

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

“САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ”

Кафедра информационно-измерительных технологий и систем управления

А.В.Черникова

ОСНОВЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебно-методическое пособие

**Санкт-Петербург
2013**

УДК 676-5(075)
ББК 35.77
Ч-492

Черникова А.В. Основы оптимизации: учебно-методическое пособие/
СПб ГТУРП.- СПб., 2013. - 51 с.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов заочной формы обучения по направлению 220400.62 «Управление в технических системах» при изучении дисциплины «Основы оптимизации» и посвящено рассмотрению примеров решения задач оптимизации с использованием различных методов, а также примеров выполнения лабораторных работ.

Учебно-методическое пособие также может быть полезно студентам любой формы обучения, занимающихся решением экстремальных задач.

Подготовлено и рекомендовано к печати кафедрой информационно-измерительных технологий и систем управления СПбГТУРП (протокол №1 от 11.09.2013).

Утверждено к изданию учебно-методической комиссией факультета автоматизированных систем управления технологическими процессами СПб ГТУРП (протокол №2 от 25.09.2013).

Рецензент:
заведующий кафедрой автоматизации процессов химической промышленности Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета), д-р техн. наук
Русинов Л.А.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебно-методического пособия.

© Санкт-Петербургский государственный
технологический университет растительных
полимеров, 2013

Введение

Дисциплина «Основы оптимизации» изучается студентами заочной формы обучения по направлению подготовки бакалавров 220400.62 "Управление в технических системах" и включает в себя следующие формы занятий:

- лекции;
- лабораторные занятия;
- выполнение контрольной работы;
- зачет.

Лекционные занятия проводятся по следующим темам:

1. Понятие задачи оптимизации.
2. Проблема оптимального управления в АСУ ТП.
3. Аналитические методы решения задач оптимизации.
 - 3.1. Задачи на безусловный экстремум.
 - 3.2. Задачи с ограничениями – равенствами.
4. Задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.
5. Задачи нелинейного программирования. Характеристика методов решения.

Лабораторные работы выполняются по темам «Исследование технологического процесса по математической модели и выбор оптимального технологического режима» и «Транспортная задача».

Контрольная работа включает в себя 4 задачи. Методические указания по их выполнению представлены ниже. Варианты контрольной работы приведены в Приложении 1.

Вопросы к **зачету** представлены в Приложении 2.

1. Общие теоретические сведения

Оптимизация в широком смысле слова находит применение в науке, технике и в любой другой области человеческой деятельности.

Оптимизация - целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях.

Необходимость принятия наилучших решений так же стара, как само человечество. Испокон веков люди, приступая к осуществлению своих мероприятий, раздумывали над их возможными последствиями и принимали решения, выбирая тем или другим образом зависящие от них параметры - способы организации мероприятий. Но до поры, до времени решения могли приниматься без специального математического анализа, просто на основе опыта и здравого смысла.

Возьмем пример: человек вышел утром из дому, чтобы ехать на работу. По ходу дела ему приходится принимать целый ряд решений: брать ли с собой зонтик? В каком месте перейти улицу? Каким видом транспорта воспользоваться? И так далее. Разумеется, все эти решения человек принимает без специальных расчетов, просто опираясь на имеющийся у него опыт и на здравый смысл. Для обоснования таких решений никакая наука не нужна, да вряд ли понадобится и в дальнейшем.

Однако возьмем другой пример. Допустим, организуется работа городского транспорта. В нашем распоряжении имеется какое-то количество транспортных средств. Необходимо принять ряд решений, например: какое количество и каких транспортных средств направить по тому или другому маршруту? Как изменять частоту следования машин в зависимости от времени суток? Где разместить остановки? И так далее.

Эти решения являются гораздо более ответственными, чем решения предыдущего примера. В силу сложности явления последствия каждого из них не столь ясны; для того, чтобы представить себе эти последствия,

нужно провести расчеты. А главное, от этих решений гораздо больше зависит. В первом примере неправильный выбор решения затронет интересы одного человека; во втором - может отразиться на деловой жизни целого города.

Конечно, и во втором примере при выборе решения можно действовать интуитивно, опираясь на опыт и здравый смысл. Но решения окажутся гораздо более правильными, если они будут подкреплены количественными, математическими расчетами. Эти предварительные расчеты помогут избежать длительного и дорогостоящего поиска оптимального решения "на ощупь".

Наиболее сложно обстоит дело с принятием решений, когда речь идет о мероприятиях, опыта в проведении которых еще не существует и, следовательно, здравому смыслу не на что опереться, а интуиция может обмануть. Пусть, например, составляется перспективный план развития предприятия. Образцы оборудования и готовой продукции, о которых может идти речь, еще не существуют, никакого опыта их применения и производства нет. При планировании приходится опираться на большое количество данных, относящихся не столько к прошлому опыту, сколько к предвидимому будущему. Выбранное решение должно по возможности гарантировать нас от ошибок, связанных с неточным прогнозированием, и быть достаточно эффективным для широкого круга условий. Для обоснования такого решения приводится в действие сложная система математических расчетов.

Вообще, чем сложнее организуемое мероприятие, чем больше вкладывается в него материальных средств, чем шире спектр его возможных последствий, тем менее допустимы так называемые "волевые" решения, не опирающиеся на научный расчет, и тем большее значение получает совокупность научных методов, позволяющих заранее оценить последствия каждого решения, заранее отбросить недопустимые варианты и рекомендовать те, которые представляются наиболее удачными.

Практика порождает все новые и новые задачи оптимизации, причем их сложность растет. Требуются новые математические модели и методы, которые учитывают наличие многих критериев, проводят глобальный поиск оптимума. Другими словами, жизнь заставляет развивать математический аппарат оптимизации.

Реальные прикладные задачи оптимизации очень сложны. Современные методы оптимизации далеко не всегда справляются с решением реальных задач без помощи человека. Нет пока такой теории, которая учла бы любые особенности функций, описывающих постановку задачи. Следует отдавать предпочтение таким методам, которыми проще управлять в процессе решения задачи.

Поиски оптимальных решений привели к созданию специальных математических методов, и уже в XVIII в. были заложены математические основы оптимизации (вариационное исчисление, численные методы и др). Однако до 2-й половины XX в. методы оптимизации во многих областях науки и техники применялись очень редко, поскольку практическое использование математических методов оптимизации требовало огромной вычислительной работы, которую без ЭВМ реализовать было крайне трудно, а в ряде случаев - невозможно. Особенно большие трудности возникали при решении задач оптимизации процессов в химической технологии из-за большого числа параметров и их сложной взаимосвязи между собой. При наличии ЭВМ задача заметно упрощается.

Формулировка каждой задачи оптимизации должна требовать экстремального значения лишь одной величины, т.е. одновременно системе не должно приписываться два и более критериев оптимизации, так как практически всегда экстремум одного критерия не соответствует экстремуму другого.

Типичный пример неправильной постановки задачи оптимизации: "Получить максимальную производительность при минимальной себестоимости".

Ошибка заключается в том, что ставится задача поиска оптимума 2-х величин, противоречащих друг другу по своей сути.

Правильная постановка задачи могла быть следующая:

- а) получить максимальную производительность при заданной себестоимости;
- б) получить минимальную себестоимость при заданной производительности.

В первом случае критерий – производительность, а во втором – себестоимость.

Критерием оптимальности называется количественная оценка оптимизируемого качества объекта.

Критерий оптимальности должен иметь ясный физический смысл, отражать наиболее существенные стороны процесса, должен иметь количественную оценку.

Решение задачи оптимизации включает в себя следующие этапы:

- а) составление математической модели объекта оптимизации;
- б) выбор критерия оптимальности и составление целевой функции;
- в) установление возможных ограничений, которые должны накладываться на переменные;
- г) выбор метода оптимизации, который позволит найти экстремальные значения искомых величин.

Принято различать задачи **статической оптимизации** для процессов, протекающих в установившихся режимах, и задачи **динамической оптимизации**.

В первом случае решаются вопросы создания и реализации оптимальной модели процесса, во втором - задачи создания и реализации системы оптимального управления процессом при неуставившихся режимах эксплуатации.

Если требуется определить экстремум целевой функции без задания условий на какие-либо другие величины, то такая оптимизация называется

безусловной. Такие критерии обычно используются при решении частных задач оптимизации (например, определение максимальной концентрации целевого продукта, оптимального времени пребывания реакционной смеси в аппарате и т.п.).

Если необходимо установить экстремум целевой функции при некоторых условиях, которые накладываются на ряд других величин (например, определение максимальной производительности при заданной себестоимости, определение оптимальной температуры при ограничениях по термостойкости катализатора и др.), то такая оптимизация называется **условной.**

Процедура решения задачи оптимизации обязательно включает, помимо выбора управляющих параметров, еще и установление ограничений на эти параметры (термостойкость, взрывобезопасность, мощность перекачивающих устройств).

Ограничения могут накладываться как по технологическим, так и по экономическим соображениям.

В зависимости от управляющих параметров различают следующие задачи:

- оптимизация при одной управляющей переменной – одномерная оптимизация;
- оптимизация при нескольких управляющих переменных – многомерная оптимизация;
- оптимизация при неопределённости данных;
- оптимизация с непрерывными, дискретными и смешанным типами значений управляющих воздействий.

В зависимости от критерия оптимизации различают:

- с одним критерием оптимизации - критерий оптимальности единственный;
- со многими критериями. Для решения задач со многими критериями используются специальные методы оптимизации.

Если математическая модель задачи состоит только из линейных выражений (критерий оптимальности, ограничения – уравнения и неравенства), то задача называется **задачей линейного программирования**, в противном случае задача будет отнесена к **задачам нелинейного программирования**, и для ее решения необходимо использовать соответствующие методы.

2. Методические указания для выполнения контрольной работы

Рассмотрим аналитические методы решения задач отыскания экстремума функции одной и многих переменных без дополнительных ограничений и с учетом ограничений.

2.1. Задачи на безусловный экстремум.

Из курса математического анализа известно, что в точке безусловного экстремума функции $f(\bar{x})$ должны выполняться условия:

- необходимое, позволяющее определить так называемые стационарные точки или точки, подозрительные на экстремум;
- достаточное, позволяющее дать окончательный ответ, какие из стационарных точек являются точками экстремума (минимума или максимума).

Для функции одной переменной необходимое условие формулируется в виде теоремы Ферма: для того, чтобы непрерывная и имеющая непрерывные производные до второго порядка включительно функция $f(x)$ имела безусловный локальный экстремум в точке x^* , необходимо выполнение условия $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} = 0$.

