

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**“САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ
ПОЛИМЕРОВ”**

В.Н. Леонтьев

**АНАЛИЗ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Часть 2

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2014**

УДК 676-5(075)
ББК35.77
Л478

Леонтьев В.Н. Анализ систем автоматического управления: учебное пособие /СПбГТУРП. - СПб. 2014.Ч.2. - 111с. – ил.50.

В настоящем пособии части 2 рассмотрены вопросы устойчивости и анализа качества систем автоматического управления.

Предназначено для студентов очной формы обучения по направлению 220400.62 «Управление в технических системах» при изучении дисциплины «Теория автоматического управления», а также может быть полезно студентам любой формы обучения, занимающимся решением задач анализа систем автоматического управления.

Рецензенты:

заведующий кафедрой автоматизации процессов химической промышленности Санкт-Петербургского государственного технологического института (Технического университета), д-р техн. наук Русинов Л.А;

заведующий кафедрой автоматизации процессов и производств СПбГТУРП, канд. техн. наук Суриков В.Н.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия.

© Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров, 2014

© Леонтьев В.Н., 2014

19. Качество систем с обратной связью

Решение любых задач в человеческой деятельности прямо или косвенно связано с оценкой эффективности полученного результата с точки зрения поставленных целей. В простейшем случае такая оценка сводится к качественным понятиям "хорошо" или "плохо". Однако при подобном подходе возможны проявления субъективизма: что хорошо одному - может показаться плохо другому. Вместе с тем качественные характеристики не дают ответа на вопросы "насколько хорошо?" или "насколько плохо?".

Количественные характеристики приносят в наши представления об объекте исследования строгость и основательность, служат основой для целенаправленного улучшения качества работы систем.

Решение технических задач связано с оперированием количественными значениями параметров объектов, а также количественными характеристиками параметров рабочих процессов, осуществляемых данными объектами.

Численные показатели позволяют строго охарактеризовать различие объектов и процессов на основе количественного различия их параметров.

Рассмотрим количественные характеристики систем управления с обратной связью.

Открытие закона функционирования систем управления - закона обратной связи - дало возможность целенаправленно вести проектирование АСР, зная основные необходимые элементы и порядок их связи в системах. Известно, что использование обратной связи при управлении объектом позволяет учитывать сведения не только о желаемом, но и о действительном ходе рабочего процесса. С помощью обратной связи удастся, не вдаваясь в детали причин, вызывающих отклонение регулируемой величины, корректировать ее значение на основании лишь информации об этих отклонениях за счет определенным образом формируемого управляющего воздействия на объект управления. Чем лучше система

справляется с задачей поддержания строгого соответствия между задающим воздействием и регулируемой величиной, т.е. чем меньше ошибка регулирования, тем совершеннее система.

Причины, вызывающие отклонения регулируемой величины, могут быть различны. Однако можно выделить несколько основных источников ошибок регулирования.

1. Внешние возмущения - возмущения по нагрузке и по питанию.

Под "нагрузкой" понимается "потребитель" конечного результата работы объекта управления. Так, у двигателя, используемого для вращения шпинделя станка, нагрузкой является обрабатываемая деталь. Параметром нагрузки, характеризующим ее влияние на процесс регулирования скорости вращения, является усилие резания.

У бака, используемого для нагревания в нем жидкости, нагрузкой является агрегат, потребляющий эту нагретую жидкость в своем технологическом процессе. Параметром нагрузки в данном случае может быть расход жидкости, меняющийся при изменении производительности агрегата.

Под "питанием" понимается энергия, используемая системой для осуществления операций регулирования. В зависимости от физического носителя параметром питания может быть величина напряжения, сила тока, давление сжатого воздуха и т.п.

На производстве один и тот же источник энергии используется в большинстве случаев рядом потребителей (станками, агрегатами, цехами), производительность, а следовательно и потребление энергии которых может меняться в производственном цикле. Вместе с тем любой реальный источник энергии обладает конечной мощностью. Отсюда изменения в потреблении энергии одним из агрегатов в большей или меньшей мере сказывается на изменении параметров носителя энергии: изменяется величина, напряжения в сети, меняется давление сжатого воздуха в пневмолиниях и т.п.

2. Внутренние возмущения как источники ошибки регулирования обусловлены изменениями параметров элементов систем из-за изменений условий окружающей среды (температуры, давления, влажности, вибрации), старения элементов и т.п.

3. Ошибка чувствительного элемента как измерительного органа системы связана с конструктивными особенностями и неизбежными погрешностями при его изготовлении. Ошибку чувствительного элемента можно рассматривать как некоторое возмущающее воздействие на систему.

4. Инерционность элементов и систем также является причиной так называемой динамической ошибки регулирования, присутствующей в системах из-за задержки изменения регулируемой величины на изменение управляющего или задающего воздействия. Такая ошибка всегда свойственна системам в переходных процессах.

Таким образом ошибка регулирования зависит не только от действующих на систему сигналов, но и от собственных ее свойств, зависящих от параметров элементов системы. Так как исполнительный и регулирующий орган выбираются из энергетических соображений, чувствительный элемент из соображений требуемой точности измерений, а преобразующее устройство из соображений, например, безопасности оперирования с сигналами, то параметры этих элементов как и параметры объекта регулирования, в большинстве случаев изменениям не подлежат.

Регулятор как устройство, реализующее определенный закон регулирования, является тем звеном системы, параметры которого (настройки регулятора) можно изменять.

Получение ошибки регулирования не более требуемого значения при проектировании системы сводится в простейшем случае к выбору закона регулирования и его коэффициентов (настроек регулятора), обеспечивающих заданное изменение регулируемой величины при действии на систему возмущения.

Рассмотрим количественные характеристики систем с обратной связью для того, чтобы объективно определить цену ее использования.

19.1. Чувствительность АСР к вариациям параметров их элементов

В разомкнутой системе все изменения параметров элементов и действующие возмущения непосредственно оказываются на изменениях выходной величины.

Отличие системы с обратной связью заключается в том, что такая система "чувствует" подобные изменения по изменению выходной величины и пытается скорректировать регулируемую величину. Именно "чувствительность" АСР к указанным изменениям является ее важнейшей чертой.

Рассмотрим системы без и с обратной связью (рис. 1.9.1)

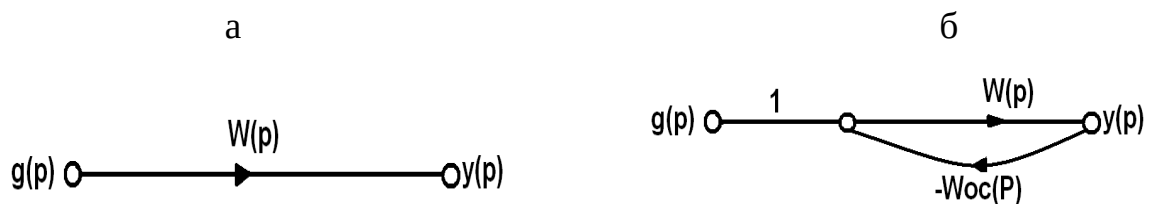


Рис. 19.1. Графы: а - разомкнутой и б - замкнутой систем

Для системы без обратной связи имеем

$$y(p) = W(p)g(p) \quad (19.1)$$

Для системы с обратной связью

$$y(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)Woc(p)} g(p) \quad (19.2)$$

Если для замкнутой системы в области рабочих частот $W(p)Woc(p) \geq 1$, что, как увидим в дальнейшем, всегда выполняется, то из уравнения(19.2) можно записать:

$$y(p) \cong \frac{1}{Woc(p)} g(p) \quad (19.3)$$

Из уравнения (19.3) следует, что влияние параметров $W(p)$ и их изменений можно рассматривать как несущественное. А при $Woc(p)=1$ получаем желаемый результат, когда выход равен входу.

Поэтому первая польза от введения обратной связи заключается в уменьшении влияния изменения параметров объекта регулирования.

Для более детальной иллюстрации отмеченных положений рассмотрим изменение параметров $W(p)$. Пусть при этом будем иметь $W(p) + \Delta W(p)$.

Тогда в случае замкнутой системы получим .

$$Y(p) + \Delta Y(p) = \frac{W(p) + \Delta W(p)}{1 + [W(p) + \Delta W(p)]Woc(p)} g(p) \quad (19.4)$$

Для системы без обратной связи

$$\Delta Y(p) = \Delta W(p) g(p) \quad (19.5)$$

из (19.4) следует

$$\Delta Y(p) = \frac{\Delta W(p)}{1 + W(p)Woc(p) + \Delta W(p)Woc(p)} g(p) \quad (19.6)$$

В случае $W(p)Woc(p) \gg \Delta W(p)Woc(p)$ имеем

$$\Delta Y(p) = \frac{\Delta W(p)}{1 + W(p)Woc(p)} g(p) \quad (19.7)$$

Сравнивал (19.5) и (19.7) можно заметить, что $\Delta Y(p)$ во втором случае уменьшается на величину $1 + W(p)Woc(p) \gg 1$.

Введем количественную характеристику, которая позволила бы сравнивать системы по тому влиянию, которое оказывает на их работу изменение параметров элементов.

Такая характеристика носит название *чувствительности* и представляет собой процентное изменение передаточной функции системы к процентному изменению передаточной функции процесса:

$$S = \frac{\Delta\Phi(p)/\Phi(p)}{\Delta W(p)/W(p)}. \quad (19.8)$$

В пределе для малых изменений (19.8) можно переписать

$$S = \frac{\partial\Phi/\Phi}{\partial W/W} = \frac{\partial\Phi}{\partial W} \cdot \frac{W}{\Phi}. \quad (19.9)$$

Для системы без обратной связи, как следует из (19.5), $S=1$.

Для системы с обратной связью имеем

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)W_{oc}(p)} \quad (19.10)$$

Далее

$$\begin{aligned} S = \frac{\partial\Phi}{\partial W} \cdot \frac{W}{\Phi} &= \frac{1}{(1 + WW_{oc})^2} \{ (1 + WW_{oc}) - WW_{oc} \} \frac{W}{W/(1 + WW_{oc})} = \\ &= \frac{1}{(1 + WW_{oc})^2} \frac{W}{W/(1 + WW_{oc})} = \frac{1}{1 + WW_{oc}}. \end{aligned} \quad (19.11)$$

Находим, что чувствительность системы к изменению параметров может быть изменена по сравнению с системой без обратной связи за счёт увеличения $W(p) \cdot W_{oc}(p)$.

Рассмотрим чувствительность системы к изменению параметров элементов в обратной связи. В данном случае

$$S_{W_{oc}}^{\Phi} = \frac{\partial\Phi}{\partial W_{oc}} \cdot \frac{W_{oc}}{\Phi} = \frac{W^2}{(1 + WW_{oc})^2} \cdot \frac{(-WW_{oc})}{W/(1 + WW_{oc})} = -\frac{WW_{oc}}{1 + WW_{oc}}. \quad (19.12)$$

При больших величинах $W W_{oc}$ чувствительность $S_{W_{oc}}^{\Phi}$ приближается к единице и изменения в $W_{oc}(p)$ непосредственно сказываются на изменении выходной величины.

Анализируя полученные результаты, сделаем важные для практики проектирования систем выводы.

Для получения высокой точности в системах без обратной связи элементы системы должны быть тщательно выбраны и изготовлены с большой точностью. В то же время для систем с обратной связью допустима меньшая точность исполнения основных элементов. Отсюда меньше производственные затраты и стоимость их изготовления. Однако особое внимание должно быть уделено элементам в обратной связи (чувствительному элементу, преобразователю). Этим во многом объясняются относительно большие усилия и материальные затраты, направленные на стабилизацию параметров измерительных приборов.

19.2. Внешние возмущения в системах с обратной связью

Другим важным эффектом обратной связи в системах управления является уменьшение влияния на них внешних возмущающих сигналов. Для иллюстрации этого рассмотрим систему управления числа оборотов двигателя, используемого для вращения шпинделя станка при обработке закреплённой на нём детали. Структурная схема системы показана на рис. 19.2.

Рис. 19.2. Структурная схема АСР числа оборотов двигателя

Здесь $R_{\text{я}}$ и $L_{\text{я}}$ - соответственно сопротивление и индуктивность якорной цепи двигателя;

$K_{\text{ус}}$, $K_{\text{д}}$ и $K_{\text{тг}}$ - соответственно коэффициенты передачи усилителя, двигателя, тахогенератора;

I - приведённый момент инерции двигателя;

f - коэффициент, характеризующий сопротивление резанию;

$U_{\text{зад}}, \Delta U, U_{\text{ус}}$ - соответственно задающее напряжение, рассогласование и напряжение на выходе усилителя;

$M_{\text{дв}}, M_{\text{в}}$ и $M_{\text{нагр}}$ - соответственно момент, развиваемый двигателем, момент возмущения, обусловленного изменением усиления резания из-за неравномерности поверхности обрабатываемой детали и из-за износа резца, и момент нагрузки вращающегося инерционного тела; $M_{\text{нагр}} = M_{\text{дв}} - M_{\text{в}}$;

ω - скорость вращения двигателя.

На рис. 19.3 показаны зависимости скорости ω от момента нагрузки на валу $M_{\text{нагр}}$ для типового двигателя.

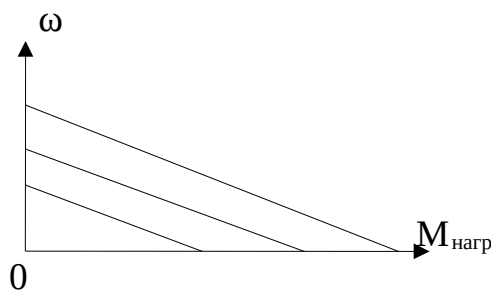


Рис.19.3 Моментная характеристика типового двигателя

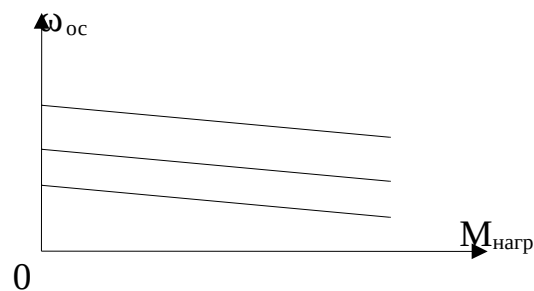


Рис.19.4 Зависимость ω от $M_{\text{нагр}}$ для АСР

Для двигателя без обратной связи (часть структурной схемы, обведенная пунктиром) при $L_{\text{я}} \approx 0$ изменение скорости за счёт изменения момента возмущения можно найти по выражению

$$\omega(p) = \left(\frac{-1}{Jp + f + K_{\partial} K_{\text{э}} / R_{\text{я}}} \right) M_{\text{в0}}(p) \quad (19.13)$$

В случае ступенчатого возмущающего воздействия величиной $M_{\text{в0}}$ получим $M_{\text{в}}(p) = M_{\text{в0}}/p$.

Отклонение скорости двигателя от её требуемого значения в установившемся режиме при действии возмущения может быть найдено с помощью предельной теоремы Лапласа

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{-1}{Jp + f + K_{\partial}K_{\varepsilon} / R_{\varepsilon}} \right) \frac{M_{B_0}}{p} = - \frac{M_{B_0}}{f + K_{\partial}K_{\varepsilon} / R_{\varepsilon}}. \quad (19.14)$$

Рассмотрим, что произойдёт в системе с обратной связью при действии того же возмущения. Пользуясь формулой Мэзона, запишем:

$$\begin{aligned} \omega(p) &= \frac{- \left[\frac{1}{(Ip + f)} \right]}{1 + \left(K_{TT} K_{yC} K_{\partial} / R_{\varepsilon} \right) \left[\frac{1}{(Jp + f)} \right] + \left(K_A K_{\varepsilon} / R_{\varepsilon} \right) [1 + (Jp + f)]} M_B(p) \\ &= \frac{-1}{Jp + f + \left(\frac{K_{\partial}}{R_{\varepsilon}} \right) (K_{TT} K_{yC} + K_{\varepsilon})} M_B(p). \end{aligned} \quad (19.15)$$

Отклонение скорости двигателя от требуемого значения (ошибку регулирования в установившемся состоянии) вновь найдём, воспользовавшись предельной теоремой Лапласа:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\omega(p) = \frac{-1}{f + \left(\frac{K_{\partial}}{R_{\varepsilon}} \right) (K_{TT} K_{yC} + K_{\varepsilon})} M_{B_0}. \quad (19.16)$$

При большей величине коэффициента усиления усилителя, выполняющего функции пропорционального регулятора, имеем:

$$\omega(\infty) \cong \frac{-R_{\varepsilon}}{K_{yC} K_{\partial} K_{TT}} M_{B_0} \quad (19.17)$$

Для оценки степени влияния обратной связи сравним отклонение скорости двигателя при действии возмущения $M_B(t)$ в рассмотренных двух случаях. Отношение изменения скорости для системы с обратной связью ω_{oc} к изменению скорости двигателя ω будет

$$\frac{\omega_{oc}(\infty)}{\omega(\infty)} = \frac{-R_{\varepsilon} f + K_{\partial} K_{\varepsilon}}{K_{yC} K_{\partial} K_{TT}} \quad (19.18)$$

Кривые переходных процессов для двигателя и для АСР показаны на рис. 19.5.

Напомним, что «0» на графике соответствует номинальному (требуемому) значению ω , при котором $\Delta\omega=0$.

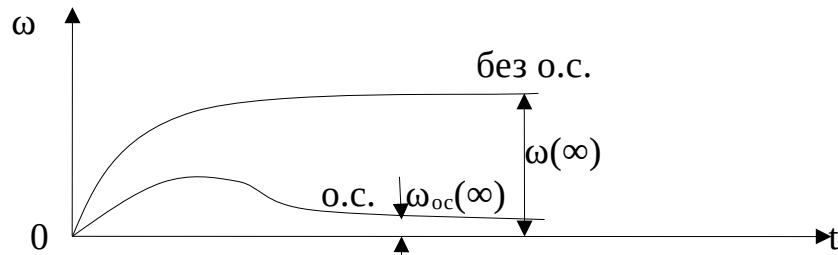


Рис. 19.5. Переходный процесс для двигателя и АСР

Одним из источников ошибок регулирования в системах является шум, генерируемый в электронных элементах систем, в транзисторах. Наиболее «шумящим» источником, как правило, является измерительное устройство. Это возмущение или шум может быть представлено так, как показано на рис.19. 6.

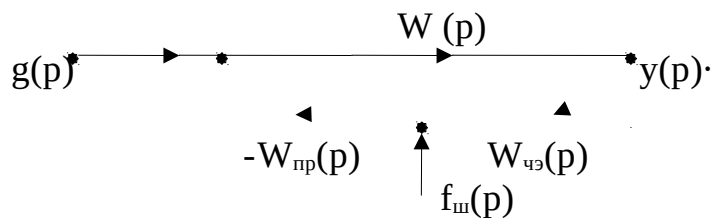


Рис.19.6. Граф АСР

Здесь $W(p)$ – передаточная функция прямого тракта;
 $W_{чз}(p)$ – передаточная функция чувствительного элемента;
 $W_{пр}(p)$ – передаточная функция преобразователя.

Влияние шума на выходной сигнал $y(p)$ можно описать следующим образом:

$$y(p) = \frac{-W(p)W_{пр}(p)}{1 + W(p)W_{пр}(p)W_{чз}(p)} f_{ш}(p) \quad (19.19)$$

При $|W(j\omega)W_{пр}(j\omega)W_{чз}(j\omega)| \gg 1$ для рабочих частот системы.

Из выражения (19.19) следует, что чем больше $W_{\text{ш}}(p)$, тем меньше влияние шума на выходной сигнал $y(p)$. Отсюда следует, что при проектировании следует добиваться максимума величины $W_{\text{ш}}(p)$. Это эквивалентно максимизации отношения сигнал/шум чувствительного элемента. Поскольку, как уже было сказано, функция чувствительности $S_{W_{\text{ш}}}^{\Phi} \approx 1$, необходимо, чтобы чувствительный элемент был тщательно спроектирован и обладал минимумом шумов, дрейфов и изменений параметров.

Выполнение этих требований обычно сложная, но решаемая задача, так как элементы обратной связи работают на сравнительно низких по мощности уровнях и могут быть спроектированы с небольшими затратами.

Достаточно часто шум присутствует и во входном сигнале систем $g(t)$, получаемом с помощью задающего устройства. В этом случае входной сигнал может быть представлен как сумма $g(t)+r(t)$ где $r(t)$ - шум. Система в этом случае будет передавать как шум, так и полезный сигнал. Однако, если частотный спектр шума и входного сигнала $g(t)$ различны (обычно спектр шума более высокочастотен), отношение на выходе сигнал/шум может быть maximизировано выбором такой передаточной функции системы, которая имела бы низкие частоты пропускания.

Интересно заметить, что в человеческом организме различные рецепторы служат датчиками ощущений. Фраза «все болезни от нервов» находит конкретное обоснование в проведенном выше анализе, из которого следует, насколько важна роль и состояние чувствительных элементов в системах, в том числе человеческого организма, таких как система терморегуляции, стабилизации кровяного давления, пульса, стабилизации освещенности сетчатки глаза и т.п.

19.3. Цена обратной связи

Присутствие обратной связи в автоматических системах регулирования дает выгоды, описанные выше. Однако, естественно, что эти выгоды могут быть получены за счет определенных экономических затрат.

Стоимость системы возрастает за счет увеличения числа элементов системы и за счет их сложности. Для организации обратной связи необходимо вводить дополнительные элементы, из которых чувствительный элемент является ключевым и часто оказывается одним из самых дорогостоящих в системе. К тому же чувствительный элемент вносит шумы и является причиной ошибки системы, которая не может быть устранена.

За использование обратной связи приходится платить также и уменьшением коэффициента усиления. Так, например, в простейшей одноконтурной системе с передаточной функцией в разомкнутом состоянии $W(p)$ при единичной обратной связи имеем $\Phi(p) = W(p)/(1+W(p))$, т.е. $\Phi(p)$ по сравнению с $W(p)$ уменьшается на $(1+W(p))$. Поскольку система управления должна обладать значительным коэффициентом усиления по мощности для приведения в действие исполнительного механизма, изменяющего состояние регулирующего органа, в случае системы с обратной связью требуются дополнительные источники энергии.

Введение обратной связи может привести к неустойчивости системы, иначе говоря, к появлению нарастающей с течением времени ошибки регулирования за счет неправильно выбранных параметров системы.

Введение обратной связи усложняет задачу проектирования. Однако польза от ее применения в большинстве случаев существенно больше неудобств и дополнительных затрат.

Основными причинами для использования обратной связи, несмотря на стоимость и дополнительную сложность, являются следующие:

1. Уменьшение чувствительности АСР к изменениям параметров объекта регулирования.
2. Уменьшение влияния возмущений и шумов на систему, т.е. обратная

связь позволяет системе адаптироваться к изменяющимся условиям окружения.

3. Уменьшение ошибки регулирования АСР в установившемся состоянии.
4. Возможность изменения динамических характеристик всей системы за счет изменения параметров лишь одного элемента системы - регулятора. (Важно! Чтобы изменить свойства системы, не нужно изменять параметры больших котлов стометровых бумагоделательных машин, достаточно изменить параметры маленького по размерам элемента системы – регулятора (контроллера).

20. Принципы и законы управления

Основным принципом, лежащим в основе построения системы автоматического регулирования, является принцип обратной связи. В этом случае информация об ошибке регулирования используется для формирования с помощью регулятора управляющего воздействия на объект регулирования. Регулятор реализует закон (алгоритм) регулирования, т.е. реализует определенную последовательность операций по преобразованию сигнала ошибки (X) в выгодной сигнал регулятора (V).

Математически модель регулятора может быть представлена в виде дифференциального уравнения, либо в виде соответствующей передаточной функции.

В том случае, когда для получения сигнала Y используются сведения лишь о величине ошибки X в каждый момент времени, закон регулирования имеет вид

$$V(t) = kx(t) \quad (20.1)$$

и носит название пропорционального закона регулирования или сокращенно П-закона.

Как следует из выражения (20.1), чем больше величина ошибки, тем больше управляющее воздействие будет оказано на объект регулирования.

Так как $X(t) = g(t) - Y(t)$, то при $Y(t) < g(t)$, т.е. при **уменьшении** регулируемой величины относительно ее заданного, значения $g(t)$ будем иметь пропорциональное **увеличение** сигнала $V(t)$ и наоборот: при **увеличении** регулируемой величины будем иметь пропорциональное **уменьшение** сигнала $V(t)$. Такая организация управления связана с обратной связью, называемой "**отрицательной обратной связью**" (о.с.).

Если провести аналогию с оператором, функции, которого в АСР выполняет автоматическое управляющее устройство, то можно сказать, что регулятор реализует логический процесс (процесс мышления), решая насколько и в какую сторону следует изменить положение регулирующего органа.

Однако, если продолжить рассмотрение по аналогии, можно заметить, что человек - оператор, принимая решение по управлению, пользуется не только сиюминутной информацией. Он использует также накопленный в процессе управления опыт: сведения о последствиях принятия тех или иных решений по управлению процессом, сведения о динамических свойствах объекта (например, его инерционности) позволяющие предвидеть возможные изменения параметров процесса и т.д.

На рис.20.1,а показаны два графика изменения ошибки регулирования. В момент времени t_1 имеем $X=0$. Если в данный момент оператору необходимо было бы принимать решение по управлению на основе только величины ошибки, то очевидно, в момент времени t_1 никаких действий им не было бы предпринято. Однако опытный оператор изменит положение регулирующего органа, понимая, что в силу инерционности объекта в следующий момент времени ошибка обязательно появится. Причем для процесса 2 эта ошибка будет больше, чем для процесса 1.

Какая же, конкретно информация позволит ему сделать подобные заключения? Сведения о скорости изменения ошибки dx/dt в момент t_1 . Так как для процесса 2 она больше, чем для процесса 1, то опытный оператор не дожидаясь, когда ошибка появится, осуществит заранее

изменение состояния регулирующего органа, предваряя таким образом появление ошибки. Причем, для процесса 2 величина управляющего воздействия будет выбрана им больше, чем для процесса I.

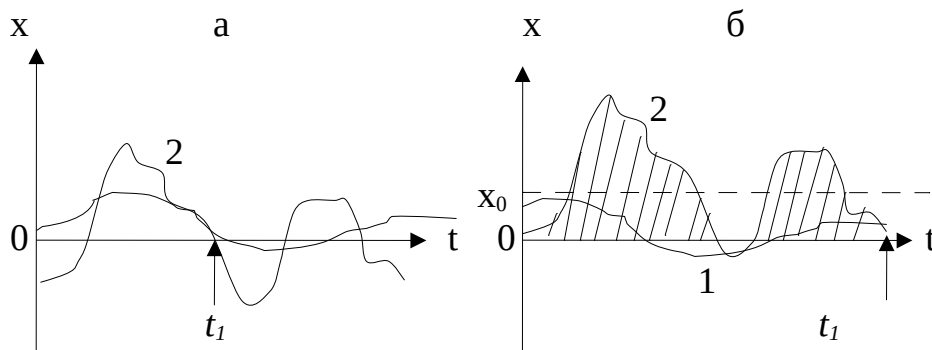


Рис. 20.1. Переходные процессы в АСР

Формализуя сделанные рассуждения, можно записать, что в этом случае управление осуществляется по следующему закону:

$$V(t) = K_2 \frac{dx}{dt}, \quad (20.2)$$

который называется дифференциальным законом регулирования или сокращенно Д-законом. Передаточная функция соответствующего Д-регулятора будет

$$W(p) = K_2 p, \quad (20.3)$$

а его частотная передаточная функция запишется в виде:

$$W(j\omega) = k_2 \omega e^{j\pi/2}. \quad (20.4)$$

Из выражения (20.4) следует, что фазочастотная характеристика $\varphi(\omega)$ положительна и равна $\pi/2$, что объясняет эффект "предварения", вносимый Д-законом регулирования.

