

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Д. А. Ковалёв, В. А. Шаряков, О. Л. Шарякова

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2020

УДК 62-5(075)
ББК 32.965я7
К560

Ковалёв Д.А., Шаряков В.А., Шарякова О.Л. Теория автоматического управления: учебное пособие / ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2020. – 79 с.

В учебном пособии изложены основы теории автоматического управления: построение, методы математического описания, анализа устойчивости, оценки качества линейных систем автоматического управления.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения по направлению подготовки 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств».

Рецензенты:

зав. кафедрой «Автоматизация процессов химической промышленности» ФГБОУВО «Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технологический университет)», д-р. техн. наук, профессор Русинов Л.А.;

профессор кафедры ИИТСУ ВШТЭ СПбГУПТД, д-р. техн. наук, профессор Кондрашкова Г.А.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна в качестве учебного пособия.

©Высшая школа технологии и энергетики
СПбГУПТД, 2020
© Ковалев Д.А., Шаряков В.А.,
Шарякова О.Л., 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	5
1.1. Основные понятия и определения автоматических систем	5
1.2. Классификация САУ	6
1.2.1. По виду воздействия	6
1.2.2. По цели управления	7
1.2.3. По способу формирования управляющего воздействия	7
1.3. Классификация автоматических систем по характеру внутренних динамических процессов.....	11
Вопросы для проверки.....	16
2. ТИПОВЫЕ ВХОДНЫЕ СИГНАЛЫ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА СВОЙСТВ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ	17
Вопросы для проверки.....	21
3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ.....	22
3.1. Аналитическая линеаризация.....	23
3.2. Графическая линеаризация.....	25
Вопросы для проверки.....	26
4. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА РАБОТЫ СИСТЕМ.....	27
4.1. Временные показатели качества	27
4.2. Частотные показатели качества работы систем	29
Вопросы для проверки.....	32
5. ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ, ИХ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ПЕРЕХОДНЫЕ ФУНКЦИИ.....	33
5.1. Основные типовые звенья.....	34
5.2. Характеристики основных типовых звеньев	37
5.2.1. Безынерционное звено	37
5.2.2. Аperiodическое звено первого порядка (инерционное звено)	39
5.2.3. Колебательное звено $0 < \xi < 1$	44
5.2.4. Консервативное звено $\xi = 1$	48
5.2.5. Аperiodическое звено II-го порядка $\xi \geq 1$	52

5.2.6. Интегрирующее звено.....	53
5.2.7. Дифференцирующее звено	56
Вопросы для проверки.....	59
6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ.....	60
6.1. Определение передаточной функции замкнутой системы по каналу управления	60
6.2. Определение передаточной функции замкнутой системы по каналу возмущения.....	61
6.3. Определение передаточной функции замкнутой системы по ошибке регулирования	62
Вопросы для проверки.....	62
7. ПОНЯТИЯ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ	63
7.1. Необходимое и достаточное условие устойчивости непрерывной системы управления (корневой критерий)	64
7.2. Оценка устойчивости непрерывной системы управления с использованием критерия Рауса-Гурвица (алгебраический критерий)	66
7.3. Частотные критерии устойчивости.....	68
7.3.1. Принцип аргумента	68
7.3.2. Оценка устойчивости непрерывной системы управления с использованием критерия Михайлова	70
7.3.3. Оценка устойчивости замкнутой непрерывной системы регулирования при известной передаточной функции разомкнутой системы с использованием критерия Найквиста	72
7.3.4. Оценка устойчивости непрерывной замкнутой системы управления по ЛЧХ разомкнутой системы	73
Вопросы для проверки.....	75
8. АСТАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	76
Вопросы для проверки.....	78
Список литературы	79

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Основные понятия и определения автоматических систем

Система управления – систематизированный (строго определённый) набор средств сбора сведений о подконтрольном объекте и средств воздействия на его поведение, предназначенный для достижения определённых целей. Объектом системы управления могут быть как технические объекты, так и люди. Объект системы управления может состоять из других объектов, которые могут иметь постоянную структуру взаимосвязей.

Объектом управления может быть любая динамическая система или её модель. Состояние объекта характеризуется некоторыми количественными величинами, изменяющимися во времени, то есть переменными состояниями. В естественных процессах в роли таких переменных может выступать температура, плотность определённого вещества в организме, курс ценных бумаг и так далее. Для технических объектов – это механические перемещения (угловые или линейные) и их скорость, электрические переменные, температуры и так далее. Анализ и синтез систем управления проводится методами специального раздела математики – теории управления.

Автоматическая система – это такая система, в которой производится измерение регулируемой переменной, а возможно, и некоторых возмущений, действующих на систему, и производится автоматическое воздействие на объект управления с целью обеспечения заданного закона изменения регулируемой переменной.

Протекание производственных процессов характеризуется переменными, которые называются параметрами производственных процессов. Чтобы производственные процессы протекали с высоким КПД и заданной производительностью, необходимо параметры поддерживать на заданном уровне или изменять по определённому закону.

В теории автоматического управления (ТАУ) принято изображать отдельные части систем в виде квадратиков, не интересуясь внутренним устройством отдельных блоков или узлов систем, а указывая лишь входы и выходы, переменные этих блоков и связи между ними (структурная схема).

В общем виде структурная схема системы автоматического управления (САУ) может быть представлена на рис. 1 [4].

Объект управления – это установка, где управляется какой-либо процесс.

Параметр, который поддерживается на определённом уровне или закономерно изменяется, называется управляемым (*регулируемым*).

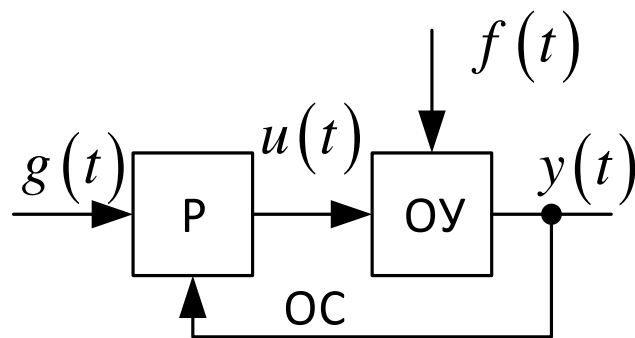


Рис. 1. Обобщенная структура САУ,

где ОУ – объект управления; ОС – обратная связь; Р – регулятор;
 $g(t)$ – задающее воздействие; $u(t)$ – управляющее воздействие;
 $f(t)$ – возмущающее воздействие; $y(t)$ – регулируемая (выходная) переменная.

Величины, отражающие внешние влияния на объект, называются *воздействиями* (рис. 2).

Существует понятие *заданного значения* регулируемой величины.

Измеренное значение регулируемой величины в данный момент времени называется *текущим значением* регулируемой величины.

Разность между заданным и текущим значением называется *ошибкой регулирования*.

Регулятор – устройство, которое на основе ошибки регулирования вычисляет управляющее воздействие.

Устройство, предназначенное для перемещения регулирующего органа, называется *исполнительным механизмом*.

1.2. Классификация САУ

1.2.1. По виду воздействия

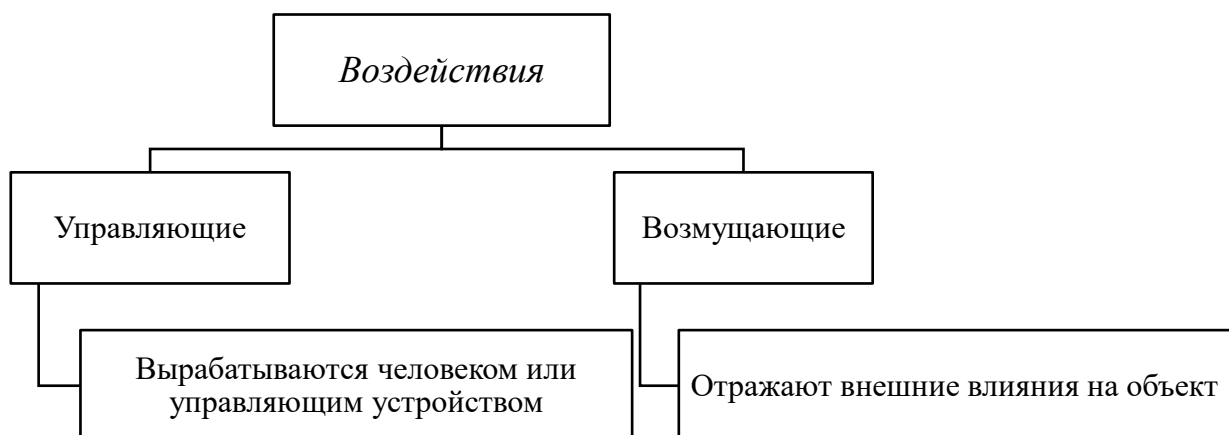


Рис. 2. Виды воздействий

Регулирующий орган – устройство, предназначенное для воздействия непосредственно на параметры объекта.

Устройство для измерения регулируемой величины называется *чувствительным элементом*.

Регулирование – частный случай автоматического управления.

1.2.2. По цели управления

По цели управления автоматические системы можно разделить (рис. 3):

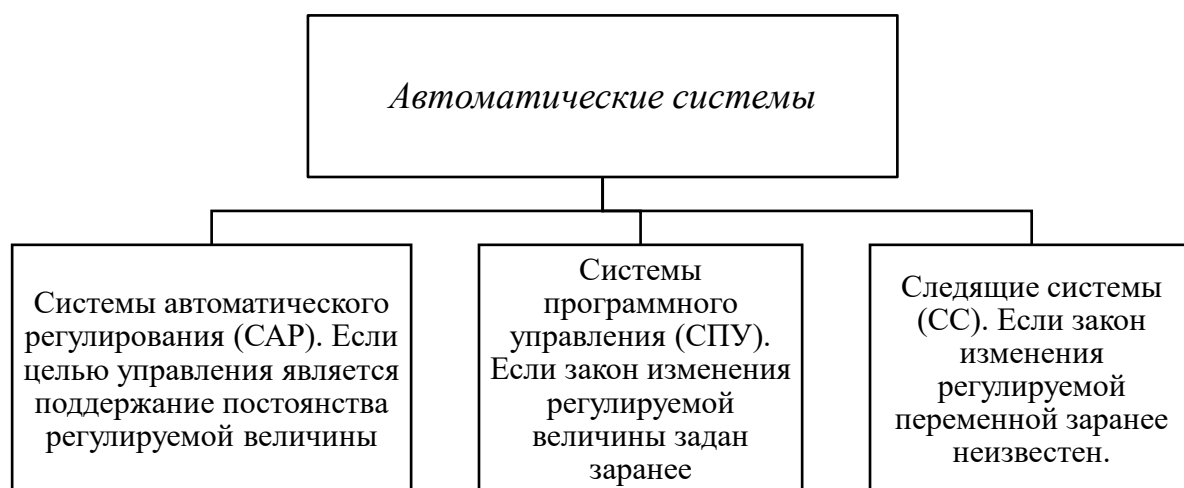


Рис. 3. Классификация САУ по целям управления

1.2.3. По способу формирования управляющего воздействия

Пример классификации САУ по способу формирования управляющего воздействия ($u(t)$) показан на (рис. 4).

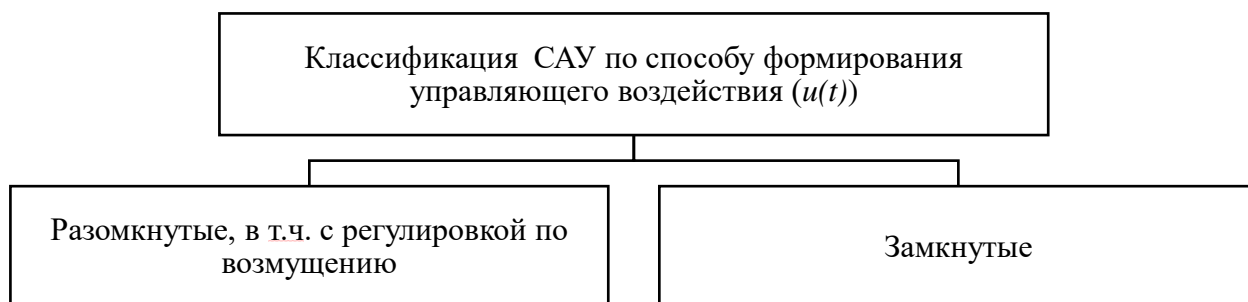


Рис. 4. Классификация САУ по способу формирования управляющего воздействия

Преимущества и недостатки разомкнутых и замкнутых САУ приведены в таблице 1.

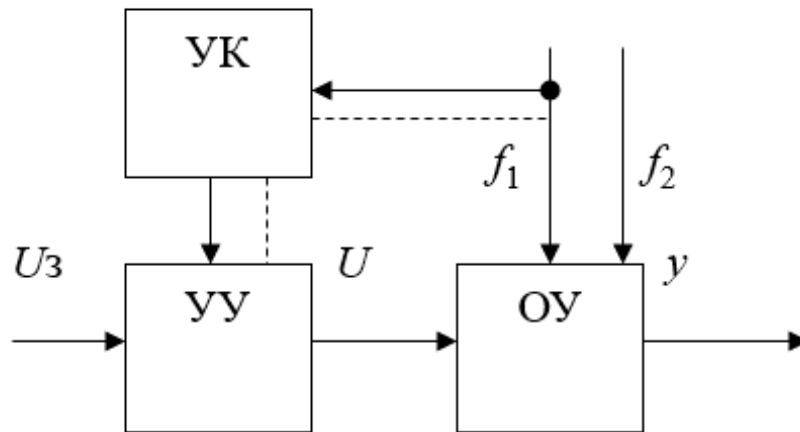
Таблица 1

Разомкнутые		Замкнутые	
Достоинства	Недостатки	Достоинства	Недостатки
Простота системы, особенно при одном сильном возмущении	Усложнение структуры и конструкции устройства компенсации при многих возмущениях	Регулирование по отношению ко всем возмущениям (опосредованное через выход)	Возможна неустойчивость
Устойчивость	Трудности компенсации, связанные с нелинейностью и не стационарностью параметров, в результате чего появляется большая ошибка	Обеспечение чрезвычайно малых ошибок в установившемся режиме путем выбора звеньев с большими коэффициентами усиления	Увеличение стоимости
Невысокая стоимость	Отсутствие регулирования по отношению к неучтенному (не измеряемому) возмущающемуся воздействию		

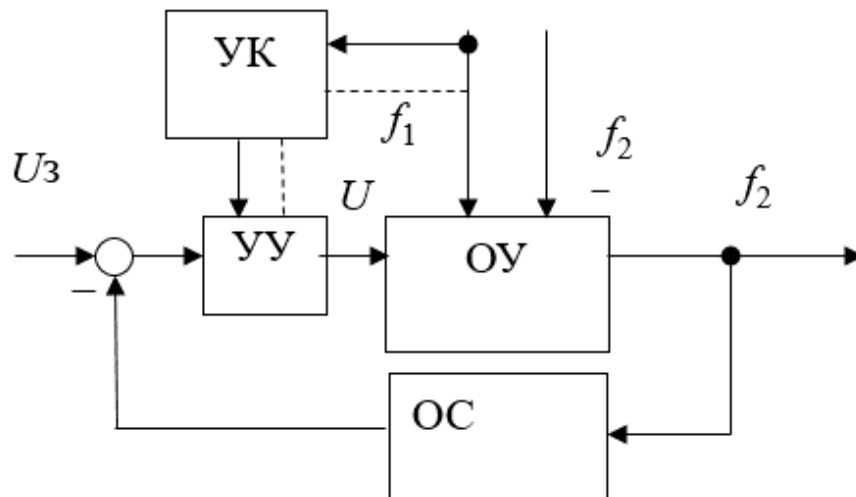
Когда возмущающие воздействия можно измерить, их можно и скомпенсировать (рис. 5): для этого в структуру вводят устройство компенсации (УК). В такой структуре величина выходной переменной (y) не оказывает влияния на формирование управляющего воздействия (u).

Сущность принципа разомкнутых САУ состоит в том, что алгоритм управления вырабатывается только на основе заданного алгоритма функционирования и не контролируется другими факторами – фактическим значением управляемой величины или величиной возмущения.

Для повышения точности управления можно, измерив возмущения, ввести по результатам измерения коррективы в алгоритм управления, которые компенсировали бы вызываемые возмущениями отклонения алгоритма функционирования. Однако при таком управлении не учитывается и не компенсируется отклонение выходной переменной, вызываемое другими факторами.



а)



б)

Рис. 5. Виды САУ

а) – без обратной связи; б) с обратной связью,

где УУ – управляющее устройство; УК – устройство компенсации;

U_3 – задающее воздействие; U – управляющее воздействие;

y – регулируемая выходная переменная; f – внешние возмущения (f_1 – измеряемые, f_2 – неизменяемые).

В ОС стоит датчик, измеряющий изменения в выходном сигнале. Выход y оказывает влияние на расчет управляющего воздействия.

Обратная связь может быть положительной, если сигнал обратной связи складывается с входным сигналом, или отрицательной, если сигнал обратной связи вычитается из входного сигнала.

Примером замкнутой системы автоматического поддержания уровня воды в котле может быть регулятор, предложенный И.И. Ползуновым в 1765 г (рис. 6) [3].

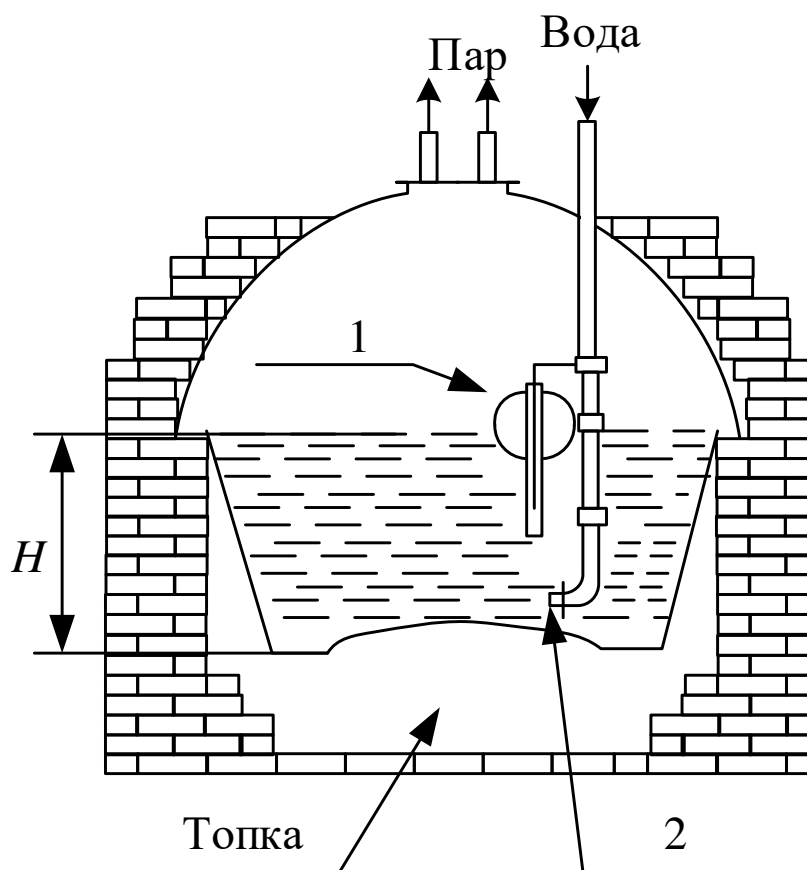


Рис. 6. Замкнутая система автоматического поддержания уровня воды в котле

Задачей регулирования является поддержание в паровом котле постоянного уровня. Регулятор представляет собой поплавков 1, связанный системой рычагов с регулирующей заслонкой 2. При увеличении уровня поплавков поднимается вверх, в результате чего заслонка опускается, перекрывая трубопровод и уменьшая подачу воды в котел. При уменьшении уровня поплавков опускается, что приводит к увеличению подачи воды и, следовательно, к повышению уровня.

