже операции j по этому критерию, если $MQ_i \geq MQ_j$, и лучше операции j по этому критерию, если $MQ_i > MQ_j$) и **ожидаемые сожаления MR** (операция i не хуже операции j по этому критерию, если $MR_i \leq MR_j$, и лучше операции j по этому критерию, если $MR_i < MR_j$).

Задание практикума

Инвестор рассматривает четыре инвестиционные операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами $E_n, E_{n+1}, E_{n+2}, E_{n+3}$, (где n – номер варианта) с рядами распределения, приведенными в таблице 5.1. требуется определить, какие из этих операций оптимально по Парето.

Таблица 5.1 – Ряды распределения случайных величин

№ операции	Ряд распределения эффективности					№ операции	Ряд распределения эффективности				
1	E_1	0	2	4	16	12	E_{12}	2	4	6	18
	p	1/2	1/4	1/8	1/8		p	1/2	1/4	1/8	1/8
2	E_2	0	4	6	12	13	E_{13}	2	6	8	14
	p	1/4	1/4	1/3	1/6		p	1/4	1/4	1/3	1/6
3	E_3	0	1	2	8	14	E_{14}	2	3	4	10
	p	1/3	1/3	1/6	1/6		p	1/3	1/3	1/6	1/6
4	E_4	0	4	6	10	15	E_{15}	2	6	8	12
	p	1/5	1/5	1/5	2/5		p	1/5	1/5	1/5	2/5
5	E_5	0	1	5	14	16	E_{16}	2	4	6	18
	p	1/5	2/5	1/5	1/5		p	1/5	2/5	1/5	1/5
6	E_6	0	8	16	20	17	E_{17}	2	12	18	22
	p	1/2	1/8	1/8	1/4		p	1/2	1/8	1/8	1/4
7	E_7	0	4	10	14	18	E_{18}	2	6	12	20
	p	1/4	1/4	1/4	1/4		p	1/4	1/4	1/4	1/4
8	E_8	0	4	5	20	19	E_{19}	2	6	8	12
	p	1/2	1/4	1/5	1/20		p	1/2	1/4	1/5	1/20
9	E_9	0	4	8	32	20	E_{20}	-6	-4	-2	10
	p	1/2	1/4	1/8	1/8		p	1/2	1/4	1/8	1/8
10	E_{10}	0	8	12	24	21	E_{21}	-6	-2	0	-6
	p	1/4	1/4	1/3	1/6		p	1/4	1/4	1/3	1/6
11	E_{11}	0	2	4	16	22	E_{22}	-6	-5	-4	3
	p	1/3	1/3	1/6	1/6		p	1/3	1/3	1/6	1/6
23	E_{23}	0	8	12	20	31	E_{31}	-6	-2	0	4
	p	1/5	1/5	1/5	2/5		p	1/5	1/5	1/5	2/5
24	E_{24}	0	2	10	28	32	E_{32}	-6	-5	-1	8
	p	1/5	2/5	1/5	1/5		p	1/5	2/5	1/5	1/5
25	E_{25}	0	16	32	40	33	E_{33}	-6	2	10	14
	p	1/2	1/8	1/8	1/4		p	1/2	1/8	1/8	1/4
26	E_{26}	0	8	20	28	34	E_{34}	-6	-2	4	8
	p	1/4	1/4	1/4	1/4		p	1/4	1/4	1/4	1/4
27	E_{27}	0	8	10	40	35	E_{35}	-6	-2	-1	14
	p	1/2	1/4	1/5	1/20		p	1/2	1/4	1/5	1/20
28	E_{28}	0	2	4	16	36	E_{36}	-6	-5	-4	3
	p	1/3	1/3	1/6	1/6		p	1/3	1/3	1/6	1/6
29	E_{29}	0	8	12	20	37	E_{37}	-6	-4	-2	10
	p	1/5	1/5	1/5	2/5		p	1/2	1/4	1/8	1/8
30	E_{30}	0	3	6	12	38	E_{38}	-6	-3	-2	6
	p	1/3	1/3	1/6	1/6		p	1/3	1/3	1/6	1/6

Практическое задание № 6. Оценивание в условиях неопределенности

Цель работы: практическое изучение методов оценивания альтернатив в различных условиях функционирования сложных систем.

6.1. Теоретические сведения

Организационно-технические системы имеют специфические черты, не позволяющие свести их ни к детерминированным, ни к вероятностным, что не позволяет использовать для их оценки детерминированные или вероятностные критерии. Условия оценки эффективности систем для неопределенных операций можно представить в виде таблицы

a_i	n_j				$K(a_i)$
	n_1	n_2	...	n_k	
a_1	k_{11}	k_{12}	...	k_{1k}	
a_2	k_{21}	k_{22}	...	k_{2k}	
...	...	...	...	...	...
a_n	k_{n1}	k_{n2}	...	k_{nk}	

Здесь:

a_i – вектор управляемых параметров, определяющий свойства системы ($i=1, \dots, n$);

n_j – вектор неуправляемых параметров, определяющий состояние обстановки ($j=1, \dots, k$);

k_{ij} – значение эффективности системы a_i для состояния обстановки n_j ;

$K(a_i)$ – коэффициент эффективности системы (альтернативы) a_i .

Каждая строка таблицы содержит значения эффективности одной системы для всех состояний обстановки n_j , а каждый столбец – значения эффективности для всех систем a_i для одного состояния обстановки.

В зависимости от характера предпочтений ЛПР в условиях неопределенных могут использоваться следующие критерии.

6.1.1. Критерий среднего выигрыша

Предполагает задание вероятностей состояния обстановки p_j . Эффективность систем оценивается как среднее ожидаемое значение (математическое ожидание) оценок эффективности по всем состояниям обстановки:

$$K(a_i) = \sum_{j=1}^m p_j k_{ij}.$$

Оптимальной системе будет соответствовать эффективность

$$K_{\text{опт}} = \max_i \sum_{j=1}^m p_j k_{ij}.$$

6.1.2. Критерий Лапласа

В основе критерия лежит предположение: поскольку о состояниях обстановки ничего не известно, то их можно считать равновероятными. Поэтому:

$$K(a_i) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m k_{ij};$$

$$K_{\text{опт}} = \max_i \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m k_{ij}.$$

6.1.3. Критерий осторожного наблюдателя (критерий Вальда)

Это **максиминный** критерий, гарантирующий максимальный выигрыш при наихудших условиях. Критерий основывается на том, что, если состояние обстановки неизвестно, нужно поступить самым осторожным образом, ориентируясь на минимальное значение эффективности каждой системы.

В каждой строке матрицы эффективности находится минимальная из оценок систем по различным состояниям обстановки:

$$K(a_i) = \min_j k_{ij}.$$

Оптимальной считается система для строки с максимальным значением эффективности:

$$K_{\text{опт}} = \max_i \left\{ \min_j k_{ij} \right\}.$$

6.1.4. Критерий максимакса

Этим критерием предписывается оценивать системы по максимальному значению эффективности и выбирать в качестве оптимального решения систему, обладающую эффективностью наибольшей из максимумов:

$$K(a_i) = \max_{j=1, \dots, m} k_{ij};$$

$$K_{\text{опт}} = \max_i \left\{ \max_j k_{ij} \right\}, i = 1, \dots, n.$$

6.1.5. Критерий пессимизма-оптимизма (критерий Гурвица)

Это критерий обобщенного максимина. Согласно данному критерию, при оценке и выборе систем неразумно проявлять как осторожность, так и азарт, а следует, учитывая самое высокое и самое низкое значения эффективности, занимать промежуточное положение (взвешиваются наилучшие и наихудшие условия). Для этого вводится коэффициент оптимизма α ($0 \leq \alpha \leq 1$), характеризующий отношение к риску лица, принимающего решения.