Рассмотрим далее рис. 20.1,б. Наблюдаем с позиций опытного оператора за процессами по записям на самописце. Предпринимая определенные шаги по управлению процессом до момента времени t_1 , были получены в разное время разные графики 1 и 2. (На рисунке они совмещены). Какие выводы будут сделаны опытным оператором на

основании этих кривых? Несмотря на приблизительно одинаковый разброс ошибки $x(t)$ относительно среднего значения (для графика 1 - $x=0$, для графика 2 - $x=x_0$), в целом, кривая 2 расположена выше требуемого значения регулируемой величины. "На глаз" это отличие выражается в отличие площадей сверху и снизу от линии $x=0$. Учитывая это, оператор решает скорректировать свои последующие действия и в момент t_1 осуществляет дополнительное изменение положения регулирующего органа для случая 2, чтобы в среднем иметь $x=0$.

Формализуем наши рассуждения. Поскольку решение принималось на основе площади, под кривой $X(t)$, математически это может быть записано в виде интеграла

$$V(t) = K_3 \int_0^t x(t) dt \quad (20.5)$$

Выражение соответствует так называемому интегральному закону регулирования или сокращенно И-закону. Передаточная функция И - регулятора имеет вид:

$$W(p) = \frac{k_3}{p}, \quad (20.6)$$

а его частотная передаточная функция будет при этом равна

$$W(j\omega) = \frac{k_3}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (20.7)$$

Как следует из выражения (20.7), фазочастотная характеристика

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

Отрицательный фазовый угол характеризует задержку во времени принятия решений, связанную с необходимостью накоплений сведений о процессе.

В зависимости от сложности решения задач по управлению рассмотренные законы регулирования могут быть применимы как порознь, так и совместно, в различных комбинациях. При этом соответствующие

регуляторы, используемые в промышленности, будут иметь соответствующие названия: ПИ, ПД, ПИД. Математическая модель, например, для ПИД регулятора будет иметь вид:

$$V = \kappa_1 x + \kappa_2 \frac{dx}{dt} + \kappa_3 \int_0^t x(t) dt \quad (20.8)$$

Рассмотрим опытного оператора и новичка. Очевидно, в общем случае процессы управления будут осуществляться ими по-разному. Если новичок будет больше реагировать на сиюминутную ситуацию и придавать таким образом большой вес информации об ошибке $x(t)$, то опытный оператор будет более полно использовать сведения о скорости изменения ошибки и учтет вместе с тем последствия своих ранее принятых решений по управлению. Иначе говоря, они придают различное значение различной информации. Условно это обстоятельство можно выразить в коэффициентах закона регулирования (20.8).

Так, для опытного оператора $K_1 = 5$; $K_2 = 7$; $K_3 = 4$, а для новичка $K_1 = 10$; $K_2 = 2$; $K_3 = 1$. Очевидно, что указанное различие скажется в ведении процесса, в различии характера изменения регулируемой величины.

Приведенные рассуждения позволяют сделать понятными следующие выводы:

- вид закона регулирования и его коэффициенты определяют качество переходных процессов в системах автоматического регулирования;
- задача проектирования АСР в простейшем случае является задачей выбора закона регулирования и его коэффициентов, или, иначе, регулятора и его настроек.

Наряду с принципом обратной связи в АСР используется также принцип компенсации возмущений.

Для реализации этого принципа необходимо получать информацию о характере действующих на объект управления возмущений. Тогда, имея эту

информацию, можно организовывать «встречное» управляющее воздействие на объект, тем самым компенсируя возможные последствия действия возмущения. Блок-схема системы при реализации данного принципа управления показана на рис.20.2.

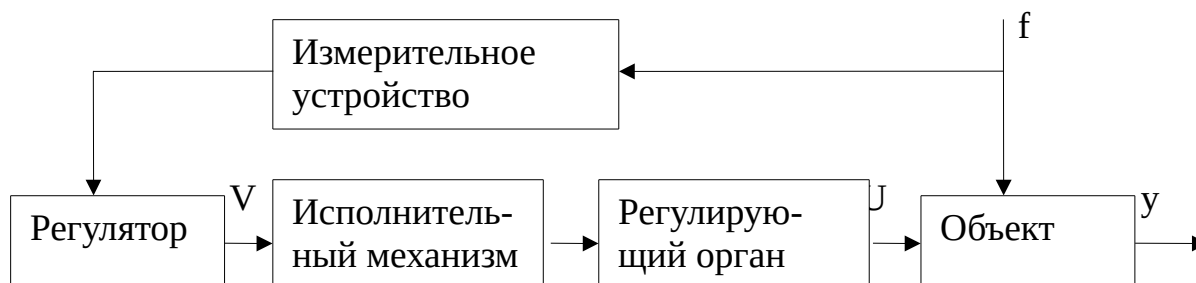


Рис.20.2. Блок-схема АСР, реализующая принцип компенсации возмущений

Отметим, что принцип управления определяет собой структуру АСР. Так, при использовании принципа обратной связи имеем дело с замкнутой системой, а при использовании принципа управления по возмущению - с разомкнутой системой управления, так как информация об изменении регулируемой величины в этом случае не используется для управления.

Рассмотрим в качестве примера бак, в котором требуется поддерживать определенный уровень воды h . Если за основное возмущение принять расход воды из бака $G_{\text{вых}}$, то, измерив его с помощью датчика расхода, можно, используя регулятор, сформировать задающее воздействие для системы управления положением регулирующего клапана на питающем трубопроводе, как это показано на рис.20.3. Задача, решаемая такой АСР, будет заключаться в увеличении (уменьшении) расхода воды в баке $G_{\text{вх}}$ настолько, насколько увеличивается (уменьшается) расход воды из бака. При этом уровень воды в баке будет (теоретически) оставаться постоянным.

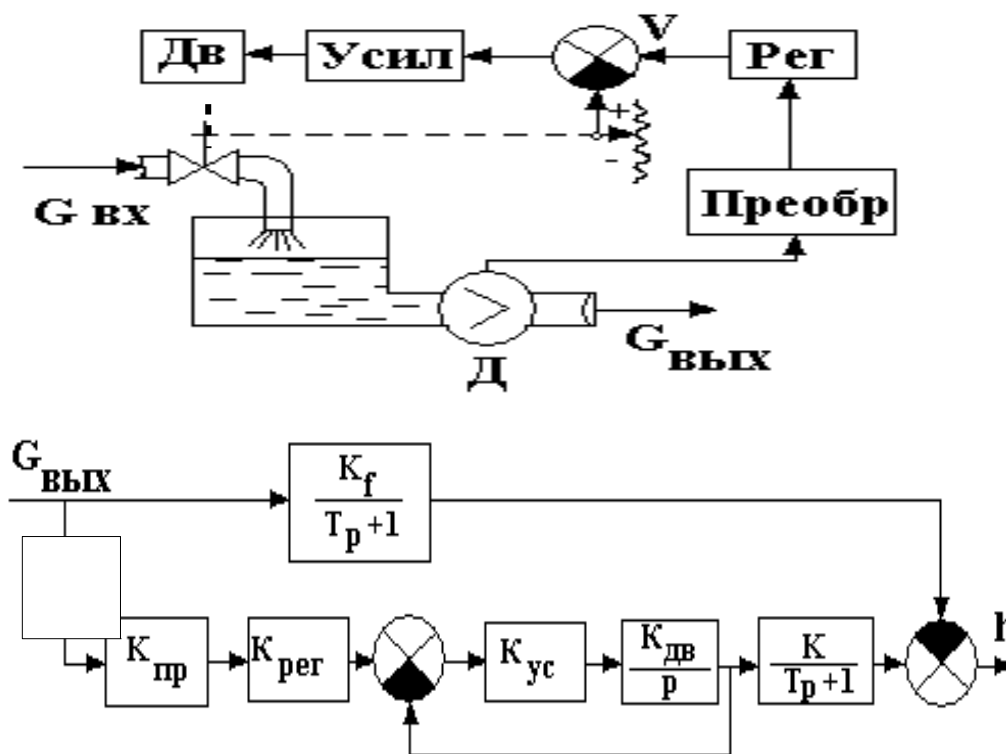


Рис.20.3. Реализация принципа управления по возмущению

На рис. 20.3 приняты следующие обозначения:

Д - датчик расхода с коэффициентом передачи K_d ;

Преобр - преобразователь с коэффициентом передачи K_{np} ;

Рег - регулятор с коэффициентом передачи $K_{рег}$;

Усил - усилитель с коэффициентом передачи $K_{ус}$;

Дв - двигатель с передаточной функцией $K_{дв} / p$.

Передаточная функция бака по каналу возмущающего воздействия

$$W_f(p) = \frac{K_f}{Tp+1}, \text{ а по каналу управляющего воздействия } W_0(p) = \frac{K}{Tp+1}.$$

Пунктирной линией показаны механические связи.

Для вспомогательной системы регулирования положения заслонки

$$\Phi(p) = \frac{\kappa_{yc} \kappa_{\partial\partial} / p}{1 + \kappa_{yc} \kappa_{\partial\partial} / p} = \frac{1}{T_{\partial\partial} p + 1} . \quad (20.9)$$

При $T_{\partial\partial} = \frac{1}{\kappa_{yc} \kappa_{\partial\partial}} \ll T$ можно принять $\Phi(p) \cong 1$. В этом случае передаточная функция системы будет иметь вид:

$$W(p) = \frac{h(p)}{G_{\partial\partial}(p)} = \frac{\kappa_{np} \kappa_{рег} - \kappa_f}{Tp + 1} . \quad (20.10)$$

Для $h(t) = 0$ необходимо, чтобы согласно уравнению (20.10) $W(p) = 0$, т.е. выполнялось условие:

$$\kappa_{np} \kappa_{рег} - \kappa_f = 0 . \quad (20.11)$$

Отсюда следует, что коэффициент передачи регулятора должен быть равен:

$$\kappa_{рег} = \frac{\kappa_f}{\kappa_{np}} . \quad (20.12)$$

Таким образом, регулятор, обеспечивающий компенсацию влияния возмущения, реализует П-закон регулирования

$$V = \kappa_{рег} \mu , \quad (20.13)$$

где μ - сигнал с преобразователя $\mu = \kappa_{np} G_{\partial\partial}$.

Если инерционностью вспомогательной системы регулирования положения заслонки пренебречь нельзя, то для улучшения качества работы всей системы следует воспользоваться информацией о скорости изменения расхода, например ПД-законом регулирования:

$$V = \kappa_{PEГ_1} \mu + \kappa_{PEГ_2} \frac{d\mu}{dt} . \quad (20.14)$$

Одним из основных преимуществ использования принципа компенсации возмущений является повышение быстродействия АСР в ее реакции на возмущающее воздействие. Здесь одновременно с изменением возмущающего воздействия происходит изменение управляющего сигнала на объект регулирования, что позволяет не дожидаться, пока (как в системах управления с обратной связью) это возмущение повлияет на регулируемую величину. Недостатком рассматриваемого принципа является то, что на практике равенство(20.11) можно реализовать лишь с определенной погрешностью. Это приводит к постоянному накоплению ошибок регулирования в процессе работы АСР.

Указанного недостатка лишены системы так называемого комбинированного управления, в которых реализованы одновременно оба рассмотренных принципа. При проектировании АСР стремятся уменьшить влияние измеряемых возмущений, реализуя принцип компенсации возмущений, оставляя на долю обратной связи устранение ошибок, возникающих как от измеряемых возмущений, так и из-за невозможности полной компенсации влияния измеряемых возмущений.

Так, например, в рассмотренном примере стабилизации уровня воды в баке, неучтенным возмущением является изменение давление воды в питающем трубопроводе. Действие данного возмущения приведет к появлению ошибки регулирования, которая в комбинированной системе будет устранена за счет обратной связи.

Для повышения точности работы систем может быть использована информация о задающем воздействии $g(t)$ и о регулируемой величине $y(t)$.

Существуют, наряду с линейными, нелинейные, а также адаптивные законы регулирования [2]. В данном пособии ограничимся лишь линейными законами.

Блок-схема комбинированной АСР показана на рис.20.4.



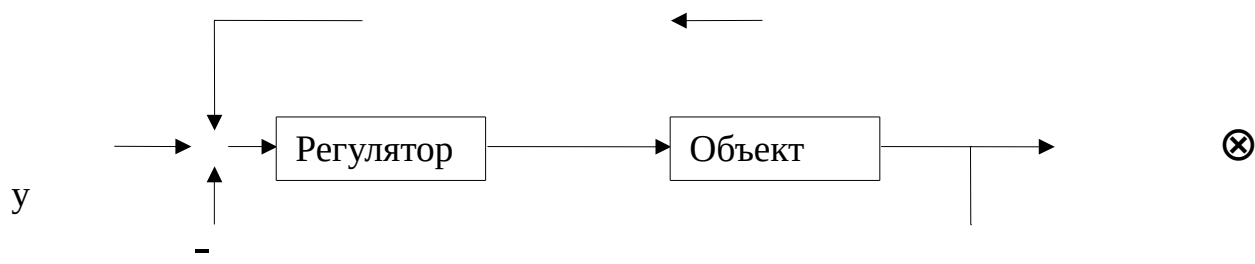


Рис.20.4. Блок-схема комбинированной АСР

21. УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Задачи, связанные с понятием «устойчивость» в трудовой и познавательной деятельности человечества, многообразны.

Основоположниками проблемы устойчивости можно считать Аристотеля (384-322 до н.э.) и Архимеда (287-212 до н.э.). Перечисление имен других ученых, которые занимались вопросами устойчивости на протяжении последующих веков, заняло бы слишком много места. Можно назвать Леонардо да Винчи, Кардано, Галилея, Ньютона, Бернулли, Эйлера, Даламбера, Лагранжа, Лапласа, Дюамеля, Пуассона, Максвелла, Вышнеградского, Жуковского, Рауса, Пуанкаре, Якоби, Фурье, Остроградского, Ляпунова, Михайлова. Одно перечисление ученых, связанных с нашими представлениями о сферах их деятельности, говорит о разнообразном применении понятия «устойчивость». Здесь и устойчивость положений равновесия различных тел, и устойчивость траектории брошенного тела, и устойчивость траекторий планет, и устойчивость кораблей, и устойчивость решений дифференциальных уравнений и т.п.

Прежде чем начать детальный разговор об устойчивости, рассмотрим примеры.

Ракета на стартовом столе. Включаются двигатели. Ракета медленно отрывается от земли, начинает крениться и падает. Такую картину Вы могли

наблюдать по документальным кадрам из истории ракетостроения. Отчего это происходит? Чтобы найти ответ зададимся другим вопросом. Можно ли при изготовлении добиться того, чтобы вектор тяги ракетного двигателя точно совпадал с продольной осью ракеты? Ясно, что речь здесь может идти не об абсолютном совпадении, а лишь о совпадении с определенной, пусть и малой, но погрешностью. Наличие же хотя бы малого расхождения являлось одной из причин появления опрокидывающего момента.

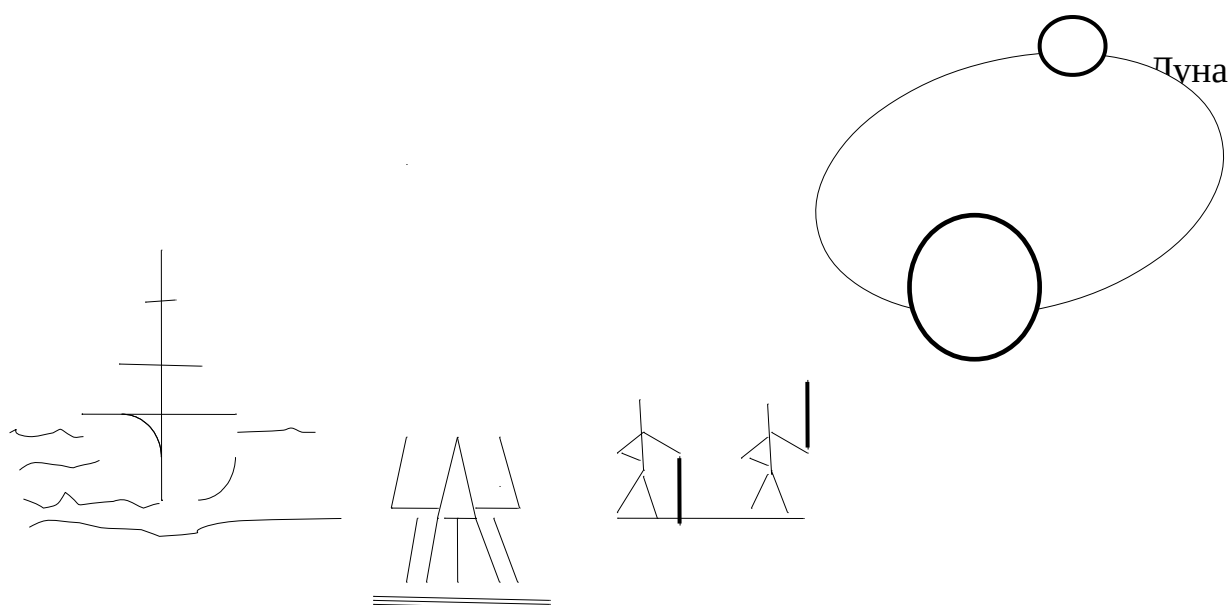


Рис.21.1. Иллюстрация понятия «устойчивость»

Каждый из нас в детстве пытался удержать на руке в вертикальном положении какую-нибудь палку или что-то подобное. Порой нам это удавалось. Но вот найти такое положение, при котором палка, особенно с заостренным концом, смогла бы сама по себе оставаться в вертикальном положении, оказывалось делом практически невозможным. В первом случае мы, жонглируя, управляли положением, во втором случае наш объект был неустойчив, всякий раз падал.

На этом простом примере можно обнаружить важный для дальнейшего понимания факт: объект, будучи сам по себе неустойчив, можно сделать устойчивым за счет управления им.

С другой стороны, устойчивый объект (автомашина) можно сделать за счет управления неустойчивым (канава).

Из этого следует другой важный вывод: при определенном воздействии на устойчивый объект его можно вывести из устойчивого состояния так, что он вновь в него не вернется.

Иными словами, объект можно сделать как устойчивым, так и неустойчивым за счет управления его состоянием.

Понятие устойчивости (остойчивости) очень важно в судостроении. Вопрос об устойчивости рабочего положения корабля связан с выяснением того, что произойдет, если с помощью внешних сил изменить это положение. Вернется ли корабль вновь в исходное положение или нет после «устранения» внешних сил? Если вернется – корабль устойчив, если не вернется – неустойчив.

При изучении устойчивости корабля возникает ряд вопросов: от чего зависит - быть или не быть кораблю устойчивым, единственно ли его положение равновесия и зависит ли оно от характера и величины действующих сил. Наш практический опыт позволяет заключить, что такое положение корабля, если оно существует, единственно. Вместе с тем, зная, что устойчивость корабля связана с расположением его центра тяжести, можно заключить, что устойчивость зависит от собственных свойств корабля. И последнее: если величина действующей силы не превышает значения, при котором корабль перевернется, то какова бы ни была действующая сила, при её «снятии» корабль возвращается в исходное состояние. Отсюда следует относительная независимость устойчивости корабля от внешних сил, когда они не превышают некоторого значения. Поскольку величина возмущения выбирается здесь относительно малой, говорят, что это устойчивость «в малом». При определении устойчивости «в

большом» учитывается величина действующей силы. В рассмотренном случае с кораблем можно говорить об устойчивости его «в малом» и неустойчивости «в большом». Если объект устойчив при любых возмущениях, то его называют неограниченно устойчивым.

Кроме устойчивости статического состояния существует и устойчивость движения, когда, например, рассматриваются процессы вращения Луны вокруг Земли, поддержания определенной температуры тела, давления крови, частоты пульса, стабилизации уровня воды в баке, числа оборотов двигателя и т.п. Здесь имеем дело с динамической природой равновесия. В этом случае целесообразно говорить о некоторой заданной, рабочей траектории движения, невозмущенном движении. Если на систему кроме существующих сил действуют дополнительные внешние силы, которые затем перестанут действовать, то под их влиянием система переходит на другую, возмущенную траекторию движения, на новое - возмущенное движение.

Исходное невозмущенное движение называется устойчивым, если получающееся в результате возмущения возмущенное движение с течением времени приходит вновь к невозмущенному после «снятия» возмущения.

Обозначим через $y(t)$ невозмущенную траекторию движения регулируемой величины, через $y_f(t)$ – возмущенную траекторию ее движения и через $x(t)$ отклонение от заданной невозмущенной траектории движения:

$$x(t) = y_f(t) - y(t). \quad (21.1)$$

Пусть на систему в момент времени t_0 подействовало возмущение, приведшее к появлению $x(t)$. Возмущенное движение системы называется устойчивым по отношению к невозмущенному движению, если для всякого положительного числа ϵ , как бы мало оно ни было, возможно подобрать другое положительное число $\eta(\epsilon)$, такое, что для всех возмущенных

движений, для которых в начальный момент времени t_0 выполняется неравенство:

$$|x(t_0)| < \eta(\varepsilon); \quad (21.2)$$

при всех $t > t_0$ будет выполняться неравенство:

$$|x(t)| < \varepsilon \quad (21.3)$$

Если возмущенное движение устойчиво и вместе с тем, если выполняется условие:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad (21.4)$$

то возмущенное движение называется асимптотическим устойчивым.

В реальном случае возмущения непрерывно действуют на АСР. Получить при этом невозмущенное движение невозможно. Оно будет изменяться в соответствии с возмущениями. Однако это не значит, что система является неустойчивой. Здесь уместно применить понятие так называемой «технической устойчивости», введенное Н.Д.Моисеевым.

Система автоматического регулирования называется технически устойчивой при непрерывном воздействии на нее случайных возмущений, если отклонение регулируемой величины ($x(t)$) от ее рабочей траектории движения по модулю не выходит за пределы некоторой малой величины ε и если изменение начальных условий ее движения и возмущающее воздействие не превосходят по модулю некоторых других малых величин $\delta(\varepsilon)$ и $\eta(\varepsilon)$, связанных с ε .

Не рассматривая всех проблем, связанных с устойчивостью, ограничимся при дальнейшем изучении лишь исследованием асимптотической устойчивости «в малом». Применительно к этому случаю можно сказать, что свойство систем быть устойчивыми или нет определяется лишь их собственными свойствами (параметрами системы). Поэтому в математической трактовке исследование устойчивости будет сводиться к

проверке условия (21.4), где $x(t)$ – решение однородного дифференциального уравнения системы (переходная составляющая его общего решения), получаемое при равенстве нулю возмущающих воздействий (правой части дифференциальных уравнений). Другими словами, исследованию будет подлежать лишь свободное движение системы из ненулевого начального состояния, траектория которого определяется только собственными свойствами.

21.1. Необходимое и достаточное условие устойчивости систем

Исследование устойчивости любой системы связано с исследованием ее траектории- решении однородного дифференциального уравнения:

$$a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = 0 \quad (21.5)$$

при начальных условиях: $x(0) \neq 0$; $x'(0) \neq 0 \dots x^{(n-1)}(0) \neq 0$

Известно, что для нахождения $x(t)$ необходимо сначала определить корни $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ характеристического уравнения:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (21.6)$$

Напомним, что это уравнение может быть получено из передаточной функции системы, приравнивая ее знаменатель к нулю.

В общем случае решение уравнения (21.5) имеет вид:

$$x(t) = \sum_{v=1}^s C_v e^{\alpha_v t} + \sum_{k=1}^{\frac{n-s}{2}} C_k e^{\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k) \quad (21.7)$$

где C_v, C_k - постоянные, определяемыми начальными условиями;

$\frac{n-s}{2}$ - число пар комплексно-сопряженных корней $(p_k = \alpha_k \pm j\omega_k)$. s - число вещественных корней $(p_v = \alpha_v)$;

Что нужно для того, чтобы система была асимптотически устойчива, т.е., чтобы выполнялось условие:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (21.8)$$

Как уже было установлено, устойчивость-качество системы, зависящее от их собственных свойств (параметров) системы. В свою очередь, параметры систем находят отражение в коэффициентах дифференциального уравнения (21.5) и соответственно характеристического уравнения (21.6). Корни характеристического уравнения непосредственно выражаются через эти коэффициенты и следовательно через параметры системы. Таким образом, выполнение условия (21.8) связано с ограничениями, которые следует наложить на корни характеристического уравнения. Сделав это, мы тем самым наложим ограничения и на значение параметров, при которых система будет устойчива

Из выражения (21.7) условие (21.8) можно получить, если каждое из слагаемых в правой части (21.1.3) стремится к нулю. Последнее возможно при условии, что все $\alpha < 0$, т.е. вещественные части всех корней характеристического уравнения будут отрицательными. Если хотя бы одно из $\alpha > 0$, то среди суммы будет слагаемое, которое неограниченно возрастает с ростом t , и система будет неустойчива.

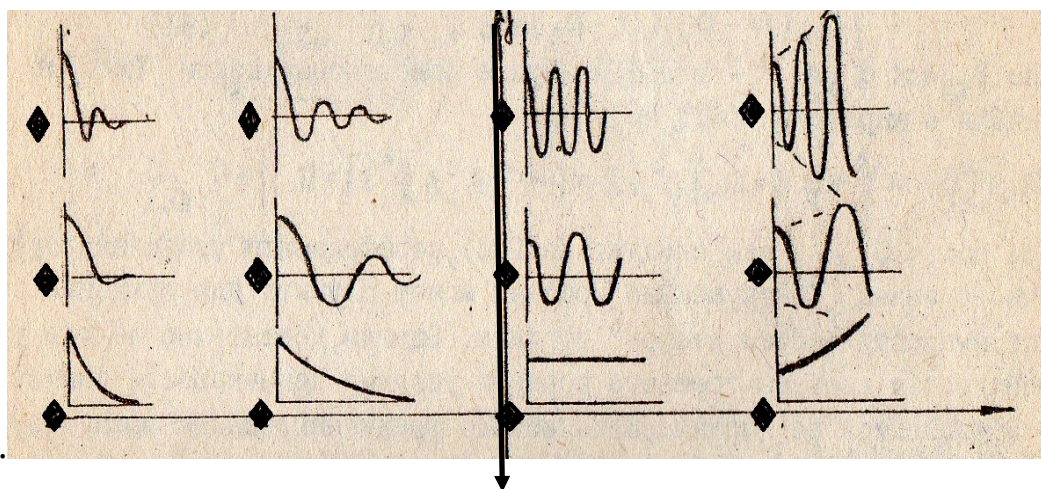


Рис.21.2. Расположение корней на комплексной плоскости и вид соответствующих переходных процессов

Отсюда следует, что **необходимое и достаточное условие устойчивости** системы автоматического регулирования состоит в **отрицательности вещественных корней характеристического уравнения системы.**

21.2. Необходимое условие устойчивости

Отыскание корней характеристического уравнения для суждения об устойчивости системы аналитически, т.е. по формуле, как это делается для уравнения второго порядка, задача, не имеющая аналитического решения при порядке уравнения больше трех.

Находить корни для уравнений более высоких порядков можно с использованием численных методов. Однако в этом случае будем иметь всякий раз единственное решение, соответствующее конкретным численным значениям коэффициентов характеристического уравнения.

Отсутствие аналитического решения – это отсутствие общего взгляда на возможные варианты решения уравнения системы, позволяющего выбирать или, по крайней мере, не рассматривать не удовлетворительные варианты.

Возможность получать корни для показателей степени характеристического уравнения численными методами дает возможность воспользоваться лишь экспериментальным методом «проб и ошибок», т.е. перебором вариантов коэффициентов характеристического уравнения, связанных с параметрами элементов системы, подлежащими выбору в процессе проектирования. Известно, что метод «проб и ошибок», называемый иногда не случайно «методом тыка» неэффективен и не гарантирует отыскания желаемого решения.

Отсюда возникло естественное желание найти косвенный метод суждения об устойчивости систем без отыскания корней характеристического уравнения системы.

Рассмотрим, как связаны между собой корни характеристического уравнения и его коэффициенты.

Для системы второго порядка имеем:

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0 \quad (21.9)$$

Воспользуемся теоремой Виета. Тогда уравнение (12.9) можно представить в виде:

$$a_0 (p - p_1)(p - p_2) = 0, \quad (21.10)$$

где $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ - в общем случае комплексные корни. Раскрыв скобки в выражении (12.10), получим:

$$a_0 [(p - \alpha)^2 + \beta^2] = a_0 [p^2 - 2\alpha p + (\alpha^2 + \beta^2)] = 0 \quad (21.11)$$

При $\alpha < 0$, как следует из (21.11), коэффициенты уравнения будут одного знака. Обнаруженный признак может служить для суждения об устойчивости систем второго порядка и внушает надежду.