Другим примером может быть регулирование температуры продукта в кожухотрубчатом теплообменнике (рис. 7) [1]. Показателем эффективности регулирования является поддержание температуры продукта на выходе из теплообменника на заданном уровне.

В рассматриваемом примере температура продукта является выходной регулируемой переменной.

Стабилизацию температуры легко осуществить, используя в качестве входного регулирующего воздействия расход горячего теплоносителя.

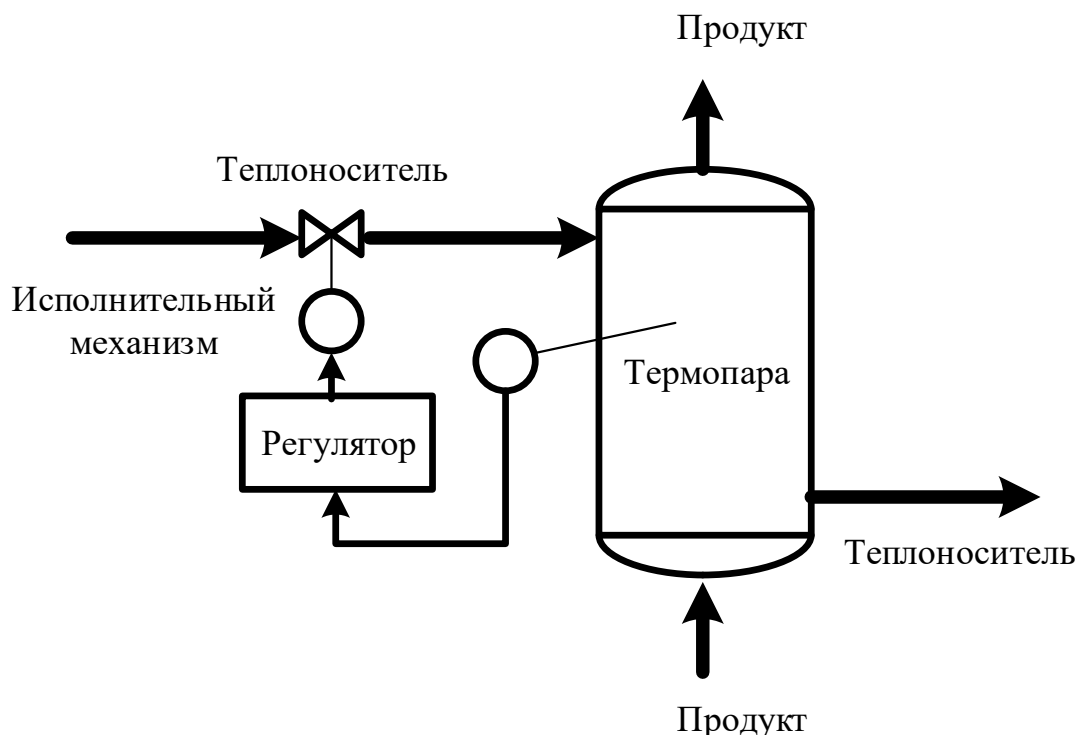


Рис. 7. Система регулирования температуры продукта в теплообменнике

Однако анализ объекта показывает, что устранить большую часть возмущающих воздействий невозможно. В связи с этим предлагается система регулирования по отклонению температуры продукта путем изменения расхода горячего теплоносителя.

1.3. Классификация автоматических систем по характеру внутренних динамических процессов

Автоматическая система (АС) может состоять из нескольких блоков или звеньев, соединенных между собой. Каждое отдельно взятое звено имеет вход и выход (рис. 8). Входная величина x_1 и выходная x_2 могут иметь любую физическую природу (ток, напряжение, перемещение, температура, освещенность и т. п.) [6].

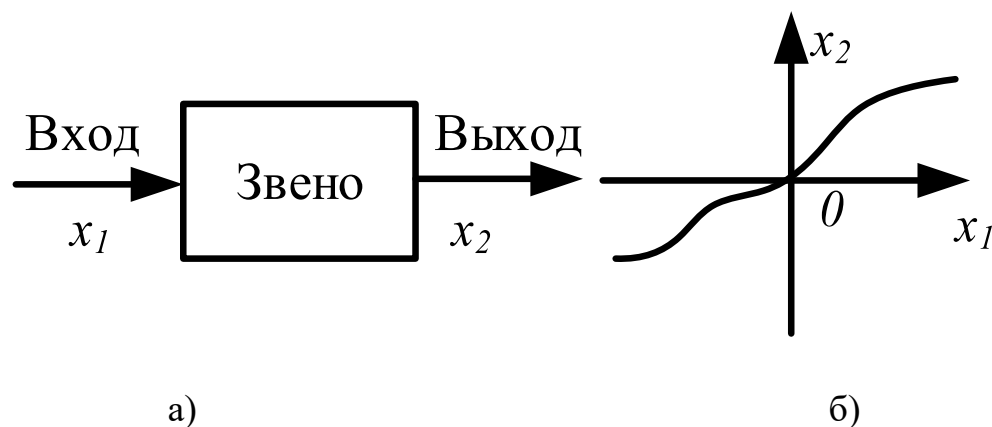


Рис. 8. Звено и его характеристика

В процессе работы автоматической системы величины x_1 и x_2 изменяются во времени. Динамика процесса преобразования сигнала в данном звене описывается некоторым уравнением (или экспериментально снятой характеристикой), связывающим выходную переменную x_1 с входной переменной x_2 . Совокупность уравнений и характеристик всех звеньев описывает динамику процессов управления или регулирования во всей системе в целом.

Основными признаками деления автоматических систем (рис. 9) на большие классы по характеру внутренних динамических процессов являются следующие:

- 1) непрерывность или дискретность (прерывистость) динамических процессов во времени,
- 2) линейность или нелинейность уравнений, описывающих динамику процессов регулирования.



Рис. 9. Классификация по характеру внутренних динамических процессов

По первому признаку автоматические системы делятся на системы непрерывного действия, системы дискретного действия (импульсные и цифровые) или системы релейного действия.

По второму признаку непрерывные системы делятся на системы линейные и нелинейные. Дискретные системы относятся целиком к категории нелинейных систем.

Системой непрерывного действия называется такая система, в каждом из звеньев которой непрерывному изменению входной величины во времени соответствует непрерывное изменение выходной величины. При этом закон изменения выходной величины во времени может быть произвольным, в зависимости от формы изменения входной величины и от вида уравнения динамики (или характеристики) звена.

Чтобы автоматическая система в целом была непрерывной необходимо, прежде всего, чтобы статические характеристики всех звеньев системы были непрерывными. Примеры непрерывных статических характеристик показаны на рис. 10.

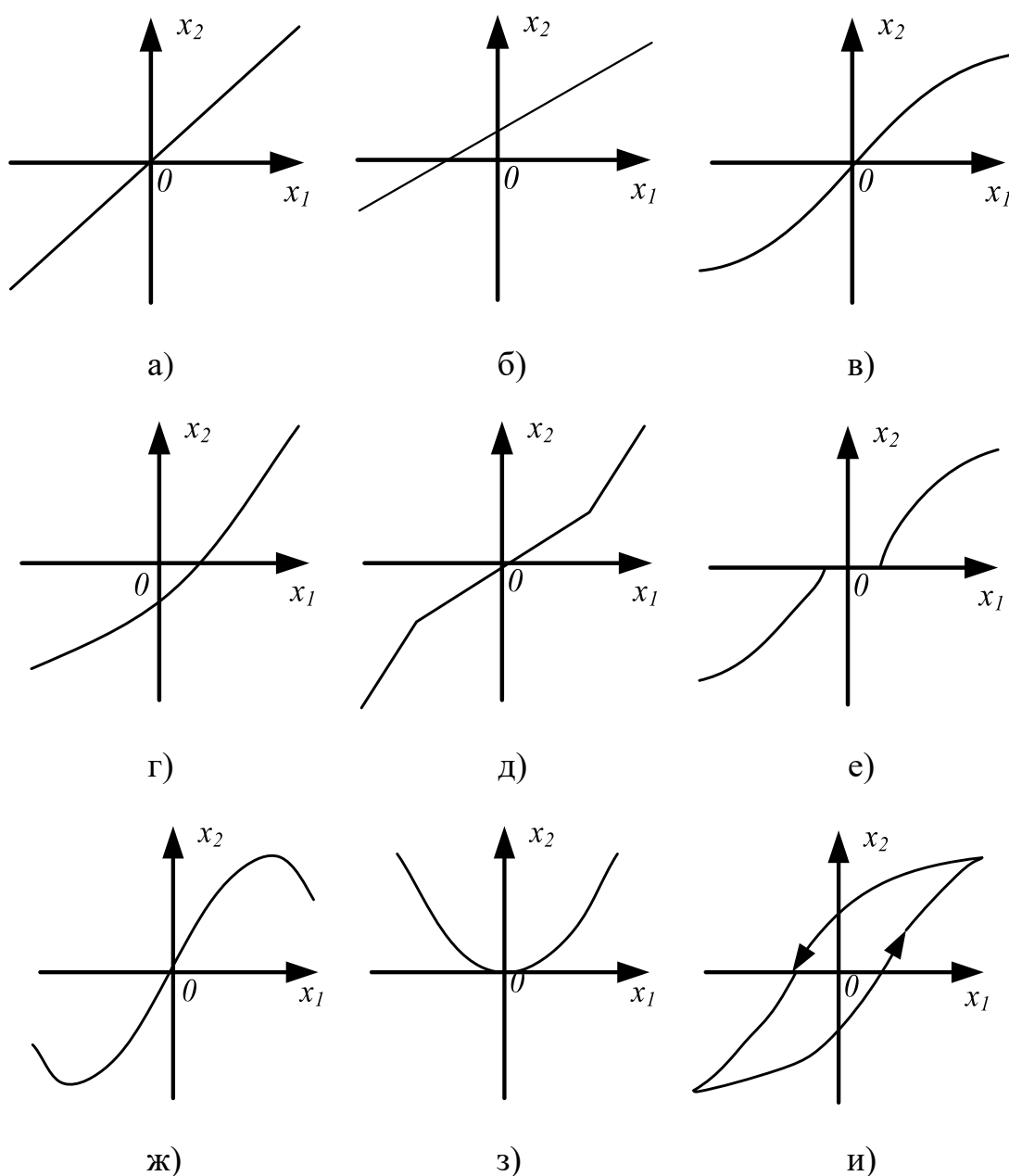


Рис. 10. Примеры непрерывных статических характеристик

Системой дискретного действия называется такая, в которой хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины выходная величина изменяется не непрерывно, а имеет вид отдельных импульсов, появляющихся через некоторые промежутки времени (рис. 11).

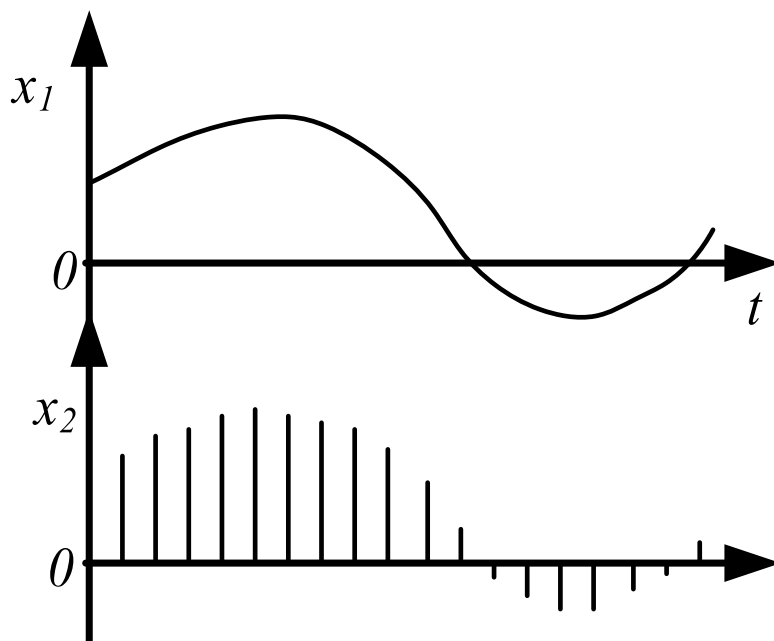


Рис. 11. Пример дискретной системы

Звено, преобразующее непрерывный входной сигнал в последовательность импульсов, называется импульсным. Если последующее звено системы тоже дискретное, то для него не только выходная, но и входная величина будет дискретной (импульсной). К дискретным автоматическим системам относятся системы импульсного регулирования (т.е. системы с импульсным звеном), а также системы с цифровыми вычислительными устройствами. Эти последние дают результат вычисления на выходе дискретно, через определенные промежутки времени, в виде чисел для отдельных дискретных числовых значений входной величины [6].

Системой релейного действия называется такая, в которой хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины выходная величина в некоторых точках процесса, зависящих от значения входной величины, изменяется скачком. Такое звено называется релейным звеном. Статическая характеристика релейного звена имеет точки разрыва, как показано в разных вариантах на рис. 12.

Линейной системой называется такая система, динамика всех звеньев которой вполне описывается линейными уравнениями (алгебраическими и дифференциальными или разностными). Для этого необходимо, прежде всего, чтобы статические характеристики всех звеньев системы были линейными, то есть имели вид прямой линии (рис. 10 а, б).

Если динамика всех звеньев системы описывается обыкновенными линейными дифференциальными (и линейными алгебраическими) уравнениями с постоянными коэффициентами, то систему называют обыкновенной линейной системой.

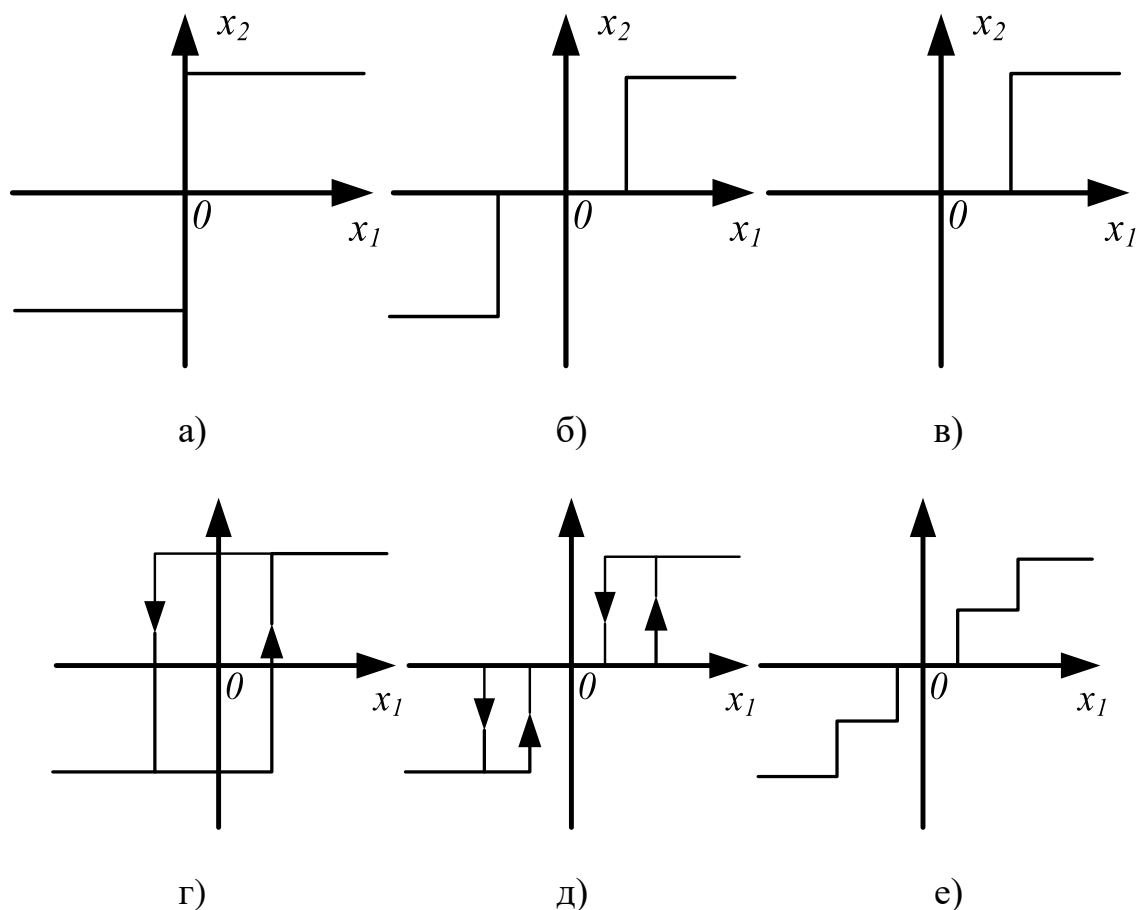


Рис. 12. Примеры релейных систем

Если в уравнении динамики какого-либо звена линейной системы имеется хотя бы один или несколько переменных во времени коэффициентов, то получается линейная система с переменными параметрами. Если какое-либо звено описывается линейным уравнением в частных производных (например, имеют место волновые процессы в трубопроводе или в электрической линии), то система будет линейной с распределенными параметрами. В отличие от этого обыкновенная линейная система является системой с сосредоточенными параметрами. Если динамика какого-либо звена системы описывается линейным уравнением с запаздывающим аргументом (т. е. звено обладает чисто временным запаздыванием или временной задержкой τ передачи сигнала (рис. 13)), то система называется линейной системой с запаздыванием. Динамика линейных импульсных систем описывается линейными разностными уравнениями.