Достаточными условиями для функции одной переменной, как известно, являются:

- изменение знака первой производной при прохождении через точку экстремума x^* (с плюса на минус в случае максимума и с минуса на плюс в случае минимума);

- выполнение условия $|x - x^*| \leq \varepsilon$ в ε -окрестности точки x^* при достаточно малом $\varepsilon > 0$;

- знак второй производной $f''(x^*)$ (в точке минимума $f''(x^*) > 0$, в точке максимума $f''(x^*) < 0$).

Последнее условие наиболее удобно использовать как достаточное условие экстремума функции одной переменной.

Пример 1.

Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$.

Выясним, какие точки являются подозрительными на экстремум, для этого найдем первую производную функции и решим уравнение $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 4x + 3 = 0. \quad \text{Применив теорему Виета,}$$

найдем корни уравнения, $x_1 = 3, x_2 = 1$.

Данные точки являются стационарными или подозрительными на экстремум.

Проверим выполнение в этих точках достаточного условия существования экстремума (по знаку второй производной). Для этого найдем вторую производную функции и проверим ее знак при значениях x_1 и x_2 .

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 6x - 12 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1)}{\partial x^2} = 6x_1 - 12 = 18 - 12 = 6 > 0, \text{ следовательно, в точке } x_1 \text{ имеем}$$

минимум функции,

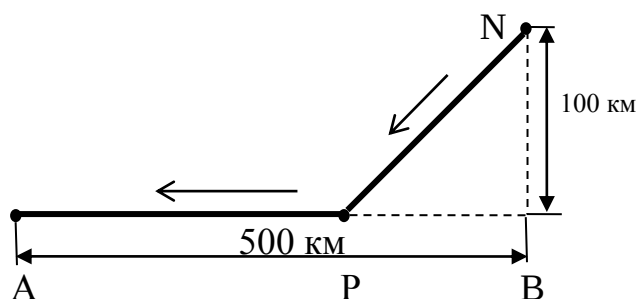
$$\frac{\partial^2 f(x_2)}{\partial x^2} = 6x_2 - 12 = 6 - 12 = -6 < 0, \text{ следовательно, в точке } x_2 \text{ имеем}$$

максимум функции.

Ответ: функция $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ имеет два экстремума, минимум в точке $x = 3$, максимум в точке $x = 1$.

Пример 2.

Для доставки продукции завода N в город A строится шоссе NP, соединяющее завод с железной дорогой AB, проходящей через город A. Стоимость перевозок по шоссе вдвое больше, чем по железной дороге. К какому пункту P нужно провести шоссе, чтобы общая стоимость перевозок продукции завода N в город A была наименьшей?



Сформулируем функцию цели: затраты на доставку продукции от завода N по шоссе (NP) и по железной дороге (PA) в город A должны быть минимальными.

Обозначим z (руб.) – затраты на перевозку продукции; c (руб./км) – затраты на доставку продукции по железной дороге на расстояние 1 км; x (км) – расстояние от города A до пункта P;

тогда $2c$ (руб./км) - затраты на доставку продукции по шоссе на расстояние 1 км; $\sqrt{(500-x)^2 + 100^2}$ (км) – расстояние от завода N до пункта Р.

Целевая функция примет вид: $Z = c \cdot x + 2c\sqrt{(500-x)^2 + 100^2} \rightarrow \min$

Необходимое условие существования экстремума:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = c - c \cdot \frac{2(500-x)}{\sqrt{(500-x)^2 + 100^2}} = 0$$

$$\frac{2(500-x)}{\sqrt{(500-x)^2 + 100^2}} = 1$$

$$2(500-x) = \sqrt{(500-x)^2 + 100^2}$$

$$4(500-x)^2 = (500-x)^2 + 100^2$$

$$500-x = \frac{100}{\sqrt{3}}$$

$$x = 442_{\text{км}}$$

Проверим, выполняется ли в данной точке условие существования минимума функции, для этого найдем знак второй производной $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ при $x=442$.

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{[2c((500-x)^2 + 100^2) + 2(500-x)^2] \cdot ((500-x)^2 + 100^2)}{\sqrt{(500-x)^2 + 100^2}} > 0,$$

Ответ: если шоссе провести от завода к пункту Р, расположенному на расстоянии 442 км от города А, то затраты на перевозку продукции завода будут минимальными.

Для функции многих переменных необходимое условие записывается следующим образом: для того, чтобы функция $f(\bar{x})$ имела

безусловный локальный экстремум в точке $\bar{X}^*$, необходимо, чтобы все ее частные производные первого порядка в этой точке обращались в нуль:

$$\frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad \text{Таким образом, необходимое условие существования}$$

экстремума приводят к системе уравнений, решение которых позволяет определить координаты стационарных точек. Если уравнения не могут быть решены аналитически, то координаты стационарных точек находят приближенно, пользуясь численными методами решения систем уравнений.

Достаточное условие существования экстремума для функции многих переменных сводится к проверке знакоопределенности квадратичной формы (матрицы Гессе) с помощью критерия Сильвестра.

Матрица Гессе представляет собой матрицу вторых частных производных:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

Матрица Гессе, которую принято обозначать буквой H , положительно определена, если все ее главные миноры* строго положительны, т.е.

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_1^2} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{и т.д.,}$$

и тогда в точке $\bar{X}^*$ функция $f(\bar{x})$ имеет максимум.

* Минором k -го порядка называется определитель, элементы которого находятся на пересечении произвольных k -й строки и k -го столбца матрицы H . Главные миноры расположены в верхнем левом углу матрицы H .

Матрица Гессе отрицательно определена, если знаки ее главных миноров чередуются $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0$, и тогда в точке $\bar{X}^*$ функция $f(\bar{X})$ имеет минимум. Если эти условия не выполняются, то в точке $\bar{X}^*$ экстремума нет, и имеется стационарная точка типа «седла».

В случае равенства некоторых главных миноров нулю возникает неопределенность, требующая исследования знаков производных высших порядков.

Пример 3.

Найти экстремумы функции $f(\bar{X}) = x_1^3 - x_2^3 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$.

Необходимые условия оптимальности функции $f(\bar{X})$ приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\bar{X})}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f(\bar{X})}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\bar{X})}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ \frac{\partial f(\bar{X})}{\partial x_2} = -3x_2^2 - 4x_2 + 4x_1 = 0 \end{cases},$$

из решения которой получим две точки, подозрительные на экстремум:

$$\bar{x}_1^* (0; 0) \text{ и } \bar{x}_2^* \left(\frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right).$$

Проверим, достигаются ли в этих точках экстремумы функции. Для этого найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_1^2} = 6x_1 - 4$$

$$\frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_2^2} = -6x_2 - 4$$

и составим матрицу Гессе:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x_1 - 4 & 4 \\ 4 & -6x_2 - 4 \end{vmatrix}.$$

Определим знаки главных миноров для точки $\bar{x}_1^* (0;0)$

$\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = 0$ и для точки $\bar{x}_2^* (\frac{8}{3}; -\frac{8}{3})$ $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 128 > 0$.

Ответ: проверка достаточных условий оптимальности подтверждает, что в точке $\bar{x}_1^*$ экстремум не достигается, а в точке $\bar{x}_2^*$ имеем минимум функции.

Среди прикладных задач оптимизации задачи на безусловный экстремум встречаются чрезвычайно редко. Как правило, они представляют собой лишь составляющую часть или этап решения более сложной экстремальной задачи.

В качестве примера рассмотрим задачу аналитической градуировки датчика, которая относится к задачам идентификации и обязательно решается в подсистеме централизованного контроля АСУ ТП.

Для большей конкретности речь пойдет об аналитической градуировке датчика концентрации волокнистых суспензий. Как известно, эти датчики не имеют класса точности и служат главным образом индикаторами, т.е. указывают тенденцию изменения концентрации, не давая точной

количественной оценки. В то же время информация о величине концентрации целлюлозной, бумажной, древесной массы необходима в АСУ ТП для решения задач управления технологическим процессом. Поэтому при внедрении АСУ ТП осуществляют градуировку датчиков концентрации волокнистых суспензий по данным лабораторных анализов (концентрации) и показаний датчика (токовый сигнал), т.е. находят зависимость

$$C = f(I), \quad (1)$$

где C – концентрация массы, % концентрации; I – сигнал на выходе датчика, мА.

Пример 4.

Получить вид градуировочной зависимости датчика концентрации волокнистой массы по результатам измерений, представленным в таблице:

№	I , мА	C , %
1	1,0	2,0
2	2,5	2,3
3	3,5	2,65
4	4,2	2,7
5	4,8	3,0

Нанесем на график точки, координаты которых соответствуют данным таблицы.

По графику на рис.1 видно, что точки расположены вдоль воображаемой прямой, а это значит, что градуировочная зависимость носит линейный характер и, следовательно, математическая модель датчика может быть записана в виде уравнения прямой с коэффициентами b_0 и b_1 (причем b_1 характеризует угол наклона между прямой и положительным

направлением оси абсцисс, а b_0 - отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат:

$$C_p = b_0 + b_1 m, \quad (2)$$

где C_p – расчетное значение концентрации массы.

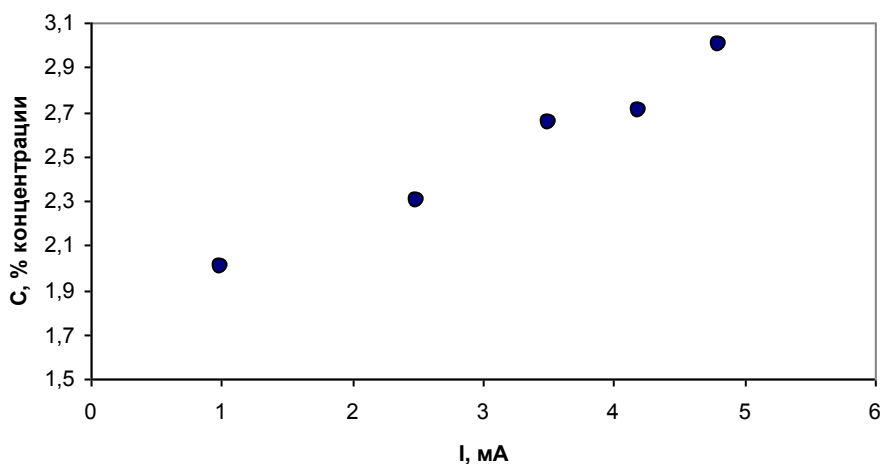


Рис.1. Графическое изображение экспериментальных данных

Требуется найти коэффициенты уравнения (2) так, чтобы обеспечить минимальное расхождение между расчетными (C_p) и экспериментальными (C) значениями концентрации.