Оценим, достаточно ли для устойчивости системы третьего порядка условия одинаковости знаков коэффициентов ее характеристического уравнения. Вновь воспользуемся теоремой Виета. Получим:

$$p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = (p - \alpha + j\beta)(p - \alpha + j\beta)(p - \gamma) = p^3 - (2\alpha + \gamma)p^2 + (2\alpha\gamma + \alpha^2 + \beta^2)p - \gamma(\alpha^2 + \beta^2) \quad (21.12)$$

Здесь $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$; $p_3 = \gamma$

При $\gamma < 0$ и $\alpha < 0$ коэффициенты a_1, a_2, a_3 будут одного знака.

Возьмем $\alpha > 0$ и $\gamma < 0$. Тогда, если $2\alpha < \gamma$ и $\alpha^2 + \beta^2 > 2\alpha\gamma$, то все коэффициенты будут положительны, но условие устойчивости не соблюдается.

Таким образом, одинаковость знаков коэффициентов характеристического уравнения является лишь необходимым, но не достаточным условием устойчивости систем, имеющих характеристические уравнения, порядок которых выше второго. Надежда не оправдалась: простое решение не найдено.

21.3. Алгебраический критерий устойчивости Рауса – Гурвица

Необходимое условие устойчивости не является достаточным для систем, описываемых уравнениями выше 2-го порядка. Поэтому остается задача отыскания дополнительных условий, накладываемых на коэффициенты характеристического уравнения, соблюдение которых дает право утверждать, что система устойчива.

Эта задача была решена Раусом и Гурвицом практически одновременно. Отсюда правило (критерий) суждения об устойчивости систем было названо критерием Рауса-Гурвица.

По критерию Рауса-Гурвица необходимым и достаточным условием устойчивости системы, описываемой уравнением (21.5) является положительность всех определителей Гурвица $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ при $a_0 > 0$, где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1; & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \dots & \Delta_n &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (21.13)$$

Если хотя бы один из определителей равен нулю, а все остальные определители положительны, то система находится на границе устойчивости.

Правило составления определителя Гурвица Δ_n :

1. По главной диагонали выписываются последовательно по возрастающим индексам все коэффициенты по порядку от a_1 до a_n , начиная с верхнего левого угла до правого нижнего.
2. Вверх от элементов определителя, лежащих на главной диагонали, выписываются коэффициенты характеристического уравнения в порядке возрастания их индексов, а вниз – в порядке убывания индексов.
3. На местах, где должны быть вписаны коэффициенты с индексами больше чем n и меньше чем нуль, подставляются нули.

Определители $\Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \Delta, \dots, \Delta_1$ получаются из Δ_n вычеркиванием справа и снизу последовательно по одному столбцу и одной строке, по два столбца и две строки и т.д.

Можно также показать, что для исследования устойчивости нет необходимости иметь дело со всеми определителями Гурвица. Так, например, в случае положительности коэффициентов, для системы третьего порядка достаточно определить знак определителя Δ_2 : для системы четвертого порядка – знаки определителей Δ_2 и Δ_4 и т.д.

Приведем условия устойчивости для систем с характеристическим уравнениями второй, третьей и четвертой степеней:

для $n=2$ $a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0;$

для $n=3$ $a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

для $n=4$ $a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; a_4 > 0;$

$$a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3 - a_1 a_4 > 0$$

Для $n=2$ условие устойчивости сводится к положительности коэффициентов характеристического уравнения, в то время как для $n=3$ и $n=4$ этого недостаточно и коэффициенты должны удовлетворять ещё дополнительным неравенствам. Важно отметить, что приведенные неравенства однозначно определяют, какими могут быть соотношения между коэффициентами характеристического уравнения, чтобы система была устойчивой.

21.4. Критерий Михайлова

В 1938 году советским ученым А.В.Михайловым (в 23 года был награжден премией Ленинского комсомола) был предложен графоаналитический критерий устойчивости, названный в его честь. Данный критерий позволяет не только судить об устойчивости, но и наглядно оценивать степень влияния параметров системы на ее устойчивость.

Рассмотрим основные положения критерия Михайлова. Пусть характеристический полином системы $D(p)$ имеет вид:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n \quad (21.14)$$

Предположив, что корни нам известны, воспользуемся теоремой Виета.

Тогда выражение (21.14) запишется как:

$$D(p) = a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_i) \dots (p - p_n), \quad (21.15)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ – корни характеристического уравнения.

Рассмотрим один из сомножителей: $(p - p_i)$

Воспользуемся комплексной плоскостью (рис.21.3). Пусть p_i – вещественный отрицательный корень ($p_i = -\alpha$).

а

б 

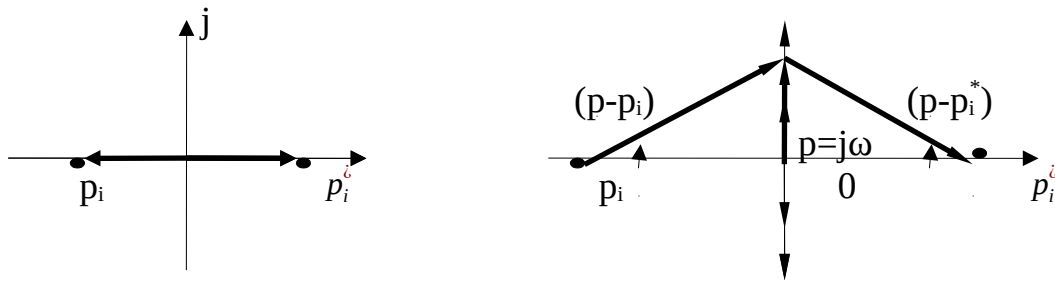


Рис.21.3. К пояснению критерия Михайлова

Тогда на этой плоскости корень p_i изобразится в виде вектора. Поскольку p независимая переменная, можно задать любое ее значение. В том, каким выбрать вектор p , и заключается догадка Михайлова. Необходимо было выбрать вектор p , чтобы вектор $(p - p_i)$ каким-то образом отразил бы тот факт, что корень p_i лежит в левой, а не в правой полуплоскости. На первый взгляд, кажется целесообразным выбрать для этого нечто среднее на границе между левой и правой полуплоскостями. Михайлов выбирает вектор p "посередине": $p = j\omega$. Тогда вектор $(p - p_i)$ расположен так, как показано на рис. 13,б. Для $|p_i^*| = |p_i|$ имеем другой вектор $p_i^* = \alpha$, расположенный в правой полуплоскости. Следующая догадка Михайлова заключалась в том, чтобы менять величину ω и рассматривать вектор $(p - p_i)$ "в движении". Пусть ω меняется от $-\infty$ до ∞ , тогда вектор $(p - p_i)$ будет поворачиваться по часовой стрелке, а вектор $(p - p_i^*)$ против часовой стрелки. Причем, для первого поворот составит $+\pi$, а для второго - π радиан, считая, как принято, за положительное направление - движение против часовой стрелки.

Формализуем установленные факты. Заменив в (21.15) p на $j\omega$, получим

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - p_1) \dots (j\omega - p_n) \quad (21.16)$$

Каждый из сомножителей $(j\omega - p_i)$ представляет собой комплексное выражение и может быть представлен в показательной форме записи:

$$D(j\omega) = |D(j\omega)| e^{j \arg D(j\omega)} = a_0 A_1 e^{j\varphi_1} \dots A_n e^{j\varphi_n} \quad (21.17)$$

При изменении ω от $-\infty$ до ∞ для случая, когда все корни лежат в левой полуплоскости, будем иметь

$$\Delta \arg D(j\omega) \bigg|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = \sum_{i=1}^n \Delta \varphi_i = n\pi \quad (21.18)$$

Отсюда можно сформулировать критерий Михайлова следующим образом: для того, чтобы АСР, имеющая характеристическое уравнение n -го порядка, была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при изменении ω от $-\infty$ до ∞ изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ было равно $n\pi$.

В этом случае, когда характеристическое уравнение системы содержит из n корней m корней с положительной вещественной частью, это найдет отражение в $\Delta \arg D(j\omega)$, которое будет меньшим, чем $n\pi$

$$\Delta \arg D(j\omega) \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = \sum_{i=1}^{n-m} \Delta \varphi_i - \sum_{j=1}^m \Delta \varphi_j = (n-m)\pi - m\pi = (n-2m)\pi \quad (21.19)$$

На практике использование критерия Михайлова сводится к следующим шагам:

1. Записывается характеристический многочлен системы

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

2. p заменяется на $j\omega$

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + \dots + a_{n-1} j\omega + a_n$$

3. На комплексной плоскости строится вектор $D(j\omega)$ для различных значений $\omega > 0$.

Замечание:

при изменении ω от $-\infty$ до ∞ представляет собой симметричную относительно оси абсцисс кривую. Поэтому для уменьшения трудоемкости построений и расчетов рассматривают лишь одну ветвь для $\omega > 0$, меняющихся от 0 до ∞ . При этом выражение (21.12) используется в виде

$$\Delta \arg D(j\omega) \int_{\omega=0}^{\infty} = (n-2m)\pi / 2 \quad (21.20)$$

4. Соединяя полученные при различных ω точки на комплексной плоскости плавной кривой, получается так называемый годограф Михайлова.

Примеры годографов для систем показаны на рис.21.4.

Кривая 1 на рис.21.4в соответствует наличию мнимых корней или, как говорят, колебательной границе устойчивости, а кривая 2 (пунктирные линии)- наличию вещественного нулевого корня- аperiодической границе устойчивости. Как следует из рассмотрения рис. 21.4и формулы (21.19) у устойчивых систем ,годограф Михайлова последовательно пересекает a квадрантов, что и служит правилом для суждения об устойчивости.

При изменении параметров систем годограф Михайлова деформируется. При этом меняется его расположение относительно системы координат, что само по себе говорит о степени влияния изменения того или иного параметра на устойчивость. Последнее обстоятельство становится особенно важным при решении задач проектирования систем.

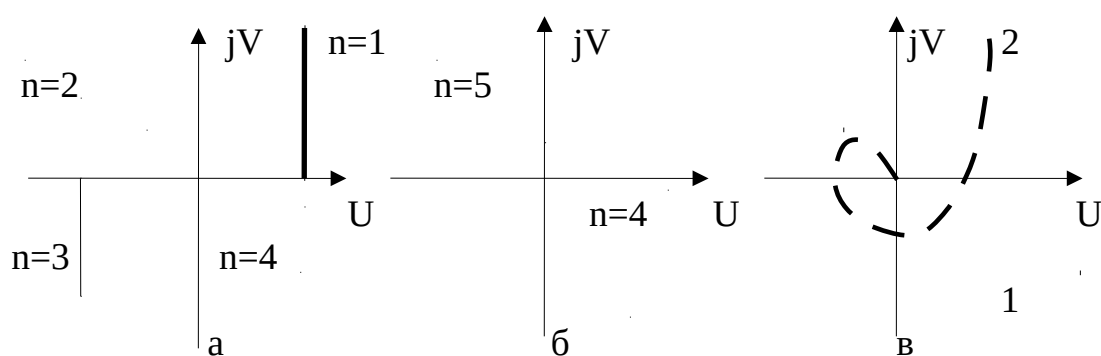


Рис.21.4. Примеры: а - устойчивых, б - неустойчивых АСР и в - АСР, находящихся на границах устойчивости : колебательной -1 и аperiодической -2 границах устойчивости.

21.5. Критерий Найквиста

Рассмотрим передаточную функцию системы с обратной связью (замкнутой системы):

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} \quad (21.21)$$

Из выражения (21.5.1) видно, что между $\Phi(p)$ и $W(p)$ существует взаимно-однозначное соответствие. Это значит, что особенности $W(p)$ однозначно отражаются в особенностях $\Phi(p)$ и наоборот. Однако выражение $W(p)$ проще, чем $\Phi(p)$. Это объясняет тот факт, что при решении задач анализа и синтеза АСР стремятся используемые методы исследования и расчета замкнутых систем свести к оперированию с $W(p)$ т.е. с их передаточной функцией в разомкнутом состоянии, а по полученным результатам сделать заключение о $\Phi(p)$, т.е. о свойствах замкнутых систем.

Сказанное относится к критерию Найквиста, основанному на критерии Михайлова. Так, если по критерию Михайлова за основу берется характеристическое уравнение замкнутой системы (21.14), то по критерию Найквиста для суждения об устойчивости замкнутой системы рассматривается передаточная функция $W(p)$.

Для вывода критерия Найквиста возьмем общий случай, когда объект управления неустойчив, а за счет введения обратной связи и регулятора, удастся сделать его устойчивым.

Пусть имеем

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} \quad (21.22)$$

где $R(p)$ -полином степени m , а $Q(p)$ -характеристический полином разомкнутой системы степени n

Тогда

$$\Phi(p) = \frac{R(p)/Q(p)}{1+R(p)/Q(p)} = \frac{R(p)/Q(p)}{\frac{Q(p)+R(p)}{Q(p)}} = \frac{R(p)}{D(p)} \quad (21.23)$$

$D(p) = R(p) + Q(p)$ -характеристический полином замкнутой системе степени n .

Пусть в соответствии с рассматриваемым случаем $Q(p)$ имеет l корней с положительной вещественной частью и следовательно $(n-l)$ корней с

отрицательной вещественной частью, а $D(p)-n$ корней с отрицательной вещественной частью. Установим какое поведение годографа $W(j\omega)$ будет этому соответствовать.

По критерию Михайлова имеем

$$\Delta \arg Q(j\omega) \int_{\omega=-\infty}^{\infty} = (n-l)\pi - l\pi = (n-2l)\pi \quad (21.24)$$

$$\Delta \arg D(j\omega) \int_{\omega=-\infty}^{\infty} = n\pi$$

Тогда (21.25)

Рассматривая поведение вектора $[1+W(j\omega)]$ на комплексной плоскости (рис. 21.15,а).

Сделаем заключение о поведении вектора $W(j\omega)$. Так как $W(j\omega)$ является составляющим вектора $[1+W(j\omega)]$, то для его отдельного рассмотрения введем новую систему координат с центром в $0'$. Проследим за концом вектора $W(j\omega)$ по рис. 21.15,б. Из рисунка следует, что при изменении ω вектор $W(j\omega)$ охватывает точку с координатами $(-1, j0)$.

На основании отмеченного сформулируем критерий Найквиста: *если разомкнутая система неустойчива, то для устойчивой в замкнутом состоянии системы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы при изменении ω от $-\infty$ до ∞ охватывает точку с координатами $(-1, j0)$ l раз, где l - число корней характеристического уравнения разомкнутой системы с положительной вещественной частью.*

а

б

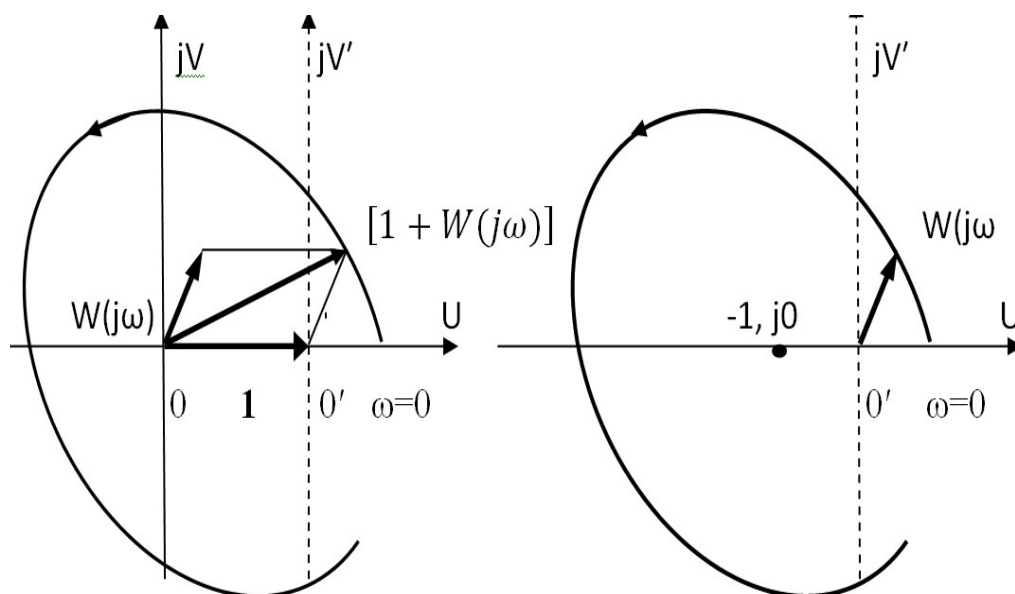


Рис.21.5. Пояснения к критерию Найквиста

При $l=0$ устойчивая система имеет АФЧХ разомкнутой системы, не охватывающую точку с координатами $(-1, j0)$. Если же устойчивая в разомкнутом состоянии система при введении обратной связи стала неустойчивой, об этом можно судить по тому, что АФЧХ разомкнутой системы охватывает точку с координатами $(-1, j0)$.

Здесь уместно еще раз повторить: за счет управления можно даже неустойчивый объект сделать устойчивым, в то время как при плохо выбранном законе регулирования можно даже устойчивый сам по себе объект сделать неустойчивым в управлении.

Таким образом, критерий Найквиста на основании $W(j\omega)$ даёт возможность судить о правильности выбора параметров систем с точки зрения их устойчивости.

При построении АФЧХ для $W(j\omega)$ достаточно построить одну ветвь при ω от 0 до $-\infty$, так как другая (при ω от 0 до $-\infty$) является симметричной первой относительно оси абсцисс.

Сложность возникает, когда характеристическое уравнение разомкнутой системы $Q(p)=0$ имеет корни на границе устойчивости, т.е. с нулевой вещественной частью.

В качестве примера возьмём систему с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \quad (21.26)$$

Соответствующая частотная передаточная функция будет равна

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \frac{K}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)} \quad (21.27)$$

где

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}} = \frac{K}{[\omega^4 (T_1 + T_2)^2 + \omega^2 (1 - \omega^2 T_1 T_2)^2]^{1/2}} \quad (21.28)$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2 \quad (21.29)$$

Построим АФЧХ для $\omega > 0$, при $\omega = 0^+$ получаем $A(0^+) = \infty$ и $\varphi(0^+) = -90^\circ$. При $\omega \rightarrow \infty$ будем иметь $\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = 0$ и $\varphi(\infty) = -270^\circ$. Для $\omega < 0$ АФЧХ будет симметрична кривой, полученной при $\omega > 0$ (рис. 21.6, б). Для разрешения неопределённости, возникающей при $\omega = 0$ для нулевого корня $p = 0$, нулевые корни причислять к отрицательным корням с бесконечно малой отрицательной частью (рис. 21.6, а). Этому соответствует замыкания АФЧХ при ω от 0^- к 0^+ по часовой стрелке, по окружности бесконечно большого радиуса, как показано на рис. 21.6, б. В данном случае система неустойчива, так как годограф охватывает точку $(-1, j0)$ 2 раза.

Следовательно, число корней в правой полуплоскости равно 2. Точка пересечения годографа с вещественной осью может быть найдена из уравнения

$$\operatorname{Im} W(j\omega) = V(\omega) = \frac{-K(1/\omega)(1 - \omega^2 T_1 T_2)}{1 + \omega^2 (T_1^2 + T_2^2) + \omega^4 T_1^2 T_2^2} = 0 \quad (21.30)$$

которое справедливо при $1 - \omega^2 T_1 T_2 = 0$ или $\omega = 1/\sqrt{T_1 T_2}$. Величина $\operatorname{Re} W(j\omega) = U(\omega)$ при этой частоте будет

$$U(\omega) = \frac{-k(T_1 + T_2)}{1 + \omega^2(T_1^2 + T_2^2) + \omega^4 T_1^2 T_2^2} \bigg|_{\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2}} = -\frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2} \quad (21.31)$$

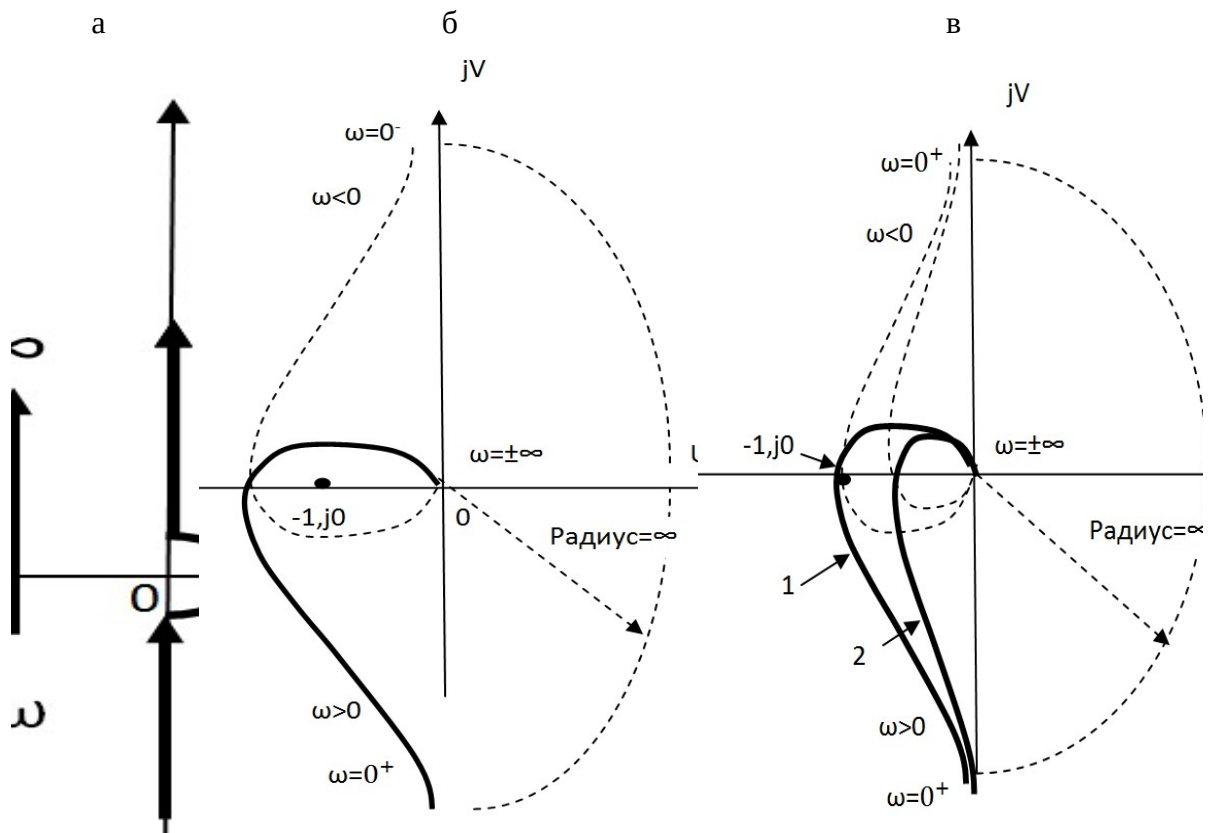


Рис. 21.6. а – изменение аргумента ω ; б, в – годографы систем.

Отсюда систему можно сделать устойчивой, когда

$$-\frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2} > -1, \text{ т. е. при } K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \quad (21.32)$$

В том случае, когда $K = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$, система будет находиться на границе устойчивости, а годограф проходит через точку $(-1; j0)$.

На рис. 21.6 показан случай неустойчивости системы – б, системы, находящейся на границе устойчивости (в, годограф 1), и устойчивой системы (в, годограф 2).

Пример.

Имеем
$$W(p) = \frac{K}{p^2(Tp + 1)} \quad (21.33)$$

Соответствующая частотная передаточная функция будет равна

$$W(p)|_{p=j\omega} = W(j\omega) = \frac{K}{-\omega^2(Tj\omega+1)} = \frac{K}{\omega^2\sqrt{T^2\omega^2+1}} e^{-j(\pi+\arctg\omega T)} \quad (21.34)$$

При положительных ω фазовая характеристика $\varphi(\omega) \leq -180^\circ$, и годограф проходит выше вещественной оси (рис. 21.7).

При $\omega \rightarrow 0^+$ имеем $\lim A(\omega) = \infty$ и $\varphi(0^+) = -180^\circ$. Когда $\omega \rightarrow \infty$ получаем $\lim A(\omega) = 0$ и $\varphi(\infty) = -270^\circ$. Как следует из рис. 21.7 годограф охватывает точку $(-1, j0)$ дважды. Отсюда можно заключить, что система имеет два корня в правой полуплоскости и следовательно неустойчива. В данном случае – это так называемая структурная неустойчивость, так как ни при каких значениях K и T систему нельзя сделать устойчивой.

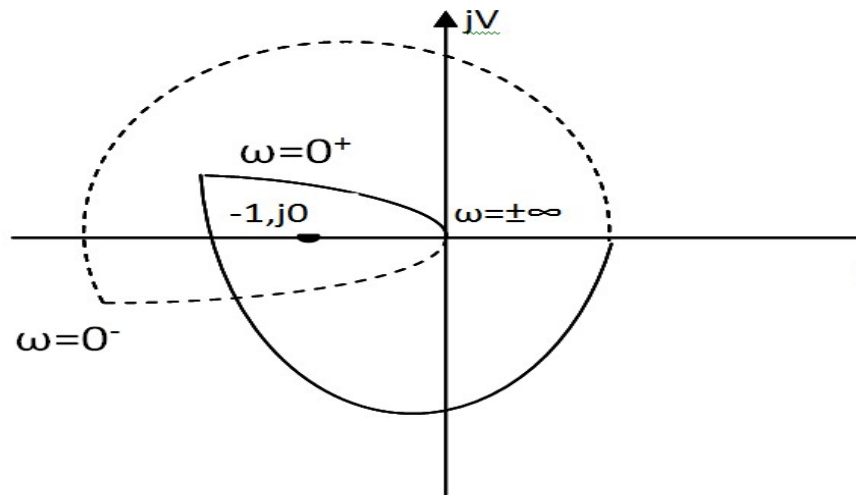


Рис. 21.7. АФЧХ системы

Рассмотрим оценку устойчивости систем по логарифмическим частотным характеристикам. В качестве примера возьмём уже рассмотренную систему с передаточной функцией $W(p)$ равной

$$W(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \quad (21.35)$$

Выражения для ЛАЧХ и ЛФЧХ соответственно запишутся в виде

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}, \quad (21.36)$$

$$\varphi(\omega) = -\pi/2 - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2. \quad (21.37)$$

Графики асимптотической $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ показаны на рис. 21.8 для различных значений k ($k_1 > k_2 > k_3$).