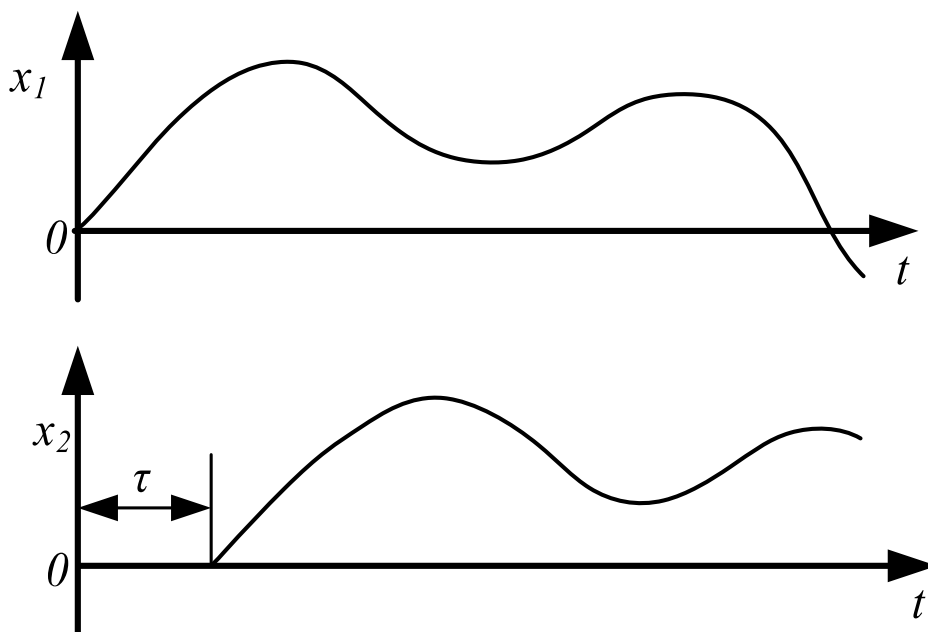


Рис. 13. Пример линейной системы с запаздыванием

Нелинейной системой называется такая система, в которой хотя бы в одном звене нарушается линейность статической характеристики или же имеет место любое другое нарушение линейности уравнений динамики звена (произведение переменных или их производных, корень, квадрат или более высокая степень переменной, любая другая нелинейная связь переменных и их производных) [6].

Следовательно, к нелинейным системам относятся, в частности, все системы, в звеньях которых имеются статические характеристики любого из многих видов, показанных на рис. 10, в — и. К ним же относятся и все системы релейного действия (рис. 12).

Нелинейными могут быть также и системы с переменными параметрами, с распределенными параметрами, с запаздыванием, импульсные и цифровые системы, если в них где-либо нарушается линейность уравнений динамики (в цифровых системах это связано, в частности, с квантованием сигнала по уровню).

Вопросы для проверки

1. Что такое объект управления?
2. Что значит регулирование по отклонению?
3. Какая система регулирования является наиболее эффективной?
4. На какие основные классы делятся системы автоматического регулирования?
5. Как доказать, что система является линейной?

2. ТИПОВЫЕ ВХОДНЫЕ СИГНАЛЫ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА СВОЙСТВ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ

Большое разнообразие конструкций и условий работы АС определяет многообразие воздействий и сигналов. Анализ конкретных АС существенно упрощается, если пользоваться разработанной в ТАУ типизацией воздействий и сигналов. Основные типы сигналов показаны на рис. 14.



Рис. 14. Основные типы сигналов

Регулярный (детерминированный) сигнал – сигнал, который изменяется по определенному закону и может быть описан конкретной математической функцией времени.

Пример регулярного сигнала приведен на рис. 15, а.

Нерегулярный сигнал – сигнал, который изменяется во времени случайным образом и не может быть представлен конкретной математической функцией.

Характер изменения случайного сигнала во времени показан на рис. 15, б.

Непрерывный (аналоговый) сигнал - определен в любой момент времени. Примеры такого сигнала приведены на рис. 15, а, б.

Дискретный сигнал - определен лишь в некоторые моменты времени. Пример дискретного сигнала приведен на рис. 15, в.

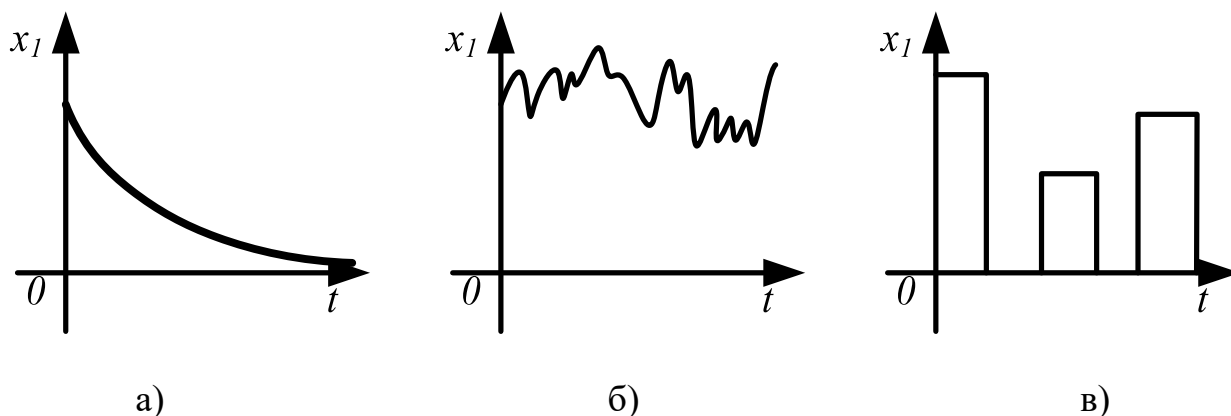


Рис. 15. Виды сигналов

При исследовании АСУ и их элементов используют ряд стандартных сигналов, называемых типовыми воздействиями. Эти воздействия описываются простыми математическими функциями и легко воспроизводятся при исследовании АСУ. Использование типовых воздействий позволяет унифицировать анализ различных систем и облегчает сравнение их передаточных свойств (рис. 16).

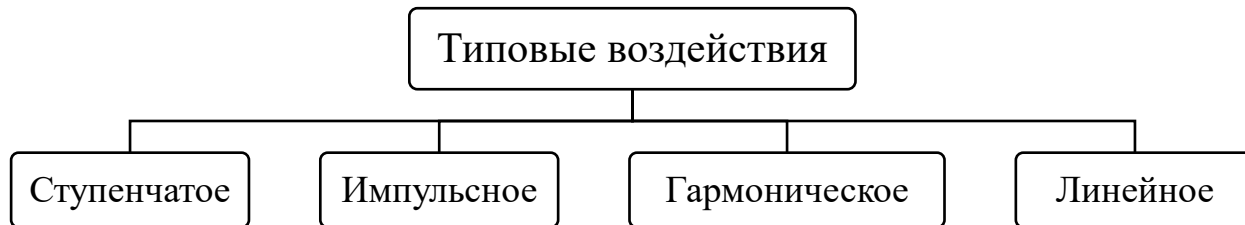


Рис. 16. Типовые воздействия

Ступенчатое воздействие – воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до некоторого значения и далее остается постоянным (рис. 17, а).

Ступенчатому воздействию соответствует функция:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ a_0 & \text{при } t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

При анализе и расчете систем удобно использовать ступенчатое воздействие, у которого величина $a_0 = 1$. Его называют **единичным ступенчатым воздействием** и обозначают $1(t)$. Математическое выражение, описывающее единичное ступенчатое воздействие, имеет вид

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Любое неединичное ступенчатое воздействие можно обозначить $a_0 \cdot \mathbf{1}(t)$. Единичное ступенчатое воздействие, возникающее в момент времени t_1 , обозначают $\mathbf{1}(t - t_1)$.

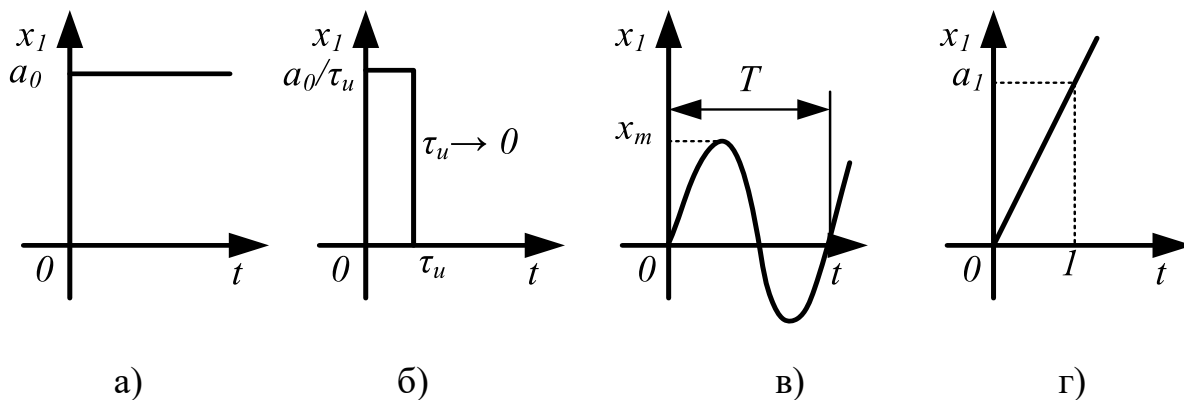


Рис. 17. Виды типовых воздействий

Ступенчатое воздействие чаще всего используют при исследованиях систем стабилизации параметров, так как эти воздействия наиболее близки к реальным входным (задающим и возмущающим) воздействиям систем стабилизации.

Импульсное воздействие – одиночный импульс прямоугольной формы (рис. 17, б), имеющий достаточно большую высоту и малую длительность (по сравнению с инерционностью испытываемой системы) с площадью a_0 .

При математическом анализе АСУ используют **единичное импульсное воздействие**, описываемое так называемой **дельта-функцией** $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0 \\ \infty & \text{при } t = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = 1. \quad (4)$$

Последние два выражения позволяют рассматривать дельта-функцию как импульс, имеющий бесконечно большую высоту, бесконечно малую длительность и единичную площадь. Дельта-функцию можно определить также как производную единичного ступенчатого воздействия:

$$\delta(t) = \frac{d\mathbf{1}(t)}{dt}. \quad (5)$$

Неединичное импульсное ступенчатое воздействие с площадью a_0 обозначается: $x(t) = a_0 \cdot \delta(t)$.

Гармоническое воздействие – сигнал синусоидальной формы, описываемый функцией (рис. 17, в)

$$x(t) = x_m \cdot \sin \omega \cdot t, \quad (-\infty < t < \infty), \quad (6)$$

где x_m – амплитуда сигнала; $\omega = 2 \cdot \pi / T$ – круговая частота; T – период сигнала.

Гармонический сигнал, начинающий действовать в момент времени $t = 0$, описывают при помощи единичной ступенчатой функции:

$$x(t) = \mathbf{1}(t) \cdot x_m \cdot \sin \omega \cdot t, \quad (0 \leq t < \infty). \quad (7)$$

Линейное воздействие – воздействие, описываемое функцией (рис. 17, г)

$$x(t) = \mathbf{1}(t) \cdot a_1 \cdot t, \quad (0 \leq t < \infty). \quad (8)$$

Коэффициент a_1 характеризует скорость нарастания воздействия $x(t)$.

Статический режим – состояние элемента АС, при котором выходная величина не изменяется во времени, т. е. $y(t) = \text{const}$.

Статический режим (или состояние равновесия) может иметь место лишь тогда, когда входные воздействия постоянны во времени. Связь между входными и выходными величинами в статическом режиме описывают алгебраическими уравнениями.

Динамический режим – состояние элемента АС, при котором выходная величина изменяется во времени, т. е. $y(t) = \text{var}$.

Динамический режим имеет место, когда в элементе после приложения входного воздействия происходят процессы установления заданного состояния или заданного изменения выходной величины. Эти процессы описываются в общем случае дифференциальными уравнениями.

Неустановившийся (переходный) режим – режим, существующий от момента начала изменения входного воздействия до момента, когда выходная величина начинает изменяться по закону этого воздействия.

Установившийся режим – режим, наступающий после того, когда выходная величина начинает изменяться по такому же закону, что и входное воздействие, т. е. наступающий после окончания переходного процесса.

В установившемся режиме элемент совершает вынужденное движение. Следовательно, статический режим является частным случаем установившегося (вынужденного) режима при $x = \text{const}$.

Понятия «**переходный режим**» и «**установившийся режим**» иллюстрируются графиками изменения выходной величины $y(t)$ при двух

типовых входных воздействиях $x(t)$ (рис. 18). Граница между переходным и установившимся режимами показана вертикальной пунктирной линией.

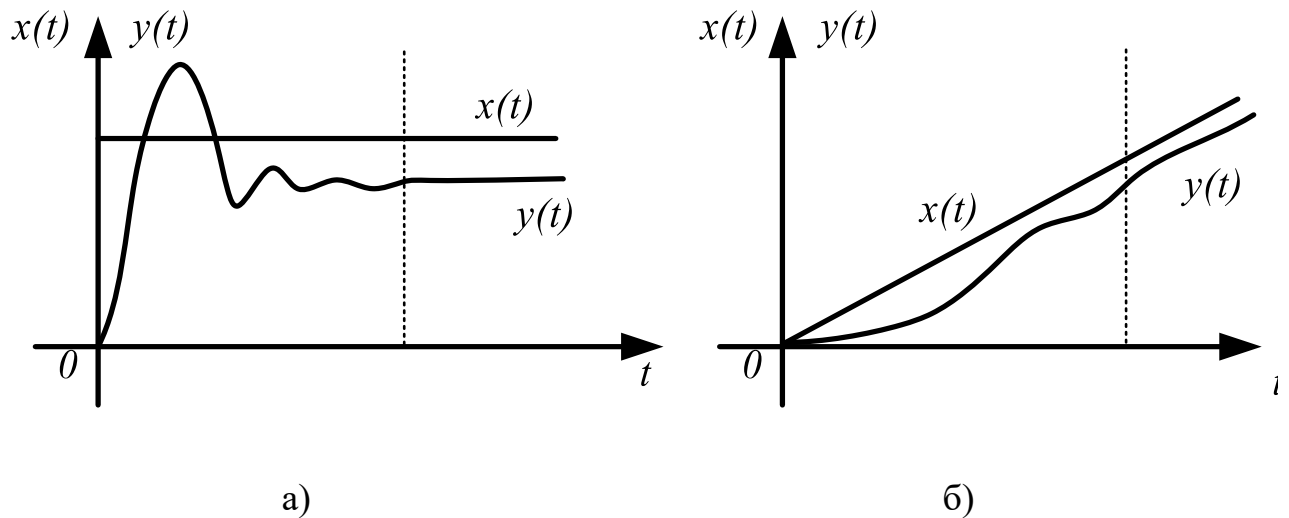


Рис. 18. Переходные и установившиеся режимы при типовых воздействиях

Вопросы для проверки

1. Укажите известные виды внешних воздействий на объект регулирования или элемент системы регулирования.
2. В чем различие между управляющим и возмущающим воздействиями?
3. Какие уравнения называются уравнениями статики?
4. Какие уравнения называются уравнениями динамики?
5. Каким воздействием может быть вызван переходный режим?

3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ

Передаточные свойства элементов АСУ в динамическом режиме описывают с помощью динамических характеристик рис. 19.

Формы динамических характеристик

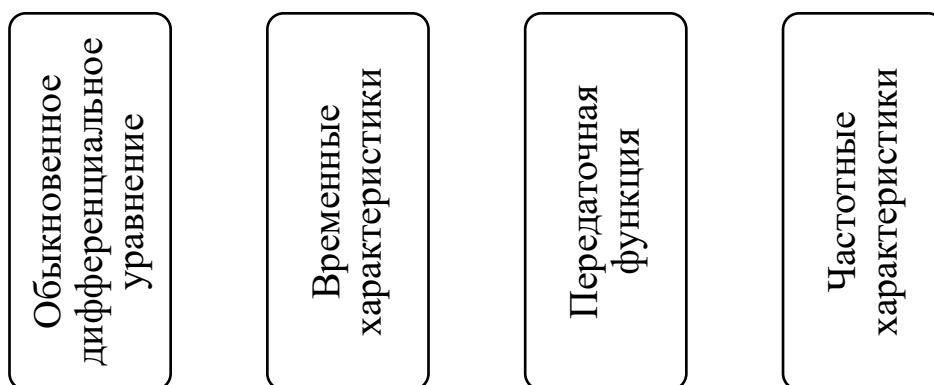


Рис. 19. Формы динамических характеристик

При составлении дифференциальных уравнений динамики любой автоматической системы последнюю разбивают на отдельные звенья и записывают уравнение каждого звена в отдельности. Уравнения всех звеньев образуют единую систему, которую можно преобразовать к одному уравнению путем исключения промежуточных переменных.

Звено (рис. 20, а) автоматической системы имеет входные величины x_1 , x_2 выходную x_3 и внешнее воздействие f , а динамическое уравнение звена имеет произвольный нелинейный вид:

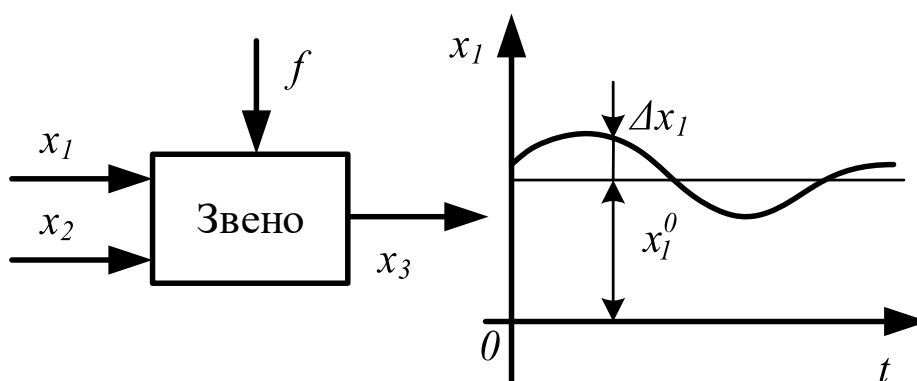


Рис. 20. Звено автоматической системы и его выходные характеристики

$$F(x_1, x_2, x_2', x_3, x_3', x_3'', x_3''') = \phi(f, f') \quad (9)$$

Допустим, что установившийся процесс в системе имеет место при некоторых постоянных значениях $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, $f = f^0$. Тогда уравнение установившегося состояния для данного звена согласно (9) будет

$$F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0) = \phi(f^0, 0) \quad (10)$$

В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что в исследуемом динамическом процессе переменные (в данном случае x_1, x_2, x_3) изменяются так, что их отклонения от установившихся значений (x_1^0, x_2^0, x_3^0) остаются все время достаточно малыми (рис. 20, б).

Обозначим указанные отклонения через $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$. Тогда в динамическом процессе

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 + \Delta x_1(t), & x_2(t) &= x_2^0 + \Delta x_2(t), & x_2' &= \Delta x_2' \\ x_3(t) &= x_3^0 + \Delta x_3(t), & x_3' &= \Delta x_3', & x_3'' &= \Delta x_3'', & x_3''' &= \Delta x_3''' \end{aligned} \quad (11)$$

Условие достаточной малости динамических отклонений переменных от некоторых установившихся значений для системы автоматического регулирования и следящих систем обычно выполняется. Этого требует сама идея работы замкнутой автоматической системы.

Внешнее же воздействие f не зависит от работы автоматической системы, изменение его может быть произвольным, и поэтому правая часть уравнения (9) обычно линеаризации не подлежит (в отдельных случаях и она может быть линеаризована) [6].