Критерий оптимальности можно записать в виде:

$$f = \sum_{i=1}^N (C_{pi} - C_i)^2 \rightarrow \min \quad (3)$$

или

$$f = \sum_{i=1}^N (b_0 + b_1 m_i - C_{\pi i})^2 \rightarrow \min. \quad (4)$$

Подставляя в функцию (4) значения из таблицы, можно получить функцию двух переменных $f(b_0, b_1)$:

$$\begin{aligned} f = & (b_0 + b_1 \cdot 1 - 2)^2 + (b_0 + b_1 \cdot 2,5 - 2,3)^2 + (b_0 + b_1 \cdot 3,5 - 2,65)^2 + \\ & + (b_0 + b_1 \cdot 4,2 - 2,7)^2 + (b_0 + b_1 \cdot 4,8 - 3)^2 \rightarrow \min \end{aligned}$$

Для нахождения экстремума этой функции применяют тот же алгоритм, что и в примере 3.

Необходимые условия оптимальности функции $f(b_0, b_1)$ приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial b_0} = 2(b_0 + b_1 \cdot 1 - 2) + 2(b_0 + b_1 \cdot 2,5 - 2,3) + 2(b_0 + b_1 \cdot 3,5 - 2,65) + \\ + 2(b_0 + b_1 \cdot 4,2 - 2,7) + 2(b_0 + b_1 \cdot 4,8 - 3) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial b_1} = 2(b_0 + b_1 \cdot 1 - 2) + 2(b_0 + b_1 \cdot 2,5 - 2,3) \cdot 2,5 + 2(b_0 + b_1 \cdot 3,5 - 2,65) \cdot 3,5 + \\ + 2(b_0 + b_1 \cdot 4,2 - 2,7) \cdot 4,2 + 2(b_0 + b_1 \cdot 4,8 - 3) \cdot 4,8 = 0 \end{cases}, \quad (5)$$

из решения которой получим: $b_0 = 1,72$ и $b_1 = 0,25$.

Коэффициенты b_0 и b_1 , вычисленные из системы уравнений (5), определяют координаты стационарной точки функции $f(b_0, b_1)$. Проверим, достигается ли в этой точке минимум функции, для этого найдем частные производные второго порядка и составим матрицу Гессе:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b_0^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial b_0 \partial b_1} = 16, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial b_1 \partial b_0} = 32, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial b_1^2} = 120,36$$

$$H = \begin{vmatrix} 10 & 16 \\ 32 & 120,36 \end{vmatrix} = 10 \cdot 120,36 - 16 \cdot 32 = 691,6$$

Определим знаки главных миноров, которые в данном случае не зависят от полученных значений коэффициентов линейной модели b_0 и b_1 , $\Delta_1 = 10 > 0$, $\Delta_2 = 691,6 > 0$.

В соответствии с критерием Сильвестра, критерий оптимальности достигает минимума при $b_0 = 1,72$ и $b_1 = 0,25$. Тогда искомая градуировочная зависимость описывается выражением:

$$C_p = 1,72 + 0,25m. \quad (6)$$

По выражению (6) рассчитаем значения концентрации волокнистой суспензии в зависимости от значений выходного сигнала датчика для каждого эксперимента, данные сведем в таблицу:

№	I, мА	C _p , %
1	1,0	1,97
2	2,5	2,26
3	3,5	2,53
4	4,2	2,8
5	4,8	3,09

Построим градуировочную зависимость в поле точек (рис.1), полученных по экспериментальным данным.

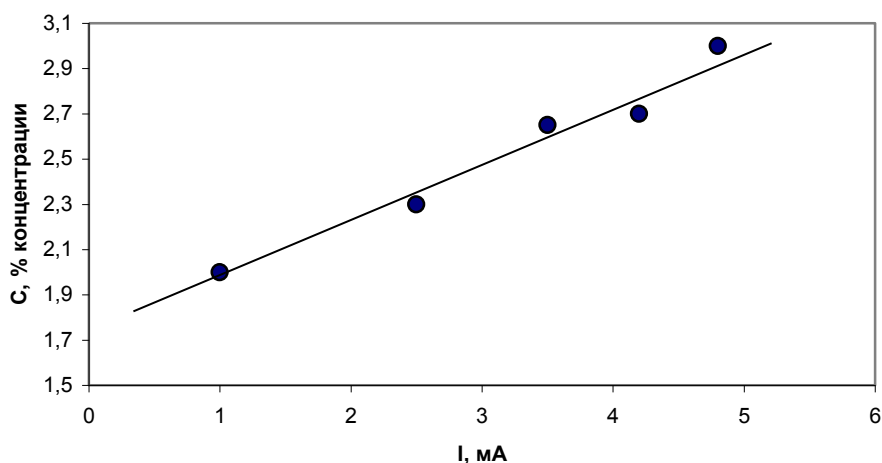


Рис.2. Градуировочная зависимость датчика концентрации.

2.2. Задачи на условный экстремум с ограничениями - равенствами.

Математическая модель такой задачи в общем виде записывается следующим образом:

$$\text{найти } \text{extr } f(\bar{x}) \text{ при условии } g_i(\bar{x}) = 0, i = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Ограничения $g_i(\bar{x})$ принято называть уравнениями связи.

Чтобы задача оптимизации (7) имела смысл, должно выполняться условие $m < n$, где n – размерность вектора $\bar{x}$.

Необходимые условия оптимальности в задаче с ограничениями – равенствами могут быть получены, если ввести в рассмотрение функцию вида:

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\bar{x}), \quad (8)$$

найти ее частные производные по переменным $\bar{x}$, $\bar{\lambda}$ и приравнять их нулю.

Функция $L(\bar{x}, \bar{\lambda})$ называется функцией Лагранжа и зависит от $n+m$ переменных; формальные переменные $\bar{\lambda}$ носят название неопределенных множителей Лагранжа – их число равно числу уравнений связи; метод, позволяющий вывести необходимые условия оптимальности с помощью функции Лагранжа, получил название метода множителей Лагранжа.

Чтобы определить, достигается ли экстремум в стационарных точках, следует проверить выполнение в этих точках достаточных условий оптимальности, что требует анализа вторых частных производных. В этом случае определяют знак квадратичной формы Φ по правилу Сильвестра.

Квадратичная форма представляет собой выражение:

$$\Phi = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)}{\partial x_k \partial x_j} \Delta x_k \Delta x_j. \quad (9)$$

Так как приращения не могут рассматриваться произвольно, а должны быть связаны с ограничениями, то, разложив уравнение связи в ряд Тейлора можно выразить Δx_k через Δx_j . Пренебрегая членами разложения более высокого порядка малости при достаточно малых приращениях аргумента, в линейном приближении получаем разложение уравнения связи в ряд Тейлора:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \Delta x_j = 0, i = 1, \dots, m. \quad (10)$$

Пример 5.

Найти экстремум функции $f(\bar{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2$ при условии $g(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$.

Составим функцию Лагранжа (8)

$$L(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x}) + \lambda g(\bar{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 4)$$

и найдем ее частные производные первого порядка, приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) + 2\lambda x_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) + 2\lambda x_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Решив систему уравнений, выражающих необходимые условия оптимальности, найдем координаты стационарных точек:

$$(\bar{x}, \lambda)^* = (0,63; 1,9; 0,58) \text{ и } (\bar{x}, \lambda)^{**} = (-0,63; -1,9; -2,58).$$

Проверим выполнение в этих точках достаточных условий, для этого определим знак квадратичной формы, которая для функции двух переменных $f(\bar{x})$ имеет вид:

$$\Phi = \frac{\partial^2 L(\bar{x}, \lambda)^*}{\partial x_1^2} (\Delta x_1)^2 + \frac{\partial^2 L(\bar{x}, \lambda)^*}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{\partial^2 L(\bar{x}, \lambda)^*}{\partial x_2 \partial x_1} \Delta x_2 \Delta x_1 + \frac{\partial^2 L(\bar{x}, \lambda)^*}{\partial x_2^2} (\Delta x_2)^2. \quad (11)$$

Найдем частные производные второго порядка функции Лагранжа для переменных $\bar{X} = \{x_1, x_2\}$, (вторая производная по неопределенному множителю Лагранжа не берется).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2 + 2\lambda \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

и составим квадратичную форму Φ для стационарной точки $(\bar{x}, \lambda)^*$, вычислив в ней значения вторых частных производных:

$$\begin{aligned} \Phi &= (2 + 2\lambda)(\Delta x_1)^2 + (2 + 2\lambda)(\Delta x_2)^2 = (2 + 2 \cdot 0,58)(\Delta x_1)^2 + (2 + 2 \cdot 0,58)(\Delta x_2)^2 = \\ &= 3,16(\Delta x_1)^2 + 3,16(\Delta x_2)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Получим уравнение (10), разложив в ряд Тейлора уравнение связи $g_i(\bar{x}) = 0$:

$$\frac{\partial g(\bar{x}^*)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial g(\bar{x}^*)}{\partial x_2} \Delta x_2 = 2x_1^* \Delta x_1 + 2x_2^* \Delta x_2 = 2 \cdot 0,63 \Delta x_1 + 2 \cdot 1,9 \Delta x_2 = 0,$$

откуда найдем приращение одной переменной через приращение другой переменной $\Delta x_2 = -0,33 \cdot \Delta x_1$ и подставим в квадратичную форму (12):

$$\Phi = 3,16(\Delta x_1)^2 + 3,16(-0,33 \cdot \Delta x_1)^2 = 3,48(\Delta x_1)^2.$$

Очевидно, что $\Phi > 0$ при любых Δx_1 и, следовательно, в точке $(\bar{x})^* = (0,63; 1,9)$ функция $f(\bar{x})$ имеет минимум.

Убедиться, что в точке $(\bar{x})^{**} = (-0,63; -1,9)$ достигается максимум функции $f(\bar{x})$ нетрудно.

Ответ: $(\bar{x})^* = (0,63; 1,9)$ - точка минимума, $(\bar{x})^{**} = (-0,63; -1,9)$ - точка максимума функции $f(\bar{x})$.

Таким образом, сущность достаточных условий оптимальности в задачах с ограничениями – равенствами та же, что и в задачах на

безусловный экстремум, с той лишь особенностью, что проверку экстремума следует проводить среди допустимых точек, т.е. с учетом уравнений $g_i(\bar{x}) = 0, i = 1, \dots, m$.

Примерами прикладных задач на условный экстремум с ограничениями – равенствами являются задачи оптимального проектирования оборудования, например, буферных емкостей различной конфигурации.

Пример 6.

Выбрать размеры буферной емкости цилиндрической формы (рис.3), объемом $V=100$ м³, из условия минимальных затрат материала на ее сооружение.