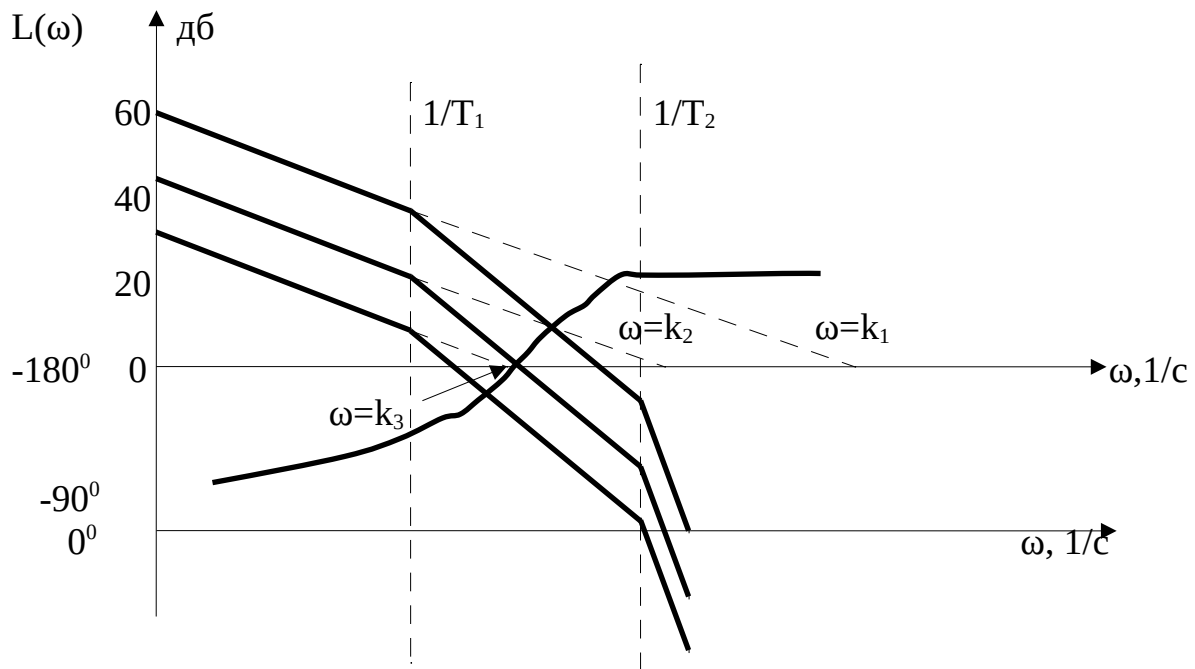


Рис. 21.8. Логарифмические частотные характеристики системы

Запишем из критерия Найквиста условие для нахождения системы на границе устойчивости:

$$|W(j\omega^*)| = 1, \varphi(\omega^*) = -180^\circ. \quad (21.38)$$

В логарифмическом масштабе соответственно будем иметь:

$$20 \lg |W(j\omega^*)| = 20 \lg 1 = 0 \quad (21.39)$$

Из систем с различным коэффициентом k : $k_1 > k_2 > k_3$ - этому случаю отвечает система с $k=k_2$. В соответствии с условием (21.5.11) для $k=k_3$ имеем устойчивую, а для $k=k_1$ неустойчивую систему.

Применительно к логарифмическим частотным характеристикам **критерий Найквиста** формулируется следующим образом:

замкнутая система устойчива, если при достижении логарифмической фазовой частотной характеристики разомкнутой системы значения -180° , логарифмическая амплитудная характеристика отрицательна.

Другим определением может быть: *система устойчива, если ЛАХ разомкнутой системы пересекает ось нуля децибел раньше, чем фазовая характеристика достигает -180° .*

Итак сделаем вывод: *увеличение коэффициента передачи систем отрицательно сказывается на её устойчивости.*

21.6. Преимущества и недостатки критериев устойчивости

Прежде чем применять на практике тот или иной критерий устойчивости, необходимо взвесить все преимущества и недостатки каждого из них, так как от удачного выбора критерия будет зависеть время, затраченное на выяснение вопросов, связанных с устойчивостью системы.

Алгебраический критерий Рауса – Гурвица позволяет установить лишь факт устойчивости или неустойчивости системы. На вопрос, как затухают процессы в системе, он ответа не даёт. Оценка влияния на устойчивость параметров того или иного звена требует дополнительных исследований, а в случае систем высокого порядка применение критерия приводит к трудоёмкости расчётов, так как приходится иметь дело с громоздкими неравенствами.

Частотный критерий Найквиста удобен для исследований систем, у которых частотные характеристики звеньев получены как экспериментально, так и теоретически. Сложности в применении критерия заключается в необходимости получения дополнительных сведений об устойчивости системы в разомкнутом состоянии. Вместе с тем вычисление АФЧХ сложнее, чем кривой Михайлова.

Критерий Михайлова может применяться для систем любого порядка. При этом трудоёмкость расчётов меньше, чем у указанных выше. Данный критерий, как и критерий Найквиста позволяет строить соответствующую кривую последовательно, рассматривая вклад и влияние каждого звена на устойчивость системы.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие источники ошибок регулирования известны?
2. Как сказываются изменения параметров элементов системы при наличии обратной связи и без нее на качество работы АСР?
3. Что понимается под чувствительностью АСР?
4. Одинакова ли чувствительность АСР к изменению параметров элементов в прямой цепи и в цепи обратной связи?
5. Какие практические выводы можно сделать на основе рассмотрения чувствительности АСР к изменению параметров ее элементов?
6. Как сказывается на качестве регулирования наличие в АСР обратной связи при действии на систему возмущающих воздействий?
7. Зависит ли качество работы АСР от места приложения возмущающего воздействия?
8. Какие практические рекомендации можно дать по уменьшению влияний возмущений на качество работы АСР?
9. Что можно сказать о положительных и отрицательных сторонах использования обратной связи в системах?
10. Какие принципы регулирования существуют и в чем они заключаются?
11. Что представляют собой законы регулирования и с помощью каких технических средств они могут быть реализованы?
12. Какие простейшие законы регулирования существуют, и в чем заключается механизм их действия?
13. К чему в общем случае сводится задача выбора регулятора?
14. Какие положительные и отрицательные стороны принципа компенсации возмущений необходимо учитывать при его реализации в АСР?
15. Почему в большинстве случаев вместо принципа компенсации возмущений используют принцип комбинированного управления?
16. В чем заключается разница между устойчивостью статического состояния и устойчивостью движения?

17. Что понимается под устойчивостью АСР?
18. Как математически формулируется условие устойчивости систем автоматического регулирования?
19. Что представляет собой “техническая устойчивость” АСР?
20. В чем заключается необходимое и достаточное условие устойчивости?
21. Что послужило причиной разработки критериев устойчивости?
22. В чем заключается необходимое условие устойчивости и почему оно недостаточно для суждения об устойчивости АСР?
23. На чем основан критерий А.В.Михайлова?
24. Что представляет собой критерий Рауса-Гурвица?
25. Как с помощью критерия Михайлова проверяется устойчивость АСР?
26. Что представляет собой критерий Найквиста?
27. Как с помощью критерия Найквиста проверяется устойчивость АСР?
28. В чем заключаются положительные качества критерия Найквиста по сравнению с критериями Рауса-Гурвица и А.В.Михайлова?
29. В чем заключается особенность определения устойчивости АСР с помощью критерия Найквиста в случае нулевых полюсов ее передаточной функции в разомкнутом состоянии?
30. Можно ли неустойчивый объект сделать за счет управления устойчивым? Если да, то как это можно прокомментировать с помощью критерия Найквиста?
31. Можно ли устойчивый объект сделать за счет управления неустойчивым? Если это возможно, то как этот случай отражается в формулировке критерия Найквиста?
32. Зачем нужно знать преимущества и недостатки критериев устойчивости? В чем они заключаются?

Рекомендации для ответов на вопросы

1. Перечислите источники ошибок регулирования, приведите иллюстрированные примеры.
2. Определить влияние параметров элементов АСР при наличии обратной связи и без нее на регулируемую величину. Сравните два указанных случая. Оцените преимущество использования в системах обратной связи.
3. Поясните, что послужило на ваш взгляд, причиной введения такого показателя, как “чувствительность”. Дайте определение “чувствительности” и запишите ее математическое выражение.
4. Найдите функции чувствительности для АСР относительно изменения параметров ее элементов в цепи обратной связи и в прямой цепи. Сравните полученные выражения и сделайте выводы о степени влияния параметров в указанных двух случаях на качество работы АСР.
5. Перечислите требования к точности изготовления элементов АСР в прямой цепи и в цепи обратной связи, вытекающие из рассмотрения функции чувствительности.
6. Рассмотрите произвольную систему в виде ее структурной схемы. Найдите выражения для передаточных функций по возмущению разомкнутой и замкнутой систем. Получите зависимости для регулируемой величины относительно возмущения в указанных двух случаях. Сравните полученные выражения с точки зрения величины ошибки регулирования.
7. Рассмотрите структурную схему произвольной АСР с двумя возмущающими воздействиями:
первое - приложено в прямой цепи,
второе - в цепи обратной связи.

Запишите выражения для регулируемой величины отдельно по каждому из возмущающих воздействий. Сравните полученные выражения с точки зрения величины ошибки регулирования и возможности ее уменьшения.

8. Основываясь на выводах подпункта 7, перечислите требования, которые необходимо выполнять при проектировании элементов, используемых в цепи обратной связи и в прямой цепи.

9. Перечислите всё, что приводит к повышению качества работы систем при использовании в них обратной связи. Укажите также на отрицательные стороны введения обратной связи. Оцените весомость преимуществ и недостатков введения обратной связи в АСР.

10. Перечислите существующие принципы регулирования. Поясните функционирование АСР при реализации в них каждого из существующих принципов, пользуясь соответствующими структурными схемами систем.

11. Дайте определение закона регулирования. Назовите техническое устройство, реализующее законы регулирования.

12. Перечислите простейшие законы регулирования. Запишите их математические модели. Опишите словесно действия регулятора при использовании каждого из законов.

13. Перед ответом на вопрос обоснуйте зависимость качества, работы АСР от вида закона регулирования и от его коэффициентов (настроек регулятора).

14. Оцените точность и быстродействие АСР при использовании принципа компенсации возмущений.

15. Перечислите причины, приводящие к появлению ошибки регулирования в АСР, работающих по принципу компенсации возмущений.

16. Приведите примеры статистических и динамических объектов. Рассмотрите вопросы устойчивости для тех и других.

17. Сформулируйте понятие устойчивости АСР. Предварительно введите понятия возмущенного и невозмущенного движений.

18. Охарактеризуйте отличие реальных условий работы АСР от идеальных условий, принимаемых при суждение об устойчивости. Поясните в связи с этим термин “техническая устойчивость”.

19. Рассмотрите общий вид уравнения АСР, а также общий вид решения. Проследите связь коэффициентов исходного уравнения с параметрами системы с корнями соответствующего уравнения и с видом получаемого решения. Определите устойчивость АСР как ее собственное свойство, т.е. свойство, зависящее от параметров системы.

20. Сформулируйте необходимое и достаточное условие устойчивости.

Рассмотрите использование необходимого и достаточного условия устойчивости для АСР, порядок уравнения которой $n > 3$. Обсудите недостатки численного метода отыскания корней. Поясните преимущества использования аналитических выражений для корней в случае $n < 3$ по сравнению с использованием их численных значений, получаемых при $n > 3$, при решении задачи об устойчивости АСР,

21. Пользуясь теоремой Виета, определите знаки коэффициентов характеристического уравнения системы в случае отрицательности вещественных частей корней. Сформулируйте необходимое условие устойчивости.

22. Рассмотрите контрпример АСР, порядок уравнения которой $n = 3$, один корень характеристического уравнения вещественный, отрицательный, а пара комплексных корней имеет положительную вещественную часть. Определите возможность выполнения необходимого условия устойчивости и его недостаточность для суждения об устойчивости АСР.

23. Сформулируйте критерий Рауса-Гурвица. Приведите примеры его использования для систем, имеющих порядок $n = 2, 3, 4$.

24. Поясните геометрический смысл критерия А.В.Михайлова, обратив внимание на важность выбора в качестве вектора p , вектора $j\omega$, изменяющего свою величину от $-\infty$ до ∞ .

25. Перечислите по порядку необходимые действия при использовании критерия А.В.Михайлова. Сформулируйте данный критерий и проиллюстрируйте случаи устойчивой, неустойчивой АСР и АСР, находящихся на границах устойчивости различных типов.

26. Основываясь на критерии А.В.Михайлова, докажите возможность судить

об устойчивости АСР по ее передаточной функции в разомкнутом состоянии.

27. Сформулируйте критерий Найквиста и перечислите необходимые операции при его применении.
28. Проанализируйте и сравните трудоемкость расчетов при использовании различных критериев.
29. Приведите примеры систем, имеющих полюса передаточной функции в разомкнутом состоянии, равные нулю. Постройте соответствующие АФЧХ, дополнив их окружностями бесконечного радиуса. Определите устойчивость систем.

22. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РАБОТЫ СИСТЕМ

Проектирование любой автоматической системы регулирования (АСР) начинается с постановки требований к качеству ее работы. Эти требования диктуются необходимостью обеспечить определенный характер протекания процессов в объекте управления.

Так, угловая скорость ω ротора двигателя, вращающего сушильные цилиндры бумагоделательной машины (БДМ), должна поддерживаться постоянной $\omega_{\text{зад}}$ с допустимыми отклонениями $\Delta\omega = \omega - \omega_{\text{зад}}$ не больше некоторой определенной величины $\Delta\omega_{\text{доп.}}$, т.е. $\Delta\omega \leq \Delta\omega_{\text{доп.}}$. Объясняется это влиянием изменения ω на такие показатели качества бумажного полотна как влажность и масса г/м^2 , а также возможностью обрыва полотна в случае $\Delta\omega > \Delta\omega_{\text{доп.}}$. Учитывая сказанное, требование к АСР числа оборотов двигателя сводится к заданию максимально допустимой ошибки регулирования $\Delta\omega_{\text{доп.}}$, при которой будет обеспечено требуемое качество бумажного полотна и гарантировано отсутствие его обрывов. Величина $\Delta\omega_{\text{доп.}}$ может быть определена на основании экспериментальных исследований непосредственно на БДМ.

В качестве другого объекта управления рассмотрим напорное устройство БДМ закрытого типа. Основная задача данного устройства заключается в обеспечении постоянства скорости V истечения массы на сетку. Достигается это за счет поддержания определенных значений уровня h бумажной массы и давления P воздушной подушки в напорном устройстве. Колебания h и P приводят к изменениям V , что влияет на поверхностную плотность бумаги, продольную ориентацию волокон и в свою очередь сказывается на прочности бумаги. Из условий эксплуатации известно, что отклонения h не должны превышать 5 ± 10 мм. Формулируя это положение на языке требований к АСР уровня массы, можно сказать, что ошибка регулирования такой АСР не должна превышать 5 ± 10 мм.

В ряде случаев требования к системам вытекают непосредственно из требований по ГОСТу к качеству продукции. Если требования по ГОСТу к влажности бумажного полотна - $5 \pm 1\%$, то АСР влажности должна обеспечить ошибку регулирования, которая не превышала бы 1%. Требования могут ставиться не только к величине ошибки регулирования, но и к характеру ее изменения, и длительности устранения возникающих в процессе АСР ошибок.

Изменение ошибки может происходить с колебаниями или без них. При постановке требований к АСР в каждом конкретном случае следует установить допустимы ли колебания регулируемой величины относительно требуемого значения, иначе говоря, допустимы ли колебания параметра, характеризующего рабочий процесс объекта управления или необходимо обеспечивать плавный характер изменения ошибки в процессе регулирования.

Например, колебания уровня массы в напорном устройстве приводят к неоднородности бумажного полотна по различным показателям его качества и как следствие к проблемам для полиграфистов при печати. Можно поставить требование, чтобы в АСР уровня массы ошибки регулирования

устранялись плавно, без колебаний. Однако, окончательное решение вопроса требует экспериментальной проверки, в результате которой требования к величине колебаний могут быть уточнены. Требования к длительности устранения возникающих при работе АСР ошибок сводятся к заданию максимально допустимого времени переходных процессов. В некоторых случаях такое время не задается, тогда при расчете систем стремятся сделать его возможно меньшим.

Процессы изменения ошибки или регулируемой величины во времени, т.е. переходные процессы делятся в зависимости от того, чем они вызваны на переходные процессы по задающему и возмущающему воздействиям. При постановке требований к качеству АСР в каждом конкретном случае рассматриваются наиболее характерные режимы их работы. Так для следящих систем требования чаще ставятся к качеству переходных процессов по задающему воздействию, а для систем стабилизации - по возмущающему воздействию. Однако, для систем стабилизации, например, в случае необходимости перевода объекта регулирования с одного режима работы на другой, требования ставятся и к переходному процессу по заданию. Например, при переводе БДМ на выпуск другой по качеству бумаги необходимо изменять задание системам стабилизации уровня массы в напускном устройстве, влажности и массы 1 м^2 бумажного полотна, скорости вращения сушильных цилиндров и т.п. В этом случае одно из требований заключается в достижении минимально возможного времени перехода на выпуск другой продукции, иначе говоря - минимально возможного времени переходного процесса по задающему воздействию.

Известно, что суждения о каком-либо объекте исследования могут быть качественными: легкий, тяжелый большой, маленький, быстрый, медленный и т.д. Можно внести в эти суждения определенность, воспользовавшись количественными характеристиками (показателями) : объем 2 м^3 , вес 5 кг, длина 10 м и т.д. В зависимости от назначения объект может

характеризоваться либо одним, либо одновременно несколькими качествами: быть, например, легким, большим и быстрым.

Говоря о системах автоматического регулирования, принято различать три их основных качества:

- точность;
- быстродействие;
- запас устойчивости.

Суждение о точности связывается с поведением АСР в установившемся режиме, о быстродействии и запасе устойчивости – с поведением систем в переходных процессах.

Точность характеризуется ошибкой регулирования в установившемся режиме, быстродействие – быстротой протекания переходных процессов, запас устойчивости – удаленностью системы от границы устойчивости.

В зависимости от выбранных методов анализа и расчета систем каждое из названных качеств характеризуется своими количественными характеристиками – показателями качества: временными, частотными или корневыми.

Отметим, что использование количественных показателей вносит строгость в наши суждения о качествах АСР. Наряду с перечисленными существуют так называемые интегральные оценки (показатели качества), позволяющие обобщенно судить о названных качествах систем.

Временные показатели качества, основанные на графиках изменения регулируемой величины, ошибки регулирования, полученные в результате исследования работы систем, являются наглядными, понятными и легко интерпретируемыми характеристиками качества их функционирования.

Частотные и корневые показатели – не являются наглядными и требуют интерпретаций на языке временных показателей. Поэтому при использовании частотных и корневых показателей их количественные оценки переводят, с помощью в большинстве своем приближенных аналитических зависимостей, на язык временных показателей качества.

Важно понимать, что рассуждать о качестве работы системы имеет смысл только в случае ее устойчивости, так как неустойчивая система просто неработоспособна. Поэтому при проектировании систем в первую очередь решаются вопросы, связанные с обеспечением устойчивости АСР. Затем решаются вопросы выполнения системой требований к качеству ее работы.

22.1. Временные показатели качества

Аналитические исследования работы систем (моделирование) проводятся в основном при типовых входных воздействиях. Такое ограничение влечет за собой возможность получать и использовать стандартизованные таблицы, формулы и интерпретации полученных результатов.

Суждение о качестве работы систем основывается на рассмотрении переходной функции системы (реакции на единичное ступенчатое воздействие).

В реальном случае, когда рассматривается, например, автоматический перевод по заданию оператора скорости вращения двигателя с одного числа оборотов на другое, величина ступенчатого воздействия вполне конкретна. Например, требуется изменить число оборотов с 2000 об/мин на 2500 об/мин. В этом случае величина ступенчатого воздействия равна 500 об/мин, т.е. математически задающее воздействие запишется в виде $500 \cdot 1(t)$.

Однако на оценки качества, представленные далее, это не повлияет. В силу гомогенности линейных уравнений системы оценки будут такими же как и на $1(t)$.

Вид переходного процесса может быть плавным, колебательным, с различным характером колебаний, различным по длительности протекания.

Для того, чтобы описать основные черты переходных процессов используются обобщенные оценки, характеризующие различные качества.

Начинать оценку показателей следует с проведения зоны допустимых значений регулируемой величины в установившемся (рабочем режиме). На рис.22.1 она показана пунктиром. Ее величина 2Δ берется равной $2 \div 5\%$ (чаще 5%) от установившегося значения регулируемой величины y_∞ . Именно с этой величиной, взятой за точку отсчета, связаны стандарты обобщенных графиков и таблиц, используемых в дальнейшем при расчетах систем.

$h(t)$

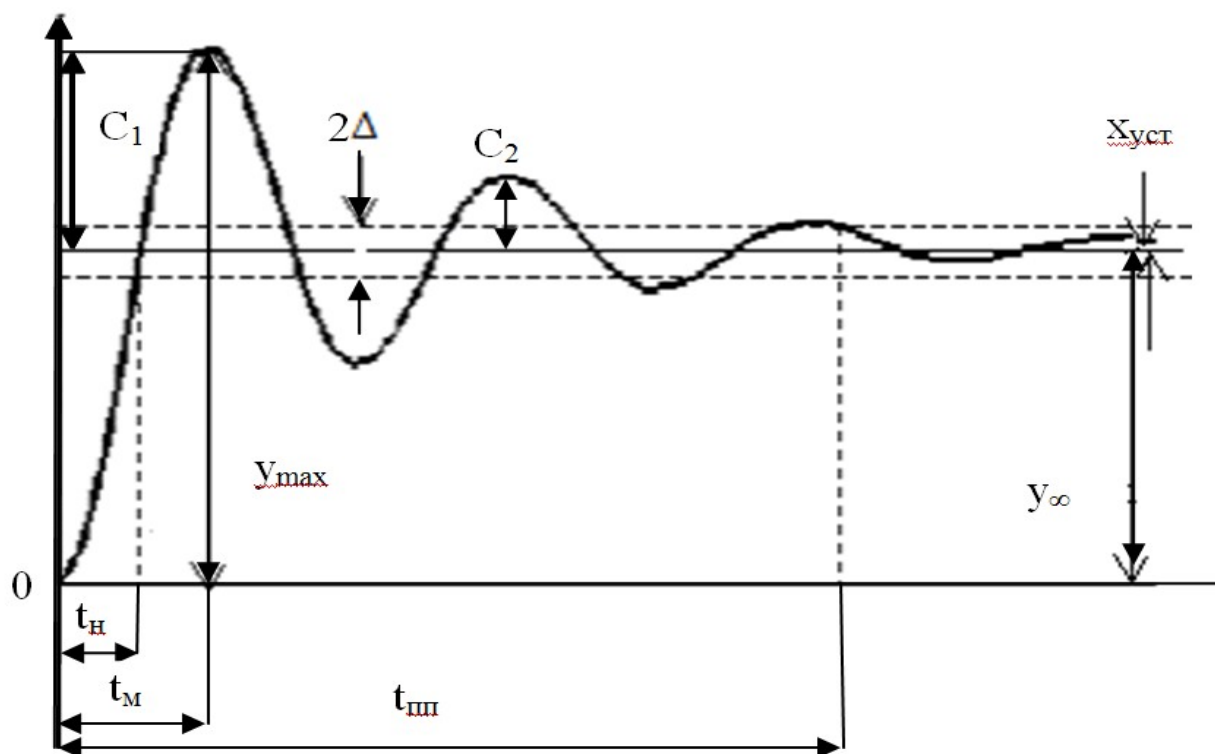


Рис.22.1. Переходный процесс системы на единичное ступенчатое воздействие

При необходимости рассмотрения конкретного случая данная величина берется равной допустимой ошибке регулирования, а процесс рассматривается при конкретных значениях регулируемой величины.

В случае с упомянутым двигателем показатели качества системы, приводимые далее, можно рассматривать, например, при допустимой величине ошибки ± 10 об/мин и величине ступенчатого сигнала 500 об/мин.

Ошибка регулирования - основной показатель того, выполняет система задачу требуемым образом или нет.

Величина, характер и длительность устранения происходящих изменений ошибки регулирования - основной предмет рассмотрения при оценке качества работы систем.

Величина ошибки системы в установившемся (рабочем) режиме $x_{уст}$ отвечает за качество, названное точностью работы системы.

Математически она определяется следующим образом

$$x_{уст} = x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \quad (22.1)$$

Скорость решения задач автоматического перевода системы (регулируемой величины) из одного состояния в другое, названа *быстродействием* и оценивается :

- временем переходного процесса $t_{пр}$;
- временем нарастания t_n и
- временем первого максимума t_m .

Время переходного процесса определяется как время, пока регулируемая величина не вошла в зону допустимых значений регулируемой величины.

Характер переходного процесса связан с качеством, названным запасом устойчивости. Чем более колебательным будет переходный процесс, тем ближе система будет к границе, за которой наступает ее неустойчивость, проявляющаяся в неограниченном увеличении ошибки регулирования. В этом случае систему признают неработоспособной.

Запас устойчивости характеризуется:

*перерегулированием σ ,
затуханием за период ψ ,
числом колебаний N .*

Перерегулирование и затухание выражаются в процентах и вычисляются по следующим формулам:

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\max}} 100\% \quad (22. 2)$$

$$\psi = \frac{c_1 - c_2}{c_1} 100\% \quad (22.3)$$

Число колебаний N определяется как число максимумов и минимумов $h(t)$ за время переходного процесса $t_{\text{пн}}$. На рис.22.1.1 $N = 5$.

Из практики работы систем известно, что для устойчивых нормально работающих систем $\sigma \leq 30\%$, а $\psi = 90 \div 98\%$. Чем больше σ , N и меньше ψ , тем более склонна система к колебаниям, тем меньше ее запас устойчивости.

Как следует из формул (22.2) и (22.3), перерегулирование характеризует максимальное отклонение, возникающее в переходном процессе, а ψ как и N – колебательность процесса.

Малая величина ψ и большое число N сопутствуют обычно частым переключениям исполнительного механизма. Отсюда задание их требуемых значений основывается в ряде случаев на соображениях надежности работы АСР: чем реже переключения исполнительного механизма, тем меньше его износ и старение, тем меньше износ регулирующего органа. У исполнительного механизма электрического типа возможно ограничение на число его включений в час, так как известно, что наибольший нагрев электродвигателей происходит в пусковых режимах из-за больших токов, а более частое включение может привести к их перегреву и выходу из строя.

Требования к времени нарастания t_n и к величине σ могут быть связаны, например, для механических систем, с допустимыми ускорениями регулируемой величины, иначе говоря, с допустимыми механическими перегрузками их элементов, а также с предельно возможной скоростью перемещения исполнительным механизмом регулирующего органа.

22.2. Оценка точности работы систем

Рассмотрим показатель точности – величину ошибки системы в установившемся режиме.

Данный режим наступает в системе после окончания переходного процесса, вызванного изменением задающего $g(t)$.

Если для системы стабилизации $g(t) = \text{const}$ и для расчетов обычно используется $g(t) = g_0 1(t)$, то для программных и следящих систем $g(t)$ – изменяющаяся во времени величина и в качестве типовых используется $g(t) = Vt$ или $g(t) = at^2/2$, где V и a – соответственно максимальные значения скорости и ускорения $g(t)$, имеющие место в реальном процессе. То же относится и к возмущающему воздействию $f(t)$.

Графики переходных процессов систем при отработке различных задающих воздействий показаны в табл. 22.1.

Решим вопрос: одинаково ли легко добиться определенного значения ошибки $x_{уст}$ для различных $g(t)$? По-видимому, легче добиться определенной величины $x_{уст}$ в случае $g(t) = g_0 1(t)$, т.е. когда задающее воздействие с течением времени остается постоянным, чем в случае изменяющегося задания. Иначе говоря, чем сложнее $g(t)$, тем система должна быть совершеннее по своим динамическим свойствам. На практике это значит, что система будет сложнее в техническом отношении, т.е. сложнее будет, например, регулятор и, следовательно, закон регулирования, реализованный в такой системе.

Как динамическая структура систем влияет на точность их работы?

Рассмотрим общий случай системы с передаточной функцией в разомкнутом состоянии $W(p)$ равной

$$W(p) = \frac{k \prod_{j=1}^m (T_j p + 1)}{p^v \prod_{i=1}^n (T_i p + 1)}. \quad (22.4)$$

Для простоты положим, что передаточная функция в цепи обратной связи $W_{oc}(p) = 1$.

Это означает, что передаточная функция датчика перенесена в прямой канал разомкнутой системы и за выходную величину системы в этом случае принимается сигнал с датчика. Таким образом, исследованию подлежит не ошибка регулирования, а сигнал рассогласования. Поскольку в большинстве случаев датчик – менее инерционное звено, чем объект управления, и обычно рассматривается как безинерционное звено, ошибка регулирования конкретной системы, соответствующая рассогласованию легко определяется через коэффициент передачи датчика

В дальнейших рассуждениях, с точки зрения смысла исследования, будем говорить не о рассогласовании, а об ошибке регулирования.

Исследуя ошибку системы в установившемся режиме, в качестве модели системы возьмем ее передаточную функцию по ошибке

$$\Phi_x(p) = \frac{x(p)}{g(p)} = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{P^v \prod_{i=1}^n (T_i p + 1)}{P^v \prod_{i=1}^n (T_i p + 1) + k \prod_{j=1}^m (T_j p + 1)} \quad (22.5)$$

и, воспользовавшись предельной теоремой Лапласа, запишем

$$x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \Phi_x(p) g(p) \quad (22.6)$$

где $x_{уст}$ – величина ошибки системы в установившемся режиме.