3.1. Аналитическая линеаризация

Разложим функцию F , стоящую в левой части уравнения (9), в ряд по степеням указанных выше малых отклонений, рассматривая все производные тоже как самостоятельные переменные. Тогда уравнение (9) примет вид:

$$\begin{aligned} F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0) &+ \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \cdot \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \cdot \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)^0 \cdot \Delta x_2' + \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^0 \cdot \Delta x_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3'}\right)^0 \cdot \Delta x_3' + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3''}\right)^0 \cdot \Delta x_3'' + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3'''}\right)^0 \cdot \Delta x_3''' + \\ &+ (\text{члены высшего порядка малости}) = \phi(f, f') \end{aligned} \quad (12)$$

где через $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0$ для краткости обозначена величина $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ взятая при $x_1 = x_1^0$,

$x_2 = x_2^0, x_2' = 0, x_3 = x_3^0, \dots, x_3''' = 0$ (то есть вначале берется в общем виде частная производная от функции F по x_1 , после чего в нее вместо всех переменных подставляются их постоянные значения $x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0$).

Следовательно, все частные производные в полученном уравнении (12) представляют собой некоторые постоянные коэффициенты. Они будут

переменными во времени, если функция F содержит t в явном виде или если установившийся процесс в системе определяется переменными значениями $x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t)$.

Члены высшего порядка малости, указанные в уравнении (12), состоят из произведений и степеней малых отклонений $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ с коэффициентами в виде смешанных частных производных и частных производных второго и высших порядков от функции F по всем переменным.

Вычтя из уравнения (12) почленно уравнение установившегося состояния (10) и отбросив члены высшего порядка малости, получим искомое линеаризованное уравнение динамики данного звена в виде:

$$\begin{aligned}
 & F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^0 \cdot \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^0 \cdot \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2'} \right)^0 \cdot \Delta x_2' + \\
 & + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^0 \cdot \Delta x_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3'} \right)^0 \cdot \Delta x_3' + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3''} \right)^0 \cdot \Delta x_3'' + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3'''} \right)^0 \cdot \Delta x_3''' + \\
 & + (\text{члены высшего порядка малости}) - \\
 & - F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0) - \phi(f, f') - \phi(f^0, 0) = \\
 & = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^0 \cdot \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^0 \cdot \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2'} \right)^0 \cdot \Delta x_2' + \\
 & + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^0 \cdot \Delta x_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3'} \right)^0 \cdot \Delta x_3' + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3''} \right)^0 \cdot \Delta x_3'' + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3'''} \right)^0 \cdot \Delta x_3''' - \\
 & - \phi(f, f') - \phi(f^0, 0).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Это дифференциальное уравнение, так же как и (9), описывает тот же динамический процесс в том же звене автоматической системы. Отличие этого уравнения от прежнего состоит в следующем:

- 1) это уравнение является более приближенным, ибо в процессе его вывода были отброшены малые высшего порядка;
- 2) неизвестными функциями времени в этом уравнении являются не прежние полные величины x_1, x_2, x_3 , а их отклонения $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ от некоторых установившихся значений x_1^0, x_2^0, x_3^0 ;
- 3) полученное уравнение является линейным относительно отклонений $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_2', \Delta x_3, \dots, \Delta x_3'''$ с постоянными коэффициентами $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^0, \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^0, \dots$, (или с переменными коэффициентами, если F содержит t в явном виде, а также когда

установившийся процесс определяется переменными величинами $x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t)$, например в программном регулировании).

Таким образом, цель получения линейного дифференциального уравнения взамен прежнего нелинейного достигнута. Уравнение (13) называется дифференциальным уравнением звена в отклонениях. Прделав то же самое для всех звеньев системы, получим в результате линеаризованные уравнения процесса регулирования в отклонениях (или, как называют еще, уравнения «в вариациях»).

В дальнейшем можно будет проводить линеаризацию нелинейных уравнений непосредственно по аналогии с формулой (13), не производя предварительных выкладок.

3.2. Графическая линеаризация

Приведем геометрическую трактовку этого способа линеаризации. Изобразим графически зависимость F от x_1 при постоянных значениях всех остальных переменных:

$$x_2 = x_2^0, x_2' = 0, x_3 = x_3^0, x_3' = x_3'' = x_3''' = 0 \quad . \quad (14)$$

Пусть эта зависимость имеет вид кривой, представленной на рис. 21, а. Отметим значение x_1^0 и проведем в точке C касательную. Тогда

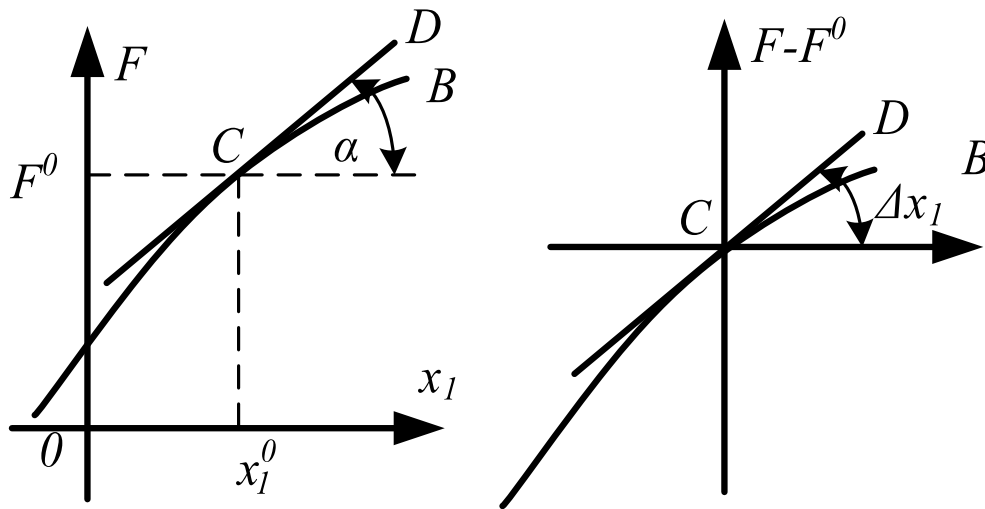


Рис. 21. Графическая линеаризация

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^0 = \operatorname{tg} \alpha \quad , \quad (15)$$

где α – угол наклона касательной в точке $C(x_1^0, F^0)$, для которой $x_1 = x_1^0$ и

$$F = F^0 = F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0) \quad . \quad (16)$$

Замена $x_1 = x_1^0 + \Delta x_1$ и сокращение члена (16), производившиеся раньше аналитически, здесь эквивалентны переносу начала координат в точку С (рис. 21, а), в результате чего получается график рис. 21, б.

Первый член линейного уравнения (13) согласно (15) означает, что линеаризация уравнения геометрически может трактоваться как замена первоначальной кривой CB на касательную к ней прямую CD . Из графика рис. 21, б очевидно, что эта замена тем точнее, чем меньшие величины отклонения возникают в исследуемом динамическом процессе (основная предпосылка для линеаризации); границы отклонений Δx_1 , для которых допустима линеаризация, тем шире, чем ближе кривая CB к прямой CD . Последним обстоятельством и определяются практически в каждой задаче те границы, внутри которых отклонения можно считать *«достаточно малыми»*.

В ряде задач отличие от линейности, показанное на рис. 21, б, бывает столь незначительным, что даже в сравнительно большом диапазоне отклонений Δx_1 можно считать систему линейной. В случае же ярко выраженной нелинейной зависимости линеаризация будет справедлива лишь на соответствующем более узком участке отклонений Δx_1 . Линеаризация может быть совершенно недопустимой при скачкообразных зависимостях (релейные характеристики, сухое трение). Такого рода зависимости называются существенно нелинейными.

Важно отметить следующее. Если по указанным причинам не может быть подвергнуто линеаризации уравнение только одного звена системы или даже только часть функции F для данного звена, то производят линеаризацию всех остальных нелинейных зависимостей, оставляя только одну или несколько существенно нелинейных.

Графический способ линеаризации заключается в том, что с самого начала все криволинейные зависимости, используемые при составлении уравнений звеньев, заменяются прямолинейными (по касательной в соответствующей точке кривой). Тогда уравнения звеньев сразу будут получаться линейными.

Вопросы для проверки

1. Какие бывают виды динамических характеристик?
2. С какой целью производится линеаризация реальных нелинейных статических характеристик?
3. Какое предположение лежит в основе линеаризации?
4. Каким становится линеаризованное уравнение относительно начального?
5. В каких случаях линеаризация недопустима?

4. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА РАБОТЫ СИСТЕМ

4.1. Временные показатели качества

Дифференциальное уравнение не дает наглядного представления о динамических свойствах элемента, но такое представление дает функция $y(t)$, т. е. решение этого уравнения.

Однако одно и то же дифференциальное уравнение может иметь множество решений, зависящих от начальных условий и характера входного воздействия $x(t)$, что неудобно при сопоставлении динамических свойств различных элементов. Поэтому было решено характеризовать эти свойства элемента только одним решением дифференциального уравнения, полученным при нулевых начальных условиях и одном из типовых воздействий: единичном ступенчатом, дельта-функции, гармоническом, линейном. Наиболее наглядное представление о динамических свойствах элемента дает его переходная функция $h(t)$.

Переходная функция, или переходная характеристика, $h(t)$ представляет собой переходный процесс на выходе звена, возникающий при подаче на его вход скачкообразного воздействия при величине скачка, равной единице (рис. 22.а).

Если входное воздействие представляет собой неединичную ступенчатую функцию $x_1(t) = N \cdot \mathbf{1}(t)$, выходная величина для линейной системы будет равна $x_2(t) = N \cdot h(t)$.

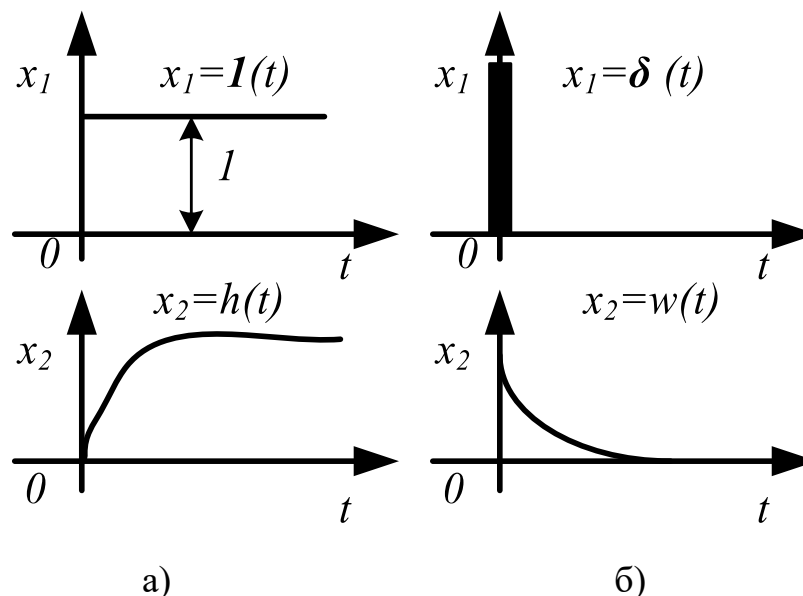


Рис. 22. Примеры

- а) единичное ступенчатое воздействие и переходная функция (характеристика);
- б) единичное импульсное воздействие и весовая функция (характеристика);

Ступенчатая функция представляет собой распространенный вид входного воздействия в автоматических системах. К такому виду сводятся мгновенное изменение нагрузки электрического генератора, мгновенное возрастание нагрузки на валу двигателя, мгновенный поворот входного валика следящей системы и т. п.

Весовая функция $w(t)$ представляет собой реакцию звена на единичную импульсную функцию, поданную на его вход (рис. 22.б).

Временные показатели качества являются прямыми оценками качества и определяются по кривой переходного процесса при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия.

По форме кривой переходного процесса различают (рис. 23, рис. 24)



Рис. 23. Виды переходных процессов

Время переходного процесса (время регулирования) $t_{\text{пн}}$ – время последнего вхождения в 5%–зону от уровня установившегося состояния (рис. 25):

$$t_{\text{пн}} : |y(t) - y_{\text{уст}}| < \Delta, \Delta = 0,05 \times y_{\text{уст}} \quad (17)$$

Чем меньше $t_{\text{пн}}$, тем выше быстродействие системы.

Перерегулирование σ – это величина максимального отклонения управляемой координаты от установившегося значения, взята в процентах по отношению к уровню установившегося состояния (рис. 25):

$$\sigma = \frac{\max |y(t) - y_{\text{уст}}|}{y_{\text{уст}}} \cdot 100\% \quad (18)$$

Установившаяся (статическая) ошибка рассматривается в случае, если установившееся состояние не достигло заданного (рис. 25):

$$e_{\text{ст}} = \frac{|y_{\text{уст}} - y_{\text{з}}|}{y_{\text{з}}} \times 100\% \quad (19)$$

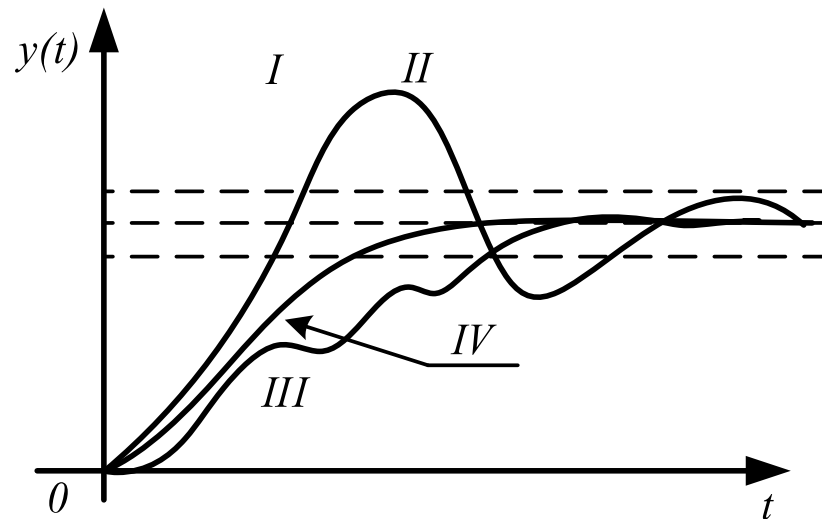


Рис. 24. Кривые переходных процессов

Время первого согласования (время нарастания) τ характеризует быстродействие – минимальное время, при котором система первый раз входит в 5 %-ую зону от установившегося состояния (рис. 25).

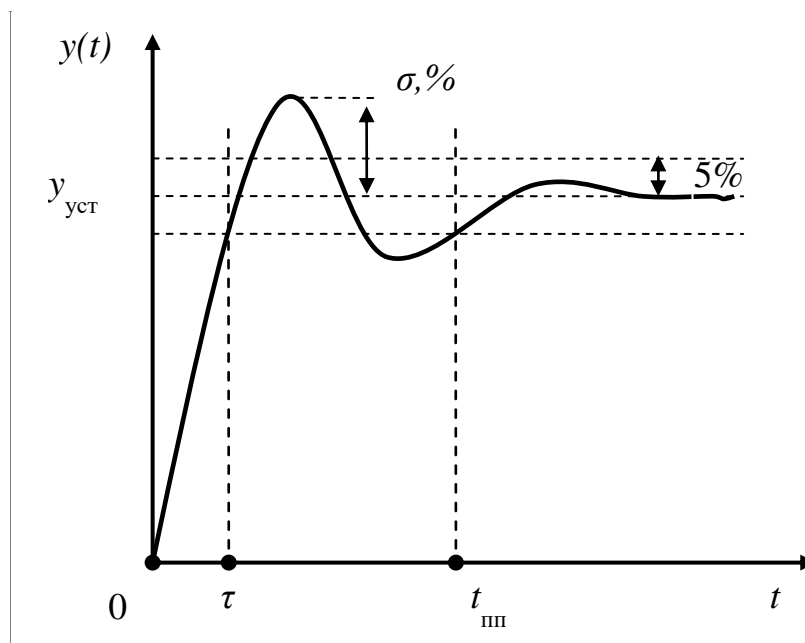


Рис. 25. Временные показатели качества

4.2. Частотные показатели качества работы систем

Частотные характеристики описывают передаточные свойства элементов и АСУ в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием. Они находят применение в ТАУ, так как реальные возмущения, а, следовательно, и реакции на них элемента или АСУ могут быть представлены как сумма гармонических сигналов.

Частотной ПФ системы или ее комплексным коэффициентом передачи называется отношение изображений Фурье выходной и входной переменных:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{G(j\omega)}, \quad (20)$$

где $y(t)$ – выход, $g(t)$ – вход,

$$Y(j\omega) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt; \quad (21)$$

$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (22)$$

где $j = \sqrt{-1}$, ω – частота входного гармонического сигнала.

Геометрическая форма ЧПФ:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где $A(\omega)$ – амплитудная частотная характеристика (АЧХ) (рис. 26.а); $\varphi(\omega)$ – фазовая частотная характеристика (ФЧХ) (рис. 26.б).

Алгебраическая форма ЧПФ:

$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$, где $U(\omega)$ – вещественная частотная характеристика (ВЧХ); $jV(\omega)$ – мнимая частотная характеристика (МЧХ):

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (23)$$

На комплексной плоскости частотная ПФ $W(j\omega)$ определяет вектор ОС, длина которого равна модулю частотной ПФ $A(\omega)$, а аргумент – угол $\varphi(\omega)$ (аргумент – это угол, образованный этим вектором ОС с положительным направлением вещественной оси). Кривую, которую вычерчивает конец радиуса вектора ОС при изменении частоты ω от «0» до « $+\infty$ » называют, амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ). Аргумент $\varphi(\omega)$ отсчитывается против часовой стрелки (рис. 26.в).

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАХ) $L(\omega)$ (рис. 26.г):

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega). \quad (24)$$

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФХ) называется график зависимости фазовой частотной характеристики $\varphi(\omega)$, изображенной в логарифмических координатах $\varphi(\lg \omega)$. Единица измерения ЛАХ – децибел, единица измерения логарифмической частоты $\lg \omega$ – декада.

При исследовании системы с помощью частотных характеристик используют такие параметры как запас устойчивости по модулю и запас устойчивости по фазе.