Эффективность системы находится как взвешенная с помощью коэффициента α сумма максимальной и минимальной оценок:

$$K(a_i) = \alpha \max_j k_{ij} + (1 - \alpha) \min_j k_{ij}, 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Условие оптимальности записывается в виде:

$$K_{\text{опт}} = \max_i \left\{ \alpha \max_j k_{ij} + (1 - \alpha) \min_j k_{ij} \right\}, 0 \leq \alpha \leq 1.$$

6.1.6. Критерий минимального риска (критерий Сэвиджа)

Критерий минимизирует потери эффективности при наихудших условиях. Для оценки систем на основе данного критерия матрица эффективности должна быть преобразована в матрицу потерь (риска). Каждый элемент матрицы потерь определяется как разность между максимальным и текущим значениями оценок эффективности в столбце:

$$\Delta k_{ij} = \max_i k_{ij} - k_{ij}.$$

После преобразования матрицы используется критерий минимакса:

$$K(a_i) = \max_j \Delta k_{ij},$$

$$K_{\text{опт}} = \min_i \left\{ \max_j \Delta k_{ij} \right\}.$$

Критерии Сэвиджа, как и критерий Вальда, относится к числу осторожных критериев. Необходимо отметить, что выбор какого-то критерия приводит к принятию решения по оценке систем, которое может быть совершенно отлично от решений, диктуемых другими критериями.

6.2. Содержание работы

Вариант работы определяется порядковым номером в списке группы. Работа выполняется в среде табличного редактора Microsoft Excel.

1. Подготовьте в табличном редакторе Microsoft Excel исходную таблицу со структурой, соответствующей структуре таблицы из раздела 6.1.

2. Заполните ячейки таблицы данными своего варианта.

3. Добавьте столбец для вычисления средневзвешенного значения по каждой операции (альтернативе) и впишите в его ячейки выражение из раздела 6.1.

4. Определите операцию a_i , которую следует считать наилучшим вариантом в смысле максимума математического ожидания.

5. Повторите шаги 1-4 для каждого из критериев, описанных в разделе 6.1 (при оценивании по критерию Сэвиджа нужно будет дополнительно построить таблицу потерь).

Оценивание по критерию Гурвица должно быть выполнено дважды: один раз со значением $\alpha=\alpha_1$, указанным первым в варианте задания, второй раз – со значением $\alpha=\alpha_2$, указанным в варианте задания вторым.

6.3. Отчет по работе

Отчет по работе должен включать исходные данные и результаты.

1. Таблицы по каждому критерию должны располагаться по левой стороне листа одна под одной и предваряться заголовком с названием критерия.
2. Результат (выбор) должен указывать на лучшую операцию по данному критерию и приводиться непосредственно под заполненной таблицей.
3. Точность вычислений – два десятичных знака.

6.4. Контрольные вопросы

1. С какой целью необходимо проводить оценивание альтернатив?
2. Какими условиями функционирования систем определяется выбор подхода к оцениванию?
3. Какие существуют методы выбора наилучшей альтернативы в условиях неопределенности?
4. В чем состоит особенность критерия среднего выигрыша по отношению к другим критериям?
5. Какие подходы могут применяться для оценивания альтернатив?
6. Что такое «показатель», какие типы показателей существуют?
7. Что такое обобщенный показатель, как можно осуществить переход к обобщенному показателю?
8. Зачем требуется нормирование показателей, какие правила для этого могут применяться?

6.5. Варианты. Оценивание в условиях неопределенности

Для каждого варианта приводятся:

- матрица значений K_{ij} эффективности применения альтернативы a_i для внешнего воздействия N_j (первые пять строк таблицы);
- вероятности p_j появления каждого из воздействий N_j (последняя строка таблицы);
- коэффициенты оптимизма α_1 и α_2 (записаны под таблицей) для двух вариантов оценивания по критерию Гурвица).

1	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	13,1	9,8	23,3	17,7	19,9	16,4
a2	15,7	10,1	16,8	13,3	15,5	16,9
a3	10,4	9,7	23,6	17,0	21,3	15,0
a4	17,6	7,8	19,6	17,7	19,9	18,3
a5	19,2	8,4	21,4	15,8	16,7	20,0
Pj	0,10	0,11	0,32	0,11	0,24	0,12

$\alpha_1=0,1$ $\alpha_2=0,9$

2	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	9,7	22,3	17,7	18,8	14,3	13,1
a2	10,2	16,8	13,3	14,6	16,9	15,7
a3	9,7	22,2	17,0	22,3	11,9	10,4
a4	7,8	21,6	17,7	19,8	17,3	17,6
a5	7,5	22,4	14,8	17,6	21,0	19,2
Pj	0,20	0,09	0,12	0,25	0,11	0,23

$\alpha_1=0,1$ $\alpha_2=0,9$

3	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	12,3	9,7	17,7	18,8	14,3	13,1
a2	14,8	10,2	13,3	14,6	16,9	15,7
a3	13,4	9,7	17,0	19,4	11,9	10,4
a4	15,6	7,8	18,7	19,4	17,3	17,6
a5	16,4	7,5	15,8	18,6	19,0	19,2
Pj	0,11	0,15	0,20	0,21	0,10	0,23

$\alpha_1=0,4$ $\alpha_2=0,6$

4	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	10,4	15,7	10,3	13,1	13,3	14,4
a2	17,6	10,4	17,6	15,7	15,7	13,3
a3	17,3	17,6	19,2	14,7	15,7	16,9
a4	15,7	18,9	17,3	19,3	10,4	11,8
a5	12,0	15,7	17,8	18,9	17,6	17,0
Pj	0,12	0,19	0,11	0,23	0,22	0,13

$\alpha_1=0,4$ $\alpha_2=0,6$

5	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	9,4	15,7	14,4	15,1	18,4	17,5
a2	11,6	12,4	17,6	15,7	17,3	15,3
a3	13,2	17,6	18,2	14,6	17,0	15,8
a4	8,7	19,9	17,3	18,3	18,0	14,8
a5	11,9	15,7	17,8	17,9	19,3	17,6
Pj	0,12	0,26	0,11	0,23	0,03	0,25

$\alpha_1=0,4$ $\alpha_2=0,6$

6	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	13,4	15,5	14,6	15,5	18,4	17,3
a2	12,6	12,7	17,6	15,6	17,1	15,7
a3	13,2	17,6	18,3	14,5	16,9	14,9
a4	10,7	19,8	17,9	18,6	15,9	13,3
a5	15,0	13,3	17,8	17,7	19,6	17,6
Pj	0,12	0,19	0,31	0,23	0,03	0,12

$\alpha_1=0,3$ $\alpha_2=0,8$

7	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	13,2	17,4	18,3	14,5	16,9	14,9
a2	10,7	19,7	17,9	18,6	15,9	13,3
a3	15,0	13,3	17,8	17,7	19,1	17,6
a4	13,4	15,5	14,6	15,5	18,4	17,3
a5	12,6	12,7	17,6	15,6	17,1	15,7
Pj	0,11	0,20	0,29	0,24	0,04	0,12

$\alpha_1=0,9$ $\alpha_2=0,4$

8	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	18,3	17,4	13,2	14,1	14,9	16,9
a2	17,9	14,7	10,7	18,6	13,3	15,9
a3	17,8	13,0	15,0	17,7	17,1	17,6
a4	16,6	15,5	13,4	14,1	17,3	18,4
a5	17,6	12,7	12,6	15,6	15,7	17,1
Pj	0,20	0,18	0,11	0,05	0,12	0,34

$\alpha_1=0,9$ $\alpha_2=0,5$

9	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	14,2	15,5	13,4	16,6	17,3	18,4
a2	18,7	12,7	12,6	17,6	15,7	17,1
a3	17,8	13,0	15,0	17,8	17,1	17,6
a4	14,1	12,7	12,6	17,6	15,7	17,1
a5	15,6	15,5	13,4	16,6	17,3	18,4
Pj	0,08	0,17	0,12	0,20	0,12	0,31