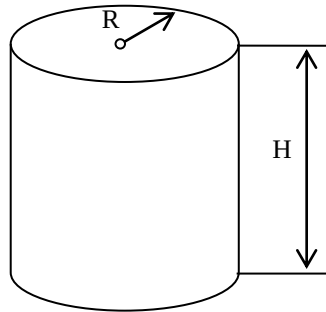


Рис.3. Буферная емкость цилиндрической формы

Очевидно, что в качестве критерия оптимальности в этой задаче целесообразно выбрать общую поверхность емкости $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$ и найти параметры R и H из условия минимума S при ограничении $g = \pi R^2 H - V = \pi R^2 H - 100 = 0$.

Решим задачу методом множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа: $L(R, H, \lambda) = 2\pi R^2 + 2\pi RH + \lambda(\pi R^2 H - 100)$ и получим необходимые условия оптимальности:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial R} = 4\pi R + 2\pi H + 2\lambda\pi RH = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial H} = 2\pi R + \lambda\pi R^2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi R^2 H - 100 = 0 \end{cases}.$$

Решив систему уравнений, найдем: $R^* \approx 2,5$; $H^* \approx 5$; $\lambda^* \approx -0,8$.

Убедимся, действительно ли параметры $(R^*; H^*; \lambda^*)$ доставляют минимум S . Для этого сформулируем достаточное условие оптимальности. Найдем частные производные второго порядка функции Лагранжа

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 L}{\partial R^2} = 4\pi + 2\lambda\pi H = 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial R \partial H} = 2\pi + 2\lambda\pi R = 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial H \partial R} = 2\pi + 2\lambda\pi R = 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial H^2} = 0 \end{cases}$$

вычислим их в стационарной точке

$$\frac{\partial^2 L}{\partial R^2} = -12,56; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial R \partial H} = -6,28; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial H \partial R} = -6,28$$

и составим квадратичную форму Φ :

$$\Phi = (-12,56)(\Delta R)^2 + (-12,56)\Delta R \Delta H,$$

где ΔR , ΔH - малые приращения переменных относительно стационарной точки.

Рассмотрим линейную часть разложения в ряд Тейлора уравнения связи $g = \pi R^2 H - 100 = 0$:

$$2\pi R H \Delta R + \pi R^2 \Delta H = 0,$$

$$\text{откуда } \Delta H = -2\pi R H \Delta R / \pi R^2 = -4\Delta R.$$

Подставив выражение для ΔH в квадратичную форму Φ , получим:

$$\Phi = (-12,56)(\Delta R)^2 + 50,24(\Delta R)^2 = 37,68(\Delta R)^2.$$

Очевидно, что $\Phi > 0$ при любых ΔR и, следовательно, в точке (2,5; 5) функция S имеет минимум.

Ответ: Размеры буферной емкости составляют $R=2,5$ м; $H=5$ м.

Отметим, что задача в примере 6 может быть решена как задача на безусловный экстремум, если из формулы объема выразить одну из переменных R или H .

Математическая модель задачи при $H = 100/\pi R^2$ примет вид:
 $S = 2\pi R^2 + 200/R \rightarrow \min$. Решение задачи в такой постановке будет аналогично примеру 3.

2.3. Задачи линейного программирования.

Линейное программирование (ЛП) является наиболее простым и лучше всего изученным разделом математического программирования. Характерные черты задач ЛП следующие:

- 1) показатель оптимальности $L(X)$ представляет собой линейную функцию;
- 2) ограничения, налагаемые на возможные решения, имеют вид линейных равенств или неравенств.

Общая форма записи модели задачи ЛП:

$$\text{Целевая функция } L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max ,$$

$$\text{при ограничениях } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (\geq, =) b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (\geq, =) b_2 , \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (\geq, =) b_m , \\ x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0 (k \leq n). \end{cases} \quad (13)$$

Допустимое решение – это совокупность переменных $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (13).

Оптимальное решение – это значения переменных, при которых ЦФ принимает свое максимальное значение.

Прежде чем построить математическую модель задачи, т.е. записать ее с помощью математических символов, необходимо четко разобраться с ситуацией, описанной в условии. Для этого необходимо с точки зрения здравого смысла, а не математики, ответить на следующие вопросы:

1. Что является искомыми величинами задачи?
2. Какова цель решения? Какой параметр задачи служит критерием оптимальности, например, прибыль, себестоимость, время и т.д. В каком направлении должно изменяться значение этого параметра для достижения наилучших результатов?
3. Какие условия в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены? Эти условия устанавливают, как должны соотноситься друг с другом различные параметры задачи, например, количество ресурса, затраченного при производстве, и его запас на складе; количество выпускаемой продукции и емкость склада, где она будет храниться; количество выпускаемой продукции и рыночный спрос на эту продукцию и т.д.

Только после ответа на все эти вопросы можно приступить к записи этих ответов в математическом виде, т.е. к записи математической модели.

Одним из способов решения задач ЛП, целевая функция которой содержит две переменные ($X = (x_1, x_2)$), является графический метод. Он основан на *геометрическом* представлении допустимых решений и ЦФ задачи. Методика решения задач ЛП графическим методом состоит в следующем:

- 1). в ограничениях задачи (13) заменяют знаки неравенств на знаки точных равенств и строят соответствующие прямые;

2). находят и заштриховывают полуплоскости, разрешенные каждым из ограничений-неравенств задачи (13). Для этого подставляют в конкретное неравенство координаты какой-либо точки [например, (0;0)] и проверяют истинность полученного неравенства.

Если неравенство истинное, то надо заштриховать полуплоскость, содержащую данную точку; иначе (неравенство ложное) надо заштриховать полуплоскость, не содержащую данную точку.

Поскольку переменные x_1 и x_2 должны быть неотрицательными, то их допустимые значения всегда будут находиться выше оси x_1 и правее оси x_2 , т.е. в I квадранте.

3). определяют ОДР как часть плоскости, принадлежащую одновременно всем разрешенным областям, и выделяют ее. При отсутствии ОДР задача не имеет решений, о чем делают соответствующий вывод.

4). если ОДР – не пустое множество, то строят целевую прямую, т.е. любую из линий уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = L$, где L – произвольное число, например, кратное c_1 и c_2 , т.е. удобное для проведения расчетов. Способ построения аналогичен построению прямых ограничений.

5). строят вектор $\vec{C} = (c_1, c_2)$, который начинается в точке (0;0), заканчивается в точке (c_1, c_2) . Если целевая прямая и вектор $\vec{C}$ построены верно, то они будут перпендикулярны.

6). при поиске $\max$ ЦФ передвигают целевую прямую в направлении вектора $\vec{C}$. Последняя по ходу движения вершина ОДР будет точкой $\max$ ЦФ. Если такой точки (точек) не существует, то делают вывод о неограниченности ЦФ.

7). определяют координаты точки $\max$ ЦФ $X^* = (x_1^*; x_2^*)$ и вычисляют значение ЦФ в этой точке.

Геометрическая интерпретация задачи ЛП представлена на рис.4.

3. Методические указания для выполнения лабораторных работ

Лабораторная работа №1 «Исследование технологического процесса по математической модели и выбор оптимального технологического режима»

Автоматизированное управление технологическим процессом позволяет использовать вычислительный комплекс АСУ ТП для исследования технологического процесса, выбора и поддержания оптимального технологического режима в конкретной производственной ситуации.

Наличие математических моделей, адекватных технологическому процессу и заложенных в программы исследования технологических режимов, сводит к минимуму вмешательство оператора в производственный процесс, необходимое для выбора оптимальных условий работы оборудования.

Для расчета с использованием компьютерных технологий широко применяются математические модели в виде уравнений регрессии, приближенно описывающие качественные зависимости между параметрами технологического режима и показателями, характеризующими эффективность процесса (качество продукции, производительность и др.).

Структура уравнения регрессии существенно зависит от метода расчета его коэффициентов. В качестве такого метода чаще всего выбирают метод наименьших квадратов (МНК), а уравнение регрессии задают степенным полиномом:

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{12}x_1x_2 + \dots, \quad (14)$$

где Y – какой-либо показатель технологического процесса;

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – параметры или, согласно технологии, факторы технологического режима;

$b_1, b_2, \dots, b_{11}, b_{22}, \dots$ – коэффициенты уравнения регрессии.

Для повышения точности расчета коэффициентов модели, а также для упрощения обработки данных факторы X_i часто выражают в относительных единицах, применяя процедуру нормировки. В этом случае соотношение между факторами в относительных единицах и этими же факторами в натуральных единицах имеет вид

$$X_i^O = \left(X_i^H - \frac{X_{i\max}^H + X_{i\min}^H}{2} \right) / \frac{X_{i\max}^H - X_{i\min}^H}{2}, \quad (15)$$

где X_i^O, X_i^H – фактор в относительных и натуральных единицах;

$X_{i\max}^H, X_{i\min}^H$ – границы диапазона варьирования фактора X_i .

Исследование технологического процесса в настоящей лабораторной работе состоит в расчете и построении семейства кривых, отражающих количественное влияние факторов процесса на показатели его эффективности.

Семейства кривых выражают зависимость показателя Y от факторов X . На основании требований ГОСТ или технологического регламента с помощью построенных зависимостей определяется диапазон значений параметров, которые обеспечивают допустимое значение показателя Y или нескольких показателей одновременно.

Математические модели позволяют решить и более сложную задачу – выбора оптимального, т.е. лучшего в смысле некоторого заранее сформулированного критерия оптимальности, режима. В этом случае задача выбора оптимального режима должна быть сформулирована математически.

Математическая постановка задачи включает критерий оптимальности и систему дополнительных ограничений, которые записываются в следующем виде

$$\begin{aligned} &\text{найти } \min \text{ (или } \max) \text{ функции } F(X) \\ &\text{при ограничениях } G(X) \geq 0, i=1 \dots m \end{aligned} \quad (16)$$

где X – вектор параметров технологического режима;

$F(X)$ – критерий оптимальности, сформулированный на основании требований, предъявляемых к показателям качества технологического процесса;

$G(X)$ – ограничения на параметры технологического режима и показатели качества технологического процесса, знак ограничений может быть любой.

Расчет параметров X , доставляющих экстремум функции $F(X)$, осуществляется с помощью методов решения задач оптимизации, как правило, численных. В данной работе решение задачи оптимизации выполняется в электронных таблицах Excel с помощью программы Solver (Поиск решения), применение которой не требует знания численных методов оптимизации.

Пример

По экспериментальным данным исследования влияния режимов размола сульфатной целлюлозы на ее показатели механической прочности были получены уравнения регрессии для показателей сопротивления продавливанию (Y_1) и разрушающего усилия при сжатии кольца (Y_2).

Уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} Y_1 &= 1046 - 29X_1 - 86X_2^2 \\ Y_2 &= 462 - 9X_1 + 48X_2, \end{aligned} \quad (17)$$

где X_1 – концентрация массы (в относительных единицах);

X_2 – величина ампер-нагрузки на двигатель мельницы (в относительных единицах).