Рассмотрим точность работы систем при различных типовых задающих

воздействиях: $g(t) = g_0 1(t)$; $g(t) = Vt$; $g(t) = \frac{at^2}{2}$, имеющих соответственно следующие выражения в изображении по Лапласу:

$$g(p) = g_0/p; \quad g(p) = V/p^2; \quad g(p) = a/p^3.$$

Решим задачу для различных значений показателя степени p в знаменателе передаточной функции системы $\nu = 0, 1, 2$, где ν носит название «порядок астатизма».

Для $\nu = 0$ постоянного задающего воздействия будем иметь:

$$x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\prod_{i=1}^n (T_i p + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i p + 1) + K \prod_{j=1}^m (T_j p + 1)} \frac{g_0}{p} = \frac{g_0}{1 + K} \quad (22.7)$$

$$x_{уст} = \infty \text{ для } K_a \text{ и } g(p) = a/p^3.$$

Для $\nu = 1$ запишем:

$$x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{P \prod_{i=1}^n (T_i p + 1)}{P \prod_{i=1}^n (T_i p + 1) + K \prod_{j=1}^m (T_j p + 1)} \frac{g_0}{p} = 0, \quad (22.8)$$

$$x_{уст} = V/K \text{ для } g(p) = V/p^2 \text{ и } x_{уст} = \infty \text{ для } g(p) = a/p^3.$$

Коэффициент K в случае $\nu = 1$ называют добротностью по скорости и обозначают K_v .

Для $\nu = 2$ запишем

$$x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{P^2 \prod_{i=1}^n (T_i p + 1)}{P \prod_{i=1}^n (T_i p + 1) + K \prod_{j=1}^m (T_j p + 1)} \frac{g_0}{p} = 0 \quad (22.9)$$

$$x_{уст} = 0 \text{ для } g(p) = V/p^2 \text{ и } x_{уст} = a/K \text{ для } g(p) = a/p^3.$$

Коэффициент в случае $\nu = 2$ называют добротностью по ускорению и обозначают K_a .

Сделаем выводы из полученных результатов.

Система, имеющая $\nu = 2$, способна решать задачи изменения регулируемой величины в соответствии с задающим воздействием с большей точностью, чем система с $\nu = 1$ и тем более с $\nu = 0$. Ошибка $x_{уст}$ для $g(t) = at^2/2$ зависит от величины ускорения a и коэффициента добротности по ускорению K_a . Чем больше K_a , тем меньше $x_{уст}$.

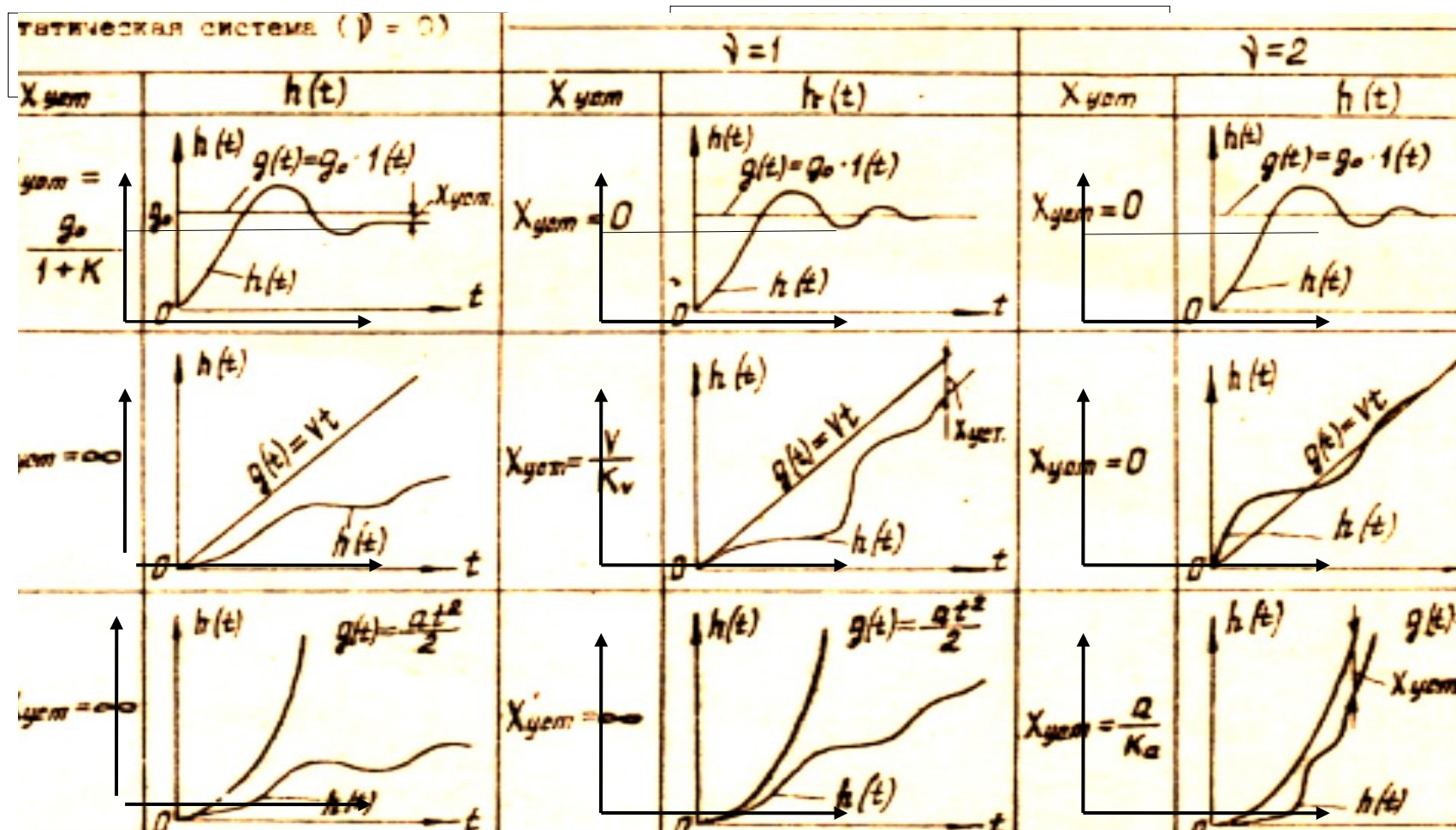
Система с $\nu = 1$ не справится с задачей поддержания соответствия между регулируемой величиной и $g(t) = at^2/2$. Ее ошибка будет неограниченно возрастать. При более простом виде $g(t) = Vt$ ошибка $x_{уст}$ будет обратно пропорциональна добротности по скорости K_v и прямо пропорциональна величине скорости V изменения $g(t)$.

Системы с $\nu = 2$ и $\nu = 1$ будут иметь $x_{уст} = 0$ при $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$, а система с $\nu = 2$ вместе с тем будет иметь $x_{уст} = 0$ и при $g(t) = Vt$.

Система с $\nu = 0$ способна решать лишь задачи стабилизации регулируемой величины. Ее ошибка x , как и в предыдущих случаях зависит от величины задающего воздействия и может быть изменена за счет увеличения коэффициента передачи K .

Все сказанное изображено в табл. 22.1.

Таблица 22.1



Введем следующее определение. Система называется статической по отношению к постоянному задающему воздействию, если ее ошибка $X_{уст}$ в установившемся режиме зависит от величины этого воздействия и астатической, если $X_{уст} = 0$. Из данного определения и проведенного анализа вытекает, что порядок астатизма ν определяет, быть системе статической или астатической. При $\nu = 0$ система является статической (иногда говорят астатической нулевого порядка), при $\nu = 1$ и $\nu = 2$ - астатической, соответственно первого и второго порядка астатизма.

Заметим, что выражение $1/p$ соответствует передаточной функции интегрирующего звена. Отсюда можно сделать следующий вывод, касающийся динамической структуры АСР: порядок астатизма системы относительно задающего воздействия определяется числом ее интегрирующих звеньев. Чем на практике может помочь данный вывод? Уже на начальной стадии проектирования АСР можно поставить требования к ее динамической структуре: если это программа или следящая система, то наличие в ней по крайней мере одного интегрирующего звена обязательно, если это система стабилизации, то возможно более простое техническое решение, без интегрирующих звеньев.

Вопрос о порядке астатизма АСР связан, как уже отмечалось, не только с динамической структурой системы, но и с характером действующих на нее сигналов. Вспомним, что при введении понятия "асимптотическая устойчивость систем" характер и величины действующих на систему сигналов не принимались во внимание и устойчивость АСР связывалась лишь с ее собственными свойствами, параметрами системы. Из выражений (22.7) - (22.9) для X при различных $g(t)$ следует, что система, будучи устойчивой по определению, может на практике иметь неограниченно возрастающую ошибку X при изменяющемся задающем воздействии. Сказанное подчеркивает важность введения понятия астатизма системы при решении задач проектирования. Так, расчет АСР необходимо начинать, в

первую очередь, с рассмотрения вопроса удовлетворения требований к точности ее работы, а затем уже решать вопросы, связанные с быстродействием и запасом устойчивости.

Далее, если системы с астатизмом большего порядка обладают и большей точностью, почему бы это не учесть заранее введением дополнительных интегрирующих звеньев? Точность работы систем возможно удастся повысить, т.е. удастся уменьшить ошибку $X_{уст}$. Однако быстродействие и запас устойчивости системы при этом ухудшатся и система может стать даже неустойчивой. Объясняется это тем, что каждое интегрирующее звено вносит в систему отрицательный фазовый сдвиг $-\pi/2$ и вместе с тем спектр частот, пропускаемых звеном, ограничен. Введение интегрирующего звена в систему позволяет уменьшить $X_{уст}$, но требуются, если нужно, дополнительные меры по сохранению или улучшению запаса устойчивости и быстродействия.

Отсюда следует, что получение более точной системы связано с ее усложнением и дополнительными затратами.

Как видно из приведенных рассуждений, при решении задач обеспечения требуемой точности АСР с одновременным обеспечением требуемого быстродействия и запаса устойчивости возникают противоречия, которые приходится разрешать в процессе проектирования систем.

Для определения ошибки $X_{ош}$ от возмущающего воздействия следует также воспользоваться предельной теоремой Лапласа:

$$X_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \Phi_f(p) f(p) . \quad (22.10)$$

$$\Phi_f(p) = \frac{W_f(p)}{1 + W(p)} . \quad (22.11)$$

Система будет иметь ν -й порядок астатизма по возмущающему воздействию, если ее передаточная функция $\Phi_f(p)$ будет иметь в числителе p^ν , т.е. нуль кратности ν .

Так, если предположить, что

$$W_f(p) = \frac{W_{of}(p)}{p^k} \quad (22.12)$$

$$W(p) = \frac{W_{of}(p)}{p^{v+k}} \quad (22.13)$$

где $W_{of}(p)|_{p=0} = \text{const} \neq 0$, $W_0(p)|_{p=0} = \text{const} \neq 0$,

то
$$\Phi_f(p) = \frac{p^v W_{of}(p)}{p^{v+k} + W_0(p)} \quad (22.14)$$

Отсюда, если $W^f(p)$ имеет множителем $1/p^k$, то для того, чтобы замкнутая система обладала астатизмом v - того порядка относительно возмущающего воздействия, необходимо, чтобы $W(p)$ содержала множитель $1/p^{v+k}$.

В целом ошибка в установившемся режиме $X(\infty)$ в силу принципа суперпозиции равна сумме ошибок от задающего X_{ycm} и возмущающего X_{ycmf} воздействий:

$$X(\infty) = X_{ycm} + X_{ycmf} \quad (22.15)$$

В то время как указанные составляющие ошибки можно изменять в процессе проектирования АСР , существует ошибка чувствительного элемента $X_{чэ}$, которую устранить невозможно. но которую следует учитывать при оценке точности работы систем:

$$X(\infty) = X_{ycm} + X_{ycmf} + X_{чэ} \quad (22.16)$$

Порядок астатизма по задающему и возмущающему воздействиям в общем случае может быть неодинаков. Отсюда следует заключить, что при проектировании системы, для повышения точности ее работы, необходимо учитывать, какой из режимов работы является для нее наиболее характерным.

Заметим, что формулы для определения ошибки X_{ycm} могут быть использованы не только при решении задач анализа точности системы, но и

при отыскании коэффициента передачи системы, при котором данная ошибка будет меньше или равна своему требуемому значению $X_{уст.тр}$, задаваемому при проектировании.

Для статических систем, астатических 1-го и 2-го порядка по задающему воздействию можно соответственно записать условия, при которых

$$X_{уст} \leq X_{уст.тр} :$$

$$k \geq (x_{уст.тр} - g_0) / x_{уст.тр},$$

$$k_v \geq V / x_{уст.тр},$$

$$k_a \geq a / x_{уст.тр}.$$

Аналогичные неравенства можно получить и для возмущающего воздействия.

22.3. Корневые показатели качества

Известно, что корни характеристического уравнения системы зависят от ее параметров и определяют характер протекающих в ней переходных процессов [1-3]. Отсюда возникает возможность судить по данным корням о быстродействии и запасе устойчивости системы.

Чем меньше вещественная часть корня, тем медленнее затухает соответствующая ему составляющая переходного процесса. Вместе с тем наличие комплексных корней приводит к появлению в переходном процессе составляющих колебательного характера.

Рассмотрим в качестве примера систему, структурная схема которой показана на рис.22.2.

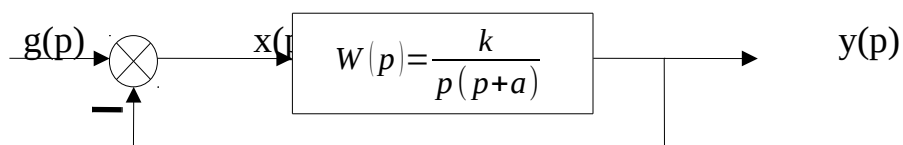


Рис. 22.2. Структурная схема системы

Изображение регулируемой величины системы определим как:

$$y(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} g(p) = \frac{k}{p^2 + ap + k} g(p). \quad (22.17)$$

Используя стандартную форму записи, запишем:

$$y(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} g(p). \quad (22.18)$$

Переходная функция системы (при $g(p) = \frac{1}{p}$) будет:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\gamma} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \gamma t + \theta), \quad (22.19)$$

$$\text{где } \gamma = \sqrt{1 - \xi^2}, \quad \theta = \arctg \frac{\gamma}{\xi}$$

$$\omega_n^2 = k, \quad 2\xi\omega_n = a.$$

Переходные функции для различных ξ показаны на рис. 22.4.

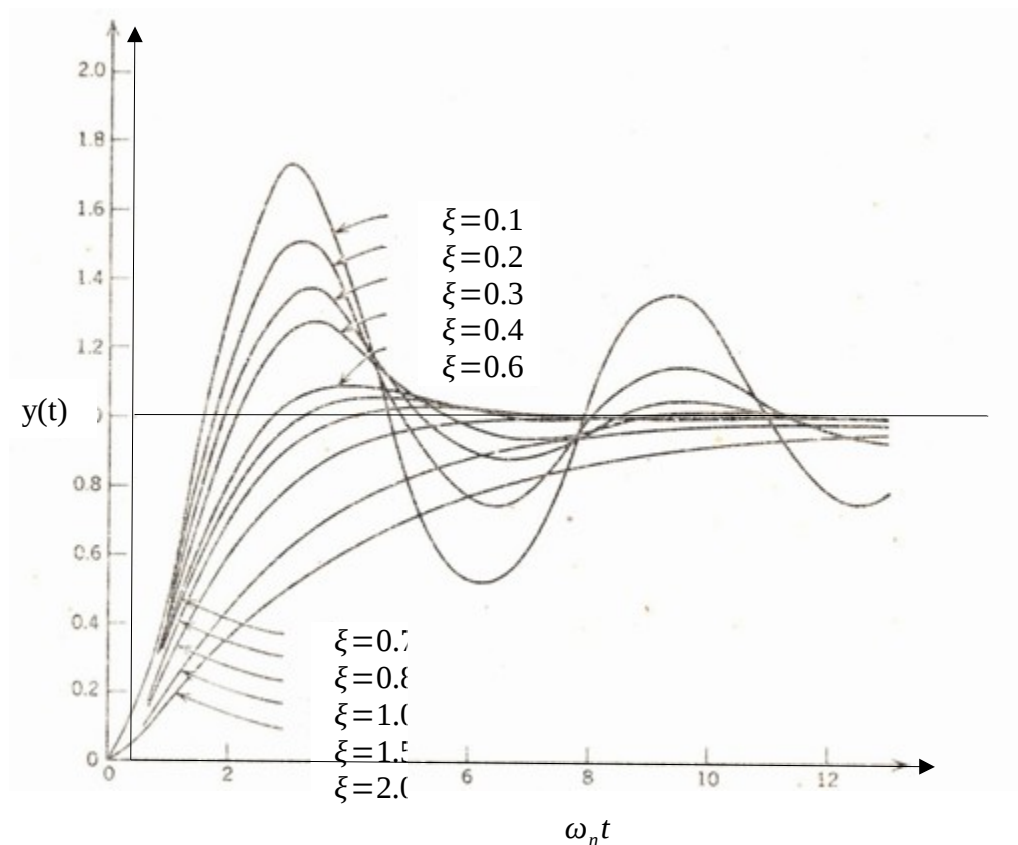


Рис. 22.3. Переходные функции системы

Корни характеристического уравнения системы

$$p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2 = 0 \quad (22.20)$$

равны

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (22.21)$$

Расположение их на комплексной плоскости показано на рис. 22.4.

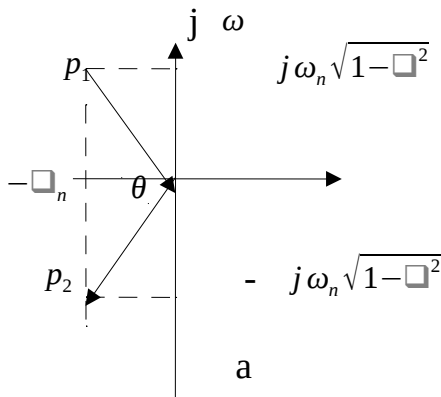


Рис. 22.4. Плоскость корней

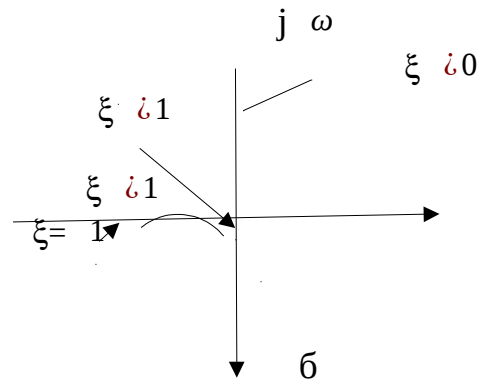


Рис. 22.5. Кривая корней при изменении ξ

На рис. 22.5 показана кривая – геометрическое место точек, соответствующих различным значениям корней при изменении ξ .

Как следует из сравнения рис. 22.3 и рис. 22.4, – расположение корней на комплексной плоскости однозначно связано с характером переходного процесса в системе. Рассмотрим связь перерегулирования σ и времени первого максимума t_m с параметром затухания ξ . Дифференцируя выражение (22.19) и полагая производную равной нулю, получим при $\omega_n \gamma t = \pi$:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{\gamma} e^{-\gamma\omega_n t} \sin \omega_n \gamma t = 0 \quad (22.22)$$

Отсюда

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (22.23)$$

$$y_{max} = 1 + e^{-\xi \pi / \sqrt{1-\xi^2}} \quad (22.24)$$

и, следовательно

$$\sigma = \frac{y_{max} - 1}{1} 100\% = 100e^{-\xi \pi / \sqrt{1-\xi^2}} \quad (22.25)$$

Зависимости для σ и $\omega_n t_m$ от ξ противоположны: чем больше ξ , тем меньше σ и больше $\omega_n t_m$.

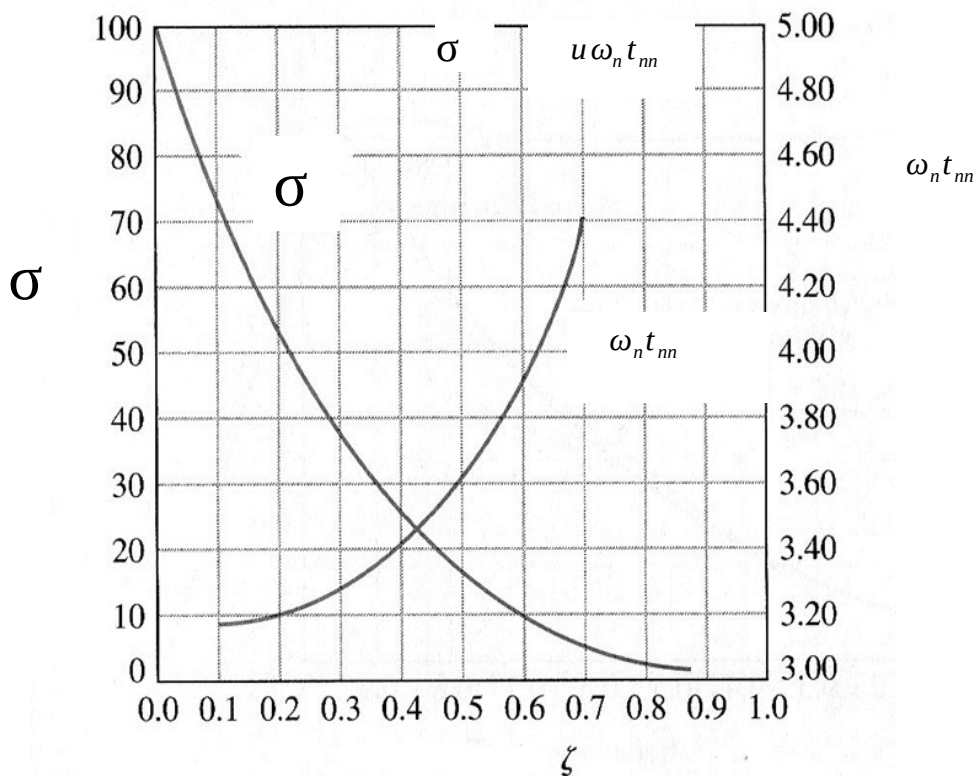


Рис. 22.6. Зависимость σ и $\omega_n t_m$ от ξ

Данными зависимостями можно воспользоваться и для системы третьего порядка с передаточной функцией:

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p^2 + 2\xi p + 1)(vp + 1)} \quad (22.26)$$

Если выполняется условие:

$$|1/v| \geq 10|\xi\omega_n| \quad (22.27)$$

Другими словами поведение системы третьего порядка может быть рассмотрено как поведение системы второго порядка, если вещественная часть ближайших к минимальной оси корней по модулю в 10 раз меньше вещественной части третьего корня.

Рассмотрим связь затухания ψ за период с расположением корней на комплексной плоскости. Для этого воспользуемся выражением (22.22) и найдем затухание амплитуды синусоидального колебания за период. В некоторый момент времени t_1 при $y_{\max}$ эта амплитуда будет равна

$$C_1 = \frac{\omega_n}{\gamma} e^{-\xi\omega_n t_1}$$

(22.28)

Спустя один период $T = 2\pi/\omega_n\gamma$ получим

$$C_2 = \frac{\omega_n}{j} e^{-\xi\omega_n(t_1 + 2\pi/\omega_n\gamma)} = C_1 e^{\frac{-2\pi\xi\omega_n}{j\omega_n}} \quad (22.29)$$

На основании выражений (22.28) и (22.29) запишем

$$\Psi = \frac{C_1 - C_2}{C_1} = 1 - \frac{C_2}{C_1} = 1 - e^{\frac{2\pi\xi\omega_n}{\gamma\omega_n}}$$

(22.30)

Если в выражении (22.30) ввести обозначения

$$\gamma\omega_n = \alpha \quad \text{и} \quad \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = \omega_n \gamma = \beta, \quad (22.31)$$

где α – вещественная, а β – мнимая части корней (β называется также частотой затухающих колебаний), то уравнение (22.30) можно переписать в виде

$$\Psi = 1 - e^{-\frac{2\pi\alpha}{\beta}} \quad (22.32)$$

Отношение $\beta/\alpha = \mu$ называют к о л е б а т е л ь н о с т ь ю. Перепишем выражение (22.3.16):

$$\Psi = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}} \quad (22.33)$$

Отсюда можно получить:

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\xi}} \quad (22.34)$$

Для рассматриваемой системы имеем

$$\Psi = 1 - e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (22.35)$$

Из выражений (22.25), (22.34) и (22.35) можно получить еще несколько дополнительных соотношений:

$$\sigma = e^{-\pi/\mu} \quad (22.36)$$

$$\mu = -\frac{\pi}{\ln \sigma}$$

$$\Psi = 1 - \sigma^2, \quad (22.37)$$

$$(22.38)$$

где σ берется в относительных единицах.

Анализируя полученные зависимости можно отметить, что при проектировании систем задача выполнения требований к σ и t_m противоречива (рис. 22.6).

Так, например, при увеличении ξ перерегулирование σ уменьшается, и время максимума t_m увеличивается. Решение задачи заключается в отыскании компромиссного решения с учетом степени важности σ и t_m для системы.

Рассмотрим вновь уравнение для переходного процесса системы n -ного порядка:

$$x(t) = \sum_{v=1}^s C_v e^{\alpha_v t} + \sum_{k=1}^{\frac{n-s}{2}} C_k e^{\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k) \quad (22.39)$$

Скорость затухания каждого из слагаемых определяется величиной вещественной части корня α . Чем меньше α (чем ближе корень расположен к мнимой оси), тем больше время затухания слагаемого. Проанализируем, как связана скорость затухания $x(t)$ (время переходного процесса $t_{\text{пн}}$) со скоростью затухания каждого из слагаемых выражения (22.39).

Решим более общий вопрос: как инерционность целого зависит от инерционности составляющих это целое частей? Рассмотрим в качестве аналогии отряд, состоящий из пеших и велосипедистов. Ясно, что максимальная скорость движения всего отряда определяется максимальной

скоростью передвижения наиболее инерционной его части – пешех. Рассуждая по аналогии, можно сделать вывод, что время переходного процесса t_{nn} будет в основном зависеть от абсолютного значения вещественной части ближайшего к мнимой оси корня (рис. 22.6), называемый степенью устойчивости η .

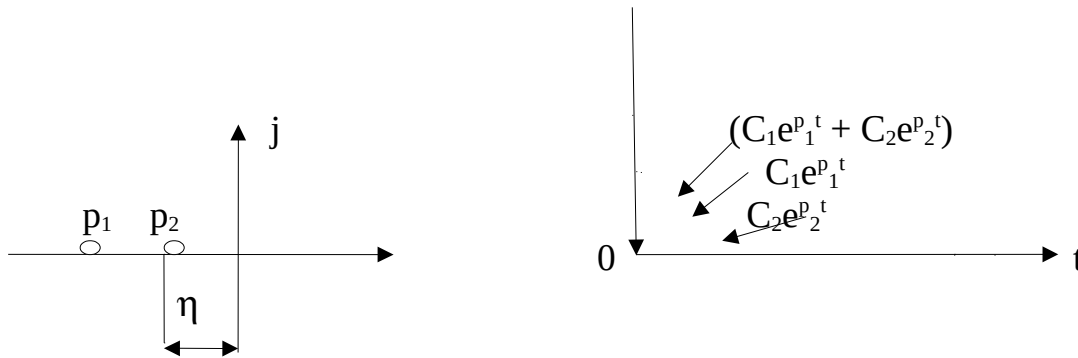


Рис. 22.7. Влияние расположения корней на t_{nn} .

В том случае, когда выполняется условие (22.27), можно по η определить приближенно время переходного процесса:

$$t_{nn} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta}, \quad (22.40)$$

где в качестве Δ можно взять $(0,02 \div 0,05)$ от установившегося значения регулируемой величины $y(\infty)$.