$\alpha_1=0,8$ $\alpha_2=0,2$

10	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	15,6	15,6	13,4	16,6	17,3	18,4
a2	17,1	15,7	12,7	17,6	15,7	18,7
a3	17,6	17,1	13,0	17,8	17,1	17,8
a4	17,1	15,7	12,7	17,6	15,7	14,1
a5	14,2	15,5	13,4	16,6	17,3	18,4
Pj	0,31	0,12	0,17	0,20	0,12	0,08

$\alpha_1=0,8$ $\alpha_2=0,4$

11	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	15,7	12,7	17,6	15,7	18,7	18,4
a2	17,1	13,0	16,2	16,1	17,8	18,7
a3	15,7	12,7	17,6	15,7	14,1	18,8
a4	15,5	13,4	16,6	17,3	18,4	14,1
a5	14,2	15,5	13,4	16,6	17,3	18,4
Pj	0,21	0,18	0,25	0,16	0,12	0,08

$\alpha_1=0,8$ $\alpha_2=0,1$

12	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	15,8	12,3	15,7	17,6	18,7	18,4
a2	17,2	12,3	16,1	16,1	17,8	18,7
a3	15,8	12,6	15,7	17,6	14,1	18,8
a4	15,1	12,4	17,3	16,6	18,4	14,1
a5	14,5	15,5	16,6	13,4	17,3	18,4
Pj	0,26	0,25	0,12	0,16	0,08	0,13

$\alpha_1=0,7$ $\alpha_2=0,3$

13	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	23,3	17,7	19,9	16,4	13,1	9,8
a2	16,8	13,3	15,5	16,9	15,7	10,1
a3	23,6	17,0	21,3	15,0	10,4	9,7
a4	19,6	17,7	19,9	18,3	17,6	7,8
a5	21,4	15,8	17,7	20,0	19,2	8,4
Pj	0,32	0,11	0,24	0,12	0,10	0,11

$\alpha_1=0,2$ $\alpha_2=0,9$

14	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	14,3	13,1	17,7	18,8	9,7	22,3
a2	16,9	15,7	13,3	14,6	10,2	16,8
a3	14,9	10,4	17,0	22,3	9,7	22,2
a4	17,3	17,6	17,7	19,8	7,8	21,6
a5	21,0	19,2	14,8	17,6	7,5	22,4
Pj	0,11	0,23	0,12	0,25	0,20	0,09

$\alpha_1=0,1$ $\alpha_2=0,9$

15	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	13,3	14,6	16,9	15,7	14,8	10,2
a2	17,0	19,4	11,9	10,4	13,4	9,7
a3	18,7	19,4	17,3	17,6	15,6	7,8
a4	15,8	18,6	19,0	19,2	16,4	7,5
a5	17,7	18,8	14,3	13,1	12,3	9,7
Pj	0,20	0,21	0,10	0,23	0,11	0,15

$\alpha_1=0,4$ $\alpha_2=0,6$

16	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	14,4	17,6	17,6	15,7	15,7	13,3
a2	17,6	17,2	17,3	14,7	15,7	16,9
a3	15,7	10,3	10,4	13,1	13,3	14,4
a4	18,9	17,3	15,7	19,3	10,4	11,8
a5	15,7	17,8	12,0	18,9	17,6	17,0
Pj	0,19	0,11	0,12	0,23	0,22	0,13

$\alpha_1=0,3$ $\alpha_2=0,8$

17	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	13,2	17,6	18,2	13,6	17,0	15,8
a2	8,7	19,9	17,3	18,3	18,0	14,8
a3	9,4	15,7	14,4	15,1	18,4	17,5
a4	11,6	12,4	17,6	15,7	17,3	15,3
a5	11,9	15,7	17,8	17,9	19,3	17,6
Pj	0,12	0,27	0,11	0,23	0,03	0,24

$\alpha_1=0,4 \quad \alpha_2=0,6$

18	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	13,4	15,5	14,6	15,5	18,4	13,4
a2	10,7	19,8	17,9	18,6	15,9	10,7
a3	13,2	17,6	18,3	14,5	16,9	13,2
a4	12,6	12,7	17,6	15,6	17,1	12,6
a5	15,0	13,3	17,8	17,7	19,6	15,0
Pj	0,12	0,19	0,31	0,23	0,03	0,12

$\alpha_1=0,2 \quad \alpha_2=0,8$

19	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	14,6	15,5	18,4	17,3	13,4	15,5
a2	17,6	15,6	17,1	15,7	12,6	12,7
a3	17,9	18,6	15,9	13,3	10,7	19,7
a4	17,8	15,5	19,1	17,6	15,0	13,3
a5	18,3	15,5	16,9	14,9	13,2	17,4
Pj	0,29	0,24	0,04	0,12	0,11	0,20

$\alpha_1=0,9 \quad \alpha_2=0,4$

20	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	15,0	15,5	17,1	17,6	17,8	13,0
a2	13,4	14,1	17,3	18,4	16,6	15,5
a3	12,6	15,6	15,7	17,1	17,6	12,7
a4	13,2	14,1	14,9	16,9	18,3	17,4
a5	10,7	18,6	13,3	15,9	17,9	14,7
Pj	0,15	0,05	0,12	0,34	0,20	0,14

$\alpha_1=0,9 \quad \alpha_2=0,5$

21	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	17,6	13,0	15,0	17,8	17,1	17,8
a2	18,4	15,5	13,3	16,6	17,3	14,2
a3	17,1	12,7	12,6	17,6	15,7	18,7
a4	17,1	14,7	12,6	17,6	15,7	14,1
a5	18,4	15,5	13,2	16,6	17,3	15,6
Pj	0,31	0,17	0,12	0,20	0,12	0,08

$\alpha_1=0,8 \quad \alpha_2=0,2$

22	N1	N2	N3	N4	N5	N6
a1	17,1	17,1	13,0	17,8	16,8	17,6
a2	15,7	15,7	12,7	17,6	14,1	17,1
a3	17,3	15,6	13,4	16,6	18,4	15,6
a4	15,7	15,7	12,7	17,6	18,7	17,1
a5	17,3	15,5	13,4	16,6	18,4	14,2
Pj	0,12	0,12	0,17	0,20	0,08	0,31

$\alpha_1=0,8$ $\alpha_2=0,4$

Практическое задание № 7. Матричные игры

Рассмотрим игру $m \times n$ с матрицей $P = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$. Выбирая стратегию A_i , игрок A должен рассчитывать, что игрок B ответит на нее той стратегией B_j , при которой выигрыш игрока A будет наименьшим.

Пусть a_i – наименьший выигрыш игрока A при выборе им стратегии A_i для всех возможных стратегий игрока B , тогда

$$a_i = \min_{j=1, \dots, n} a_{ij}, \quad (7.1)$$

то есть наименьшее число в i -ой строке платежной матрицы.

Среди всех чисел $a_i, i = 1, 2, \dots, m$ выберем наибольшее:

$$a = \max_{i=1, \dots, m} a_i. \quad (7.2)$$

Следовательно,

$$a = \max_{i=1, \dots, m} \min_{j=1, \dots, n} a_{ij}. \quad (7.3)$$

Число a называется нижней ценой игры.

Число a называется **нижней ценой игры**, или **максиминным выигрышем (максимином)**. Это гарантированный выигрыш игрока A при любой стратегии игрока B . Стратегия, соответствующая максимину, называется **максиминной стратегией**.

Игрок B заинтересован в том, чтобы уменьшить выигрыш игрока A , поэтому он выбирает стратегию B_j , учитывая при этом максимально возможный выигрыш для A . Пусть B_j – наибольший выигрыш игрока A при выборе им всех возможных стратегий, когда игрок B выбирает стратегию B_j , тогда

$$B_j = \max_{i=1, \dots, m} a_{ij}. \quad (7.4)$$

Одновременно β_j является наибольшим проигрышем игрока B при выборе им стратегии B_j , поэтому среди всех чисел β_j выбираем наименьшее, чтобы найти ту стратегию игрока B , при которой его проигрыш будет наименьшим. Это число обозначим β , и оно равно

$$\beta = \min_{j=1, \dots, n} \max_{i=1, \dots, m} a_{ij}. \quad (7.5)$$

Число β называется **верхней ценой игры** или **минимаксным выигрышем (минимаксом)**. Это гарантированный проигрыш игрока B . Гарантированный в том смысле, что средний проигрыш игрока B при многократном повторении

игры не будет больше этого значения. Также и выигрыш игрока А не превысит верхней цены игры. Стратегия, соответствующая минимаксу, называется **минимаксной стратегией**.