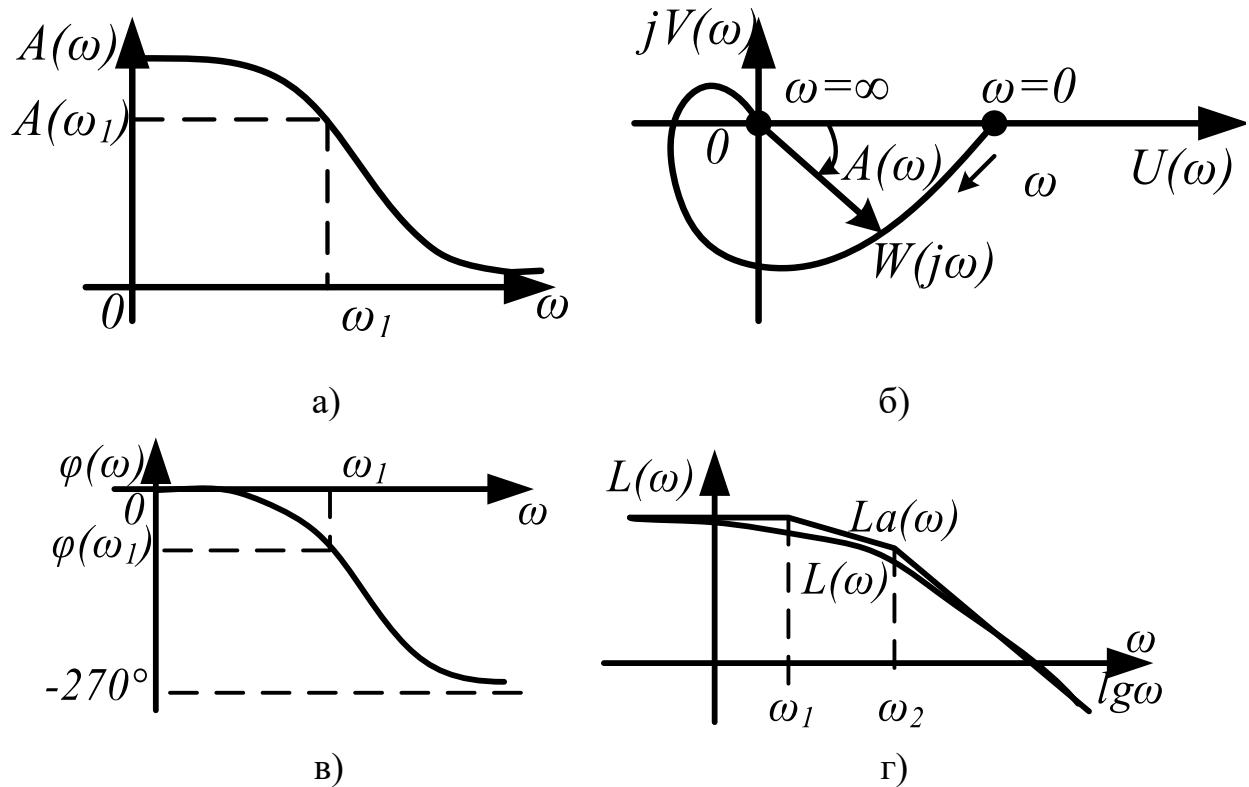


Рис. 26. Частотные характеристики:
а – амплитудная; б – фазовая; в – амплитудно-фазовая;
г – логарифмическая

Запас устойчивости по амплитуде (модулю) (ΔA) – это величина, которая показывает во сколько раз нужно увеличить заданный коэффициент усиления (при неизменных других параметрах), чтобы устойчивая система оказалась на границе устойчивости (рис. 27):

$$\Delta A = \frac{K_{\text{кр}}}{K_3}, \quad (25)$$

где $K_{\text{кр}}$ – критический коэффициент усиления, при котором система находится на границе устойчивости; K_3 – заданный коэффициент.

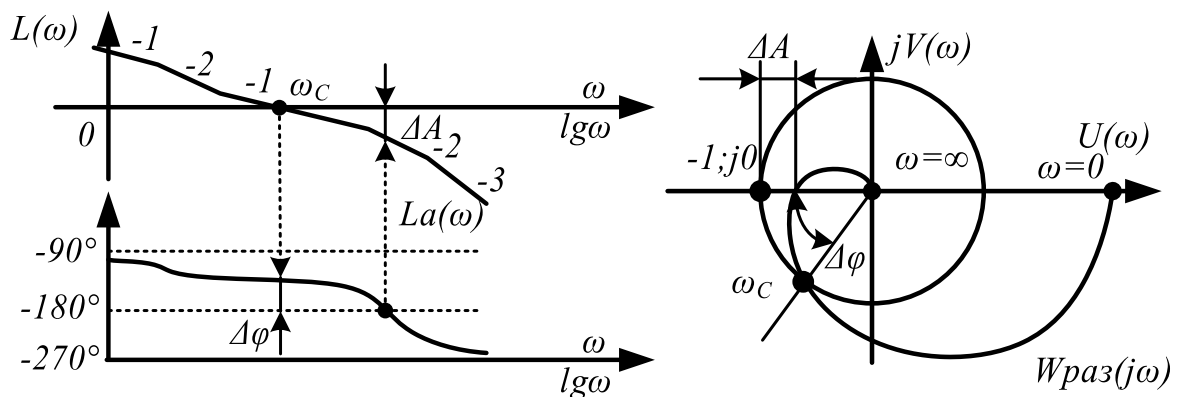


Рис. 27. Определение запасов устойчивости

Запас устойчивости по амплитуде (модулю) – величина отрезка оси абсцисс (ΔA), заключенного между критической точкой $(-1; j0)$ и амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой САУ.

В хорошо демпфированных системах запас устойчивости по амплитуде колеблется в пределах от 6 дБ до 20 дБ, а запас по фазе от 30° до 60° .

Запас устойчивости по фазе ($\Delta\varphi$) – это величина, которая показывает, насколько нужно увеличить (или уменьшить) фазу, чтобы устойчивая система оказалась на границе устойчивости (при постоянстве других параметров).

Запас устойчивости по фазе определяют как величину угла $\gamma = \pi - |\varphi(\omega_{\text{ср}})|$ для частоты $\omega_{\text{ср}}$, при которой $|W_{\text{раз}}(j\omega_{\text{ср}})| = 1$ (рис. 27).

Показатель колебательной (M) – это отношение максимального значения амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы к ее значению при $\omega = 0$. Показатель колебательной характеризует склонность системы к колебаниям: чем выше M , тем менее качественна система при прочих равных условиях. Считается допустимым, если $1,1 \leq M \leq 1,5$.

Частота среза $\omega_{\text{ср}}$ – частота, при которой логарифмическая амплитудно-частотная характеристика системы принимает значение, равное 0. Эта частота косвенно характеризует длительность переходного процесса. Время переходного процесса обратно пропорционально частоте среза:

$$t_{\text{пп}} \cong (1 \div 2) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega_{\text{ср}}} . \quad (26)$$

Вопросы для проверки

1. Укажите основные показатели качества, характеризующие переходный процесс, вызванный ступенчатым воздействием.
2. Что такое амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики динамической системы?
3. Что такое амплитудно-фазовая частотная характеристика?
4. Объясните, с какой целью вводится понятие логарифмических частотных характеристик.
5. Как определяются логарифмические частотные характеристики при последовательном соединении динамических звеньев?
6. Что такое запасы устойчивости по модулю (амплитуде) и фазе?

5. ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ, ИХ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ПЕРЕХОДНЫЕ ФУНКЦИИ

Передаточной функцией звена (системы) от данного входа $u(t)$ к выходу $y(t)$ называется отношение изображений по Лапласу выходной переменной к входной переменной при нулевых начальных условиях и равенстве нулю прочих входов:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad (27)$$

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt = L\{y(t)\} \text{ и } U(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = L\{u(t)\}. \quad (28)$$

Переменную s в преобразовании Лапласа можно рассматривать как оператор дифференцирования, то есть:

$$\frac{d}{dt} \equiv s \equiv p, \quad (29)$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}, \quad (30)$$

$$Y(p) \equiv Y(s) \text{ и } U(p) \equiv U(s). \quad (31)$$

Пример

Определить передаточную функцию системы, представленную на рис. 28.

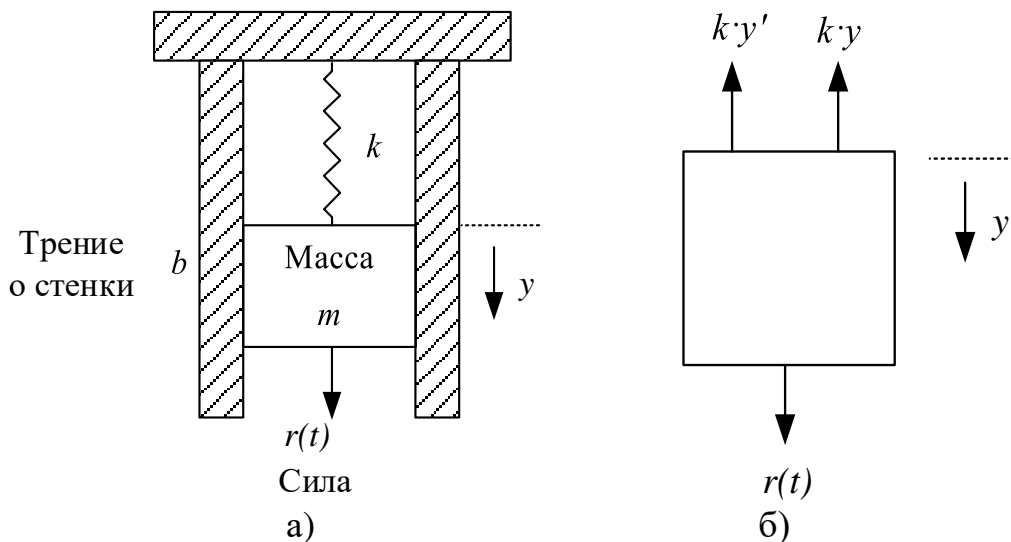


Рис. 28. Механическая система «подвес на пружине»
а) – рисунок; б) – расчетная схема

Дифференциальное уравнение, описывающее эту систему, имеет вид:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = r(t). \quad (32)$$

Произведем замену символа дифференцирования оператором « p » $\frac{d}{dt} \Rightarrow p$

$$m \cdot p^2 \cdot y(p) + b \cdot p \cdot y(p) + k \cdot y(p) = r(p) , \quad (33)$$

вынесем общий сомножитель за скобки:

$$y(p)(m \cdot p^2 + b \cdot p + k) = r(p) . \quad (34)$$

Определим из выражения (34) величину $y(p)$:

$$y(p) = \frac{r(p)}{m \cdot p^2 + b \cdot p + k} . \quad (35)$$

Учитывая, что $y(p)$ – выходной переменной, а $r(p)$ – входной передаточная функция для системы рис. 28 с учетом (30) и (35) может быть записана следующим образом:

$$W(p) = \frac{y(p)}{r(p)} = \frac{1}{m \cdot p^2 + b \cdot p + k} . \quad (36)$$

Структурное звено, описывающее систему рис. 28, показано на рис. 29.

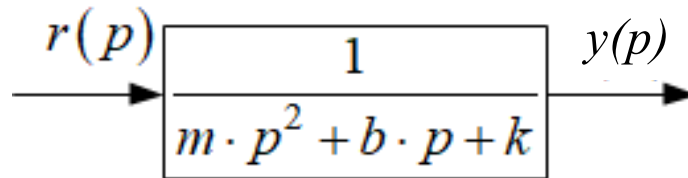


Рис. 29. Передаточная функция системы

5.1. Основные типовые звенья

Типовыми динамическими звеньями САУ являются звенья, процессы в которых описываются линейными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков с постоянными коэффициентами и в общем случае имеют следующий вид:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x , \quad (37)$$

где $x(t)$, $y(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы звена; a_0 , a_1 , a_2 ; b_0 , b_1 , b_2 – постоянные коэффициенты.

Данное уравнение дает возможность определить передаточную функцию типового звена в виде:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} . \quad (38)$$

Анализ возможных вариантов задания коэффициентов передаточной функции (38) показывает, что к типовым звеньям нулевого и первого порядка, т.е. к звеньям, описываемым уравнениями вида (37) при $a_2 = b_2 = 0$ (Рис. 30).

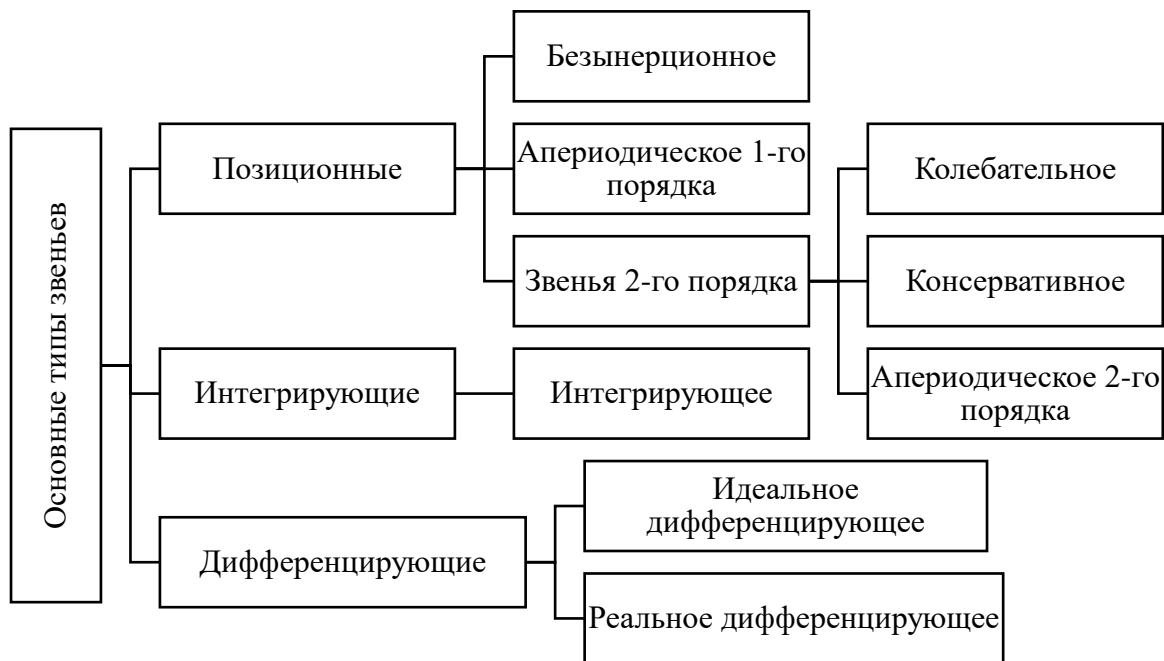


Рис. 30. Основные типы звеньев

К позиционным звеньям относят такие линейные звенья, у которых в установившемся режиме выходная величина пропорциональна входной, а коэффициент пропорциональности является коэффициентом передачи звена т.е. $y(t) = k \cdot x(t)$.

Позиционные звенья обладают свойством самовыравнивания (способностью самостоятельно переходить в новое установившееся состояние при ограниченном изменении входного воздействия).

1. **Безынерционное звено** (при $a_1 = b_1 = 0$):

$$W(p) = \frac{b_0}{a_0} = k. \quad (39)$$

2. **Апериодическое звено первого порядка (инерционное звено)** (при $b_1 = 0$) (рис. 31):

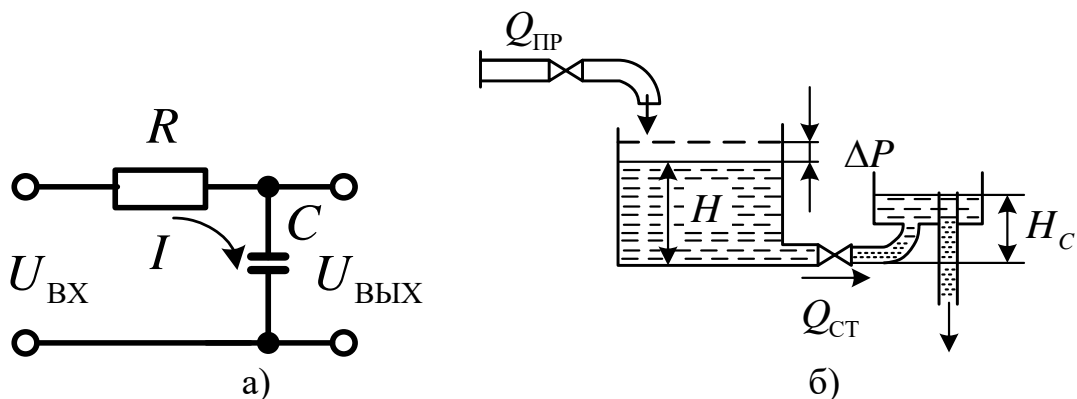


Рис. 31. Примеры апериодического звена первого порядка (инерционное звено)

а) – RC-цепь; б) – односторонний бак с постоянным подпором воды на стоке

$$W(p) = \frac{b_0}{a_1 p + a_0} = \frac{k}{Tp + 1}, \quad (40)$$

где $k = \frac{b_0}{a_0}$; $T = \frac{a_1}{a_0}$.

3. **Колебательное звено** (рис. 32) при $b_1 = b_2 = 0$ с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1}, \quad (41)$$

где $k = \frac{b_0}{a_0}$; $T = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$; $\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$.

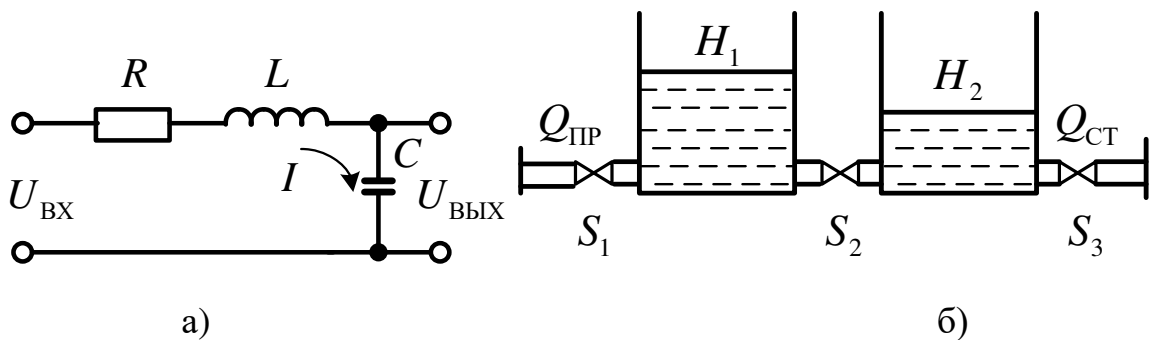


Рис. 32. Примеры колебательного звена
а) – RLC-цепь; б) – технологическая схема из двух емкостей,

ξ – коэффициент демпфирования (затухания), в зависимости от которого различают:

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1} \quad \begin{cases} 0 < \xi < 1 - \text{колебательное звено,} \\ \xi = 0 - \text{консервативное звено,} \\ \xi \geq 1 - \text{апериодическое звено 2-го порядка.} \end{cases}$$

Интегрирующее звено (при $a_0 = b_1 = 0$) рис. 33:

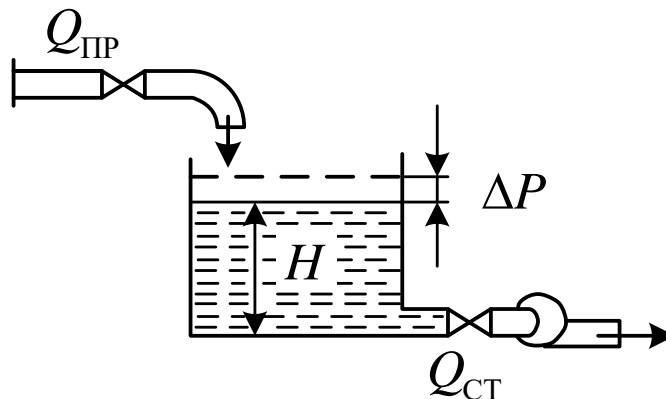


Рис. 33. Пример интегрирующего звена – уровень воды в баке

$$W(p) = \frac{b_0}{a_1 p} = \frac{k}{p}, \quad (42)$$

где $k = \frac{b_0}{a_1}$.