Так при $\Delta = 0,05$

$$t_{nn} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0,05} \approx \frac{3}{\eta}. \quad (22.41)$$

Данная оценка t_{nn} , пусть и приближенная, часто достаточна для проектировщика при определении быстродействия системы. Вместе с тем t_{nn} , вычисленная по формуле (22.41) может служить для проверки правильности определения t_{nn} , например, временными методами.

Вернемся к рассматриваемой в качестве примера системе (рис. 22.3.1).

Для нее $\eta = \xi \omega_n$. При $\Delta = 0,02$ будем иметь .

$$t_{nn} \approx \frac{4}{\eta} = \frac{4}{\xi \omega_n} . \quad (22.42)$$

Решим небольшую задачу по проектированию.

Пусть необходимо так выбрать коэффициент k и параметр a системы, чтобы ее перерегулирование было не более 5 %, а время переходного процесса было менее 4с.

Воспользуемся выражением (22.25), из которого для $\sigma = 5\%$ получим $\xi \cong 0,7$.

Далее воспользуемся уравнением (22.41), откуда

$$t_{nn} = \frac{4}{\xi \omega_n} \leq 4с \quad (22.43)$$

и следовательно

$$\xi \omega_n \geq 1 \quad (22.44)$$

На плоскости корней два ограничения в виде неравенств (22.43) и (22.44) отображаются в виде заштрихованной области (рис. 22.8).

Выберем корни непосредственно на границе. Тогда $P_1 = -1 + j1$ и $P_2 = -1 - j1$. Из (22.43) и (22.44) получим, что $\xi = 1/\sqrt{2}$ и $\omega_n = 1/\xi = \sqrt{2}$.

Отсюда для передаточной функции системы

$$\Phi(P) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{k}{p^2 + ap + k} = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \quad (22.45)$$

найдем, что $k = \omega_n^2 = 2$ и $a = 2\xi\omega_n = 2$.

j

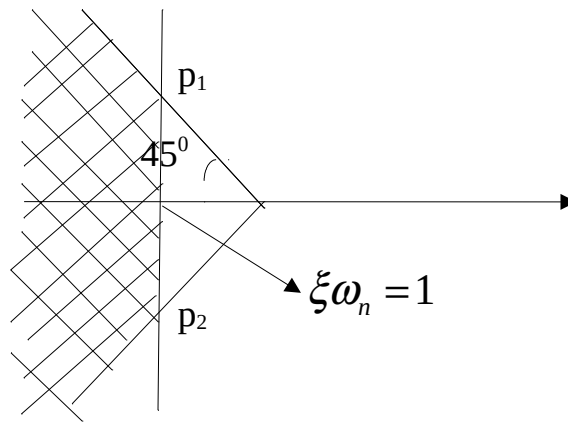


Рис. 22.8. Область расположения корней

Заметим, что в данном случае $\mu = \beta/\alpha = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} / \omega_n \xi$ соответствует геометрически тангенсу угла $\varphi = \arctg \mu$ (рис. 22.8), т.е. $\mu = tg\varphi = 45^\circ$, а $\eta = \xi\omega_n = 1$.

Из примера видно, что колебательность μ и степень устойчивости η могут использоваться не только для оценки качества работы уже имеющейся системы, но также и для постановки требований и качеству проектируемых систем.

Для систем, описываемых уравнением порядка $n > 2$, переходные процессы имеют вид, схожий с переходными процессами для систем 2-го порядка.

22.4. Частотные показатели качества

При использовании частотных методов анализа и синтеза систем в качестве типового выходного сигнала берется гармонический сигнал. Использование такого типового сигнала вместо модели реального воздействия на систему связано с простотой математических выкладок, меньшей их трудоемкостью. Гармонический сигнал, являясь лишь отдаленной копией реального воздействия, тем не менее, должен отражать в своих параметрах черты реального воздействия. Это осуществляется введением, так называемого, эквивалентного гармонического сигнала.

Его параметры: амплитуда и частота – находятся на основании таких максимальных наблюдаемых величин реального воздействия, например,

задающего $g(t)$, как скорость его изменения $\dot{g}_{\max}$ и ускорения $\ddot{g}_{\max}$.

Оценка $\dot{g}_{\max}$ и $\ddot{g}_{\max}$ может быть получена на основе рассмотрения реального сигнала $g(t)$ или, если такой возможности нет, что случается на начальной стадии проектирования, величинами $\dot{g}_{\max}$ и $\ddot{g}_{\max}$ приходится задаваться, исходя из каких-либо других соображений, связанных с изучением процессов в объекте регулирования. По мере накопления знаний о системе в процессе проектирования указанные значения могут уточняться.

Важно отметить, что эквивалентное гармоническое воздействие, сформированное подобным образом, представляет собой наиболее «тяжелый» для системы сигнал. Однако, если в процессе проектирования удастся рассчитать систему, отвечающую поставленным требованиям при действии на нее такого сигнала, то очевидно, что с менее «тяжелыми» сигналами система «справится».

Рассмотрим путь формирования эквивалентного гармонического воздействия. Пусть известны максимальные значения $\dot{g}_{\max}$ и $\ddot{g}_{\max}$. Выражение для эквивалентного синусоидального сигнала запишем в виде

$$g(t) = g_{\omega} \sin \omega_{\omega} t \quad (22.46)$$

Для определения g_{ω} и ω_{ω} , соответствующих $\dot{g}_{\max}$ и $\ddot{g}_{\max}$, продифференцируем дважды $g(t)$:

$$\dot{g}(t) = g_{\omega} \omega_{\omega} \cos \omega_{\omega} t \quad (22.47)$$

$$\ddot{g}(t) = -g_{\omega} \omega_{\omega}^2 \sin \omega_{\omega} t \quad (22.48)$$

Исходя из того, что максимальные значения $\dot{g}(t)$ и $\ddot{g}(t)$ равны их амплитудам, запишем:

$$\dot{g}_{\max} = g_{\omega} \omega_{\omega} \quad (22.49)$$

$$\ddot{g}_{\max} = g_{\omega} \omega_{\omega}^2 \quad (22.50)$$

Из выражений (22.49) и (22.50) найдем искомые параметры эквивалентного синусоидального воздействия:

$$\omega_{\omega} = \frac{\ddot{g}_{\max}}{\dot{g}_{\max}} \quad (22.51)$$

$$g_{\omega} = \dot{g}_{\max}^2 / \ddot{g}_{\max}. \quad (22.52)$$

Рассмотрим далее оценку точности работы системы. Для этого, воспользовавшись ее передаточной функцией по ошибке, запишем выражение для ошибки $x(t)$ в частотной области. Поскольку в установившемся режиме ошибка также меняется по гармоническому закону, оценим лишь ее максимальное значение $x_{\max}$, т.е. амплитуду:

$$x_{\max} = \frac{1}{|1 + W(j\omega_{\omega})|} g_{\omega}. \quad (22.53)$$

Учитывая, что в установившемся режиме, в диапазоне так называемых рабочих частот системы $|1 + W(j\omega_э)| \approx |W(j\omega_э)|$, перепишем уравнение (22.4.8):

$$x_{\max} \cong \frac{1}{|W(j\omega_э)|} g_э \quad (22.54)$$

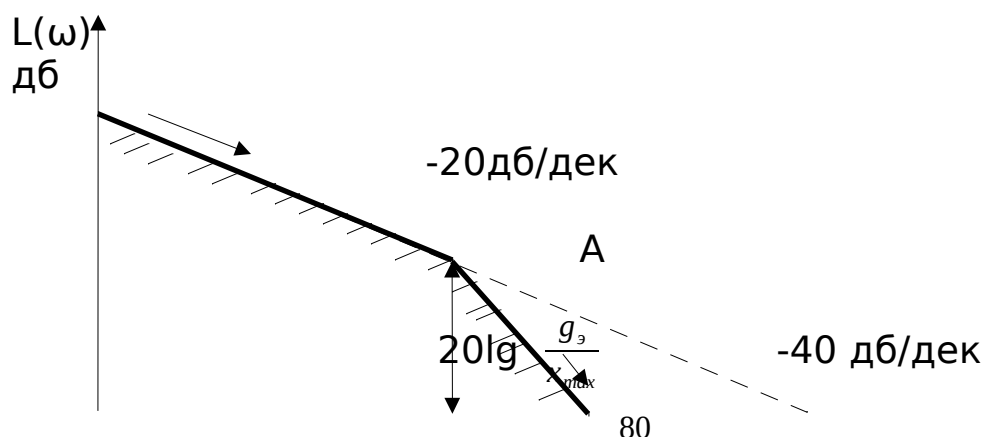
Формула (22.53) позволяет не только определить установившуюся ошибку регулирования при анализе точности системы, но и решить обратную задачу: определить требование к $W(j\omega)$, выполнение которого будет гарантировать получение ошибки x не более заданной. Это требование можно записать в виде неравенства:

$$|W(j\omega_э)| \geq \frac{g_э}{x_{\max}} \quad (22.55)$$

При использовании для расчетов логарифмических частотных характеристик выражение (22.55) следует переписать в виде:

$$20 \lg |W(j\omega_э)| \geq 20 \lg \frac{g_э}{x_{\max}} \quad (22.56)$$

Графически выполнение требований к точности будет заключаться в прохождении логарифмической амплитудной частотной характеристики $L(\omega)$ выше точки А, называемой контрольной точкой, с координатами $(\omega_э, 20 \lg g_э/x_{\max})$ как показано на рис. 22.9.



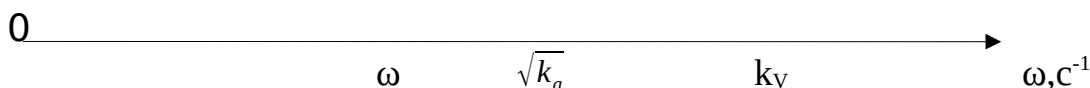


Рис. 22.9. Построение запретной области для астатических систем

Если рассмотреть случай, когда $\dot{g}_{\max} = \text{const}$, а амплитуда ускорения меньше максимального значения $\ddot{g}_{\max}$, то при различных значениях $\ddot{g} < \ddot{g}_{\max}$ в соответствие с (22.51) и (22.52) ω_z будет уменьшаться, а g_z будет увеличиваться. Это графически отобразится в движении контрольной точки А по прямой, имеющей отрицательный наклон – 20 дБ/дек.

При $\ddot{g}_{\max} = \text{const}$ и меньших значениях амплитуды скорости $\dot{g}$, чем $\dot{g}_{\max}$, эквивалентная частота ω_z будет возрастать, а g_z уменьшаться. Контрольная точка при этом будет двигаться по прямой с наклоном – 40 дБ/дек в сторону больших частот. В результате получим так называемую запретную область, обозначенную на рис. 22.9 штриховкой. Для выполнения требований по точности в случае, когда известно максимальные возможные значение $\dot{g}_{\max}$ и $\ddot{g}_{\max}$, необходимо, чтобы ЛАХ системы проходила выше запретной области. Иначе говоря, если рассмотреть уравнение (22.53) и получить, что

$$x_{\max} = \frac{\dot{g}_{\max}}{k_v} \quad (22.57)$$

$$\text{и } x_{\max} = \frac{\ddot{g}_{\max}}{k_a}, \quad (22.58)$$

где k^v и k^a - соответственно добротность по скорости и ускорению, то выполнение требований по точности для систем с астатизмом 1-го порядка и систем с астатизмом 2-го порядка будет заключаться в необходимости иметь соответственно k^v и k^a не меньше значений, рассчитанных по формулам (22.57) и (22.4.58) для максимальных значений $\dot{g}_{\max}$, $\ddot{g}_{\max}$ и $X_{\max}$.

Проведем аналогичные выкладки для статических систем в случае единичной обратной связи. В данном случае к сведениям о задающем воздействии $\dot{g}_{\max}$ и $\ddot{g}_{\max}$ необходимо добавить информацию о максимально возможном изменении самого сигнала $g_{\max}$. Тогда параметры эквивалентного гармонического воздействия равны:

$$g_{\omega} = g_{\max} \quad (22.59)$$

$$\omega_{\omega} = \dot{g}_{\max} / g_{\max}, \quad (22.60)$$

а ордината контрольной точки А с учетом уравнения (52) будет:

$$L(\omega_{\omega}) = 20 \lg \frac{g_{\max}}{X_{\max}}. \quad (22.61)$$

При $g_{\omega} = g_{\max} = \text{const}$ и $\dot{g} < g_{\max}$ контрольная точка перемещается влево по горизонтальной прямой. При $\dot{g} < g_{\max}$ и $\ddot{g}_{\max} = \text{const}$ увеличивается и точка А перемещается по прямой с наклоном -20дБ/дек. В этом случае

$\ddot{g}_{\max \omega} < \dot{g}_{\max}$. Поскольку $\dot{g}_{\max \omega} = \omega^2 g_{\max} \dots$, то предельная частота, до которой движется точка А вправо будет равна

$$\omega_{\omega} = \sqrt{\dot{g}_{\max} / g_{\max}} \quad (22.62)$$

На рис. 22.10 показана запретная область для статической системы.

Для того, чтобы ошибка X в установившемся режиме была не больше заданного значения $X_{\max}$, ЛАХ системы должен проходить выше данной области.

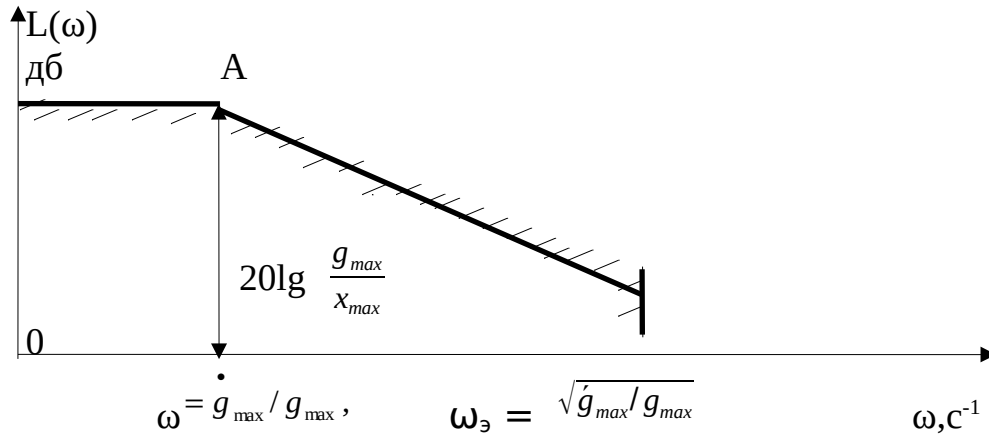


Рис. 22.10. Построение запретной области для статической системы

Для учета возмущающих воздействий при формировании запретной области воспользуемся принципом суперпозиции, справедливым для линейных систем. Рассмотрим случай, когда $f(t)=f_0 1(t)$. Составляющую ошибки x в формуле (22.16) найдем по формуле

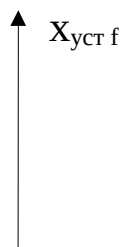
$$X_{устf} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{W_f(p)}{1+W(p)} \quad , \quad (22.63)$$

где $W_f(p)$ - передаточная функция разомкнутой системы по возмущению $f(t)$.

Для систем статических по возмущению можно записать:

$$X_{устf} = \frac{\gamma f_0}{1+k} \quad , \quad (22.64)$$

где γ - коэффициент статизма, который может быть определен, например, из статической характеристики объекта регулирования (рис. 22.11) как тангенс угла α наклона касательной в точке, соответствующей рабочему режиму: $\gamma = m_x \cdot \text{tg} \alpha / m_f$, где m_x, m_f - масштабы по оси ординат и абсцисс.



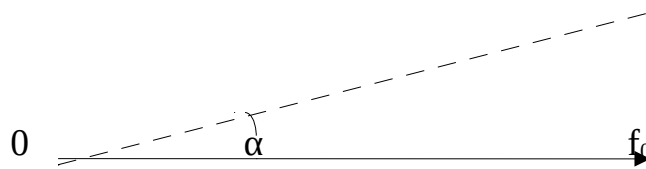


Рис. 22.11. Статистическая характеристика объекта регулирования

Для систем стабилизации, при $g(t)=0$ обеспечение величины ошибки X не более требуемого значения X возможно при условии

$$1+k \approx k \geq f_0 \gamma / x_{\max} \quad (22.65)$$

Запретная зона для данного случая показана на рис. 13 пунктиром. Если же характерным режимом работы является также режим изменения $g(t)$, то запретная область пойдет выше, как показано на рис. 22.13 сплошной линией.

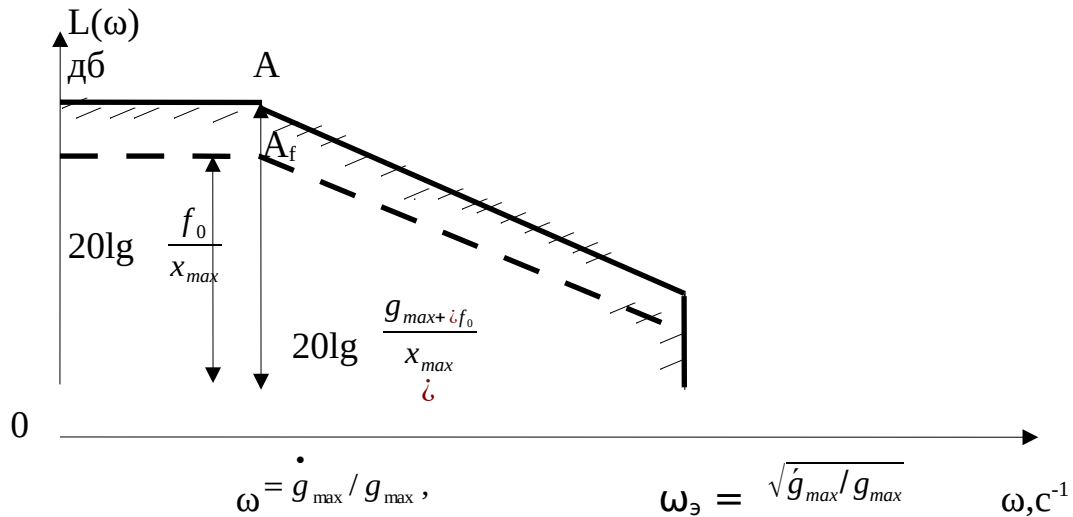
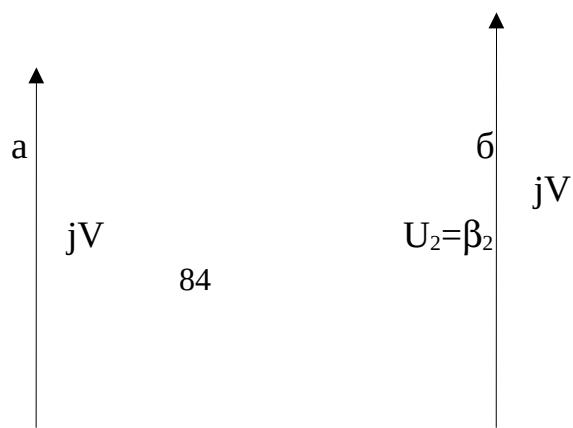


Рис. 22.12. Построение запретной области с учетом возмущающего воздействия

Рассмотрим количественные частотные показатели, такого качества систем как запас устойчивости. Как отмечалось, запас устойчивости характеризует удаленность системы от границы устойчивости. Согласно критерию Найквиста нахождению системы на границе устойчивости соответствует прохождение АФЧХ разомкнутой системы через точку с координатами $(-1,0)$ как показано на рис. 22.4.5 а пунктирной линией.



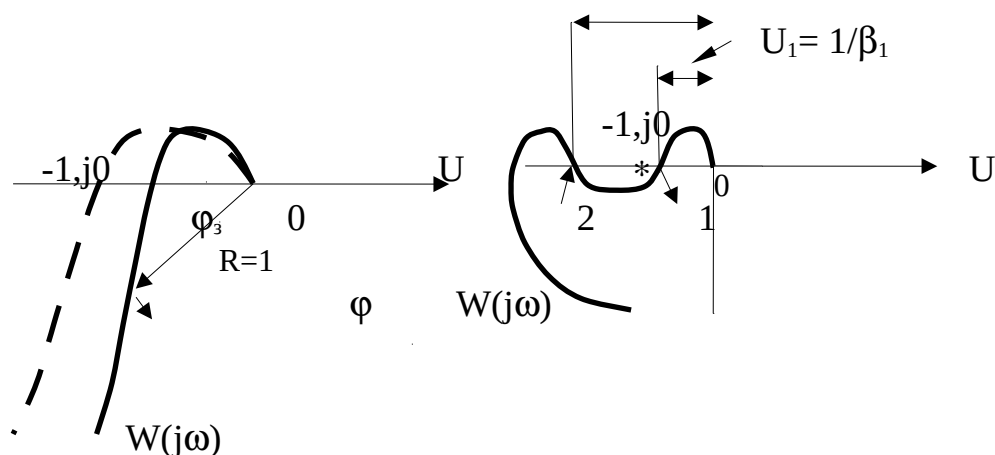


Рис. 22.13. Определение запаса устойчивости по АФЧХ

Для того чтобы определить удаленность системы, АФЧХ которой показана на рис. 22.13 а и б сплошной линией, от границы устойчивости, вводятся такие количественные показатели как запас устойчивости по фазе и запас устойчивости по модулю.

Запасом устойчивости по фазе φ_3 называется угол

$$\varphi_3 = 180 + \varphi \quad (22.66)$$

где φ - аргумент (отрицательный) частотной передаточной функции разомкнутой системы $W(j\omega)$ при $|W(j\omega)| = 1$ (рис. 22.13,а). Из практики известно, что для большинства систем ... $\varphi_3 = 30 \div 60^\circ$.

Запас устойчивости по модулю является количественной мерой удаленности точек 1 и 2 (рис. 22.13,б, случай условно-устойчивой системы) от точки с координатами (-1,0) и выражается в децибелах:

$$L_1 = 20 \lg \beta_1 = 20 \lg 1/U_1 \quad (22.67)$$

$$L_2 = 20 \lg \beta_2 = 20 \lg U_2 \quad (22.68)$$

Как показала практика, для работающих систем запас устойчивости по модулю лежит в пределах 6+20 дБ.

Оценка запаса устойчивости требует одновременного определения запасов устойчивости по фазе и по модулю. Наличие двух количественных показателей является определенным недостатком. В этом отношении удобнее

использовать лишь один количественный показатель запаса устойчивости -показатель колебательности M , который представляет собой максимум модуля частотной передаточной функции замкнутой системы (рис.22.14) при начальной ординате, равной единице, т.е. $|\Phi(0)| = 1$:

$$M = \max_{j\omega} |\Phi(j\omega)| \quad (22.69)$$

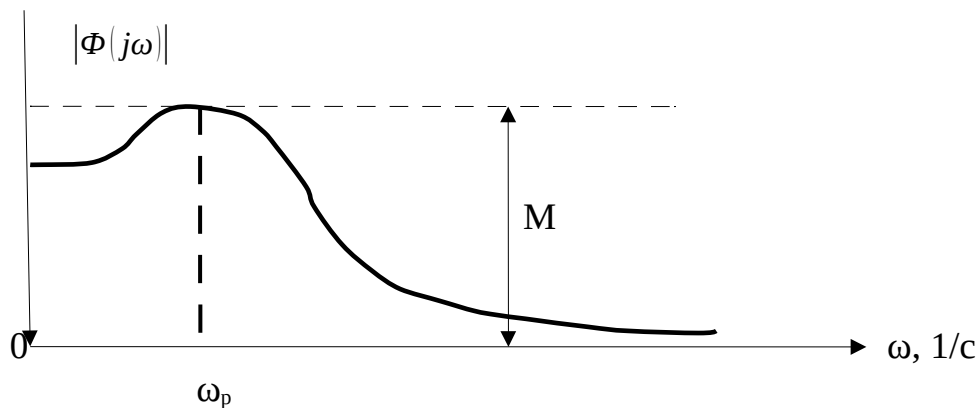


Рис. 22.14. Амплитудные частотные характеристики замкнутой системы

Наличие максимума характеристики $|\Phi(j\omega)|$ объясняется резонансными свойствами системы. Чем больше по величине резонансный пик при частоте резонанса ω_p , тем больше склонность системы к колебаниям, тем больше перерегулирование σ в переходных процессах и тем меньше запас устойчивости.

При анализе и синтезе систем, учитывая взаимно-однозначное соответствие между $\Phi(j\omega)$ и $W(j\omega)$, большую часть исследований проводят, оперируя с $W(j\omega)$, делая затем заключения о свойствах замкнутой системы (вспомните, например, критерий Найквиста). Объясняется это простотой выражения $W(j\omega)$ по сравнению с $\Phi(j\omega)$, за счет чего достигается меньшая трудоемкость расчетов.

Для этого представим выражение (22.69) в виде:

$$j\omega$$

$$\Phi$$

$$M$$

где $W(j\omega)=U+jV$, а U и V -соответственно вещественная и мнимая части $W(j\omega)$.

Возведем левую и правую части уравнения (22.70) в квадрат и преобразуя полученное выражение получим:

Разделив уравнение (70) на $(1 - M^2)$ и добавив к его левой и правой частям слагаемое $\left[M^2 / (1 - M^2) \right]^2$, будем иметь:

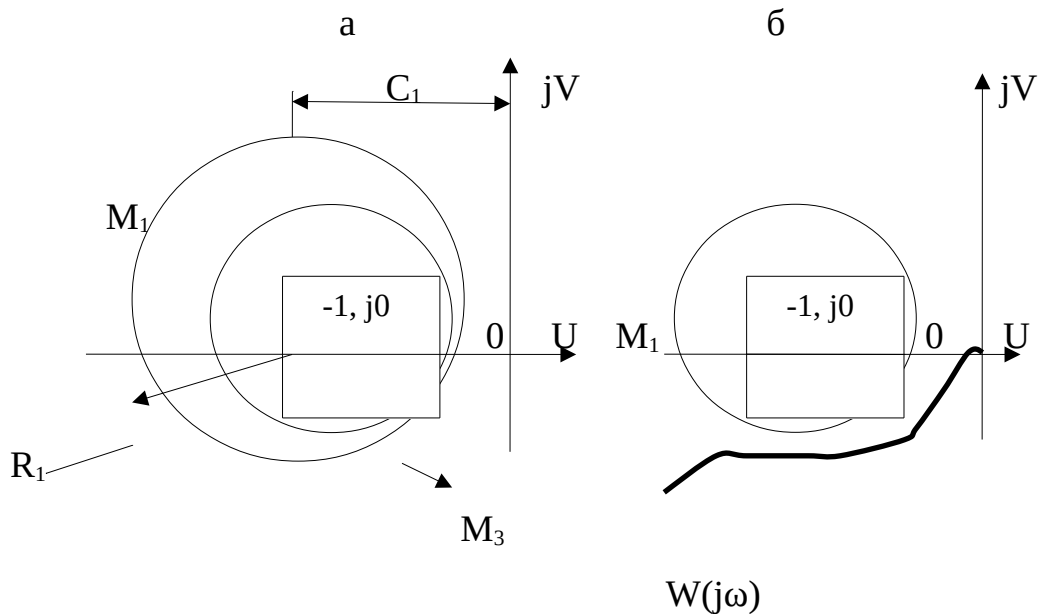
Преобразуя (22.72) получим:

Выражение (22.73) представляет собой уравнение окружности на комплексной плоскости с центром в точке с координатами

и с радиусом $R = \frac{M}{1 - M^2}$. (22.75)

В хорошо демпфированных системах показатель колебательности M обычно не превосходит значений 1,1 + 1,5, хотя может иметь в некоторых случаях и значения 2 + 2,5. Точность определения M не выше 0,05.

В соответствии с выражениями (22.74) и (22.75) на рис. 22.4.7, а показаны окружности для нескольких значений M (для M_1 $C = C_1$, $R = R_1$).



$$M_1 < M_2 < M_3$$

Рис. . 22.15. К вопросу определения запаса устойчивости с помощью показателя колебательности M

Из проделанных рассуждений следует, что окружность для определенного значения M на комплексной плоскости (рис.22.15, а, б) является отображением прямой $|\Phi(j\omega)| = M$ на графике $|\Phi(j\omega)|$ как функции ω (рис. 22.14).

Для определения показателя колебательности системы на комплексной плоскости строятся окружности для различных значений M . Затем строится АФЧХ разомкнутой системы и определяется, какой из окружностей она касается. На основании этого делается заключение о величине M .