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее «осторожных» минимаксной и максиминной стратегий, называется **принципом минимакса**. Этот принцип следует из того, что в антагонистической игре каждый игрок стремится достичь цели, противоположной цели его противника.

Пример 4.1. Определим верхнюю и нижнюю цены игры и соответствующие стратегии для игры с платежной матрицей:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для первой строки платежной матрицы, т. е. при выборе игроком стратегии A_1 получаем число:

$$\alpha_1 = \min_{j=1,2,3} \alpha_{1,j} = \min(-1; 0; 1) = -1.$$

Это число достигается при выборе игроком B стратегии B_1 . Действуя аналогичным образом для второй и третьей строки, получаем соответственно числа $(-1$ и $-1)$ при выборе игроком A второй и третьей стратегией.

Гарантируя себе минимальный выигрыш при любой стратегии игрока B , то есть

$$\alpha = \max_{i=1,\dots,m} \alpha_i = \max(-1; -1; -1) = -1.$$

Игрок A может выбирать любую из своих стратегий, поскольку каждая из них для данной игры является максиминной.

Аналогично максимальный проигрыш игрока B при выборе стратегии B_1 определяется числом $\beta_1 = \max(-1; 1; 0) = 1$. При выборе стратегии B_2 – числом $\beta_2 = \max(0; -1; 1) = 1$. При выборе стратегии B_3 – числом $\beta_3 = \max(1; 0; -1) = 1$. Максимальный проигрыш игрока B при любой стратегии игрока A равен верхней цене игры $\beta = \min(1; 1; 1) = 1$.

Этот же результат получаем, используя для решения задачи непосредственно формулу (7.5):

$$\beta = \min_{j=1,\dots,n} \max_{i=1,\dots,m} a_{ij} = \min_{j=1,2,3} \max_{i=1,2,3} a_{ij} = \min_{j=1,2,3} (1; 1; 1) = 1.$$

Таким образом, любая стратегия игрока B является минимаксной. Результаты решения задачи можно представить в таблице 7.1.

В рассмотренном примере нижняя и верхняя цены игры различны. При многократном повторении этой игры средняя цена игры будет равна числу v , которое принимает значение из промежутка, определяемого числами α и β , а именно, справедливо неравенство:

$$\alpha \leq v \leq \beta \tag{7.6}$$

Таблица 7.1 – Результаты решения

A_i	B_j			a_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	-1	0	1	-1
A_2	1	-1	0	-1
A_3	0	1	-1	-1
β_j	1	1	1	$\alpha = -1$ $\beta = 1$

Если верхняя и нижняя цена игры совпадает, то их общее значение называют **чистой ценой игры**, или **ценой игры**, при этом справедливо равенство

$$\alpha = \beta = v. \quad (7.7)$$

В этом случае игра имеет решение в чистых стратегиях, а именно оптимальной для игрока A является максиминная стратегия, а оптимальной стратегией для игрока B – минимаксная. Эта пара чистых стратегий A_i и B_j определяется ценой игры v , т. е. числом, стоящим на пересечении i -ой строки и j -го столбца платежной матрицы, равным v .

Пара чистых стратегий A_i и B_j дает оптимальное решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент a_{ij} является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке.

Игра, для которой $\alpha = \beta$, называется **игрой с седловой точкой**.

Таким образом решение игры в чистых стратегиях существует тогда и только тогда, когда платежная матрица имеет седловую точку.

Пример 7.1. Решить игру в чистых стратегиях, если матрица игры

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 10 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Все расчеты удобно проводить в таблице 7.2, аналогичной таблице 7.1.

Таблица 7.2 – Результаты решения

A_i	B_j			a_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	5	7	9	5
A_2	10	8	9	8
A_3	8	7	7	7
β_j	10	8	9	$\alpha = \beta = 8$

Из таблицы видно, что платежная матрица имеет седловую точку, а именно $a_{22} = 8$. Следовательно, цена игры $v = 8$, причем она достигается при паре чистых стратегий A_2 и B_2 , являющихся оптимальными стратегиями.

Оптимальным решением игры являются найденная пара чистых стратегий и соответствующая им цена игры, равная 8.

Задание. Найти решение игры в чистых стратегиях

Один вариант содержит 10 задач. Для каждого варианта в таблице указаны номера задач, приведенных ниже.

Вариант	Номер задачи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	4	9	8	12	17	23	27	29	30
2	2	6	7	11	15	19	21	24	26	28
3	3	10	12	13	14	18	20	22	25	29
4	4	5	16	20	21	23	24	27	28	30
5	5	6	9	10	11	13	16	19	23	25
6	6	8	12	14	15	17	18	22	24	28
7	1	3	7	14	15	16	18	20	23	25
8	2	4	8	10	12	14	22	24	28	30
9	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
10	6	8	10	14	16	18	25	26	27	28
11	2	5	13	13	17	20	23	25	26	31
12	3	10	12	17	18	19	22	24	27	35
13	4	9	13	16	19	20	21	23	25	32
14	6	11	14	15	17	18	22	24	28	33
15	7	12	15	16	18	20	21	29	30	34

Задачи

1. Мебельное предприятие планирует к массовому выпуску новую модель офисной мебели. Спрос на эту мебель не может быть точно определен. Однако можно предположить, что его величина характеризуется тремя возможными состояниями спроса: I, II, III.

С учетом этих состояний спроса анализируются три возможных варианта выпуска данной модели – А, Б, В. Каждый из этих вариантов требует своих затрат и обеспечивает в конечном счете различный эффект.

Прибыль, в тыс. руб., которую получит предприятие при данном объеме выпуска модели и соответствующем состоянии спроса, определяется матрицей:

	I	II	III
А	$\lambda+1$	$\lambda+2$	$\lambda+4$
Б	$\lambda-1$	$\lambda+1$	$\lambda+2$
В	λ	$\lambda-1$	$\lambda+3$

Требуется найти объем выпуска модели офисной мебели, обеспечивающий среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, если параметр λ равен значению двух последних цифр в номере зачетной книжки.

В следующих задачах найти верхнюю и нижнюю цену игры. Если возможно, то найти решение игры в чистых стратегиях.

$$2. P = \begin{pmatrix} 15 & 17 & 19 \\ 10 & 18 & 19 \\ 18 & 17 & 17 \end{pmatrix} \quad 3. P = \begin{pmatrix} 11 & 38 & 15 \\ 24 & 11 & 13 \\ 13 & 21 & 16 \end{pmatrix} \quad 4. P = \begin{pmatrix} 55 & 57 & 79 \\ 70 & 88 & 89 \\ 88 & 76 & 77 \end{pmatrix}$$

$$5. P = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 18 \\ 19 & 15 & 18 \\ 18 & 14 & 16 \end{pmatrix} \quad 6. P = \begin{pmatrix} 21 & 28 & 25 \\ 24 & 19 & 19 \\ 23 & 21 & 26 \end{pmatrix} \quad 7. P = \begin{pmatrix} 35 & 53 & 39 \\ 50 & 38 & 59 \\ 48 & 56 & 37 \end{pmatrix}$$

$$8. P = \begin{pmatrix} 65 & 67 & 79 \\ 61 & 78 & 99 \\ 98 & 77 & 97 \end{pmatrix} \quad 9. P = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 35 \\ 14 & 15 & 16 \\ 18 & 14 & 16 \end{pmatrix} \quad 10. P = \begin{pmatrix} 45 & 54 & 46 \\ 37 & 88 & 81 \\ 88 & 49 & 82 \end{pmatrix}$$