4. **Дифференцирующее звено** (при $a_1 = b_0 = 0$):

$$W(p) = \frac{b_1 p}{a_0} = kp, \quad (43)$$

где $k = \frac{b_1}{a_0}$.

5. **Реальное дифференцирующее звено** (при $b_0 = 0$) (рис. 34):

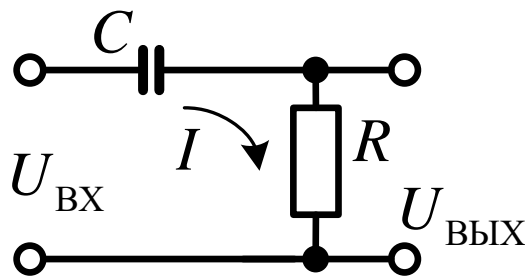


Рис. 34. Пример реального дифференцирующего звена

$$W(p) = \frac{b_1 p}{a_1 p + a_0} = \frac{kp}{Tp + 1}, \quad (44)$$

где $k = \frac{b_1}{a_0}$, $T = \frac{a_1}{a_0}$.

5.2. Характеристики основных типовых звеньев

5.2.1. Безынерционное звено

5.2.1.1 Алгебраическое уравнение (**АУ**) (так как нет производной):

$$\underset{\text{Выход}}{y(t)} = k \cdot \underset{\text{Вход}}{u(t)}, \quad (45)$$

где k – коэффициент передачи (усиления)

5.2.1.2 Передаточная функция (**ПФ**) $W(p)$:

$$y(t) = k \cdot u(t) \rightarrow y(p) = k \cdot u(p) \rightarrow W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = k. \quad (46)$$

5.2.1.3 Переходная характеристика (**ПХ**) $h(t)$, реакция на единичное ступенчатое воздействие:

$$h(t) = k \cdot \mathbf{1}(t), \quad (47)$$

$\mathbf{1}(t)$ – единичная ступенчатая функция Хэвисайда.

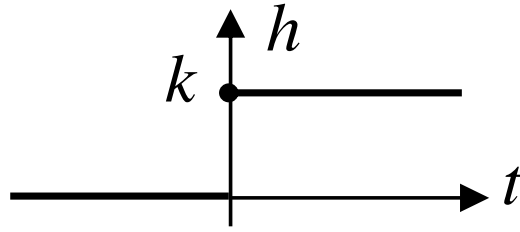


Рис. 35. Переходная характеристика

5.2.1.4 Весовая функция (**ВФ**) $w(t)$, реакция на единичное импульсное воздействие:

$$w(t) = \frac{d}{dt} h(t) = k \cdot \delta(t) , \quad (48)$$

где $\delta(t)$ – единичная импульсная функция Дирака:

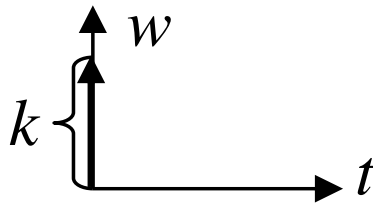


Рис. 36. Весовая функция

$$\int_0^{\infty} w(t) dt = k . \quad (49)$$

5.2.1.5 Частотная передаточная функция (**ЧПФ**) $W(j\omega)$:

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p \rightarrow j\omega} = k , \quad (50)$$

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = k + j \cdot 0 = k . \quad (51)$$

5.2.1.6 Вещественная частотная характеристика (**ВЧХ**) $U(\omega)$:

$$U(\omega) \equiv k, \forall \omega . \quad (52)$$

5.2.1.7 Мнимая частотная характеристика (**МЧХ**) $V(\omega)$:

$$V(\omega) \equiv 0, \forall \omega . \quad (53)$$

5.2.1.8 Амплитудно-фазовая частотная характеристика (**АФЧХ**).

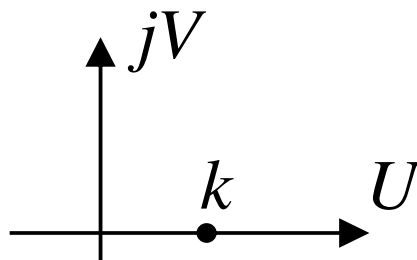


Рис. 37. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

АФЧХ пропорционального звена представляет собой точку.

5.2.1.9 Амплитудно частотная характеристика (**АЧХ**) $A(\omega)$:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \sqrt{k^2 + 0^2} = k . \quad (54)$$

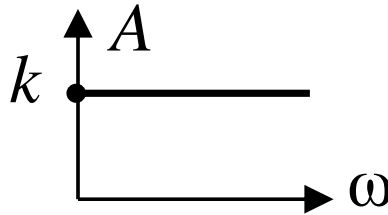


Рис. 38. Амплитудно частотная характеристика

5.2.1.10 Фазовая частотная характеристика (**ФЧХ**) $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctg \frac{0}{k} = \arctg 0 = 0 . \quad (55)$$

5.2.1.11 Логарифмическая амплитудная характеристика (**ЛАХ**) $L(\omega)$:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega) = 20 \cdot \lg k . \quad (56)$$

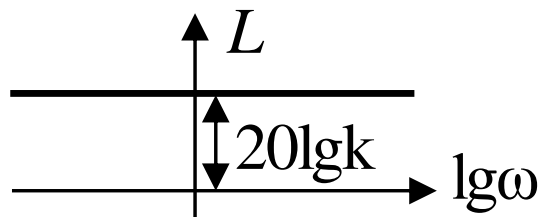


Рис. 39. Логарифмическая амплитудная характеристика

5.2.1.12 Логарифмическая фазовая характеристика (**ЛФХ**) $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) \equiv 0, \forall \omega . \quad (57)$$

5.2.2. Аperiodическое звено первого порядка (инерционное звено)

Характеризуется двумя параметрами:

- k – передаточный коэффициент
- T – постоянная времени.

5.2.2.1 Дифференциальное уравнение (**ДУ**):

$$T \cdot \underset{\text{Выход}}{\dot{y}(t)} + \underset{\text{Вход}}{y(t)} = k \cdot u(t) . \quad (58)$$

5.2.2.2 Передаточная функция (ПФ) $W(p)$:

$$\begin{aligned}
 T \cdot \dot{y}(t) + y(t) &= k \cdot u(t) \rightarrow \left\{ \frac{d}{dt} \Rightarrow p \right\} \rightarrow \\
 &\rightarrow T \cdot p \cdot y(p) + y(p) = k \cdot u(p) \rightarrow \\
 &\rightarrow (Tp + 1) \cdot y(p) = k \cdot u(p) \rightarrow \\
 &\rightarrow W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{k}{T \cdot p + 1}.
 \end{aligned} \tag{59}$$

5.2.2.3 Переходная характеристика (ПХ) $h(t)$, реакция на единичное ступенчатое воздействие:

$$y(t) = k(1 - e^{-t/T}) \cdot u(t). \tag{60}$$

При $u(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях (ННУ):

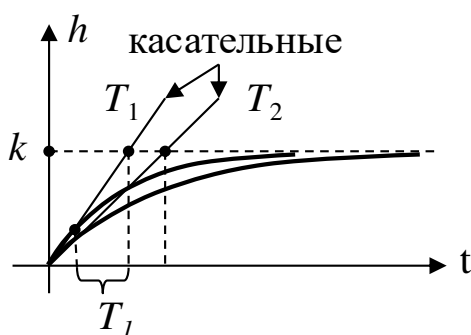
$$h(t) = k(1 - e^{-t/T}) \cdot 1(t). \tag{61}$$

k – уровень, к которому стремится график при $t \rightarrow \infty$: $k \cdot (1 - e^{-t/T}) \rightarrow k$.

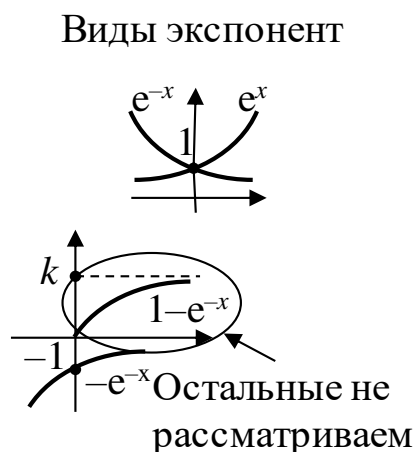
Постоянная времени T численно равна длине отрезка оси абсцисс между абсциссой ($\cdot$) пересечения касательной с горизонтальной асимптотой и абсциссой ($\cdot$), в которой проведена касательная к графику.

По ПХ можно определить все параметры апериодического звена:

- k – уровень, к которому сходится ПХ при $t \rightarrow \infty$, т.е. $h(t) \rightarrow k$.
- Постоянная времени T – это время, в течение которого $h(t)$ достигает величины $(1 - e^{-1}) \cdot h(\infty)$, что приблизительно равно 63,2% от установившегося значения $h(t) \rightarrow k$.



а)



б)

Рис. 40. Постоянная времени
а – переходная характеристика, б – виды экспонент

5.2.2.4 Весовая функция (**ВФ**) $w(t)$, реакция на единичное импульсное воздействие:

$$w(t) = \frac{d}{dt} k(1 - e^{-t/T}) = k \cdot (-e^{-t/T}) \cdot \left(-\frac{1}{T}\right) = \frac{k}{T} e^{-t/T}, \quad (62)$$

где $\delta(t)$ – единичная импульсная функция Дирака.

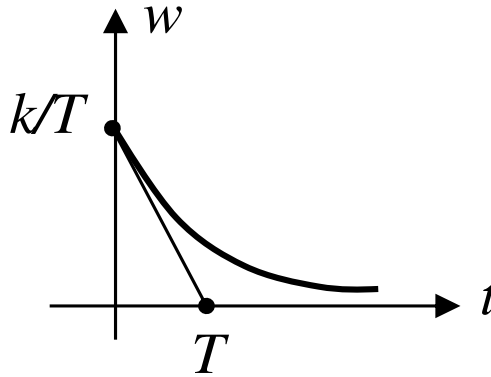


Рис. 41. Весовая функция

5.2.2.5 Частотная передаточная функция (**ЧПФ**) $W(j\omega)$:

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p \rightarrow j\omega} = \frac{k}{Tj\omega + 1} \cdot \frac{-jT\omega + 1}{-jT\omega + 1} = \frac{k(1 - jT\omega)}{1 + T^2\omega^2}, \quad (63)$$

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = \frac{k(1 - jT\omega)}{1 + T^2\omega^2} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}. \quad (64)$$

5.2.2.6 Вещественная частотная характеристика (**ВЧХ**) $U(\omega)$:

$$U(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}. \quad (65)$$

5.2.2.7 Мнимая частотная характеристика (**МЧХ**) $V(\omega)$:

$$V(\omega) = -\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}. \quad (66)$$

5.2.2.8 Амплитудно-фазовая частотная характеристика (**АФЧХ**):

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \cdot e^{-j \arctg T\omega}, \quad (67)$$

$$U^2(\omega) = \frac{k^2}{(1 + T^2\omega^2)^2}, \quad (68)$$

$$V^2(\omega) = \frac{k^2 T^2 \omega^2}{(1 + T^2\omega^2)^2} = \frac{k^2}{\underbrace{(1 + T^2\omega^2)^2}_{U^2(\omega)}} \cdot T^2 \omega^2 = U^2 T^2 \omega^2, \quad (69)$$

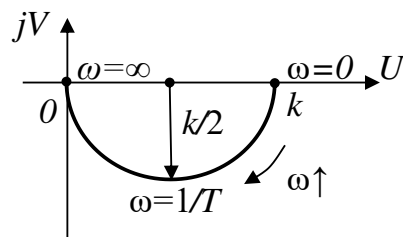
$$V^2 = U^2 T^2 \omega^2 \Rightarrow T^2 \omega^2 = V^2 / U^2, \quad (70)$$

$$U(\omega) = \frac{k}{1 + T^2 \omega^2} = \frac{k}{1 + \underbrace{V^2/U^2}_{V^2/U^2}} \Rightarrow \quad (71)$$

$$\Rightarrow k = \underbrace{U}_{\cdot U} + \underbrace{V^2/U}_{\cdot U} \Rightarrow U^2 + V^2 = k \cdot U$$

$$U^2 + V^2 = k \cdot U \left| \cdot \frac{2}{k} \right| + \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{4} \Rightarrow U^2 - 2 \frac{k}{2} U + \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{4} + V^2 = 0, \quad (72)$$

$$\underbrace{\left(U - \frac{1}{k} \right)^2 + V^2}_{\text{окружность}} = \left(\frac{k}{2} \right)^2, \quad R = \frac{k}{2}, \text{ центр } \left(\frac{k}{2}; j0 \right). \quad (73)$$



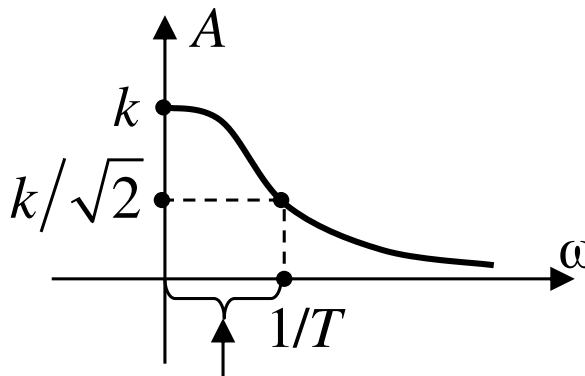
$$\begin{aligned} U(0) &= k, & V(0) &= 0; \\ U(\omega) &\rightarrow 0, & V(\omega) &\rightarrow 0 \\ &\omega \rightarrow \infty & \omega \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Рис. 42. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

АФЧХ апериодического звена представляет собой половину окружности, с центром в $(\cdot) \left(\frac{k}{2}, j0 \right)$ и радиусом $R = \frac{k}{2}$.

5.2.2.9 Амплитудно частотная характеристика (**АЧХ**) $A(\omega)$:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \\ &= \sqrt{\frac{k^2 + k^2 T^2 \omega^2}{(1 + T^2 \omega^2)^2}} = k \sqrt{\frac{1 + T^2 \omega^2}{(1 + T^2 \omega^2)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}. \end{aligned} \quad (74)$$



полоса пропускания

Рис. 43. Амплитудно частотная характеристика

При $\omega = 1/T$ значение $A(\omega)$ в $\sqrt{2}$ раза меньше, чем при $\omega = 0$.

5.2.2.10 Фазовая частотная характеристика (**ФЧХ**) $\varphi(\omega)$:

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2} \cdot \frac{1+T^2\omega^2}{k} \right) = \\ &= \operatorname{arctg}(-T\omega) = -\operatorname{arctg} T\omega.\end{aligned}\quad (75)$$

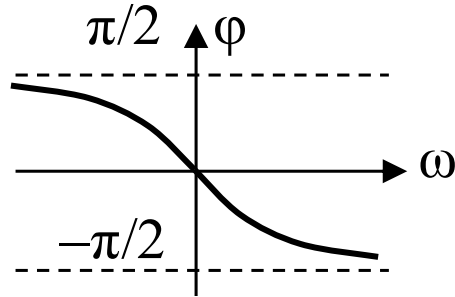
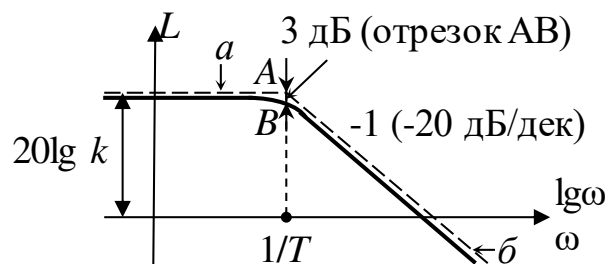


Рис. 44. Фазовая частотная характеристика

5.2.2.11 Логарифмическая амплитудная характеристика (**ЛАХ**) $L(\omega)$:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{k}{\sqrt{1+T^2 \cdot \omega^2}} = 20 \cdot \lg k - 20 \cdot \lg \sqrt{1+T^2 \cdot \omega^2}, \quad (76)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{при } \omega \ll 1/T \\ \text{при } \omega \gg 1/T \end{array} \right. \begin{array}{l} 20 \cdot \lg k - 20 \cdot \lg \underbrace{\sqrt{1+T^2 \cdot \omega^2}}_{\text{пренебрегаем}} = \\ = 20 \cdot \lg k \\ 20 \cdot \lg k - 20 \cdot \lg \sqrt{\underbrace{1}_{\text{пренебрегаем}} + T^2 \cdot \omega^2} = \\ = 20 \cdot \lg k - 20 \cdot \lg T \cdot \omega \end{array} \quad (77)$$



a – низкочастотная асимптота ($\omega < 1/T$)

$\bar{b}$ – высокочастотная асимптота ($\omega > 1/T$)

— – реальная ЛАХ

-- – асимптотическая ЛАХ

Рис. 45. Логарифмическая амплитудная характеристика

На практике используются приближенные (асимптотические) ЛАХ

5.2.2.12 Логарифмическая фазовая характеристика (ЛФХ) $\varphi(\omega)$.

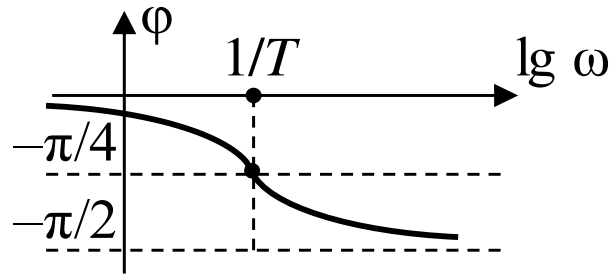


Рис. 46. Логарифмическая фазовая характеристика

Звенья второго порядка

Дифференциальное уравнение (ДУ):

$$T_0 \cdot \underset{\text{Выход}}{\ddot{y}(t)} + T_1 \cdot \underset{\text{Вход}}{\dot{y}(t)} + y(t) = k \cdot u(t) . \quad (78)$$

Передаточная функция (ПФ) $W(p)$:

$$\begin{aligned} T_0 \cdot \ddot{y}(t) + T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) &\rightarrow \left\{ \frac{d}{dt} \Rightarrow p \right\} \rightarrow \\ \rightarrow T_0 \cdot p^2 \cdot y(p) + T_1 \cdot p \cdot y(p) + y(p) &= k \cdot u(p) \rightarrow \\ \rightarrow (T_0 \cdot p^2 + T_1 \cdot p + 1) y(p) &= k \cdot u(p) \rightarrow \\ \rightarrow W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} &= \frac{k}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}, \end{aligned} \quad (79)$$

где $T = T_0$; $\xi = T_1/2T$ – коэффициент демпфирования (затухания).