Поскольку сульфатная целлюлоза входит как основной компонент в композицию основного слоя картона для гладких слоев тарного

гофрокартона, то, исходя из требований ГОСТ к готовому продукту, необходимо было установить, при каких режимах размола указанные показатели достигают максимальных значений в диапазоне параметров $x_1^H \in [3,6;4,4;5,2]$, $x_2^H \in [33;44;55]$, что соответствует диапазону $[-1;0;+1]$ этих параметров в относительных единицах (пересчет натуральных единиц в относительные осуществляется по формуле (15)).

Выполним расчет процесса по математической модели. Для этого один из параметров будем изменять в пределах варьирования, а для другого будем рассматривать фиксированное значение. Построим семейство кривых, выражающих зависимость каждого показателя от факторов технологического процесса.

Задаваясь фиксированными значениями фактора X_2 , получим зависимость показателей Y_1 и Y_2 от фактора X_1 .

Создадим таблицу данных для расчета семейства кривых и построим рассчитанные зависимости (рис.5).

Аналогично, задаваясь фиксированным значением фактора X_1 , получим зависимость показателей Y_1 и Y_2 от фактора X_2 (рис 6).

Анализируя полученные зависимости, можно сделать вывод, что с увеличением концентрации массы показатели механической прочности несколько снижаются, увеличение ампер - нагрузки на двигатель мельницы положительно сказывается на показателе *разрушающее усилие при сжатии кольца*, а *сопротивление продавливанию* вначале растет, достигает максимума, а затем снижается.

С целью обеспечения наилучших значений обоих показателей выбраны следующие диапазоны для концентрации массы 3,6 – 4,0 %, для ампер - нагрузки на двигатель мельницы 42 – 48 А.

Решим задачу оптимизации с помощью программы Поиск решения.

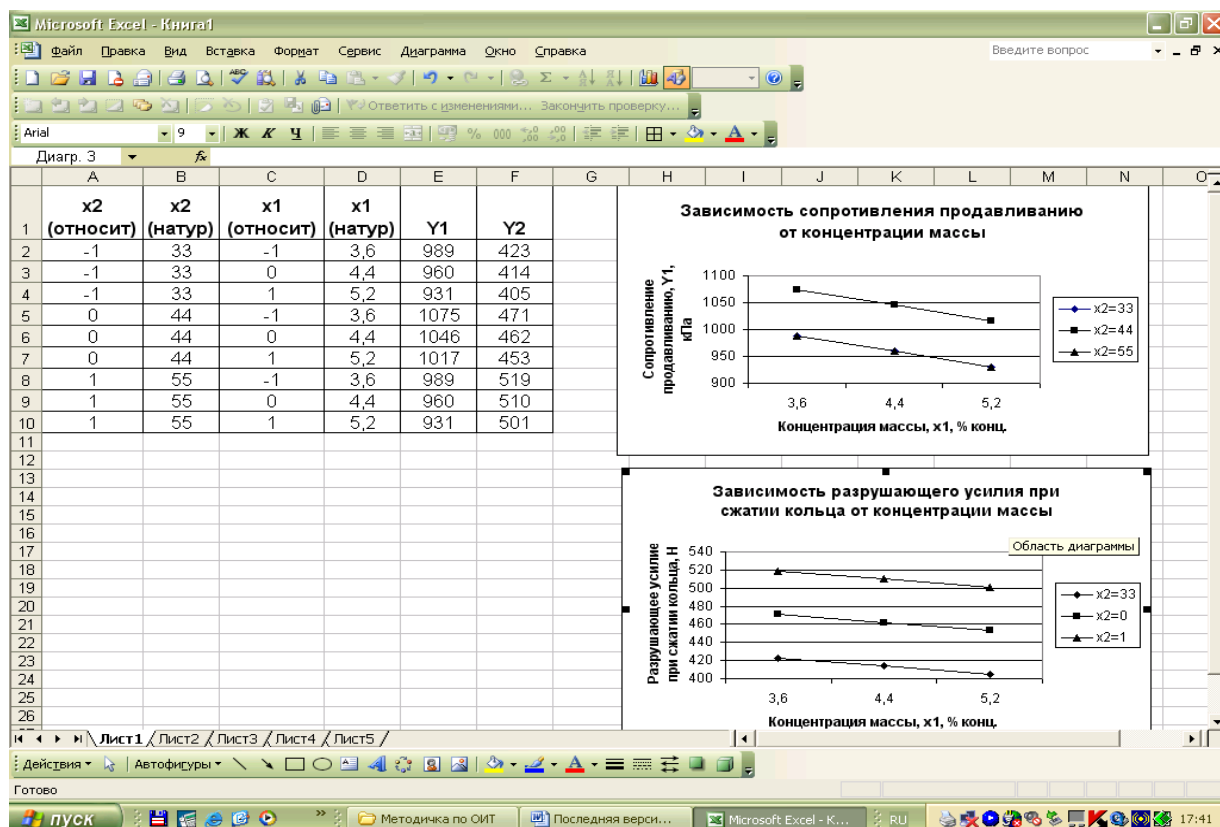


Рис.5. Вид экрана при построении зависимостей показателей Y_1 и Y_2 от фактора X_1

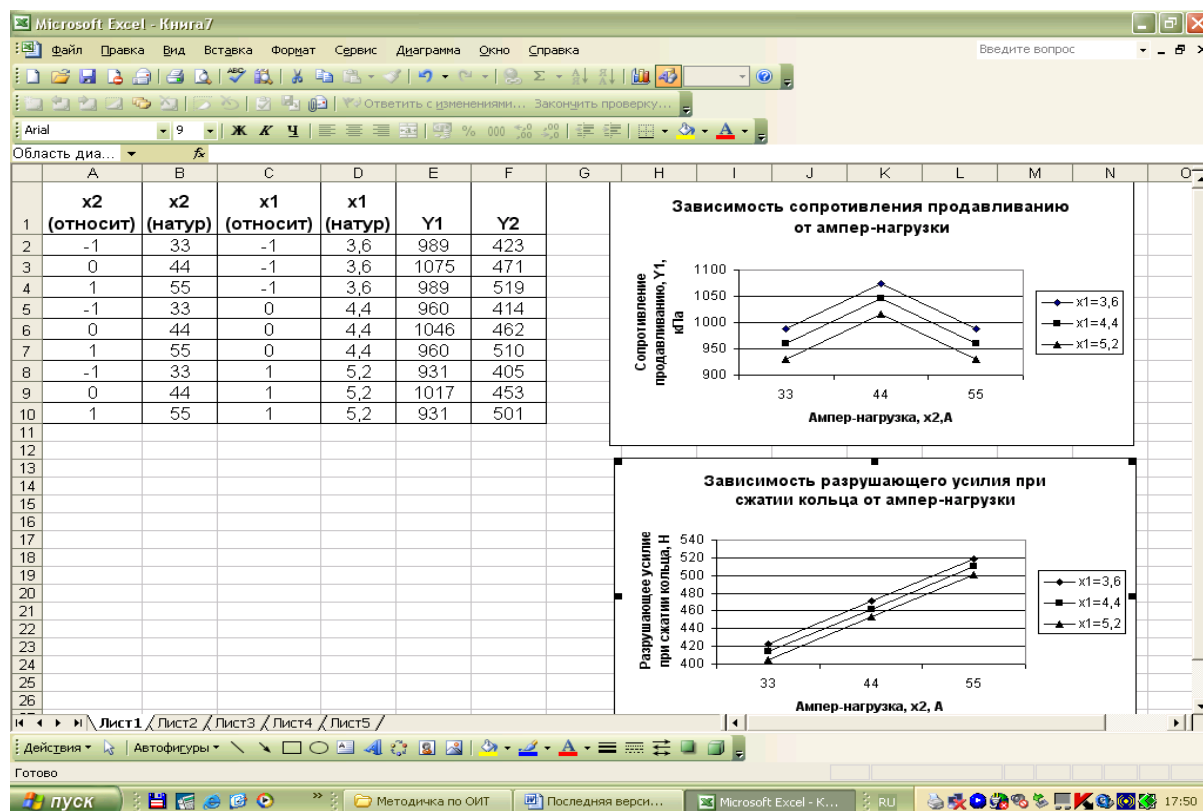


Рис.6. Вид экрана при построении зависимостей показателей Y_1 и Y_2 от фактора X_2

Основное требование – обеспечить максимально возможные значения показателей механической прочности – зададим с помощью функции цели:

$$F = \frac{Y_1}{Y_1^{ном}} + \frac{Y_2}{Y_2^{ном}}, \quad (18)$$

где $Y_1^{ном}$ - номинальное значение показателя *сопротивление продавливанию*, равное для нашего примера 1000 кПа;

$Y_2^{ном}$ - номинальное значение показателя *разрушающее усилие при сжатии кольца*, равное для нашего примера 500 Н.

Отношение (18) позволяет привести показатели качества Y_1 и Y_2 к безразмерным единицам, чтобы избежать суммирования в функции цели F величин, имеющих разный физический смысл и различные единицы измерения.

Ограничения в задаче наложены на диапазон изменения параметров X_1 и X_2 , а также сформулировано требование, чтобы показатели Y_1 и Y_2 были не меньше номинальных значений.

Автоматизированный поиск оптимального решения состоит в использовании электронных таблиц Microsoft Excel.

При этом необходимо открыть лист Microsoft Excel и записать исходные данные задачи оптимизации (рис.7).

В ячейки C3 и C4 вводятся любые значения факторов в натуральных единицах из указанного диапазона, например 4,4 и 44.

В ячейки C5 и C6 вводятся формулы пересчета натуральных единиц в относительные.

В ячейки C7 и C9 вводятся уравнения регрессии.

В ячейки C8 и C10 вводятся номинальные значения показателей качества ($Y_{1ном}=1000$ кПа, $Y_{2ном}=500$ Н).

В ячейку C11 вводится формула расчета функции цели (18).

Если все указания выполнены верно, то лист исходных данных примет вид, представленный на рис.7. (Замечание. Численные значения, полученные

студентами при выполнении задания по вариантам и указанные в примере, могут отличаться).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Условия задачи оптимизации								
2	Наименования	Обозначения параметров	Значения параметров						
3	Концентрация массы, %	XН1	4,4						
4	Ампер-нагрузка, А	XН2	44						
5	Концентрация массы, отн. ед.	x1	0						
6	Ампер-нагрузка, отн. ед.	x2	0						
7	Сопротивление продавливанию, кПа	Y1	1046						
8	Номинальное значение сопротивления продавливанию, кПа	Y1 номин.	1000						
9	Разрушающее усилие при сжатии кольца, Н	Y2	462						
10	Номинальное значение разрушающего усилия при сжатии кольца, Н	Y2 номин.	500						
11	Критерий качества	F	1,97						
12									
13									
14									
15									

Рис.7. Пример записи исходных данных задачи оптимизации

В главном меню из набора опций **Сервис** выберем пункт **Поиск решения**. Откроется окно, приведенное на рис.8. В окно вводятся адреса целевой ячейки (**\$C\$11**), изменяемых ячеек (**\$C\$3:\$C\$4**), а также ограничения на значения переменных.