$$11. P = \begin{pmatrix} 17 & 17 & 19 \\ 18 & 18 & 19 \\ 15 & 17 & 17 \end{pmatrix} \quad 12. P = \begin{pmatrix} 21 & 23 & 25 \\ 24 & 21 & 23 \\ 23 & 21 & 21 \end{pmatrix} \quad 13. P = \begin{pmatrix} 25 & 25 & 27 \\ 27 & 28 & 25 \\ 28 & 25 & 27 \end{pmatrix}$$

$$14. P = \begin{pmatrix} 35 & 37 & 39 \\ 30 & 35 & 36 \\ 31 & 31 & 31 \end{pmatrix} \quad 15. P = \begin{pmatrix} 11 & 38 & 15 \\ 24 & 11 & 13 \\ 13 & 21 & 16 \end{pmatrix} \quad 16. P = \begin{pmatrix} 51 & 51 & 58 \\ 50 & 58 & 59 \\ 58 & 56 & 57 \end{pmatrix}$$

$$17. P = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 13 \\ 11 & 18 & 10 \\ 11 & 17 & 13 \end{pmatrix} \quad 18. P = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 15 \\ 14 & 11 & 13 \\ 13 & 21 & 16 \end{pmatrix} \quad 19. P = \begin{pmatrix} 15 & 27 & 23 \\ 23 & 28 & 29 \\ 29 & 26 & 25 \end{pmatrix}$$

$$20. P = \begin{pmatrix} 98 & 97 & 99 \\ 97 & 98 & 98 \\ 98 & 97 & 97 \end{pmatrix} \quad 21. P = \begin{pmatrix} 31 & 35 & 35 \\ 31 & 35 & 34 \\ 31 & 31 & 38 \end{pmatrix} \quad 22. P = \begin{pmatrix} 49 & 48 & 49 \\ 49 & 48 & 48 \\ 48 & 49 & 49 \end{pmatrix}$$

$$23. P = \begin{pmatrix} 91 & 97 & 92 \\ 91 & 98 & 93 \\ 91 & 97 & 94 \end{pmatrix} \quad 24. P = \begin{pmatrix} 53 & 55 & 55 \\ 51 & 55 & 54 \\ 51 & 51 & 53 \end{pmatrix} \quad 25. P = \begin{pmatrix} 19 & 18 & 17 \\ 19 & 17 & 18 \\ 18 & 19 & 19 \end{pmatrix}$$

$$26. P = \begin{pmatrix} 11 & 16 & 13 \\ 16 & 13 & 11 \\ 13 & 11 & 11 \end{pmatrix} \quad 27. P = \begin{pmatrix} 68 & 67 & 68 \\ 65 & 68 & 65 \\ 68 & 77 & 68 \end{pmatrix} \quad 28. P = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 29 \\ 19 & 28 & 28 \\ 28 & 19 & 19 \end{pmatrix}$$

$$29. P = \begin{pmatrix} 39 & 37 & 49 \\ 47 & 38 & 58 \\ 58 & 37 & 47 \end{pmatrix} \quad 30. P = \begin{pmatrix} 21 & 35 & 45 \\ 41 & 65 & 24 \\ 31 & 41 & 58 \end{pmatrix} \quad 31. P = \begin{pmatrix} 45 & 47 & 43 \\ 59 & 58 & 54 \\ 77 & 59 & 57 \end{pmatrix}$$

$$32. P = \begin{pmatrix} 79 & 77 & 74 \\ 77 & 73 & 75 \\ 78 & 73 & 74 \end{pmatrix} \quad 33. P = \begin{pmatrix} 21 & 32 & 31 \\ 21 & 25 & 24 \\ 31 & 21 & 25 \end{pmatrix} \quad 34. P = \begin{pmatrix} 65 & 65 & 65 \\ 59 & 65 & 65 \\ 57 & 58 & 65 \end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение матричной игры.
2. Какие матричные игры существуют?
3. Как называются участники матричной игры?
4. Как называется набор действий игрока?
5. Как задается парная игра с нулевой суммой?
6. Какая стратегия называется оптимальной?
7. Какая величина называется ценой игры?
8. Как определить минимаксную стратегию?
9. Как найти максиминную стратегию?
10. Чему равна нижняя цена игры?
11. Как найти верхнюю цену игры?
12. Какая игра называется игрой с седловой точкой?
13. Какая стратегия называется «чистой»?
14. Как задается смешанная стратегия?
15. Какие игры имеют решение в смешанных стратегиях?
16. Какие игры можно решать аналитическим способом?
17. Какие игры можно решать графическим методом?
18. Какому неравенству удовлетворяет цена игры?
19. Какой матрицей задается парная игра?
20. Какая стратегия называется доминирующей?
21. Какая стратегия называется доминируемой?
22. Какими стратегиями можно пренебречь при определении оптимального решения игры?
23. Как связаны платежи игроков в парной игре с нулевой суммой?
24. Какой прием используется при решении игр с платежными матрицами из отрицательных чисел?
25. Как изменится цена игры, если к каждому платежу прибавить одно и то же число?

**Практическое задание № 8. Решение задач теории игр
графоаналитическим методом
Решение матричных игр $2 \times n$ и $m \times 2$ графоаналитическим методом**

Наибольшее распространение в технических приложениях имеют парные стратегические бескоалиционные конечные некооперативные игры. Модель проблемной ситуации в этом случае имеет вид:

$$\langle U, V, W_1, W_2, R_1, R_2 \rangle,$$

где U – множество стратегий оперирующей стороны (конструктора);

V – множество стратегий оппонирующей стороны (технолог и природа);

W_1 и W_2 – показатели качества игроков;

R_1 и R_2 – системы предпочтения игроков.

Системы предпочтения игроков, в свою очередь, основываются на двух ведущих принципах рационального поведения: принципе наибольшего гарантированного результата и принципе равновесия.

Первый основан на том, что рациональным выбором одного из игроков должен считаться такой, при котором он рассчитывает на самую неблагоприятную для него реакцию со стороны другого игрока.

Второй принцип гласит, что рациональным выбором любого игрока считается такая стратегия $u\$$ (или $v\$$), для которой ситуация $(u\$, v\$)$ обоюдовыгодна, т. е. любое отклонение от данной ситуации игры не является выгодным ни для одного из игроков.

По характеру выигрышей игры делятся на:

- игры с нулевой суммой (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю);
- игры с ненулевой суммой.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш игрока 1 (первого игрока) в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 2 (второго игрока), столбец – номеру применяемой стратегии игрока 1; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям).

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение, и оно может быть легко найдено путём сведения игры к задаче линейного программирования.

Матричная игра двух игроков с нулевой суммой может рассматриваться как следующая абстрактная игра двух игроков.

Первый игрок имеет m стратегий $i = 1, 2, \dots, m$, второй имеет n стратегий $j = 1, 2, \dots, n$. Каждой паре стратегий (i, j) поставлено в соответствие число a_{ij} , выражающее выигрыш игрока 1 за счёт игрока 2, если первый игрок примет свою i -ю стратегию, а 2 – свою j -ю стратегию.

	B_1	B_2		B_n
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
.....				
A_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

Каждый из игроков делает один ход: игрок 1 выбирает свою i -ю стратегию ($i = \overline{1, m}$), 2 – свою j -ю стратегию ($j = \overline{1, n}$), после чего игрок 1 получает выигрыш a_{ij} за счёт игрока 2 (если $a_{ij} < 0$, то это значит, что игрок 1 платит второму сумму $|a_{ij}|$). На этом игра заканчивается.

Каждая стратегия игрока $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$ часто называется чистой стратегией.