5.2.3. Колебательное звено $0 < \xi < 1$

5.2.3.1 Дифференциальное уравнение (ДУ):

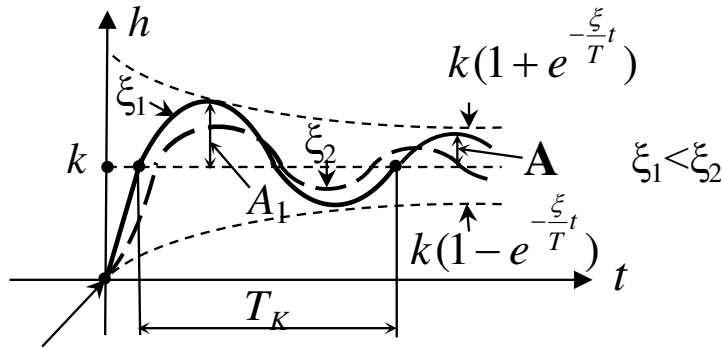
$$T^2 \underset{\text{Выход}}{\ddot{y}(t)} + 2T\xi \underset{\text{Вход}}{\dot{y}(t)} + y(t) = k \cdot u(t) . \quad (80)$$

5.2.3.2 Передаточная функция (ПФ) $W(p)$:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1} . \quad (81)$$

5.2.3.3 Переходная характеристика (ПХ) $h(t)$, реакция на единичное ступенчатое воздействие:

$$h(t) = k \left[1 - e^{-\frac{\xi}{T}t} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right) \right] . \quad (82)$$



касательная — ось абсцисс

Рис. 47. Переходная характеристика

Чем больше ξ , тем круче огибающие, тем быстрее процесс затухает.

Период колебаний также зависит от ξ : $T_K = \frac{2\pi T}{\sqrt{1-\xi^2}}$.

По ПХ можно определить все параметры колебательного звена:

- k – уровень, к которому сходится ПХ при $t \rightarrow \infty$, т.е. $h(t) \rightarrow k$.
- $\xi = \ln \frac{A_1}{A_2}$, где A_1, A_2 – два последовательных перерегулирования.
- $T = \frac{\sqrt{1-\xi^2} \cdot T_K}{2\pi}$.

5.2.3.4 Весовая функция (**ВФ**) $w(t)$, реакция на единичное импульсное воздействие:

$$w(t) = \frac{d}{dt} h(t) . \quad (83)$$

5.2.3.5 Частотная передаточная функция (**ЧПФ**) $W(j\omega)$:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= W(p) \Big|_{p \rightarrow j\omega} = U(\omega) + jV(\omega) = \\ &= \frac{k}{T^2 (j\omega)^2 + 2T\xi(j\omega) + 1} = \left\{ j = \sqrt{-1} \Rightarrow j^2 = -1 \right\} = \\ &= \frac{k}{(1 - T^2\omega^2) + j(2T\xi\omega)} \cdot \frac{(1 - T^2\omega^2) + j(2T\xi\omega)}{(1 - T^2\omega^2) + j(2T\xi\omega)} = \\ &= \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} - j \frac{2kT\xi\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} . \end{aligned} \quad (84)$$

5.2.3.6 Вещественная частотная характеристика (**ВЧХ**) $U(\omega)$:

$$U(\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} . \quad (85)$$

5.2.3.7 Мнимая частотная характеристика (**МЧХ**) $V(\omega)$:

$$V(\omega) = -\frac{2kT\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}. \quad (86)$$

5.2.3.8 Амплитудно-фазовая частотная характеристика (**АФЧХ**)

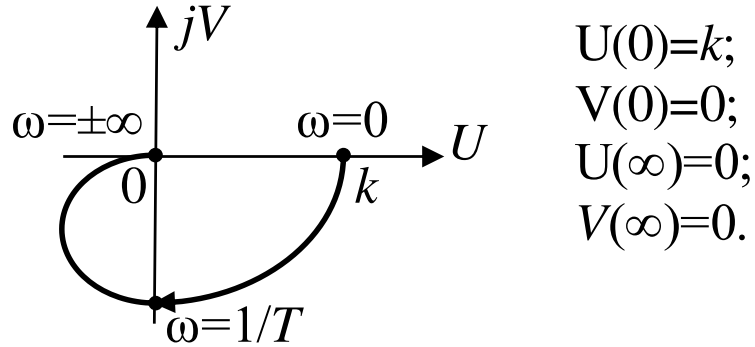


Рис. 48. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

5.2.3.9 Амплитудно частотная характеристика (**АЧХ**) $A(\omega)$:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \\ &= \sqrt{\left[\frac{k(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} \right]^2 + \left[\frac{-2kT\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} \right]^2} = \\ &= \sqrt{\frac{k^2(1-T^2\omega^2)^2 + k^2(2T\xi\omega)^2}{\left[(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2 \right]^2}} = \\ &= k \sqrt{\frac{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}{\left[(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2 \right]^2}} = \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}}. \end{aligned} \quad (87)$$

5.2.3.10 Фазовая частотная характеристика (**ФЧХ**) $\phi(\omega)$:

$$\begin{aligned}
 \phi(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \\
 &= \operatorname{arctg} \left(-\frac{2kT\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} \cdot \frac{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}{k(1-T^2\omega^2)} \right) = \\
 &= \operatorname{arctg} \left(-\frac{2T\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)} \right) = \begin{cases} \omega = \frac{1}{T} \\ T^2\omega^2 = 1 \\ 1-T^2\omega^2 = 0 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{2T\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)}, & \omega < \frac{1}{T}; \\ -\pi - \operatorname{arctg} \frac{2T\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)}, & \omega > \frac{1}{T}. \end{cases}, \quad (88)
 \end{aligned}$$

так как в формуле «–», график от 0 до $-\pi$.

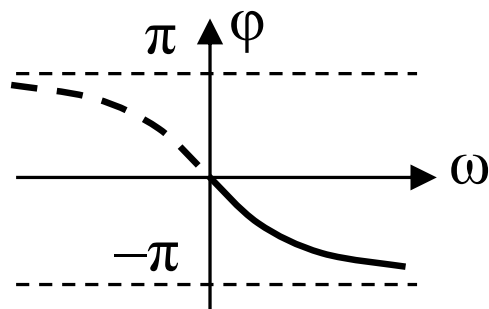


Рис. 49. Фазовая частотная характеристика

5.2.3.11 Логарифмическая амплитудная характеристика (**ЛАХ**) $L(\omega)$:

$$\begin{aligned}
 L(\omega) &= 20 \cdot \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{(1-T^2 \cdot \omega^2)^2 + (2 \cdot T \cdot \xi \cdot \omega)^2}} = \\
 &= 20 \cdot \lg k - 20 \lg \sqrt{(1-T^2 \cdot \omega^2)^2 + (2 \cdot T \cdot \xi \cdot \omega)^2}. \quad (89)
 \end{aligned}$$

5.2.4.2 Передаточная функция (**ПФ**) $W(p)$:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{k}{T^2 p^2 + 1} . \quad (92)$$

5.2.4.3 Переходная характеристика (**ПХ**) $h(t)$, реакция на единичное ступенчатое воздействие:

$$h(t) = k \left(1 - \cos \frac{t}{T} \right) \cdot 1(t) . \quad (93)$$

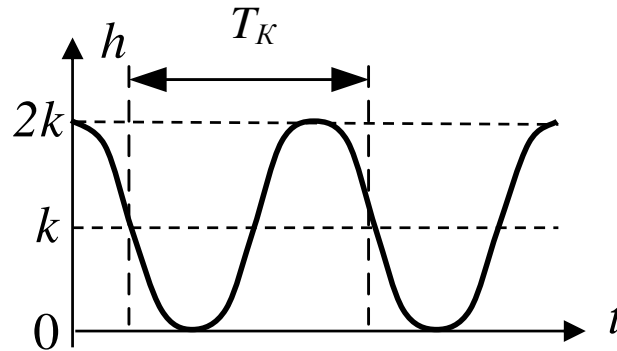


Рис. 52. Переходная характеристика

Колебания не затухают (автоколебательный процесс).

По ПХ можно определить все параметры консервативного звена:

- k – равен амплитуде колебаний;
- $T = \frac{T_K}{2\pi}$.

5.2.4.4 Весовая функция (**ВФ**) $w(t)$, реакция на единичное импульсное воздействие:

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{d}{dt} h(t) = \frac{d}{dt} \left(k \left(1 - \cos \frac{t}{T} \right) \cdot 1(t) \right) = \\ &= \left(-\frac{k}{T} \right) \cdot \left(-\sin \frac{t}{T} \right) = \frac{k}{T} \cdot \sin \frac{t}{T} . \end{aligned} \quad (94)$$

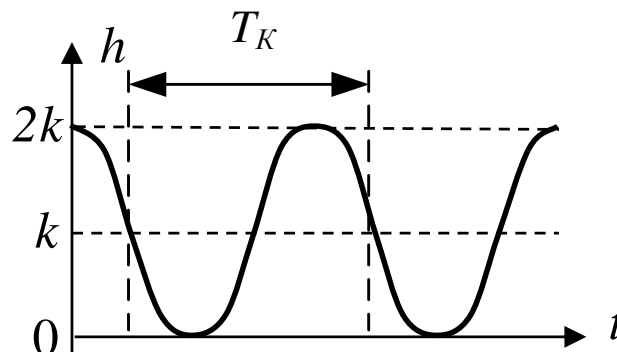


Рис. 53. Весовая функция

5.2.4.5 Частотная передаточная функция (**ЧПФ**) $W(j\omega)$:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= W(p) \Big|_{p \rightarrow j\omega} = U(\omega) + jV(\omega) = \\ &= \frac{k}{T^2(j\omega)^2 + 1} = \frac{k}{1 - T^2\omega^2}. \end{aligned} \quad (95)$$

5.2.4.6 Вещественная частотная характеристика (**ВЧХ**) $U(\omega)$:

$$U(\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2}. \quad (96)$$

5.2.4.7 Мнимая частотная характеристика (**МЧХ**) $V(\omega)$:

$$V(\omega) \equiv 0, \quad \forall \omega. \quad (97)$$

5.2.4.8 Амплитудно-фазовая частотная характеристика (**АФЧХ**)

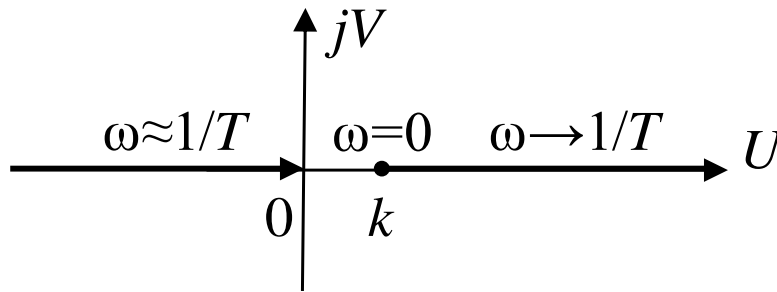


Рис. 54. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

5.2.4.9 Амплитудно частотная характеристика (**АЧХ**) $A(\omega)$:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \sqrt{\left(\frac{k}{1 - T^2\omega^2}\right)^2 + 0} = \\ &= \sqrt{\frac{k^2}{(1 - T^2\omega^2)^2}} = \frac{k^2}{|1 - T^2\omega^2|}. \end{aligned} \quad (98)$$

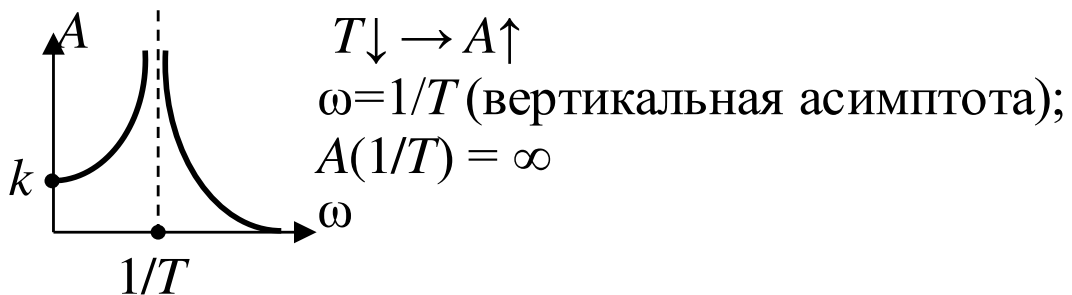


Рис. 55. Амплитудно частотная характеристика

5.2.4.10 Фазовая частотная характеристика (**ФЧХ**) $\phi(\omega)$:

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \begin{cases} 0, & \omega < \frac{1}{T}; \\ -\pi, & \omega > \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (99)$$

Так как в формуле « $\rightarrow$ », график от 0 до $-\pi$.

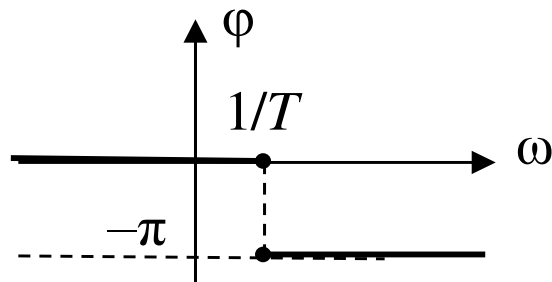


Рис. 56. Фазовая частотная характеристика

5.2.4.11 Логарифмическая амплитудная характеристика (**ЛАХ**) $L(\omega)$:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k^2}{|1 - T^2 \omega^2|}. \quad (100)$$

Исходя из ЛАХ колебательного звена при $\xi=0$ получим:

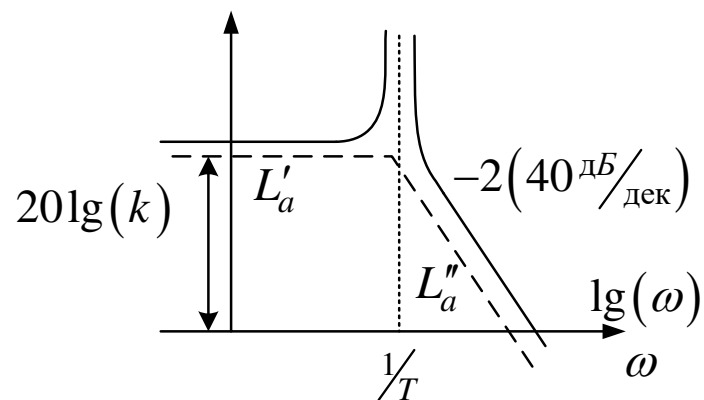


Рис. 57. Логарифмическая амплитудная характеристика

5.2.4.12 Логарифмическая фазовая характеристика (ЛФХ) $\varphi(\omega)$

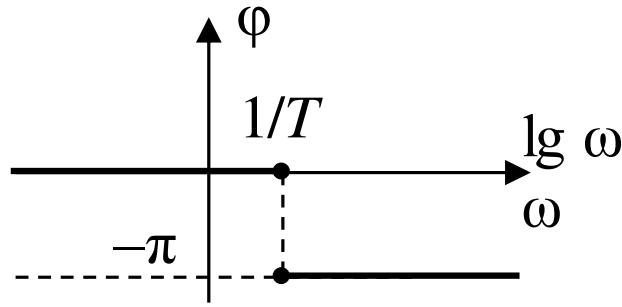


Рис. 58. Логарифмическая фазовая характеристика

5.2.5. Аperiodическое звено II-го порядка $\xi \geq 1$

5.2.5.1 Дифференциальное уравнение (ДУ):

$$T^2 \cdot \underset{\text{Выход}}{\ddot{y}(t)} + 2 \cdot T \cdot \xi \cdot \underset{\text{Вход}}{\dot{y}(t)} + y(t) = k \cdot u(t) . \quad (101)$$

5.2.5.2 Передаточная функция (ПФ) $W(p)$:

$$W(p) = \frac{k}{T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot T \cdot \xi \cdot p + 1} . \quad (102)$$

Определим дискриминант квадратного уравнения, записанного в знаменателе ПФ:

$$D = b^2 - 4ac = 4T^2 \xi^2 - 4T^2 = 4T^2 (\xi^2 - 1) \geq 0;$$

$$\xi \geq 1 \Rightarrow \xi^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow \exists 2 \text{ вещественных корня } (\lambda_1, \lambda_2) \Rightarrow \quad (103)$$

$$\Rightarrow T^2 p^2 + 2T\xi p + 1 = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1).$$

Тогда ПФ может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{k}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1} = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} = \\ &= \frac{k_1}{(T_1 p + 1)} \cdot \frac{k_2}{(T_2 p + 1)}, \quad k = k_1 \cdot k_2. \end{aligned} \quad (104)$$

То есть аperiodическое звено II-го порядка может быть представлено как последовательное соединение двух аperiodических звеньев I-го порядка $\Rightarrow$ оно не относится к элементарным звеньям.

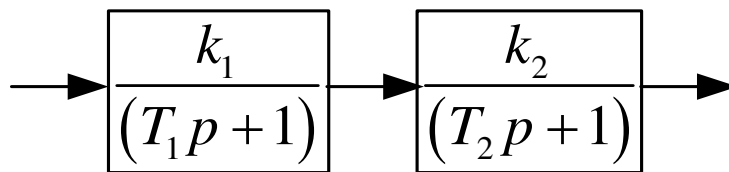
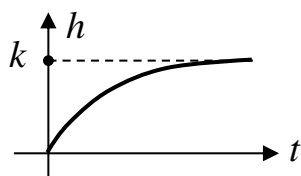


Рис. 59. Последовательное соединение двух аperiodических звеньев I-го порядка

5.2.5.3 Переходная характеристика (ПХ) $h(t)$, реакция на единичное ступенчатое воздействие

Апериодическое звено
I-го порядка



Апериодическое звено
II-го порядка



В нулевой момент времени касательная к графику сама ось абсцисс t

Рис. 60. Переходная характеристика

5.2.6. Интегрирующее звено

5.2.6.1 Дифференциальное уравнение (ДУ):

Первый вид

$$T \cdot \underset{\text{Выход}}{\dot{y}(t)} = k \cdot \underset{\text{Вход}}{u(t)} . \quad (105)$$

Второй вид

$$\underset{\text{Выход}}{\dot{y}(t)} = k \cdot \underset{\text{Вход}}{u(t)} = \frac{1}{T} \cdot \underset{\text{Вход}}{u(t)} , \quad (106)$$

где $k = 1/T$; T – постоянная времени, время, необходимое для того, чтобы сигнал на выходе стал равен сигналу на входе.

Чем больше постоянная времени T , тем медленнее протекают процессы в системе, то есть T характеризует быстродействие системы (звена).

5.2.6.2 Передаточная функция (ПФ) $W(p)$:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{1}{T} \cdot u(t) = k \cdot u(t) \rightarrow p \cdot y(p) = \frac{1}{T} \cdot u(p) = k \cdot u(p) \rightarrow \\ &\rightarrow W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{1}{T \cdot p} = \frac{k}{p} . \end{aligned} \quad (107)$$

5.2.6.3 Переходная характеристика (ПХ) $h(t)$, реакция на единичное ступенчатое воздействие:

$$\begin{aligned} T \dot{h}(t) &= \mathbf{1}(t) \Rightarrow \dot{h}(t) = \frac{1}{T} \cdot \mathbf{1}(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow h(t) &= \int_0^t \frac{1}{T} \cdot \mathbf{1}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^t \mathbf{1}(t) \cdot dt = \frac{t}{T} . \end{aligned} \quad (108)$$

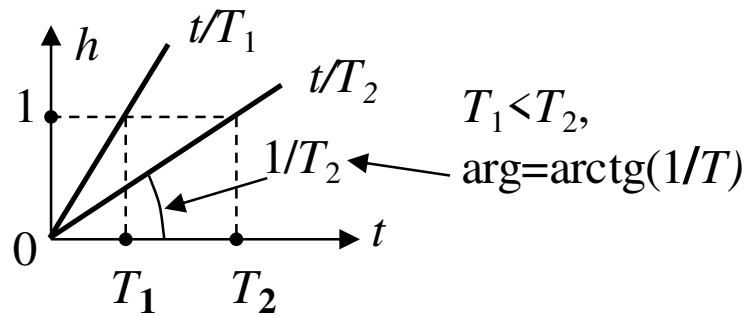


Рис. 61. Переходная характеристика

По ПХ можно определить параметры интегрирующего звена $k = \frac{1}{T}$.