Для ввода ограничений необходимо нажать кнопку **Добавить**, при этом окно **Поиск решения** закрывается и открывается дополнительное окно, приведенное на рис.9. В это окно вводятся адреса ячеек, содержащие выражения, на которые по условиям задачи требуется наложить ограничения. Для ввода каждого следующего ограничения нажимается кнопка **Добавить**. После ввода всех ограничений нажимается кнопка **ОК**,

после чего снова появляется окно **Поиск решения**.

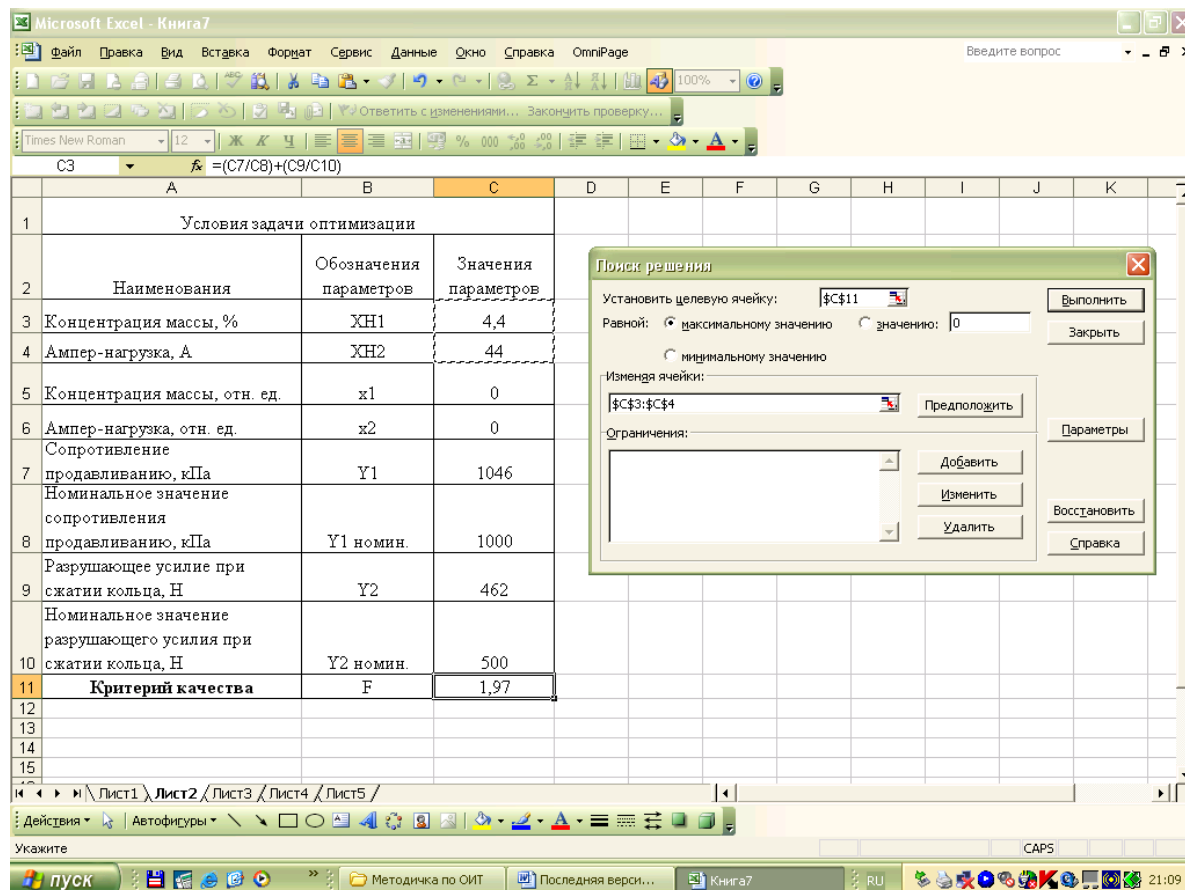


Рис.8. Окно «Поиск решения»

После возврата в окно **Поиск решения** нажимается кнопка **Выполнить** (см.рис.8), вызывается программа решения задачи. Оптимальные значения параметров, полученные в результате решения задачи, выводятся на лист книги Excel вместо исходных данных (рис. 10).

Из таблицы следует, что максимально возможные значения показателей механической прочности сульфатной целлюлозы после размол равны соответственно $Y_1=1043,6$ кПа, $Y_2=500$ Н.

Эти значения достигаются при поддержании параметров технологического режима размол сульфатной целлюлозы на уровне:

концентрация массы, поступающей на размол, - на нижней границе допустимого диапазона, а именно 3,6 %;

величины присадки мельницы, выражаемой в единицах ампер-нагрузки на двигатель мельницы, - вблизи верхней границы допустимого диапазона, а именно 50,6 А.