При проектировании систем требования к запасу устойчивости систем могут ставиться в виде максимально допустимого показателя колебательности $M_{\max}$. Данные требования считаются выполненными тогда,

когда АФЧХ разомкнутой системы не заходит в так называемую запретную область, ограниченную окружностью, построенной для данного показателя. На рис. 22.16,а запретная область заштрихована.

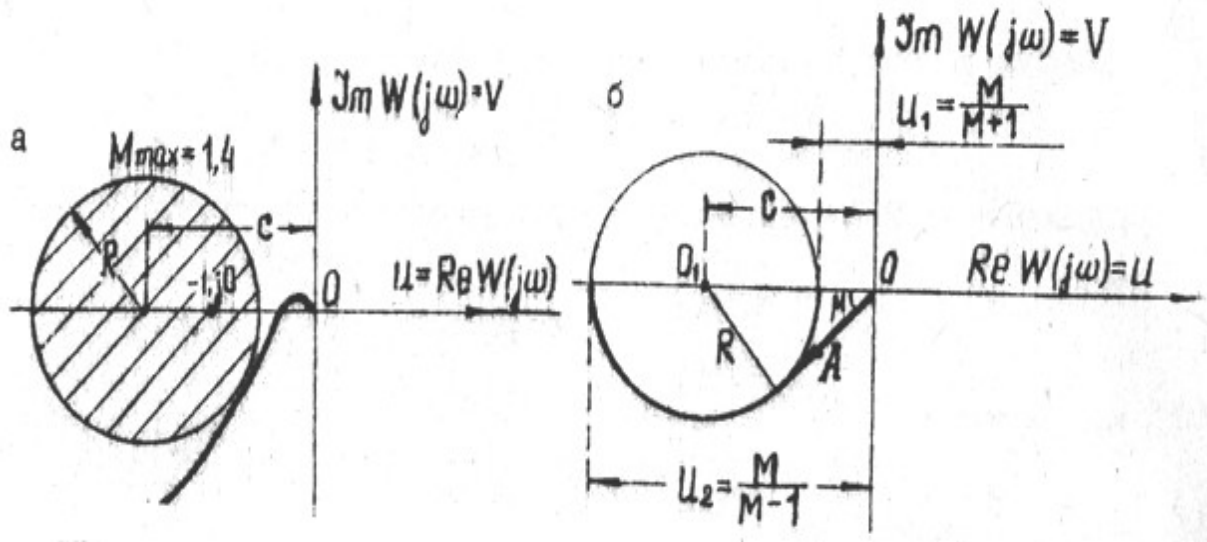


Рис. 22.16. Запретная область для АФЧХ.

Поскольку одной из удобных форм графического представления частотных характеристик являются логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ), рассмотрим построение запретной области в этом случае. Предварительно получим так называемые μ – кривые, представляющие собой зависимость величины $20 \lg A$ в децибелах, где A вектор, конец которого лежит на нижней полуокружности для рассматриваемого показателя M , от величины угла μ (см. рис. 22.16,б) следует, что

$$\cos \mu = \frac{A^2 + C^2 - R^2}{2AC} . \quad (22.76)$$

Так как

$$C^2 - R^2 = \left(\frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 - \left(\frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 = \frac{M^2}{M^2 - 1} = C , \quad (22.77)$$

то уравнение (22.4.30) можно переписать в виде

$$\mu = \arccos \frac{A^2 + C}{2AC} . \quad (22.78)$$

Задаваясь различными значениями A от $\frac{M}{M+1}$ до $\frac{M}{M-1}$ при $C=const$ и $M=const$, можно получить значения μ и $20\lg A$ построить так называемые μ – кривые, показанные на рис. 22.17 .

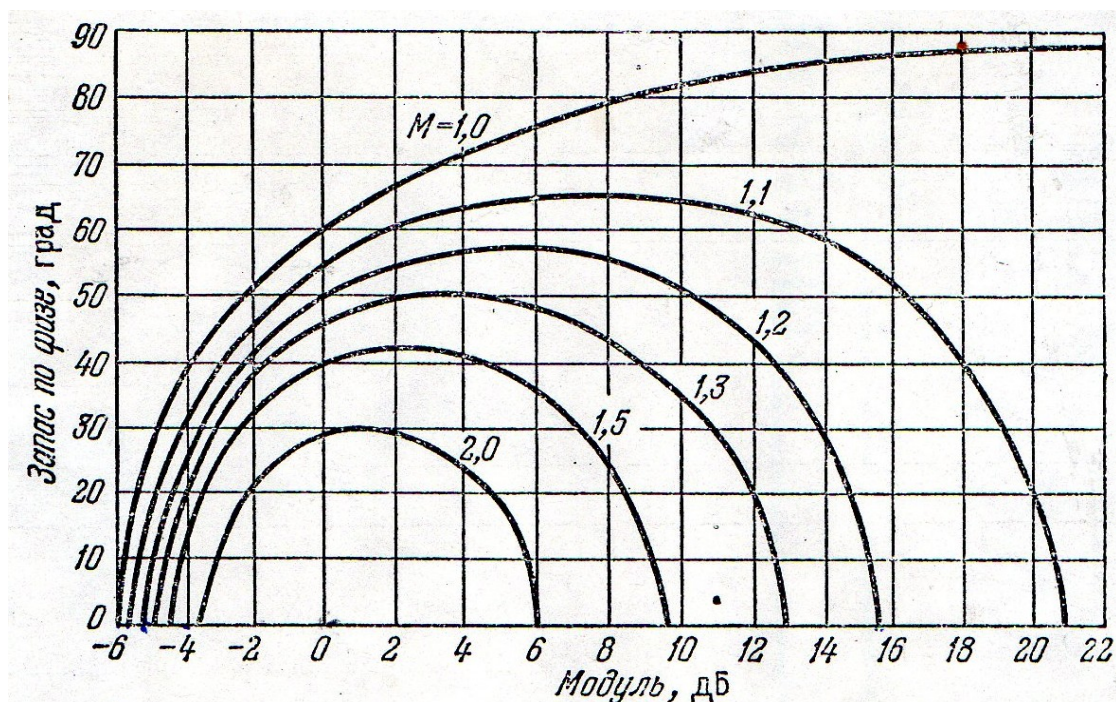


Рис. 22.17. – Кривые для различных значений M

Определение того, удовлетворяет ли система требуемому показателю колебательности, осуществляется следующим образом. Строится ЛЧХ системы (рис. 22.18,б).

Затем в тех же масштабах, что и ЛАХ и ЛФХ строится μ – кривая (рис. 22.18,б кривая). Далее величина μ для различных значений $20\lg A$ откладывается от оси абсцисс для тех же значений ЛАХ системы $L(\omega) = 20\lg A$. Ход построения запретной области показан с помощью стрелок на рис. 22.18, б. На рис. 22.18,а тот же случай, что и на рис. 22.18,б представлен на комплексной плоскости для АФЧХ системы.

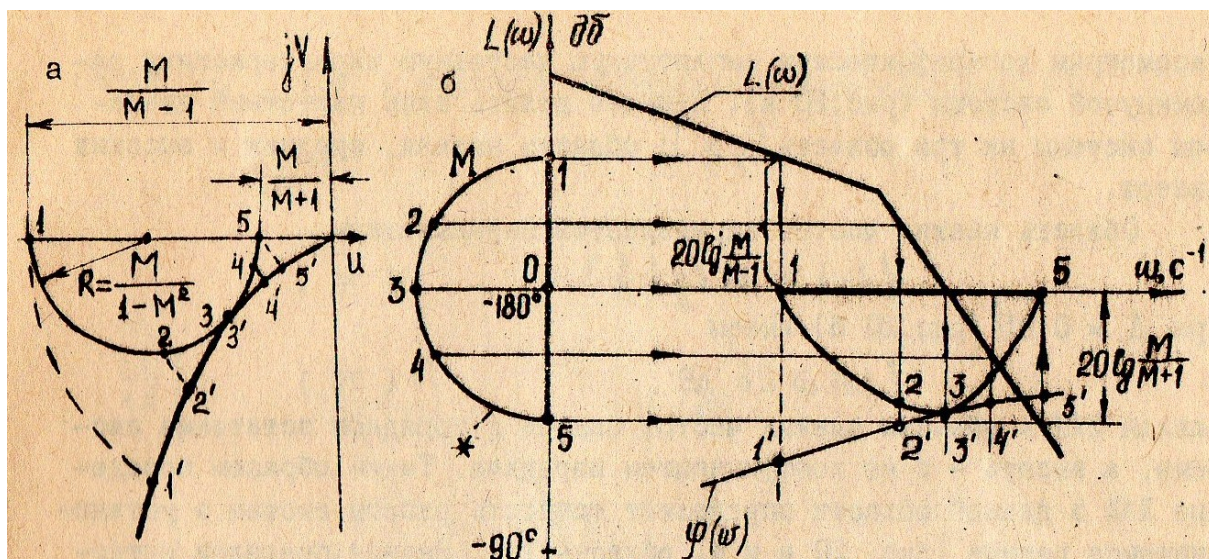


Рис. 22.18. Построение запретной области для ЛЧХ

22.5. Определение связи между частотными и временными характеристиками

Известно, что временные и частотные характеристики связаны преобразованием Фурье. Это позволяет при наличии временной характеристики системы получить ее частотную характеристику и наоборот. Относительно временных и частотных показателей качества можно сказать, что точной аналитической связи между ними в общем случае не существует. Однако полученные приближенные зависимости позволяют с достаточной для инженера точностью оценивать переходную функцию по известной частотной характеристике и наоборот.

Рассмотрим логарифмическую амплитудную частотную характеристику разомкнутой системы (рис. 19,а). Принято делить весь частотный диапазон системы на три области [1,2]: область низких, средних и высоких частот.

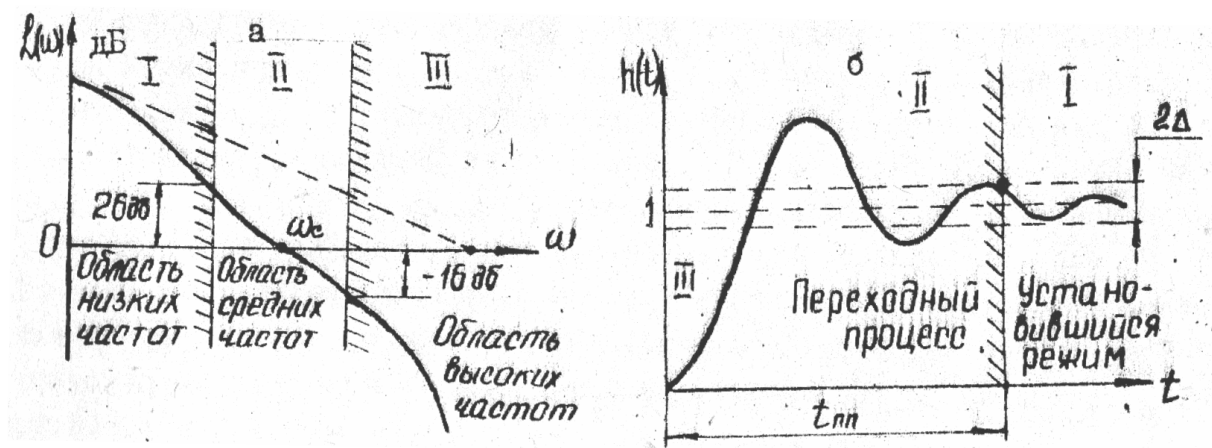


Рис. 22.19. ЛАЧХ и переходная функция системы

Область низких частот определяется неравенством

$$L(\omega) \geq 20 \lg \left(\frac{1}{\Delta} \right). \quad (22.79)$$

При $\Delta = 0,05$ (рис. 20 б) имеем

$$L(\omega) \geq 26 \text{ дБ} \quad (22.80)$$

Наклон ЛАХ в области низких частот связан с порядком астатизма системы, а высота – с ее коэффициентом передачи. Таким образом, поведение ЛАХ в данной области определяет точность работы систем установившемся режиме (рис. 22.19, а и б, область I). Знание пределов интервала низких частот задающих воздействий, которые воспроизводятся системой без существенных искажений.

Поведение частотных характеристик в области средних частот определяет собой устойчивость систем, а также их запас устойчивости и быстродействия. Во временной области данные качества связаны с поведением систем в переходных процессах (рис. 22.19, а и б, область II).

Поведение ЛАХ в области высоких частот соответствует характеру кривой переходного процесса в начальный период (рис. 22.19, а и б, область III). Вместе с тем данный частотный интервал – это интервал частотного спектра шумов, действующих на систему, а также интервал так называемых

малых параметров, пренебрежение которыми при анализе не оказывает существенного влияния на точность результатов исследования.

Рассмотрим связь между частотными и временными показателями качества на примере системы второго порядка, показанной на рис. 22.2.

Величина первого максимума $y_{\max}$ переходной характеристики (рис. 22.20) зависит от параметра затухания ξ также, как и показатель колебательности M . Данные зависимости представлены на рис. 22.20.

Для системы второго порядка это точные зависимости. Отсюда следует, что если известна величина $y_{\max}$, можно воспользоваться кривыми на рис. 22.20 для определения соответствующего значения ξ , по которому затем можно найти величину M . Подобным же образом определяется и величина $y_{\max}$ по известному значению M .

Из рис. 22.20 следует, что чем больше $y_{\max}$, тем больше M . Иными словами, большая колебательность системы в переходном процессе обусловлена ее резонансными свойствами, которые находят отражение в величине модуля частотной передаточной функции $|\Phi(j\omega)|$ на частоте резонанса ω_p , т.е. величина колебательности M .

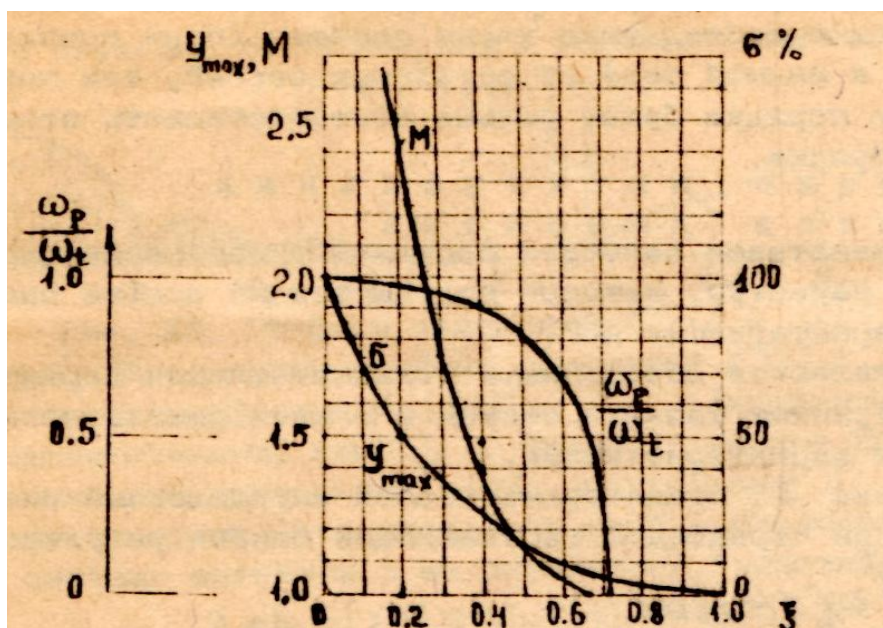


Рис. 22.20. Связь частотных и временных показателей

На рис. 22.20 дана взаимосвязь перерегулирования σ и показателя колебательности M . Этот график может оказаться полезным, когда известна одна из величин и необходимо определить другую.

Другой важной взаимосвязью частотных и временных характеристик является зависимость между частотой резонанса ω_p и частотой колебаний переходного процесса ω_t .

Так как

$$\omega_t = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n \quad (22.81)$$

$$\omega_p = \sqrt{1 - 2\xi^2} \omega_n \quad (22.82)$$

$$\text{То } \frac{\omega_p}{\omega_t} = \frac{\sqrt{1 - 2\xi^2}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (22.83)$$

График, соответствующий (22.83) показан на рис. 22.20. Зная, например, ω_p , можно найти величину ω_t , а используя выражение (22.81) и связь между временем переходного процесса $t_{\text{пп}}$ и ω_n (22.23), найти величину $t_{\text{пп}}$. или наоборот, зная $t_{\text{пп}}$ определить ω_p .

Применение рассмотренных связей между частотными и временными показателями качества для системы второго порядка позволяет при наличии сведений об одной из характеристик (частотной или временной) получить информацию о другой из них. В экспериментальных исследованиях это оказывается полезным, когда одна характеристика может быть получена, а другая нет.

Вместе с тем указанные зависимости распространяются и на системы более высоких порядков. Результаты при этом не будут настолько точны, однако могут оказаться вполне удовлетворительными с инженерной точки зрения. Здесь полезно вспомнить замечание о корнях характеристического уравнения системы: чем больше будут отличаться преобладающие корни системы (пара комплексных корней, ближайших к мнимой оси) от остальных

корней, тем поведение системы высокого порядка будет больше соответствовать поведению системы второго порядка.

22.6. Интегральные показатели качества

Особую группу показателей составляют интегральные критерии качества, получаемые на основе переходных процессов систем.

Данные показатели, являясь интегралами от различных выражений для ошибки регулирования, позволяют решать аналитически задачи нахождения оптимальных параметров систем.

Для систем с переходными процессами без перерегулирования используется интегральная оценка

$$J_0 = \int_0^T x(t) dt \quad (22.85)$$

В выражении (22.6.1) T принимается равной бесконечности или равной времени переходного процесса системы.

Интеграл равен площади под кривой переходного процесса по ошибке от задающего воздействия (рис. 22.21,а).

Чем меньше интеграл, тем время переходного процесса меньше, т.е. тем большим быстродействием обладает система.

Использование данной оценки для колебательных процессов не дает верного представления о качестве работы систем, так как суммируются положительные и отрицательные площади.

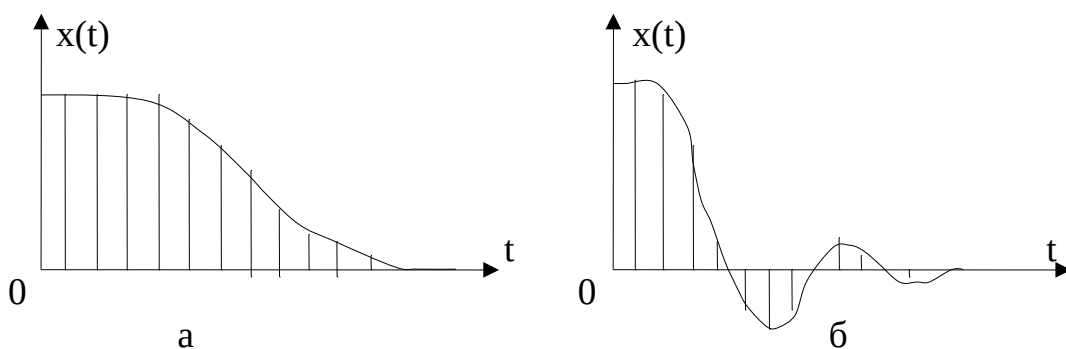


Рис. 22.21. Переходные процессы системы по ошибке при монотонном (а) и колебательном (б) переходных процессах

В этом случае используют квадратичную интегральную оценку

$$J_1 = \int_0^T x^2(t) dt \quad (22.86)$$

либо интеграл от абсолютного значения ошибки

$$J_2 = \int_0^T |x(t)| dt \quad (22.86)$$

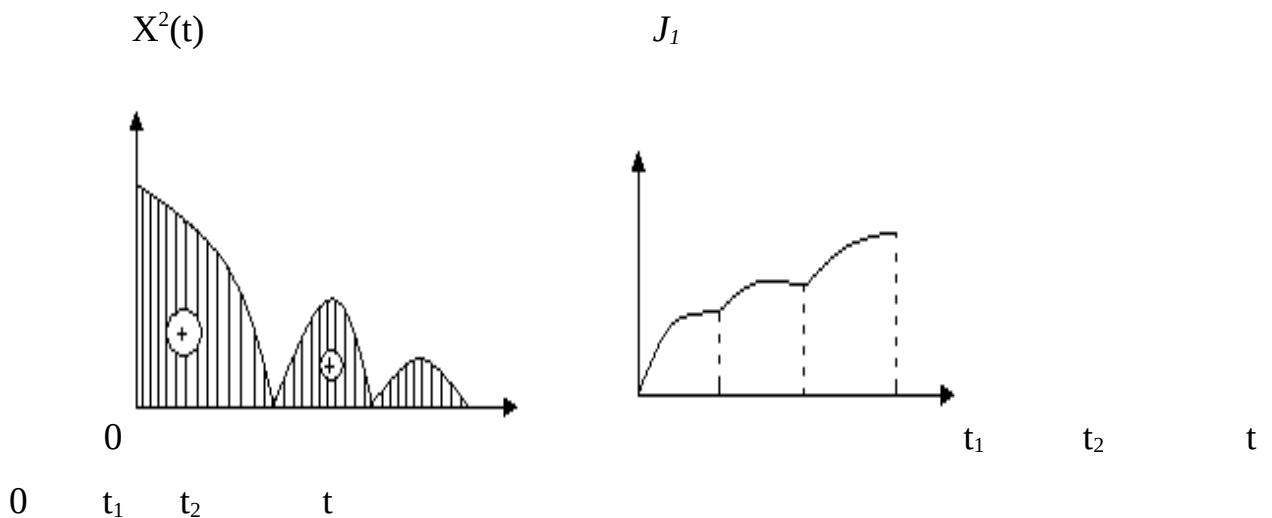


Рис. 22.22. Графики изменения $x^2(t)$ и J_1

На рис. 22.22 показаны графики изменения $x^2(t)$ и J_1 . Подобный вид будут иметь графики для $|x(t)|$ и J_2 .

Использование J_1 позволяет производить аналитические расчеты, что невозможно при J_2 . Однако в случае использования для исследования вычислительных машин определение J_2 не составляет труда.

Важно отметить, что поскольку ошибка является функцией действующих на систему сигналов и ее параметров (собственных свойств), то любая интегральная оценка

$$J = \int_0^T F[x(t), g(t), f(t), y(t), t] dt \quad (22.87)$$

где F – функция ошибки, задающего и возмущающего воздействий, регулируемой величины и времени.

Из двух систем, оцениваемых с помощью одного интегрального критерия J , лучше та, которая имеет меньшую величину J . При синтезе систем стремятся так выбрать параметры системы, чтобы величина J была минимальна. Решению задачи минимизация интегрального критерия J за счет выбора параметров системы посвящена теория оптимальных систем, находящая широкое применение при синтезе современных систем управления.

Кроме перечисленных, находят применение и другие интегральные оценки. Так для того, чтобы уменьшить вклад в величину J ошибки на начальной стадии переходного процесса используют критерий

$$J_3 = \int_0^T |x(t)| dt \quad (22.88)$$

или критерий

$$J_4 = \int_0^T t x^2(t) dt . \quad (22.89)$$

Рассмотрим примеры использования интегральных критериев при решении задач анализа и синтеза АСР.

Пусть дана система, сигнальный граф которой показан на рис. 22.6.3

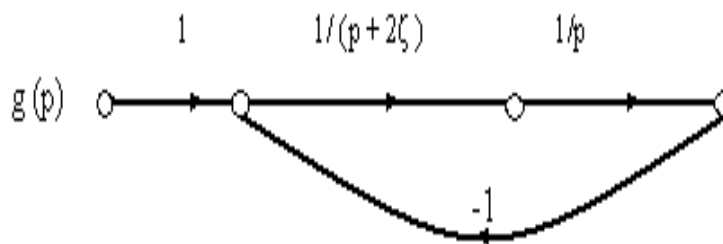


Рис.22.23. Сигнальный граф системы

Передаточная функция системы

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2 + 2\zeta p + 1} , \quad (22.90)$$

а ее собственная частота $\omega_n = 1$.

На рис. 22.24 показаны графики для интегральных критериев J_1 , J_3 и J_4 в зависимости от значений ζ .

Наибольшей чувствительностью к параметру затухания ζ обладает интегральный критерий J_3 . Величина ζ , выбранная на основе критерия J_3 равна 0,7, чему соответствует перерегулирование $\sigma = 5\%$

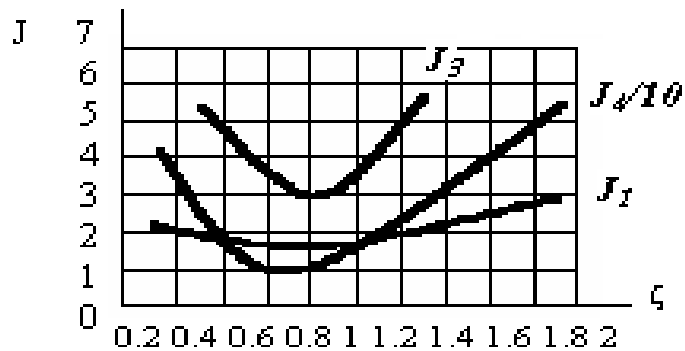
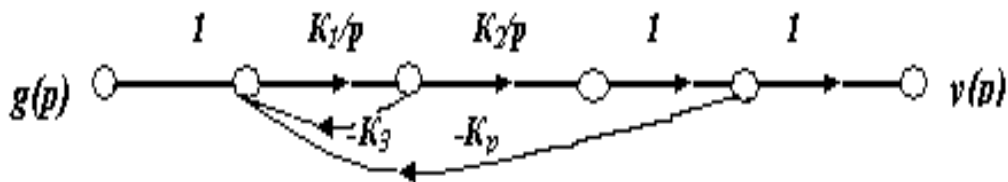


Рис. 22.24. Значения J_1 , J_2 , J_3 для систем 2-го порядка.

Сигнальный граф другой системы показан на рис. 22.6.5 .

Рис. 22.25. Сигнальный граф системы.



Необходимо выбрать величину K_3 , чтобы минимизировать влияние возмущения $f(p)$ на $y(p)$. Определим передаточную функцию системы по возмущению. Она будет равна: в соответствии с формулой Мэсона :

$$\Phi_f(p) = \frac{1(1 + K_1 K_3 p^{-1})}{1 + K_1 K_3 p^{-1} + K_1 K_2 K_p p^{-2}} = \frac{p(p + K_1 K_3)}{p^2 + K_1 K_3 p + K_1 K_2 K_p} . \quad (22.91)$$

Пусть для определенности $K_1 = 0,5$ и $K_1 K_2 K_p = 2,5$. Тогда собственная частота объекта $\omega_n = \sqrt{2,5} / 2\pi = 0,25$ гц. Выберем для оценки качества системы интегральный критерий J_1 . Для единичного ступенчатого возмущающего

воздействия $g(t) = 1(t)$ минимальное значение J_1 может быть найдено аналитически.

Для определения $J_1 = J_{\min}$ запишем выражение для $y(t)$:

$$y(t) = \frac{\sqrt{10}}{\beta} \left[e^{-0.25K_3 t} \sin\left(\frac{\beta}{2} t + \psi\right) \right], \quad (22.92)$$

$$\text{где } \beta = K_3 \sqrt{K_3^2 / 8 - 5}$$

Возведя $y(t)$ в квадрат и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\infty} \frac{10}{\beta^2} e^{-0.5K_3 t} \sin^2\left(\frac{\beta}{2} t + \psi\right) dt = \int_0^{\infty} \frac{10}{\beta^2} e^{-0.5K_3 t} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\beta t + 2\psi) \right] dt \\ &= (1/K_3 + 0.1K_3) \end{aligned} \quad (22.93)$$

Дифференцируя J_1 по K_3 и приравнявая производную нулю получим:

$$\frac{dJ_1}{dK_3} = -K_3^{-2} + 0.1 = 0 \quad (22.94)$$

Отсюда $J_1 = J_{\min}$ при $K_3 = \sqrt{10} \cong 3.2$. Эта величина K_3 соответствует $\zeta = 0,5$.

Важно отметить, что использование критерия J_1 позволяет решить рассмотренную задачу оптимизации аналитически, в то же время как при использовании критериев J_2 и J_3 можно использовать лишь численные методы оптимизации.