Если рассмотреть матрицу A :

	B_1	B_2		B_j		B_n
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1j}		a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2j}		a_{2n}
.....						
A_i	a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}		a_{in}
....						
A_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mj}		a_{mn}

то проведение каждой партии матричной игры с матрицей A сводится к выбору игроком 1 i -й строки, а игроком 2 j -го столбца и получения игроком 1 (за счёт игрока 2) выигрыша a_{ij} .

Главным в исследовании игр является понятие оптимальных стратегий игроков. В это понятие интуитивно вкладывается такой смысл: стратегия игрока является оптимальной, если применение этой стратегии обеспечивает ему наибольший гарантированный выигрыш при всевозможных стратегиях другого игрока. Исходя из этих позиций, игрок 1 исследует матрицу выигрышей A следующим образом: для каждого значения i ($i = \overline{1, m}$) определяется минимальное значение выигрыша в зависимости от применяемых стратегий игрока 2:

$$\min_j a_{ij} \quad (i = \overline{1..m}),$$

т. е. определяется минимальный выигрыш для игрока 1, при условии, что он примет свою i -ю чистую стратегию, затем из этих минимальных выигрышей отыскивается такая стратегия $i = i_0$, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т. е. находится

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \underline{\alpha}. \quad (8.1)$$

Определение. Число $\underline{\alpha}$, определённое по формуле (8.1), называется **нижней чистой ценой игры** и показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать себе игрок 1, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях игрока 2.

Игрок 2 при оптимальном своём поведении должен стремиться по возможности за счёт своих стратегий максимально уменьшить выигрыш игрока 1. Поэтому для игрока 2 отыскивается

$$\max_i a_{ij} \quad (j = 1..n),$$

т. е. определяется $\max$ выигрыш игрока 1, при условии, что игрок 2 применит свою j -ю чистую стратегию, затем игрок 2 отыскивает такую свою $j = j_1$ стратегию, при которой игрок 1 получит $\min$ выигрыш, т. е. находит

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i_1 j_1} = \bar{\alpha}. \quad (8.2)$$

Определение. Число $\bar{\alpha}$, определяемое по формуле (8.2), называется **чистой верхней ценой игры** и показывает, какой максимальный выигрыш за счёт своих стратегий может себе гарантировать игрок 1.

Другими словами, применяя свои чистые стратегии, игрок 1 может обеспечить себе выигрыш не меньше $\underline{\alpha}$, а игрок 2 за счёт применения своих чистых стратегий может не допустить выигрыш игрока 1 больше, чем $\bar{\alpha}$.

Определение. Если в игре с матрицей A $\underline{\alpha} = \bar{\alpha}$, то говорят, что эта игра имеет *седловую точку* в чистых стратегиях и чистую цену игры:

$$v = \underline{\alpha} = \bar{\alpha}. \quad (8.3)$$

Седловая точка – это пара чистых стратегий (i_0, j_0) соответственно игроков 1 и 2, при которых достигается равенство $\underline{\alpha} = \bar{\alpha}$. В это понятие вложен следующий смысл: если один из игроков придерживается стратегии, соответствующей седловой точке, то другой игрок не сможет поступить лучше, чем придерживаться стратегии, соответствующей седловой точке.

В общем случае игра 2×2 определяется матрицей A :

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Прежде всего, необходимо проверить, есть ли у данной игры седловая точка.

Если да, то игра имеет решение в чистых стратегиях, причём оптимальными стратегиями игроков 1 и 2 соответственно будут чистая максиминная и чистая минимаксная стратегии. Если же игра с матрицей выигрышей A не имеет чистых стратегий, то оба игрока имеют только такие оптимальные стратегии, которые используют все свои чистые стратегии с положительными вероятностями.

Пусть $X = (p, 1-p)$ – оптимальная стратегия игрока 1, где p можно рассматривать как частоту (вероятность) использования стратегии A_1 первым игроком, а $(1-p)$ – частота (вероятность) использования стратегии A_2 первым игроком. Так как игрок 2 имеет смешанную оптимальную стратегию, то:

$$\begin{cases} a_{11}p + a_{21}(1-p) = v \\ a_{12}p + a_{22}(1-p) = v \end{cases} \quad (8.4)$$

Отсюда следует, что при $v \neq 0$ столбцы матрицы A не могут быть пропорциональны с коэффициентом пропорциональности, отличным от единицы. Если же коэффициент пропорциональности равен единице, то матрица A принимает вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{pmatrix}, \quad (8.5)$$

и игрок 1 имеет чистую оптимальную стратегию (он выбирает с вероятностью 1 ту из строк, элементы которой не меньше соответствующих элементов другой), что противоречит предположению. Следовательно, если $v \neq 0$ и игроки имеют только смешанные оптимальные стратегии, то определитель матрицы A отличен от нуля. Из этого следует, что последняя система уравнений имеет единственное решение. Решая её, находим:

$$p = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}. \quad (8.6)$$

Тогда подставив, (8.6) в (8.4) можно получить выражение для цены игры:

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}. \quad (8.7)$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к тому, что оптимальная стратегия игрока 2 (второго игрока) $Y = (q, 1-q)$, где q – можно рассматривать как частоту (вероятность) использования стратегии B_1 вторым игроком, а $(1-q)$ – частоту (вероятность) использования стратегии B_2 вторым игроком. Тогда имеем:

$$\begin{cases} a_{11}q + a_{12}(1-q) = v \\ a_{21}q + a_{22}(1-q) = v \end{cases}, \quad (8.8)$$

откуда

$$q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}. \quad (8.9)$$

Поясним графический метод решения матричных игр на примерах.

8.1. Задача 1 (решение игры 2 x n)

Рассмотрим матричную игру, заданную платёжной матрицей первого игрока.

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	11
A_2	7	5	2

1. Проверим, есть ли у данной игры решение в области смешанных стратегий, т. е. есть ли у заданной матрицы седловая точка.

а. Найдем нижнюю цену игры $\underline{\alpha}$:

$$\underline{\alpha} = \max_i \min_j a_{ij} = \max_{i=1..2} \min_{j=1..3} a_{ij} = \max_{i=1..2} \{2, 2\} = 2.$$

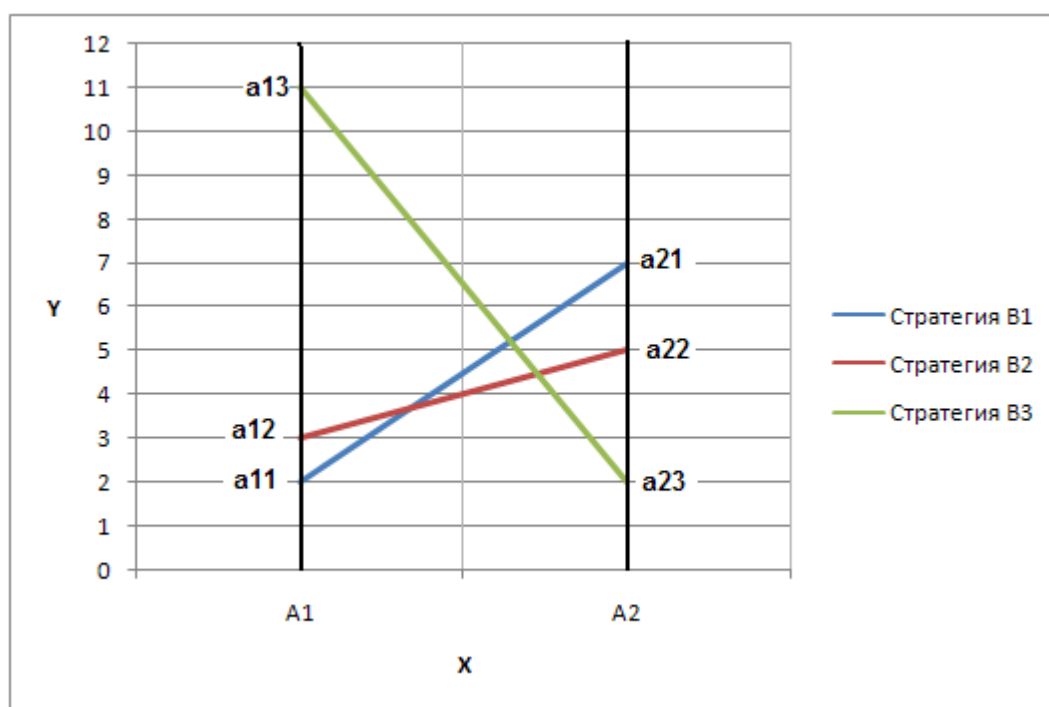
б. Найдем верхнюю цену игры $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\alpha} = \min_j \max_i a_{ij} = \min_{j=1..3} \max_{i=1..2} a_{ij} = \min_{j=1..3} \{7, 5, 11\} = 5.$$

с. Нижняя цена игры не равна верхней цене игры, следовательно, седловой точки у заданной матрицы выигрышей нет и решения в чистых стратегиях отсутствует. Поэтому решение необходимо искать в области смешанных стратегий.