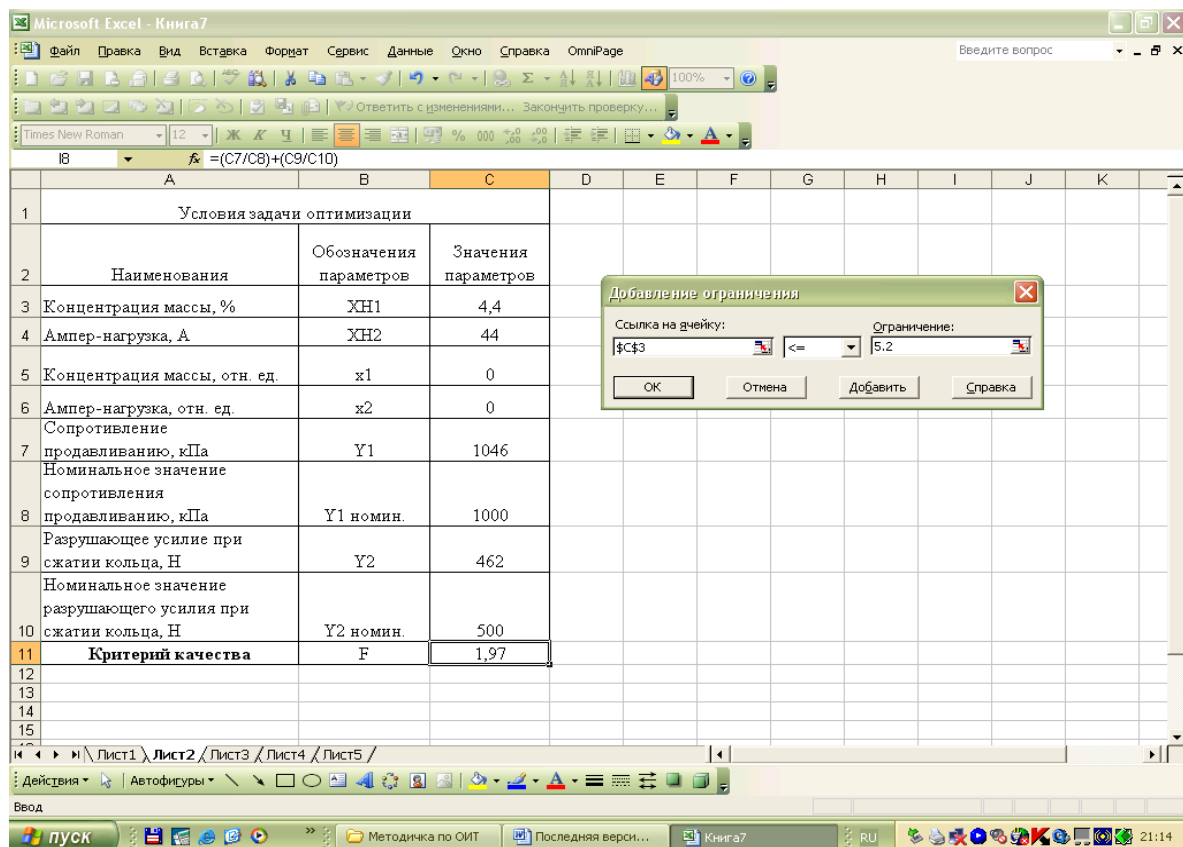


Рис.9. Окно для ввода ограничений, используемых в задаче оптимизации

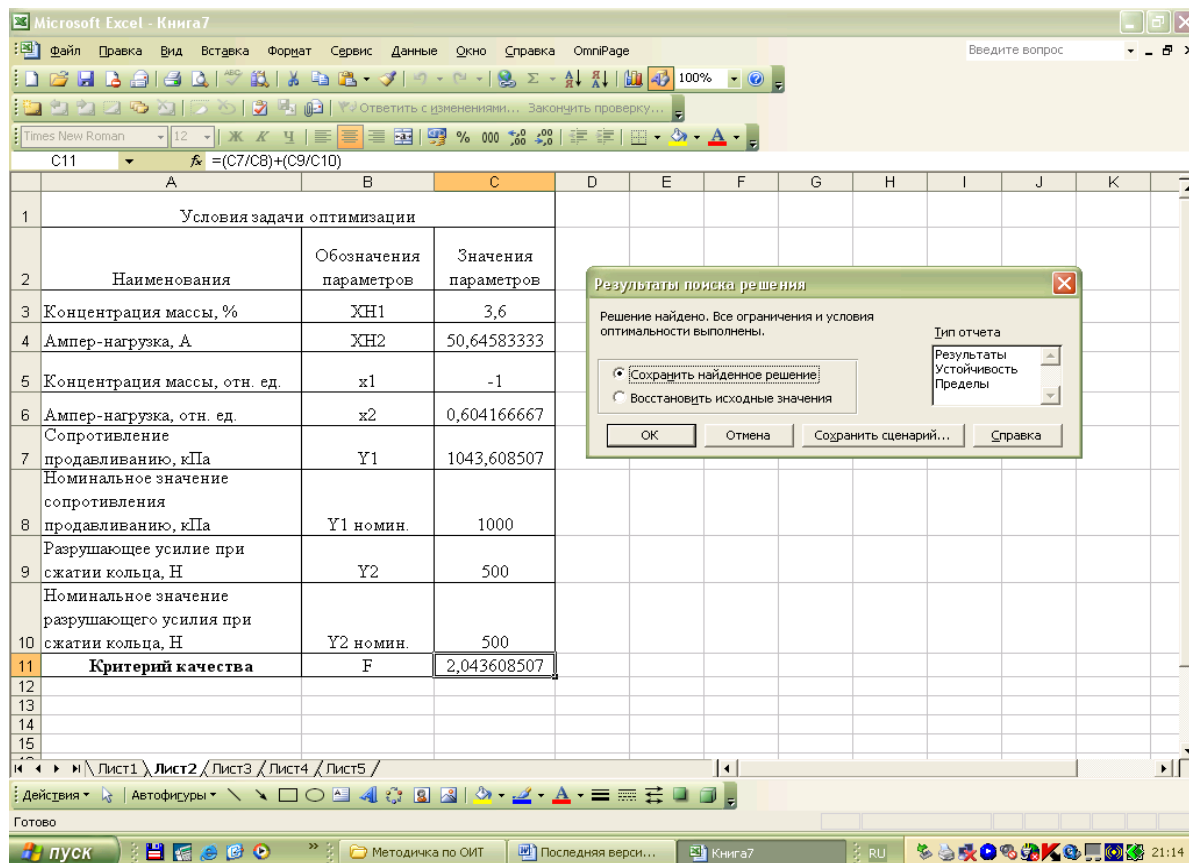


Рис.10. Результаты решения задачи оптимизации

Выводы

Если сопоставить полученные оптимальные значения с диапазоном параметров, выбранным по графикам, то окажется, что оптимальное решение дает иной результат, чем простой визуальный анализ графических зависимостей. Это объясняется тем, что параметры технологического режима размола сульфатной целлюлозы оказывают различное влияние на разные показатели механической прочности, и оператор процесса далеко не всегда может обеспечить требования, предъявляемые к этим показателям. Обоснованный результат достигается лишь путем решения задачи оптимального выбора технологического режима процесса.

Задание

В качестве задания в настоящей работе студенту:

- выдаются требования ГОСТ или технологического регламента, предъявляемые к показателям Y рассматриваемого технологического процесса;
- математические модели в виде уравнений регрессии;
- содержательная формулировка задачи выбора оптимального технологического режима и соответствующий ей критерий оптимальности.

Получив задание, студент должен:

- по математической модели рассчитать и построить зависимости показателей качества технологического процесса от параметров технологического режима;
- записать ограничения на параметры технологического режима и показатели качества технологического процесса;
- пользуясь электронными таблицами Excel, решить задачу оптимизации технологического режима;
- произвести анализ результатов решения задачи оптимизации.

Лабораторная работа №2 «Транспортная задача»

Транспортная задача (ТЗ) – это задача, в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах. В таких задачах ресурсы могут быть разделены между работами, и отдельные работы могут быть выполнены с помощью различных комбинаций ресурсов. Примером типичной транспортной задачи (ТЗ) является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям.

Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции одного вида из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку единицы продукции.

Этапы построения модели включают в себя: определение переменных; проверка сбалансированности задачи; построение сбалансированной транспортной матрицы; задание целевой функции; задание ограничений.

Транспортная модель

$$L(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min ;$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i, i = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, j = \overline{1, m}, \\ \forall x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (19)$$

Целевая функция представляет собой общие транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая

группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели транспортной задачи является транспортная матрица:

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, ед. прод.
	B_1	B_2	...	B_m	
A_1	c_{11} , [руб./ед. прод.]	c_{12}	...	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2m}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nm}	a_n
Потребность ед. прод.	b_1	b_2	...	b_m	$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$

Из модели (19) следует, что сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, т.е.

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j. \quad (20)$$

Если (20) выполняется, то задача называется **сбалансированной** (закрытой), в противном случае – **несбалансированной** (открытой). В случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, необходим дополнительный **фиктивный** (реально не существующий) пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, т.е.

$$b_{\phi} = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j.$$

Если суммарные потребности превышают суммарные запасы, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$a_{\Phi} = \sum_{j=1}^m b_j - \sum_{i=1}^n a_i.$$

Для фиктивных перевозок вводятся **фиктивные** тарифы c^{Φ} , величина которых обычно приравнивается к нулю ($c^{\Phi} = 0$). Но в некоторых ситуациях величину фиктивного тарифа можно интерпретировать как **штраф**, которым облагается каждая единица недопоставленной продукции. В этом случае величина c^{Φ} может быть любым положительным числом.

Пример

Рассмотрим транспортную задачу: для строительства четырех объектов используется кирпич, изготавливаемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготовить 100, 150 и 50 условных единиц кирпича (предложение поставщиков). Потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов ежедневно составляют 75, 80, 60 и 85 условных единиц (спрос потребителей). Тарифы перевозок одной условной единицы кирпича с каждого из заводов к каждому из строящихся объектов представлены в таблице:

Поставщики	Потребители			
	объект1	объект2	объект3	объект4
Завод1	6	7	3	5
Завод2	1	2	5	6
Завод3	8	10	20	1

Требуется составить такой план перевозок кирпича к строящимся объектам, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

Для решения транспортной задачи на персональном компьютере с использованием EXCEL необходимо:

1. Ввести исходные данные в ячейки рабочего листа EXCEL.
2. Разметить блоки ячеек на рабочем листе EXCEL, необходимые для моделирования объемов перевозок, а также для формирования элементов математической модели и целевой функции.
3. Сформировать на рабочем листе EXCEL элементы математической модели и целевую функцию.
4. Настроить программу "Поиск решения" и выполнить ее.

Рабочий лист EXCEL с введенными исходными данными для решения транспортной задачи показан на рис.11.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3			Матрица транспортных расходов						Предложение
4									поставщиков
5									
6			6	7	3	5			100
7			1	2	5	6			150
8			8	10	20	1			50
9									
10	Спрос потребителей		75	80	60	85			
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									

Рис.11. Исходные данные для решения транспортной задачи

Кроме исходных данных, на рабочем листе EXCEL для решения транспортной задачи необходимо предусмотреть:

1. Блок ячеек "Матрица перевозок", в котором будут моделироваться объемы перевозок;

2. Блок ячеек "Фактически реализовано", в котором будет моделироваться фактическая реализация продукции;

3. Блок ячеек "Фактически получено", в котором будет моделироваться фактическое удовлетворение спроса;

4. Блок ячеек "Транспортные расходы по потребителям", в котором будут подсчитываться транспортные расходы по каждому потребителю;

5. Ячейку "Итого расходы", в которой будут моделироваться итоговые транспортные расходы по всем потребителям (целевая ячейка).

Для наглядности указанные блоки ячеек целесообразно обвести рамками. Выполните эту операцию, называемую разметкой блоков ячеек.

Рабочий лист EXCEL с размеченными блоками ячеек показан на рис.12.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3			Матрица транспортных расходов						Предложение
4									поставщиков
5									
6			6	7	3	5			100
7			1	2	5	6			150
8			8	10	20	1			50
9									
10	Спрос потребителей		75	80	60	85			
11									
12			Матрица перевозок						Фактически
13			потреб.1	потреб.2	потреб.3	потреб.4			реализовано
14		поставщик 1							
15		поставщик 2							
16		поставщик 3							
17									
18	Фактически получено								
19									
20	Транспортные расходы								расходы
21	по потребителям						Итого		
22									
23									

Рис.12. Подготовленный лист EXCEL для решения задачи

Теперь в этих блоках ячеек можно формировать элементы математической модели и целевую функцию. Для этого:

1. Заполняются ячейки блока "Матрица перевозок" (C14:F16) числом 0,01.

2. Ячейки блока «Фактически получено» рассчитываются как сумма значений «Матрицы перевозок» по потребителям (по столбцам).

3. Ячейки блока «Фактически реализовано» рассчитываются как сумма значений «Матрицы перевозок» по поставщикам (по строкам).

4. Ячейки блока «Транспортные расходы» получаются суммированием произведений ячеек «Матрицы транспортных расходов» на соответствующие ячейки «Матрицы перевозок» для каждого потребителя (по столбцам). Например, чтобы получить значение в ячейке C21 необходимо найти сумму $C6 \cdot C14 + C7 \cdot C15 + C8 \cdot C16$.

5. Ячейки блока «Расходы» определяются суммированием ячеек блока «Транспортные расходы»

После формирования элементов математической модели и целевой функции транспортной задачи рабочий лист для рассматриваемого примера EXCEL примет вид, показанный на рис.13.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3			Матрица транспортных расходов						Предложение поставщиков
4									
5									
6			6	7	3	5			100
7			1	2	5	6			150
8			8	10	20	1			50
9									
10	Спрос потребителей		75	80	60	85			
11									
12			Матрица перевозок						Фактически реализовано
13			потреб.1	потреб.2	потреб.3	потреб.4			
14		поставщик 1	0,01	0,01	0,01	0,01			0,04
15		поставщик 2	0,01	0,01	0,01	0,01			0,04
16		поставщик 3	0,01	0,01	0,01	0,01			0,04
17									
18	Фактически получено		0,03	0,03	0,03	0,03			
19									
20	Транспортные расходы								расходы
21	по потребителям		0,15	0,19	0,28	0,12		Итого	0,74
22									
23									

Рис.13. Сформированная математическая модель задачи, записанная на

листе EXCEL

В главном меню из набора опций **Сервис** выберем пункт **Поиск решения**. В соответствующие окна вводятся адреса

ЦЕЛЕВОЙ ЯЧЕЙКИ – I21,

ИЗМЕНЯЕМЫХ ЯЧЕЕК – блок «Матрица перевозок» C14:F16, а также ограничения на значения переменных.

Все ячейки блока «Матрицы перевозок» должны быть неотрицательными - C14:F16 ≥ 0 .

Все ячейки блока «Фактически получено» должны быть не меньше, чем «Спрос потребителей» - C18:F18 $\geq$ C10:F10.

Все ячейки блока «Фактически реализовано» должны быть не больше, чем «Предложения поставщиков» - I14:I16 $\leq$ I6:I8.

Появившееся окно программы “Поиск решения” должно иметь вид, показанный на рис.14.