Подводя итог сказанному, следует подчеркнуть, что интегральные критерии характеризуют качество работы системы в целом, так как находятся не по отдельным показателям, а по всему переходному процессу. Это определяет собой второй смысл термина «интегральный».

Недостатками интегральных оценок являются невозможность получения прямых показателей качества и высокая сложность вычислительных процедур. Достоинство – это возможность выразить интегральные оценки как функции параметров системы и, воспользовавшись известными методами поиска экстремума, определить значения этих

параметров, дающие минимум избранной оценке. Именно это и послужило развитию аналитических методов синтеза систем автоматического управления, основанных на минимизации квадратичных интегральных оценок.

В заключении приведем сводную таблицу качеств систем и их показателей, рассмотренных в данных методических указаниях.

Таблица 22.1

Качества системы	Методы исследования		
	временной	частотный	корневой
Точность	$X_{уст}$ - ошибка в установившемся режиме	X_{max} - амплитуда ошибки в установившемся режиме гармонических колебаний	
Быстродействие	$t_{пп}$ - время переходного процесса, t_r - время разгона t_m - время первого максимума	ω_p - частота резонанса ω_c - частота среза ω_n - частота пропускания	η - степень устойчивости
Запас устойчивости	σ - перерегулирование ψ - затухание N - число колебаний	ϕ_3 - запас по фазе L_1 и L_2 - запас по модулю M - показатель колебательности	μ - колебательность

23. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИКИ В ИССЛЕДОВАНИЯХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

23.1 Функции комплексного переменного

Исследование процессов в системах автоматического управления как процессов передачи информации приводит к необходимости количественно описывать два видимых (качественных) изменения информации при прохождении через звенья системы: изменение величины сигналов и их задержку в силу инерционности элементов.

Совместное описание этих изменений требует адекватного математического аппарата, которым являются функции комплексного переменного. Комплексного - значит сложного, позволяющего отразить одновременно два указанных изменения.

Понятие комплексный связано с мнимой единицей: $\sqrt{-1}$, которая для удобства восприятия и компактности обозначается через j , т.е. $j = \sqrt{-1}$. Введенное обозначение требует запомнить как и необходимые в дальнейших математических выкладках отношения:

$$j = \sqrt{-1} ;$$

$$j^2 = -1;$$

$$j^3 = -j ;$$

$$j^4 = 1 .$$

Представить физический аналог для j не представляется возможным.

Остается вспомнить слова академика Французской академии Анри Пуанкаре о математике:

«Математика дает возможность получать конкретные результаты и этому надо радоваться. Почему? Это никому не известно».

«..получать конкретные результаты..» - это то, что должно вполне удовлетворить инженера, исследующего процессы в системах управления.

Существует две формы записи комплексных чисел: в декартовой и полярной системах координат:

$$z = x + jy \text{ (декартовая)} \quad \text{и} \quad z = A e^{j\varphi} \text{ (полярная),}$$

чему соответствуют соответствующие изображения комплексных чисел на комплексной плоскости

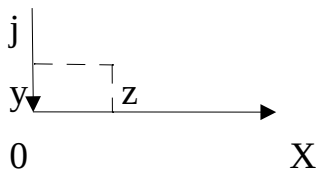


Рис. 23.1. Комплексная плоскость: $x = \text{Im } z$ - вещественная часть комплексного числа z , $y = \text{Re } z$ - мнимая часть комплексного числа z ;

и в полярной системе координат (рис.23.2)

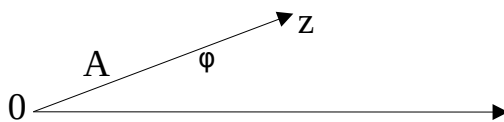


Рис. 23.2. Полярная система координат: A – модуль (величина вектора z), а φ – аргумент комплексного числа z (угол, характеризующий направление вектора z)

Две формы представления комплексных чисел связаны с выбором той или иной их формы при расчетах.

Сложение (вычитание) комплексных чисел проводится в декартовой форме, а умножение (деление) в полярной форме записи.

Так, имеем $z_1 = x_1 + j y_1$, $z_2 = x_2 + j y_2$, $z = z_1 + z_2 = x_1 + j y_1 + x_2 + j y_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) = x + jy$, и результат сложения имеет форму отображаемую в декартовой системе координат.

В другом случае

$$z_1 = A_1 e^{j\varphi_1} * A_2 e^{j\varphi_2} / A_3 e^{j\varphi_3} = \frac{A_1 A_2}{A_3} e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)} = A e^{j\varphi}$$

результат отображается в полярной системе координат.

Из сделанного видно, что только применение разных форм к разным арифметическим операциям позволяет приводить результаты к компактным формам, однозначно отображаемым на графиках.

В случае нахождения j в знаменателе домножают и числитель и знаменатель на комплексно сопряженное знаменателю выражение, приводя результат к исходной, отображаемой на графике декартовой системы координат форме.

$$\text{Так, имеем } Z = \frac{k}{x+jy} = \frac{k}{(x+jy)(x-jy)} = \frac{kx}{x^2+y^2} - j \frac{ky}{x^2+y^2} = X - jY,$$

$$\text{где } X = \operatorname{Re} z = \frac{kx}{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad Y = \operatorname{Im} z = \frac{ky}{x^2+y^2}.$$

Параметры вектора z в декартовой системе координат однозначно связаны с параметрами полярной системы (рис. 23.3)

$$A = \sqrt{X^2+Y^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{Y}{X}$$

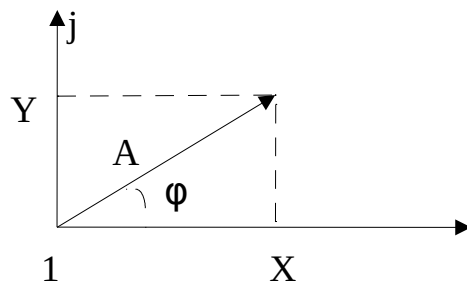


Рис. 23.3. Комплексная плоскость, совмещенная с полярной системой координат

В литературе можно встретиться со следующими обозначениями

$$A = \operatorname{mod} z = |z|, \quad \varphi = \arg z, \quad z = |z| e^{j \arg z}.$$

Наряду с комплексными числами существуют и комплексные функции. Эти функции представляют собой набор значений комплексных чисел, графически представляемых на комплексной плоскости в виде точек, соединенных линиями.

Примером такой функции является

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}.$$

(23.1)

Здесь ω независимый аргумент, $W(j\omega)$ функция аргумента ω . j лишь подчеркивает комплексный характер функции.

Рассмотрим построение такой функции в различных системах координат.

Для декартовой системы получим

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = \frac{k(Tj\omega - 1)}{(Tj\omega + 1)(Tj\omega - 1)} = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} - j\frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1} \quad (23.2)$$

Введем обозначения

$U(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$, где $U(\omega)$ – вещественная часть функции $W(j\omega)$,

$V(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$, где $V(\omega)$ – мнимая часть функции $W(j\omega)$.

В рассматриваемом случае

$$U(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}, \quad V(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}$$

Для полярной системы координат (экспоненциальная форма записи)

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = |W(j\omega)| e^{arg W(j\omega)} = \frac{k e^{j0}}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1} e^{j \tan^{-1} \omega T}} = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} e^{-j \tan^{-1} \omega T}, \quad (23.3)$$

$|W(j\omega)| = A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$ - функция носит название амплитудно-частотной характеристики,

$arg W(j\omega) = \phi(\omega) = -\tan^{-1} \omega T$ - функция носит название фазочастотной характеристики.

То, что в качестве аргумента функции берется частота, связано с частотными методами исследования систем, рассмотренных в ...

В отличие от $U(\omega)$ и $V(\omega)$, $A(\omega)$ и $\phi(\omega)$ имеют конкретный физический смысл, рассмотренный в ч1,15, и потому наиболее часто используются в расчетах.

Графики для $W(j\omega)$ строятся при ω меняющемся от 0 до ∞ . При этом направление построения графика отмечается стрелками, как показано на рис. Данные графики носят название амплитудно-фазочастотных характеристик – АФЧХ.

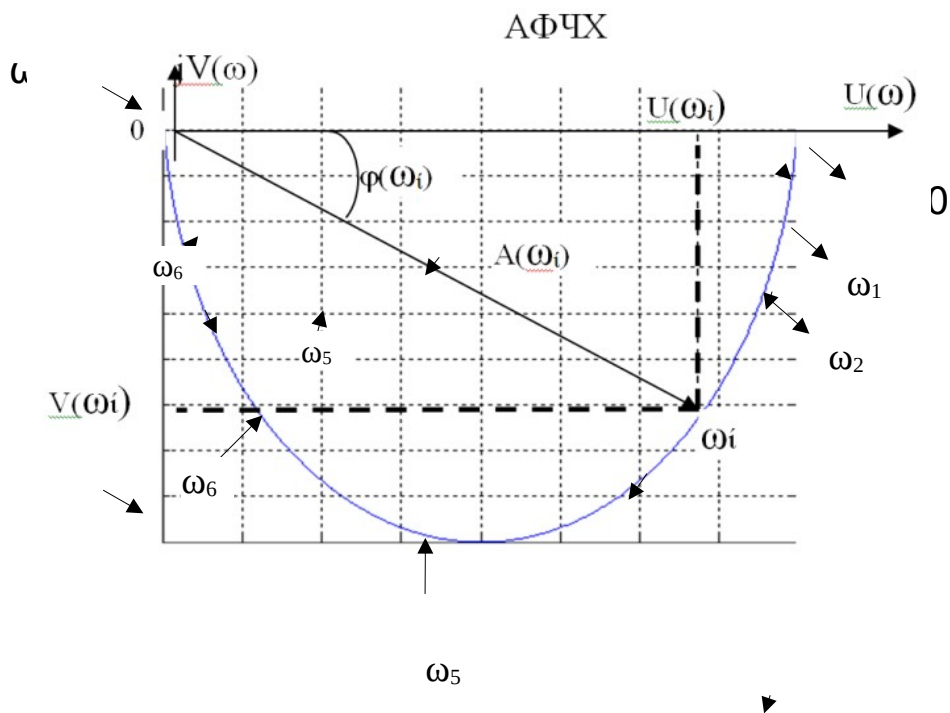


Рис. 23.4. Амплитудно-фазочастотная характеристика – АФЧХ.

23.2 Построение логарифмических частотных характеристик

Рассмотрим передаточную функцию в стандартном виде

$$W(p) = \frac{k(T_2 p + 1)(T_4 p + 1) \dots}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1) \dots}, \quad (23.4)$$

где $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$.

Перейдем к соответствующей частотной передаточной функции, используя формальную замену p на $j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{k(T_2 j\omega + 1)(T_4 j\omega + 1) \dots}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1) \dots} \quad (23.5)$$

Найдем модуль данной функции

$$|W| = \frac{k \frac{j\omega}{\omega \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} \frac{\sqrt{T_4^2 \omega^2 + 1}}{\sqrt{T_3^2 \omega^2 + 1}}}{\omega \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}} \quad (23.6)$$

и фазовую частотную функцию

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= -90^\circ - \tan^{-1} \omega T_1 + \tan^{-1} \omega T_2 - \tan^{-1} \omega T_3 + \tan^{-1} \omega T_4 \\ \varphi(\omega) &= -90^\circ - \tan^{-1} \omega T_1 + \tan^{-1} \omega T_2 - \tan^{-1} \omega T_3 + \tan^{-1} \omega T_4 \end{aligned} \quad (23.7)$$

Запишем выражение для логарифмической амплитудной характеристики

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} + 20 \lg \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_3^2 \omega^2 + 1} + \dots + 20 \lg \sqrt{T_4^2 \omega^2 + 1} + \dots \quad (23.8)$$

Графики $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ строятся в логарифмическом масштабе.

Вспомним, например, что диапазон частот, на который реагируют наши органы слуха, составляет 5 Гц – 20 кГц.

При построении частотных графиков возникает проблема необходимости с одинаковой наглядностью и детализацией получать графики на разных диапазонах частот. Обычно диапазон рабочих частот элемента или системы разбивают на поддиапазоны: поддиапазоны низких, средних и высоких частот.

Если вы представите себе эквалайзер (устройство регулировки тембра звуковых частот), то в нем как раз и реализован логарифмический диапазон частот.

Очевидно, что подбирая масштаб графиков для низких частот, например, один сантиметр по оси абсцисс соответствовал бы диапазону в 10гц, где оказался бы график при частотах в 10- 20 кгц? И наоборот: что увидели мы на низких частотах, если бы в одном сантиметре помещалось бы 5 кгц? Что представляет собой логарифмический масштаб?

При использовании логарифмического масштаба получаем (табл. 23. 1).

Таблица 23.1

ω	0.1	1	10	100	1000	10000	100000
$\lg \omega$	-1	0	1	2	3	4	5

Логарифмический масштаб частот – линеен. На графиках по оси абсцисс показываются не логарифмы частот, а сами частоты, соответствующие их логарифмам как показано на рис.23.5.

При различии двух частот в 10 раз говорят, что они разнятся на декаду, а при различии в два раза – на октаву.

Величины $L(\omega)$ берутся в децибелах, что также берет начало в акустике. Величина один бел – относительная величина, как кратность («трёхкратное отличие») или [проценты](#), предназначенная для измерения отношения двух величин, рассматривается как логарифм отношения двух мощностей акустического сигнала, одна из которых в десять раз больше другой: $1Б = \lg(P_2 / P_1)$, где $P_2 = 10 P_1$

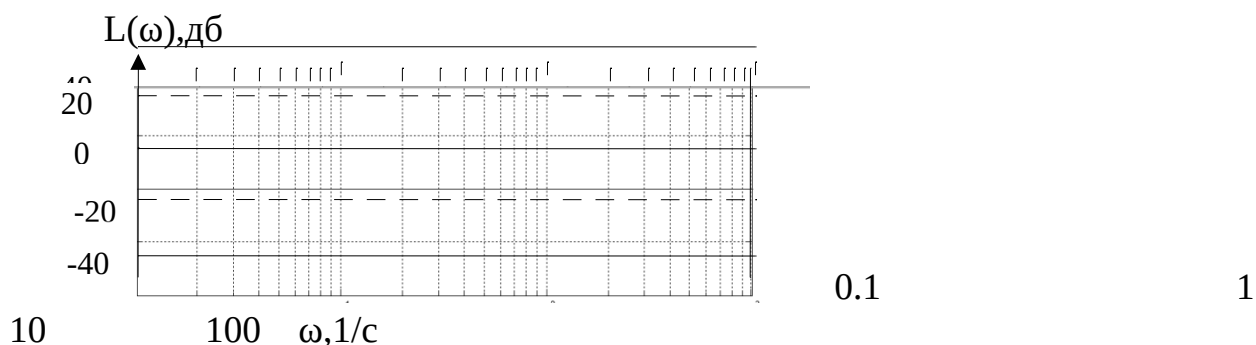


Рис. 23.5. Оси для построения логарифмических частотных характеристик

Бел не входит в систему единиц [СИ](#). Для одноименных энергетических величин, например, мощности и энергии или „силовых“ — напряжения и силы тока бел определяется как «логарифмическая величина (десятичный логарифм безразмерного отношения физической величины к одноименной физической величине, принимаемой за исходную). Так, например, для силы тока имеем $1\text{Б} = \lg(I_2^2 R / I_1^2 R) = 2 \lg(I_2 / I_1)$. На практике используют дольные единицы бела — децибелы: $1\text{б} = 10\text{дб}$. В этом случае имеем выражение $20 \lg(I_2 / I_1)$ в децибелах. В теории автоматического регулирования децибелы используются для оценки преобразования входных сигналов в выходные по величине.

Из выражения (23.8) следует, что $L(\omega)$ состоит из слагаемых. Рассмотрим каждое из них

$$L_1(\omega) = 20 \lg k.$$

График этого слагаемого — прямая, параллельная оси ω .

$$L_2(\omega) = -20 \lg \omega.$$

Что представляет собой график, в логарифмической системе координат?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим две точки этого графика при ω_1 и $\omega_2 = 10 \omega_1$, т.е. при частотах, отличающихся на декаду, и найдем разницу значений $\Delta L(\omega) = L(\omega_2) - L(\omega_1)$:

$$\begin{aligned} \Delta L(\omega) &= -20 \lg \omega_2 - (-20 \lg \omega_1) = -20 \lg 10 \omega_1 + 20 \lg \omega_1 = 20 \lg \omega_1 / 10 \omega_1 = \\ &= 20 \lg 0,1 = -20 \text{ дб} \end{aligned}$$

Можно заключить, что при разности частот на декаду значения выражения отличаются на 20дб.

Поскольку частоты заранее не оговаривались, это значит, что при любых значениях ω_1 и ω_2 , разнящихся на декаду, разница значений $L(\omega)$ будет одна и та же. Нетрудно догадаться, что это справедливо для прямой, наклон которой — 20 дб/декада (минус 20 децибел на декаду).

Иметь дело с прямой гораздо проще при построении графиков. Этот полезный результат был получен за счет использования логарифмического масштаба для оси частот.

Для построения прямой достаточно знать или две точки или точку и наклон прямой.

Зная наклон прямой, найдем одну точку, в качестве которой возьмем точку пересечения прямой с осью абсцисс. Тогда будем иметь

$$-20 \lg \omega = 0 \quad \text{и} \quad \omega = 1.$$

Так как значение частоты $\omega = 1$ не всегда попадает в рабочий диапазон частот системы, рассмотрим совместно два первых слагаемых выражения (23.8):

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega = 0$$

В этом случае $\omega = k$.

Рассмотрим далее слагаемое

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}, \quad \text{представив его для общего случая в виде}$$

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{T^2 \omega^2 + 1} \quad (23.9)$$

Определим к чему стремится график данной функции при малых и больших частотах.

Возьмем $\omega \ll 1/T$. Будем иметь $L(\omega) = -20 \lg 1 = 0$. Это прямая, проходящая по оси абсцисс.

При $\omega \gg 1/T$ имеем $L(\omega) = -20 \lg T\omega$, т.е. вновь получили уравнение прямой с наклоном 20дБ/декада, пересекающей ось нуля децибел при $\omega = 1/T$

Две данные прямые представляют собой асимптоты, начинающиеся от точки $\omega = 1/T$, как показано на рис.23.6.

Истинная характеристика, показанная на рис.23.6, отличается от асимптотической характеристики, т.е. составленной из асимптот, в худшем случае на 3дБ, что с практической точки зрения немного. При необходимости учесть разницу и сэкономить время на построение ряда логарифмических характеристик, можно поступить следующим образом: вырезать шаблон (рис.), представляющий собой разницу асимптотических и истинной

характеристик, строить при необходимости сначала асимптотическую характеристику и, пользуясь шаблоном – истинную.

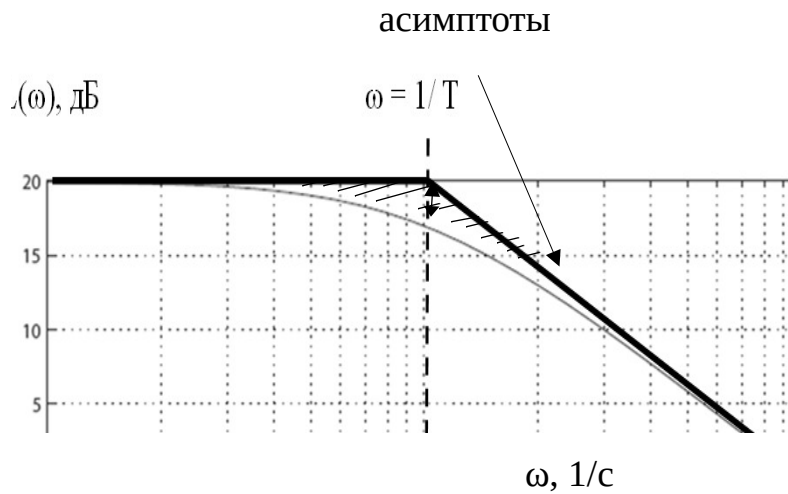


Рис. 23.6. Построение асимптотической ЛАЧХ.

Логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФЧХ), как следует из выражения (23.7), имеет одинаковые составляющие $\varphi(\omega) = \pm \tan^{-1} \omega T$

При $\omega \rightarrow 1/T$ имеем $\tan^{-1} \omega T = 45^\circ$

При $\omega \rightarrow 0$ $\tan^{-1} \omega T = 0^\circ$, при $\omega \rightarrow \infty$ $\tan^{-1} \omega T = 90^\circ$.

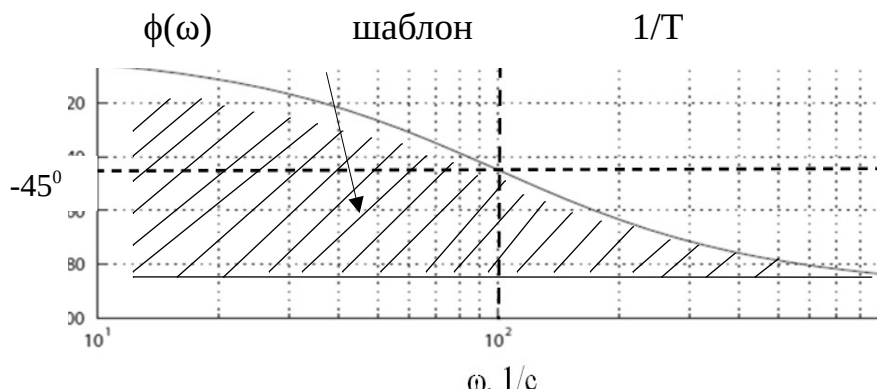


Рис. 23.7. Особенности графика $\tan^{-1} \omega T$.

На рис.23.7 показан график для $-\tan^{-1} \omega T$ и заштрихованный шаблон.

Для уменьшения времени построения $\varphi(\omega)$ и следовательно повышения производительности труда проектировщика систем необходимо сделать шаблон, показанный на рис. и всякий раз совмещая 45° с $\omega = 1/T$, учитывая знак, чертить кривую арктангенса.

Рассмотрим пример построения логарифмических характеристик для частотной передаточной функции

$$W(j\omega) = \frac{k(T_2 j\omega + 1)}{j\omega(T_1 j\omega + 1)} \quad (23.10)$$

Найдем ее модуль

$$|W| = \frac{k \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}}{\omega \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} \quad (23.11)$$

и логарифмическую амплитудную частотную характеристику

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} + 20 \lg \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}, \quad (23.12)$$

а также логарифмическую фазовую частотную характеристику

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \tan^{-1} \omega T_1 + \tan^{-1} \omega T_2 \quad (23.13)$$

На рис. показаны графики слагаемых $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, обозначенные номерами, в порядке записи в соответствующих выражениях и графики $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, выделенные жирной линией для $L(\omega)$ и маркерами для $\varphi(\omega)$.

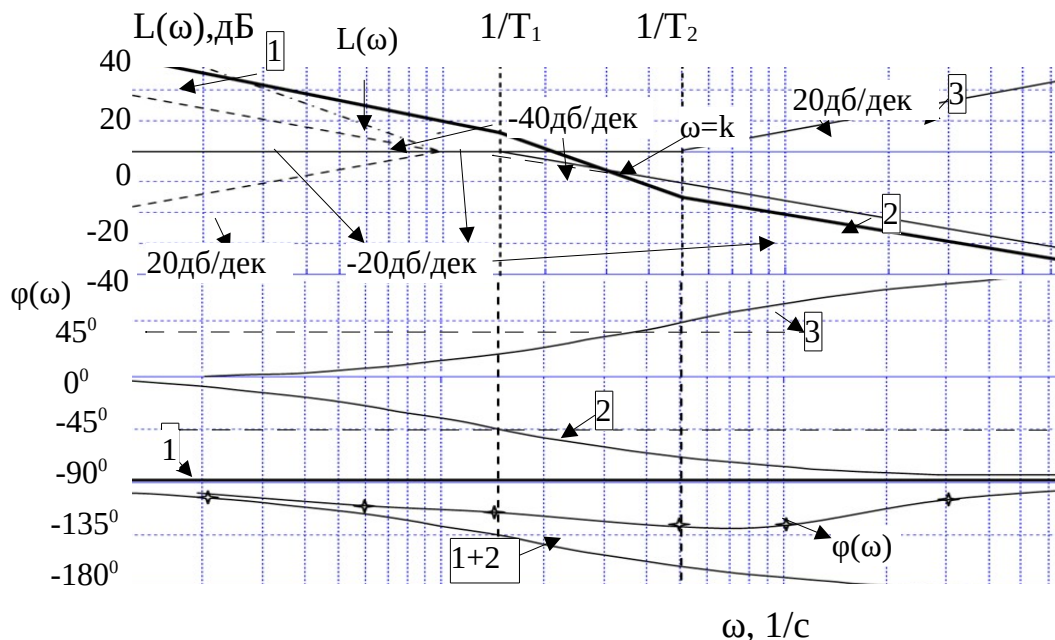


Рис. 23.8. Построение логарифмических частотных характеристик

Рассмотрев методы анализа свойств элементов и систем, следует подчеркнуть, что многое из рассмотренного и выводы были сделаны не на основе рассуждений, а на основе математических выводов.

По мнению физиолога Ивана Петровича Павлова «в любой науке настолько много науки, насколько много в ней математики».

В этом смысле теория автоматического управления – одна из подлинных наук.

Заключительной стадией данной теории является синтез систем.

На сегодня существуют разные методики синтеза систем. Остановимся только на двух из них. Одна – американская – корневые методы, и вторая русская – логарифмические частотные характеристики.

Первая предполагает наличие компьютеров, вторая – дает возможность рассуждать на природе, рисуя графики.

Поскольку я люблю природу, мне ближе вторая. Она позволяет одновременно обзирать и свойства отдельных элементов и влияние их на свойства систем.

При использовании годографов Михайлова это не удастся из-за отсутствия наглядности. При использовании корневых методов нужны дополнительные сведения о связи корней характеристического уравнения системы и временных характеристиках.

Библиографический список

1. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления. Спб.; Спб.; Профессия, 2003 - 752 с.
2. Ерофеев А.А. Теория систем автоматического управления. Учебник для вузов, СПб, Политехника, 2003г. 302стр.
3. Востриков А.С., Французова Г.А. Теория автоматического регулирования: Учебное пособие для вузов.- М.; Высшая школа, 2004. – 365 с.; ил.

Оглавление

В.Н. Леонтьев.....	1
АНАЛИЗ СИСТЕМ.....	1
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	1
Часть 2.....	1
Учебное пособие.....	1
Санкт-Петербург.....	1
19. Качество систем с обратной связью.....	3
19.1. Чувствительность АСР к вариациям параметров их элементов.....	6
19.2. Внешние возмущения в системах с обратной связью.....	9
19.3. Цена обратной связи.....	14
20. Принципы и законы управления.....	15
21. УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ.....	24
21.1. Необходимое и достаточное условие устойчивости систем.....	29
21.2. Необходимое условие устойчивости.....	31
21.3. Алгебраический критерий устойчивости Рауса – Гурвица.....	33
21.4. Критерий Михайлова.....	35
21.5. Критерий Найквиста.....	38
21.6. Преимущества и недостатки критериев устойчивости.....	46
Вопросы для самоконтроля.....	47
Рекомендации для ответов на вопросы.....	48
22. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РАБОТЫ СИСТЕМ.....	52
22.1. Временные показатели качества.....	56
22.2. Оценка точности работы систем.....	59
22.3. Корневые показатели качества.....	68
22.4. Частотные показатели качества.....	77
22.5. Определение связи между частотными и временными характеристиками.....	91
22.6. Интегральные показатели качества.....	95
23. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИКИ В ИССЛЕДОВАНИЯХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.....	101
23.1. Функции комплексного переменного.....	101
23.2. Построение логарифмических частотных характеристик.....	106
Библиографический список.....	112
1. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления. Спб.; СПб.; Профессия, 2003 - 752 с.	112
2. Ерофеев А.А. Теория систем автоматического управления. Учебник для вузов, СПб, Политехника, 2003г. 302стр.....	112
3. Востриков А.С., Французова Г.А. Теория автоматического регулирования: Учебное пособие для вузов.- М.; Высшая школа, 2004. – 365 с.; ил.....	112

Оглавление.....	113
-----------------	-----