2. Данная игра 2 x 3 (или в общем случае 2 x n), следовательно, необходимо строить прямые, соответствующие стратегиям второго игрока. Рассмотрим подробно алгоритм решения матричных игр графоаналитическим методом.

3. На плоскости xOy введём систему координат и на оси Oх отложим отрезок единичной длины A_1, A_2 , каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию игрока 1 ($x, 1 - x$). В частности, точке $A_1 (0;0)$ отвечает стратегия A_1 , точке $A_2 (1;0)$ – стратегия A_2 и т. д.



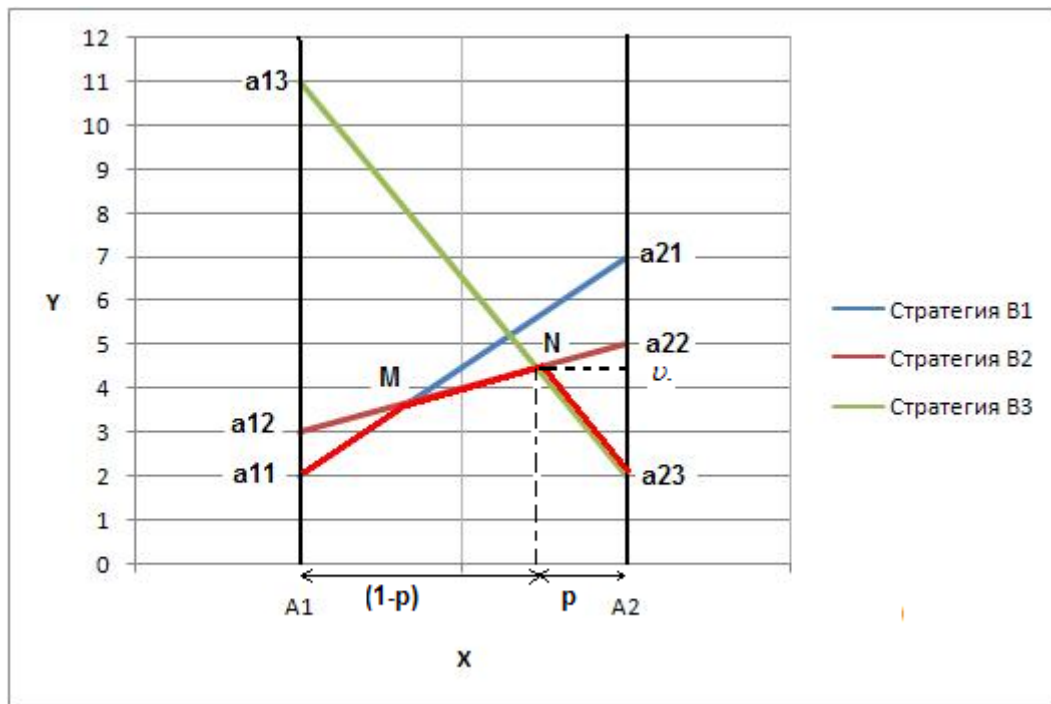
4. В точках A_1 и A_2 восстановим перпендикуляр и на полученных прямых будем откладывать выигрыш игроков. На первом перпендикуляре (в данном случае он совпадает с осью Oy) отложим выигрыш игрока 1 при стратегии A_1 , а на втором – при стратегии A_2 . Если игрок 1 применит стратегию A_1 , то выиграет при стратегии B_1 игрока 2 – 2 (элемент a_{11} матрицы A), при стратегии B_2 – 3 (элемент a_{12} матрицы A), а при стратегии B_3 – 11 (элемент a_{13} матрицы A).

Если же игрок 1 применит стратегию A_2 , то его выигрыш при стратегии B_1 равен 7 (элемент a_{21} матрицы A), при B_2 – 5 (элемент a_{22} матрицы A), а при B_3 – 2 (элемент a_{23} матрицы A). Эти числа определены на перпендикуляре,

восстановленном в точке A_2 . Соединив между собой точки, соответствующие a_{11} и a_{21} , a_{12} и a_{22} , a_{13} и a_{23} , получим три прямые, расстояние до которых от оси Ox определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий. Например, расстояние от любой точки отрезка $a_{11}a_{21}$ до оси Ox определяет средний выигрыш v_1 при любом сочетании стратегий A_1 A_2 (с частотами x и $1-x$) и стратегией B_1 игрока 2. Это расстояние равно

$$2x_1 + 6(1 - x_2) = v_1$$

5. Рассмотрим ломаную $a_{11}MNa_{23}$.



Таким образом, координаты точек, принадлежащих ломаной $a_{11}MNa_{23}$, определяют минимальный выигрыш игрока 1 при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина является максимальной в точке N ; следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия $X^* = (p, 1-p)$, а её координата равна цене игры v . Координаты точки N находим как точку пересечения прямых $a_{12}a_{22}$ и $a_{13}a_{23}$.

Соответствующие два уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} 3p + 5(1 - p) = v \\ 11p + 2(1 - p) = v \end{cases} \Rightarrow p = \frac{3}{11}; v = \frac{49}{11} = 4\frac{5}{11}.$$

Проверка: цена игры v должна удовлетворять следующему неравенству:

$$\underline{a} \leq v \leq \bar{a}.$$

Это неравенство выполнено:

$$2 \leq 4\frac{5}{11} \leq 5.$$

Следовательно, $X = \left(\frac{3}{11}; \frac{8}{11}\right)$, при цене игры $v = \frac{49}{11}$. Таким образом, мы можем найти оптимальную стратегию при помощи матрицы A^* :

	B ₂	B ₃
A ₁	3	11
A ₂	5	2

Оптимальные стратегии для игрока 2 можно найти, решив систему:

$$\begin{cases} 3q + 11(1 - q) = v \\ 5q + 2(1 - q) = v \end{cases} \Rightarrow q = \frac{9}{11}.$$

И, следовательно, $Y = \left(0, \frac{9}{11}; \frac{2}{11}\right)$. Из рисунка видно, что стратегия B₁ не войдёт в оптимальную стратегию.

Значения p , q и v можно также вычислить, используя формулы (6), (7) и (9) для матрицы A^* .

Ответ: Оптимальное решение находится в области смешанных стратегий. Оптимальная стратегия первого игрока $X = \left(\frac{3}{11}; \frac{8}{11}\right)$, оптимальная стратегия второго игрока $Y = \left(0, \frac{9}{11}; \frac{2}{11}\right)$, цена игры $v = 4\frac{5}{11}$.

8.2. Задача 2 (решение игры $m \times 2$)

Найти решение матричной игры, заданной матрицей выигрышей первого игрока.

	B ₁	B ₂
A ₁	6	5
A ₂	4	6
A ₃	2	7
A ₄	1	8

Решение

1. Проверим, есть ли у данной игры решение в области смешанных стратегий, т. е. есть ли у заданной матрицы седловая точка.