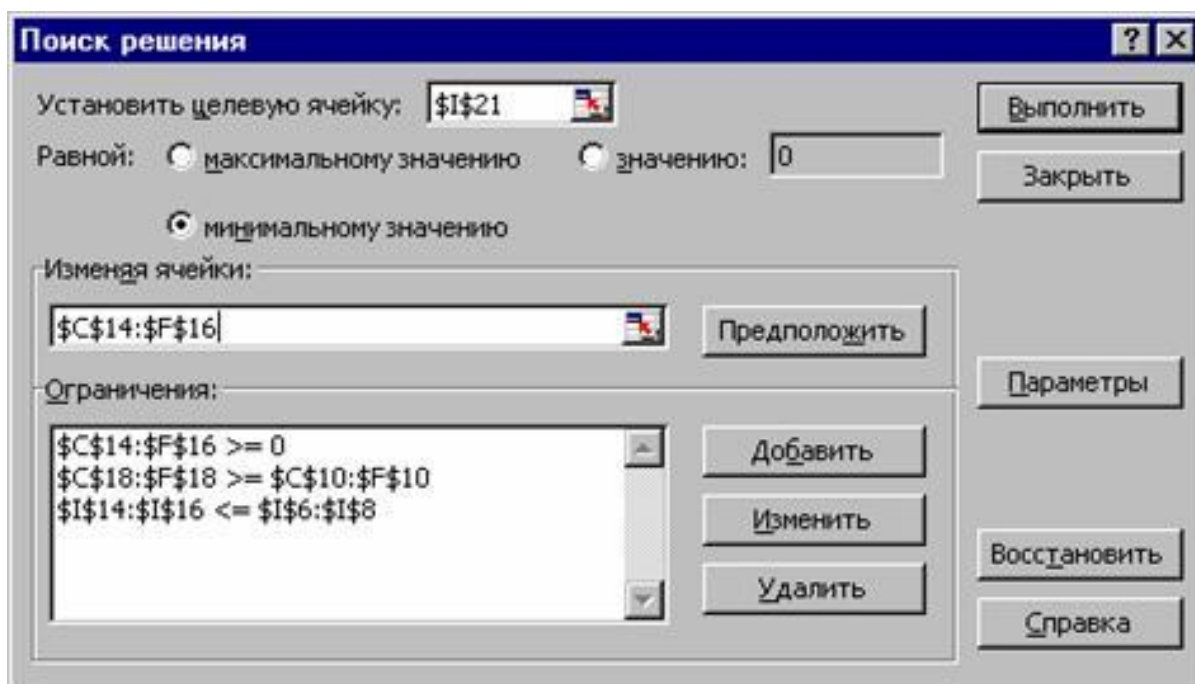


Рис.14. Окно программы «Поиск решения»

После нажатия кнопки **Выполнить** оптимальные значения параметров, полученные в результате решения задачи, выводятся на лист книги Excel вместо исходных данных.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Варианты контрольных работ для студентов заочной формы обучения

Задача № 1.

Найти безусловный экстремум функции двух переменных.

№ варианта	$f(x_1, x_2)$
0	$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + 5x_1x_2$
1	$f(x_1, x_2) = x_2^3 + x_1^2 + 7x_2^2 + 2x_1x_2$
2	$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 5x_1x_2$
3	$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 + 2x_1 + 6x_1x_2$
4	$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 + 3x_1 + 4x_1x_2$
5	$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3 + 7x_1^2 + 3x_1x_2$
6	$f(x_1, x_2) = x_2^3 + x_1^2 + 5x_2^2 + x_1x_2$
7	$f(x_1, x_2) = x_2^3 + x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2$
8	$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_1^2x_2$
9	$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1^2x_2 + 6x_1$

Задача № 2.

Решить задачу аналитической градуировки датчика для критерия оптимальности $F = \sum_{i=1}^n (I_i - C_i)^2$, рассчитав коэффициенты градуировочной зависимости по экспериментальным данным. Построить график

теоретической зависимости для критерия F.

№ варианта	Обозначения	1	2	3	4	5
0	I, мА	0	5	8	14	18
	C, %	2	2,5	2,8	3,2	3,5
1	I, мА	0	5	8	14	18
	C, %	1,5	2	2,8	3,5	4,9
2	I, мА	0	5	8	14	18
	C, %	1,5	2,6	3,0	3,5	4,0
3	I, мА	0	5	8	14	18
	C, %	1,8	2,5	2,8	3,2	3,5
4	I, мА	0	5	8	14	18
	C, %	1,9	2,3	2,8	3,2	3,6
5	I, мА	0	5	8	14	18
	C, %	2,0	2,5	3,1	3,7	4,5
6	I, мА	0	5	8	14	18
	C, %	2,0	2,5	3,1	3,7	4,5
7	I, мА	0	5	8	14	18
	C, %	1,8	2,5	3,1	3,7	4,5
8	I, мА	0	5	8	14	18
	C, %	2,0	2,5	3,1	3,7	4,2
9	I, мА	0	5	8	14	18
	C, %	2,4	2,9	3,4	3,8	4,8

Задача № 3.

Определить размеры буферных емкостей, объединенных в батарею, из условия минимальных затрат материала на их сооружение. Иметь в виду, что емкости открыты – крышки нет, внутренние стенки у них – общие (рис.П.1.1).

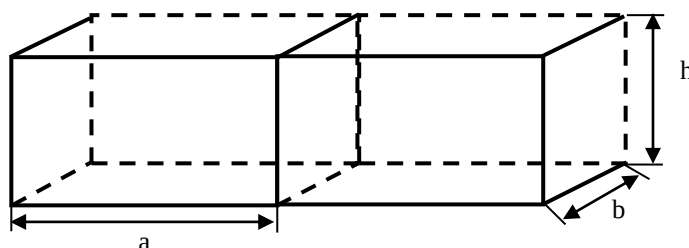


Рис.П.1.1. Иллюстрация к задаче 2

Решить задачу двумя способами: как задачу на безусловный экстремум для функции двух переменных и методом множителей Лагранжа.

№ варианта	Количество емкостей в батарее	Объем одной емкости
0	2	100
1	2	200
2	2	300
3	3	100
4	3	200
5	3	300
6	4	100
7	4	200
8	4	300
9	4	350

Задача № 4.

На БДМ выпускается 2 вида бумаги (марки А и марки Б), при этом расходуется 3 вида сырья: сульфатная целлюлоза (СФА), сульфитная целлюлоза (СФИ) и макулатура.

Требуется определить выпуск каждого вида бумаги на некоторый период времени при ограниченных запасах сырья, чтобы получить

максимальную прибыль при реализации продукции.

		Марка А	Марка Б	Запасы сырья, т
Удельные нормы расхода сырья, т/т	СФА	q 11	q 12	Z1
	СФИ	q 21	q 22	Z2
	Макулатура	q 31	q 32	Z3
Прибыль на 1т продукции, усл. ед		P1	P2	
Минимальный выпуск продукции, т		V1	V2	

Исходные данные сведены в таблицу.

№ варианта	q 11	q 12	q 21	q 22	q 31	q 32	Z1	Z2	Z3	P1	P2	V1	V2
0	0,3	0,25	0,4	0,75	0,3	0	40	65	35	55	45	10	10
1	0,3	0,25	0,4	0,65	0,3	0,1	45	50	40	55	45	10	10
2	0,3	0,25	0,4	0,6	0,3	0,15	50	65	35	55	45	10	10
3	0,35	0,25	0,35	0,75	0,3	0	45	50	30	55	45	10	10
4	0,35	0,25	0,35	0,65	0,3	0,1	50	55	35	55	45	10	10
5	0,35	0,25	0,35	0,6	0,3	0,15	40	55	40	55	45	10	10
6	0,3	0,25	0,4	0,75	0,3	0	55	40	35	55	45	10	10
7	0,3	0,25	0,4	0,75	0,3	0	60	50	20	55	45	10	10
8	0,35	0,25	0,35	0,65	0,3	0,1	50	65	30	55	45	10	10
9	0,35	0,25	0,35	0,6	0,3	0,15	45	50	25	55	45	10	10

Примечание. Номер варианта выбирается по последней цифре индивидуального шифра. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради, все записи выполняются разборчиво, к задаче 4 ОБЯЗАТЕЛЬНО строится график (желательно на миллиметровке).

Вопросы к теоретическому зачету

1. Проблема оптимизации. Понятие математической модели задачи оптимизации.
2. Этапы решения задачи оптимизации.
3. Понятие области допустимых решений.
4. Классификация и сущность аналитических методов решения задачи оптимизации.
5. Общий алгоритм решения задачи с ограничениями.
6. Классификация и сущность методов линейного программирования.
7. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования.
8. Симплексный метод решения задач линейного программирования.
9. Алгоритм поиска опорного решения для симплексного метода решения задач линейного программирования.
10. Алгоритм поиска оптимального решения для симплексного метода решения задач линейного программирования.
11. Математическая постановка и алгоритм решения транспортной задачи.
12. Классификация и сущность методов решения задач нелинейного программирования.
13. Сущность методов решения задач нелинейного программирования нулевого порядка.
14. Сущность методов решения задач нелинейного программирования первого порядка.
15. Сущность методов решения задач нелинейного программирования второго порядка.
16. Динамическое программирование. Общая постановка задачи динамического программирования.
17. Классификация и сущность аналитических методов решения задач динамического программирования.
18. Методы решения транспортной задачи.
19. Прикладные задачи оптимизации производственных процессов.
20. Методы решения прикладных задач оптимизации производственных процессов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

(рекомендуемая литература)

Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации: учебное пособие. – М.:МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003.

Холоднов В.А. и др. Математическое моделирование и оптимизация химико-технологических процессов: практическое руководство. – СПб.: АНО НПО “Профессионал”, 2003.

Островский Г. М., Волин Ю. М., Зиятдинов Н. И. Методы оптимизации химико-технологических процессов. – М.: Изд-во “КДУ”, 2008.

Сафонова М.Р. Оптимизация технологических процессов целлюлозно-бумажной промышленности: учебное пособие. – Л.:ЛТА, 1981.

Сафонова М.Р. Оптимизация управления технологическими процессами ЦБП с помощью УВМ: учебное пособие/ЛТИЦБП.-Л., 1987/

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Общие теоретические сведения	4
2. Методические указания для выполнения контрольной работы ..	9
2.1. Задачи на безусловный экстремум.	9
2.2. Задачи на условный экстремум с ограничениями – равенствами	19
2.3. Задачи линейного программирования	25
3. Методические указания для выполнения лабораторных работ ..	29
Лабораторная работа №1 «Исследование технологического процесса по математической модели и выбор оптимального технологического режима»	29
Лабораторная работа №2 «Транспортная задача»	39
Приложения	46
Приложение 1	46
Приложение 2	50
Библиографический список (рекомендуемая литература). . . .	51

Учебное издание

Анна Владимировна Черникова

ОСНОВЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор Н.П.Новикова
Техн. редактор Л.Я.Титова

Темплан 2013 г, поз. 82

Подп. к печати 30.09.13 Формат 60 x 84 / 16. Бумага тип. № 1.
Печать офсетная. Уч.- изд. л. 3,25. Усл. печ. л. 3,25. Тираж 50 экз. Изд. №
82. Цена «С». Заказ

Ризограф Санкт-Петербургского государственного технологического
университета растительных полимеров 198095, Санкт-Петербург,
ул. Ивана Черных, 4.