а. Найдем нижнюю цену игры $\underline{\alpha}$:

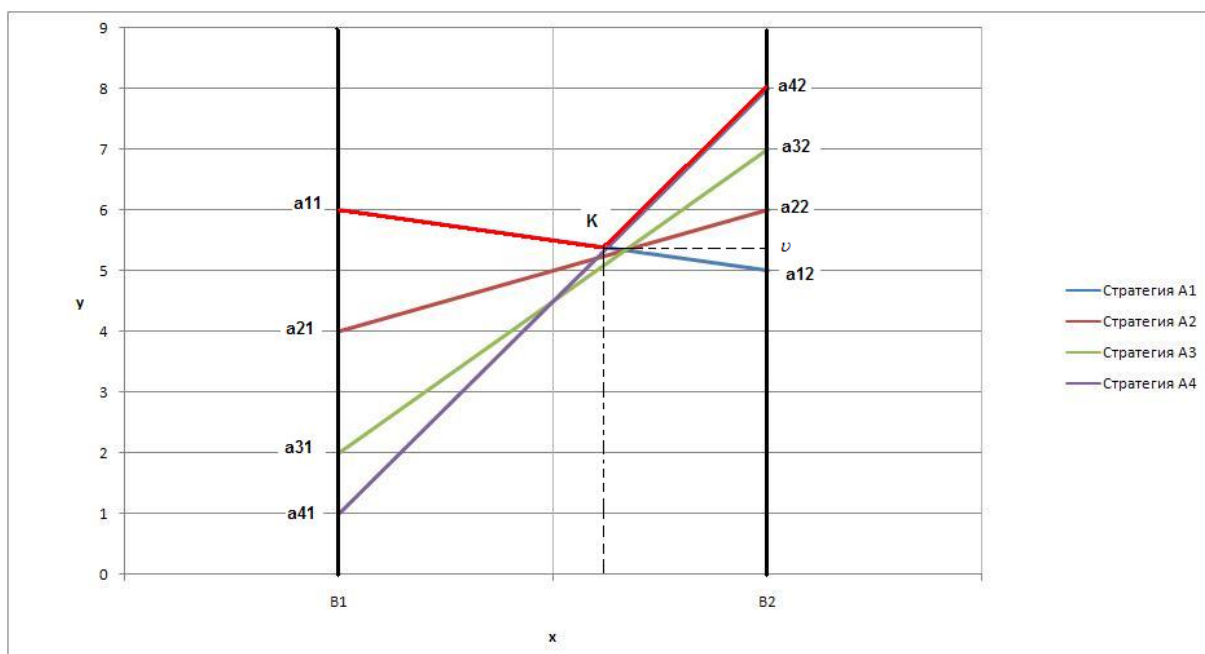
$$\underline{\alpha} = \max_i \min_j a_{ij} = \max_{i=1..4} \min_{j=1..2} a_{ij} = \max_{i=1..4} \{5, 4, 2, 1\} = 5.$$

б. Найдем верхнюю цену игры $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\alpha} = \min_j \max_i a_{ij} = \min_{j=1..2} \max_{i=1..4} a_{ij} = \min_{j=1..2} \{6, 8\} = 6.$$

с. Нижняя цена игры не равна верхней цене игры, следовательно, седловой точки у заданной матрицы выигрышей нет и решения в чистых стратегиях отсутствует. Поэтому решение необходимо искать в области смешанных стратегий.

2. Матрица имеет размерность 4×2 . В этом случае строим прямые, соответствующие стратегиям игрока 1.



3. Ломаная $a_{11}Ka_{42}$ соответствует верхней границе выигрыша игрока 1, а отрезок – перпендикуляр из точки K до оси x – цене игры.

Таким образом, полезными стратегиями первого игрока (полезные стратегии – это те стратегии, который входят в состав оптимальной смешанной стратегии) являются стратегии A_1 и A_4 , так как точка K образована пересечением именно этих стратегий.

4. Тогда можно перейти к матрице $A^* 2 \times 2$:

	B_1	B_2
A_1	6	5
A_4	1	8

5. Находим оптимальную смешанную стратегию первого игрока, применив формулу (8.6):

$$p = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{8 - 1}{6 - 1 - 5 + 8} = \frac{7}{8}.$$

Следовательно, оптимальная смешанная стратегия первого игрока $X = (p, 0, 0, 1 - p) = \left(\frac{7}{8}; 0; 0; \frac{1}{8}\right)$. Стратегии A_2 и A_3 не входят в оптимальную смешанную стратегию (это видно из рисунка), поэтому частота (вероятность) их использования равна нулю.

6. Находим цену игры, применив формулу (8.7):

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{6 \cdot 8 - 5 \cdot 1}{6 - 5 - 1 + 8} = \frac{43}{8} = 5 \frac{3}{8}.$$

Проверка: цена игры v должна удовлетворять следующему неравенству:

$$\underline{\alpha} \leq v \leq \bar{\alpha}$$

Это неравенство выполнено:

$$5 \leq 5 \frac{3}{8} \leq 6.$$

7. Находим оптимальную смешанную стратегию второго игрока, используя формулу (8.9):

$$q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{8 - 5}{6 - 1 - 5 + 8} = \frac{3}{8}.$$

Следовательно, оптимальная смешанная стратегия второго игрока $Y = (q, 1 - q) = \left(\frac{3}{8}; \frac{5}{8}\right)$.

Ответ: Оптимальное решение находится в области смешанных стратегий. Оптимальная стратегия первого игрока $X = \left(\frac{7}{8}; 0; 0; \frac{1}{8}\right)$, оптимальная стратегия второго игрока $Y = \left(\frac{3}{8}; \frac{5}{8}\right)$, цена игры $v = 5\frac{3}{8}$.

8.3. Задача 3. Используя принцип доминирования, свести матричную игру к игре с матрицей либо $n \times 2$, либо $2 \times t$ и найти ее решение графическим методом:

вариант	матрицы	вариант	матрицы
00	$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	01	$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
02	$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	03	$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
04	$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	05	$P = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$
06	$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ 5 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	07	$P = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
08	$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	09	$P = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 & 5 & 6 \\ 8 & 5 & 9 & 8 & 9 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

вариант	матрицы
10	$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

вариант	матрицы
11	$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 7 & 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

12	$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
----	---

13	$P = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
----	--

14	$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
----	---

15	$P = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 8 \\ 8 & 5 & 5 & 9 \\ 7 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
----	---

16	$P = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 5 & 7 & 8 \\ 8 & -1 & 8 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
----	--

17	$P = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
----	--

18	$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
----	--

19	$P = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$
----	---

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Горелик, В. А. Теория принятия решений: учебное пособие для магистрантов / В. А. Горелик. – Москва: МПГУ, 2016. – 152 с. – Текст: непосредственный.
2. Данилин, Г. А. Математическое программирование с EXCEL: учебное пособие для студентов всех специальностей МГУЛа / Г. А. Данилин, В. М. Курзина, П. А. Курзин и др. – М.: МГУЛ, 2005. – 113 с.: ил. – Текст: непосредственный.
3. Леонова, Н. Л. Задачи линейного программирования и методы их решения: учебно-методическое пособие / Н. Л. Леонова; М-во образования и науки РФ, ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2017. – URL: http://www.nizrp.narod.ru/metod/kafpriklm_atiif/15.pdf. – Текст: электронный.
4. Практикум по исследованию операций в экономике: Учебное пособие для вузов / В. А. Колемаев, В. И. Соловьев, И. С. Карандаев и др.; Под ред. В. А. Колемаева и В. И. Соловьева. – М., 2007. – 192 с. – (Библиотека студента — экономиста). – Текст: непосредственный.
5. Самков, Т. Л. Теория принятия решений: Лекции / Т. Л. Самков. – Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2021. – URL: <https://www.iprbooks.hop.ru/125278.html>. – Текст: электронный.

Учебное издание

Яковлев Валерий Петрович

Теория принятия решений

Практикум

Редактор и корректор Е. О. Тарновская
Техн. редактор М. Д. Баранова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 11.12.2025 г. Рег. № 5277/24

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.