5.2.6.4 Весовая функция (**ВФ**) $w(t)$, реакция на единичное импульсное воздействие:

$$T\dot{w}(t) = \delta(t) \Rightarrow \dot{w}(t) = \frac{1}{T} \underbrace{\int_0^{\infty} \delta(t) dt}_{=1} = \frac{1}{T}. \quad (109)$$

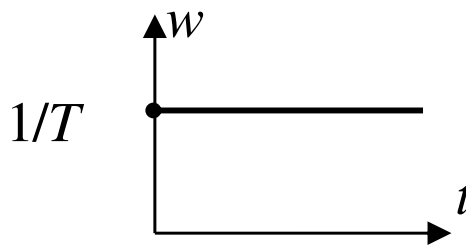


Рис. 62. Весовая функция

5.2.6.5 Частотная передаточная функция (**ЧПФ**) $W(j\omega)$:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= W(p) \Big|_{p \rightarrow j\omega} = \frac{1}{Tj\omega} \cdot \frac{j}{j} = j \frac{1}{Tj^2\omega} = \\ &= \{j^2 = -1\} = -j \frac{1}{T\omega} = \frac{1}{T\omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}, \end{aligned} \quad (110)$$

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = 0 - j \frac{1}{T\omega} = -j \frac{1}{T\omega}. \quad (111)$$

5.2.6.6 Вещественная частотная характеристика (**ВЧХ**) $U(\omega)$:

$$U(\omega) \equiv 0, \forall \omega. \quad (112)$$

5.2.6.7 Мнимая частотная характеристика (**МЧХ**) $V(\omega)$:

$$V(\omega) = -\frac{1}{T\omega}, \forall \omega. \quad (113)$$

5.2.6.8 Амплитудно-фазовая частотная характеристика (**АФЧХ**):

$$W(j\omega) = A \cdot e^{-j\varphi}, \quad (114)$$

$$\varphi(\omega) = -\pi/2. \quad (115)$$

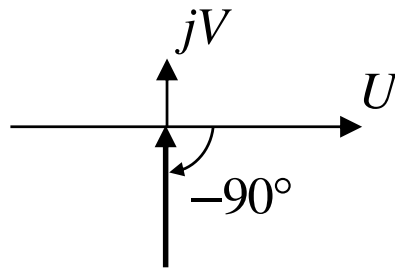


Рис. 63. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

5.2.6.9 Амплитудно частотная характеристика (**АЧХ**) $A(\omega)$:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{T \cdot \omega}\right)^2} = \frac{1}{T \cdot \omega}. \quad (116)$$

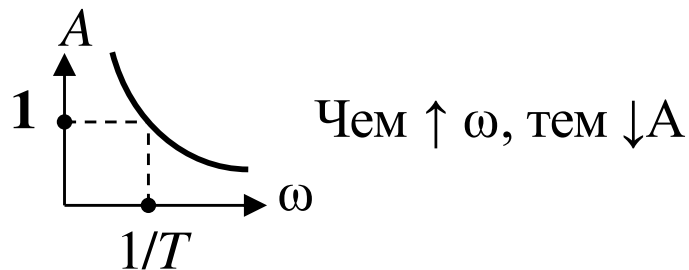


Рис. 64. Амплитудно частотная характеристика

5.2.6.10 Фазовая частотная характеристика (**ФЧХ**) $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\pi/2 = -90^\circ. \quad (117)$$

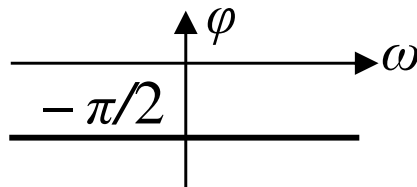


Рис. 65. Фазовая частотная характеристика

5.2.6.11 Логарифмическая амплитудная характеристика (**ЛАХ**) $L(\omega)$:

$$\begin{aligned}
 L(\omega) &= 20 \cdot \lg A(\omega) = 20 \cdot \lg \left(\frac{1}{T \cdot \omega} \right) = \\
 &= \left\{ \lg \frac{x}{y} = \lg x - \lg y \right\} = \\
 20 \lg 1 - 20 \lg T \omega &= \{ \lg(xy) = \lg x + \lg y \} = \\
 &= 0 \\
 &= \underbrace{-20 \lg T}_{\text{число (const)}} - 20 \lg \omega.
 \end{aligned}
 \tag{118}$$

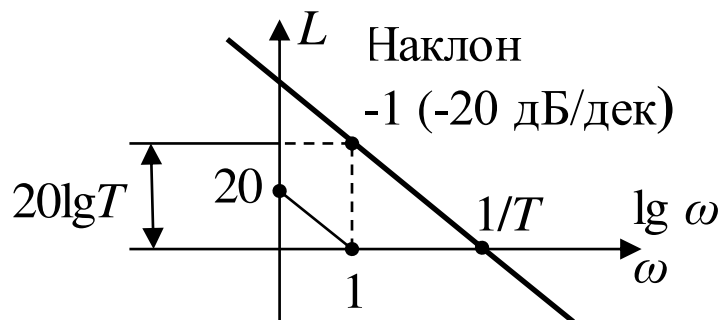


Рис. 66. Логарифмическая амплитудная характеристика

5.2.6.12 Логарифмическая фазовая характеристика (**ЛФХ**) $\phi(\omega)$:

$$\phi(\lg \omega) = -\pi/2 = -90^\circ.
 \tag{119}$$

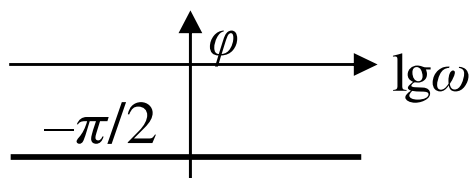


Рис. 67. Логарифмическая фазовая характеристика

5.2.7. Дифференцирующее звено

5.2.7.1 Дифференциальное уравнение (**ДУ**):

$$\underset{\text{Выход}}{y(t)} = T \cdot \underset{\text{Вход}}{\dot{u}(t)}.
 \tag{120}$$

5.2.7.2 Передаточная функция (**ПФ**) $W(p)$:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= T \cdot \dot{u}(t) \rightarrow y(p) = T \cdot p \cdot u(p) \rightarrow \\
 &\rightarrow W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = T \cdot p.
 \end{aligned}
 \tag{121}$$

5.2.7.3 Переходная характеристика (**ПХ**) $h(t)$, реакция на единичное ступенчатое воздействие:

$$h(t) = T \cdot \dot{\mathbf{1}}(t) = T \cdot \delta(t) . \quad (122)$$

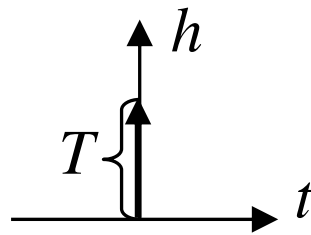


Рис. 68. Переходная характеристика

5.2.7.4 Весовая функция (**ВФ**) $w(t)$, реакция на единичное импульсное воздействие:

$$w(t) = T \cdot \dot{\delta}(t) . \quad (123)$$

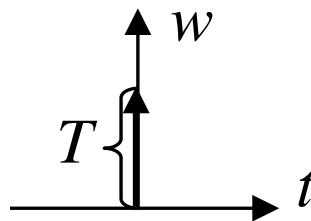


Рис. 69. Весовая функция

5.2.7.5 Частотная передаточная функция (**ЧПФ**) $W(j\omega)$:

$$W(j\omega) = W(p) \big|_{p \rightarrow j\omega} = T(j\omega) = jT\omega = \omega T \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} , \quad (124)$$

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = 0 + jT \cdot \omega = jT \cdot \omega . \quad (125)$$

5.2.7.6 Вещественная частотная характеристика (**ВЧХ**) $U(\omega)$:

$$U(\omega) \equiv 0, \forall \omega . \quad (126)$$

5.2.7.7 Мнимая частотная характеристика (**МЧХ**) $V(\omega)$:

$$V(\omega) = T\omega, \forall \omega . \quad (127)$$

5.2.7.8 Амплитудно-фазовая частотная характеристика (**АФЧХ**):

$$W(j\omega) = A \cdot e^{j\varphi} , \quad (128)$$

$$\varphi(\omega) = \pi/2 . \quad (129)$$

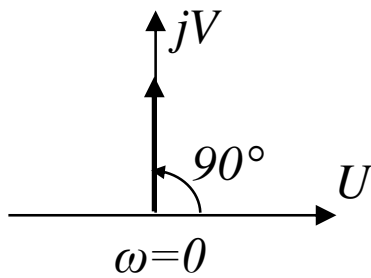


Рис. 70. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

5.2.7.9 Амплитудно частотная характеристика (**АЧХ**) $A(\omega)$:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \sqrt{0^2 + (T \cdot \omega)^2} = T \cdot \omega . \quad (130)$$

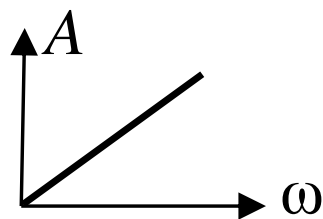


Рис. 71. Амплитудно частотная характеристика

5.2.7.10 Фазовая частотная характеристика (**ФЧХ**) $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \pi/2 = 90^\circ . \quad (131)$$

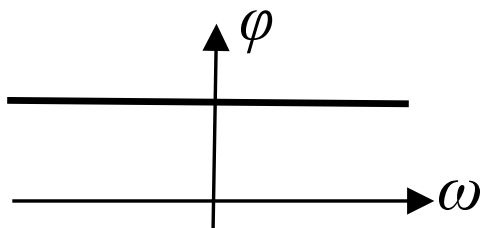


Рис. 72. Фазовая частотная характеристика

5.2.7.11 Логарифмическая амплитудная характеристика (**ЛАХ**) $L(\omega)$:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega) = 20 \cdot \lg (T \omega) = 20 \cdot \lg T + 20 \cdot \lg \omega . \quad (132)$$

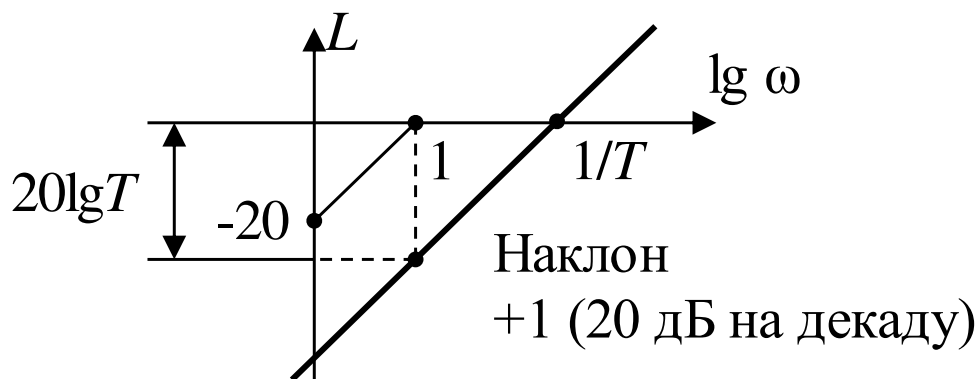


Рис. 73. Логарифмическая амплитудная характеристика

5.2.7.12 Логарифмическая фазовая характеристика (ЛФХ) $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\lg \omega) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ. \quad (133)$$

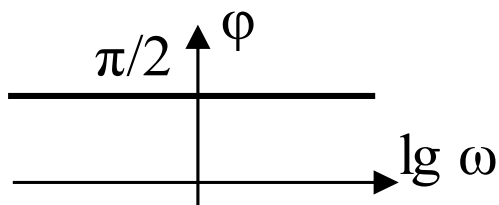


Рис. 74. Логарифмическая фазовая характеристика

Вопросы для проверки

1. Что такое передаточная функция системы/элемента?
2. Можно ли зная передаточную функцию получить дифференциальное уравнение?
3. Как определить по передаточной функции порядок системы?
4. Физический смысл постоянной времени?
5. Что характеризует параметр ξ

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ

6.1. Определение передаточной функции замкнутой системы по каналу управления

Замкнутый контур управления состоит из объекта управления, регулятора и исполнительного устройства:

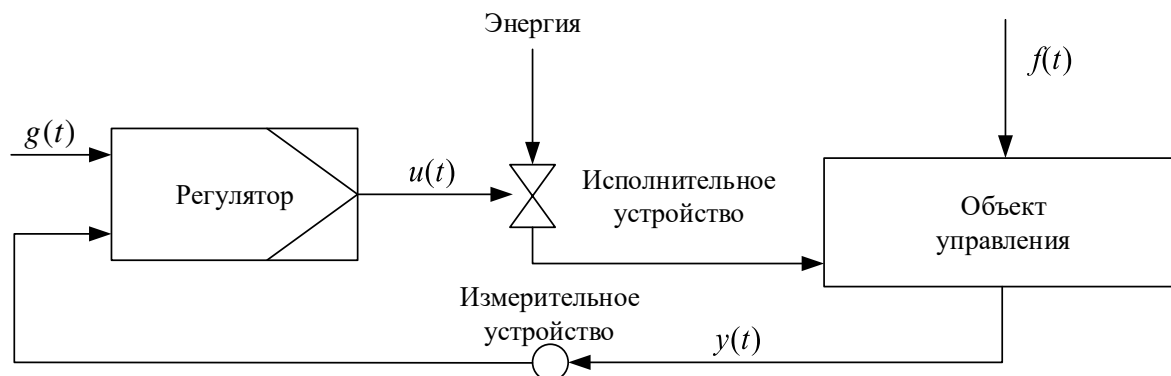


Рис. 75. Замкнутый контур управления

Структурно-аналитическая схема САУ показана на рис. 76.

Объект управления с одним управляющим $u(t)$ и одним возмущающим $f(t)$ воздействиями описывается уравнением:

$$y(t) = W_{OY}(p) \cdot u(t) - W_{OB}(p) \cdot f(t). \quad (134)$$

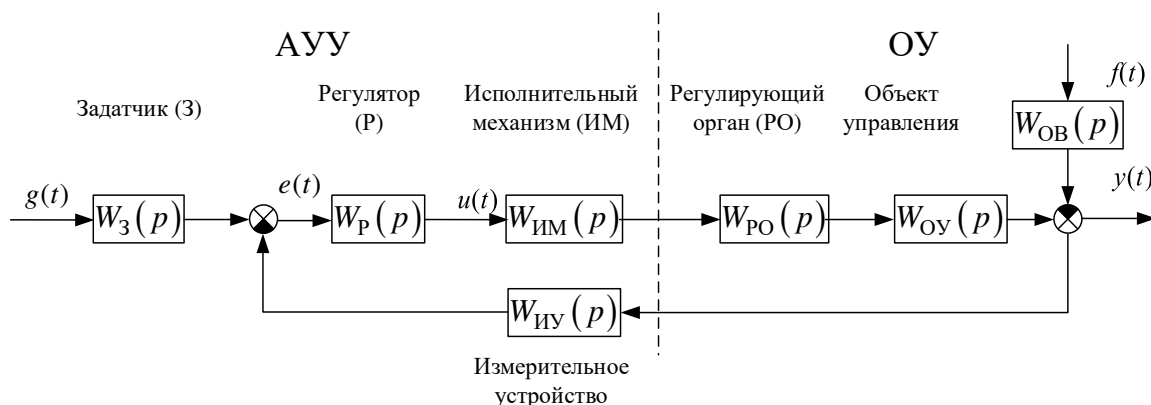


Рис. 76. Структурно-аналитическая схема САУ

На рис. 76 введены следующие обозначения: $y(t)$ – регулируемая величина; $W_{OY}(p)$ – передаточная функция объекта по управляющему воздействию; $W_{OB}(p)$ – передаточная функция объекта по возмущающему воздействию.

Автоматическое управляющее устройство (АУУ) состоит из измерительного устройства, элемента сравнения, исполнительного устройства и регулятора. Измерительное устройство осуществляет преобразование регулируемой переменной $y(t)$ в переменную, удобную для сравнения с задающим воздействием $g(t)$. Измерительное устройство может

обладать инерционными свойствами, поэтому в общем случае описывается передаточной функцией $W_{ИУ}(p)$. Если измерительное устройство является безынерционным, то ошибка:

$$e(t) = k_3 \cdot g(t) - k_{ИУ} \cdot y(t), \quad (135)$$

где $k_{ИУ}$ – коэффициент передачи измерительного устройства; k_3 – коэффициент передачи задатчика.

Передаточная функция АСУ по задающему воздействию – передаточная функция преобразованной замкнутой АСУ с одним звеном при возмущающем воздействии $f(p) = 0$ и входном управляющем воздействии:

$$\begin{aligned} W_{ЗАМ_{УПР}}(p) &= \frac{Y(p)}{G(p)} = \\ &= W_3(p) \cdot \frac{W_P(p) \cdot W_{ИМ}(p) \cdot W_{РО}(p) \cdot W_{ОУ_{УПР}}(p)}{1 + W_P(p) \cdot W_{ИМ}(p) \cdot W_{РО}(p) \cdot W_{ОУ_{УПР}}(p) \cdot W_{ИУ}(p)}. \end{aligned}$$

6.2. Определение передаточной функции замкнутой системы по каналу возмущения

Передаточная функция АСУ по возмущающему воздействию – передаточная функция преобразованной замкнутой АСУ с одним звеном при задающем воздействии $g(t) = 0$ и входном возмущающем воздействии.

Преобразуем структурно-аналитическую схему САР (рис. 76) для расчета передаточной функции замкнутой системы по каналу возмущения (рис. 76):

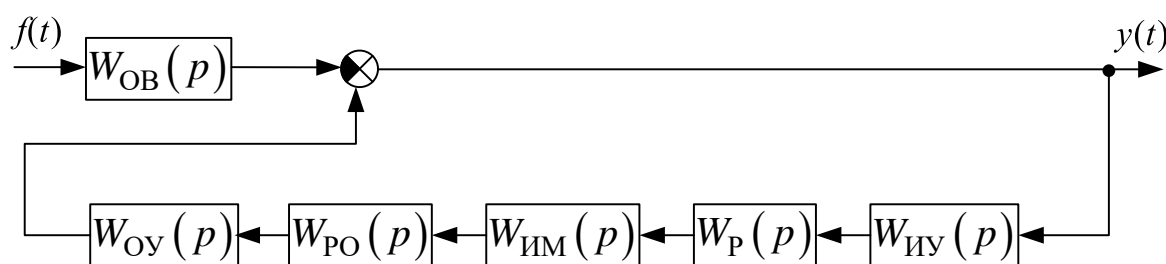


Рис. 77. Структурно-аналитическая схема САР по каналу возмущения

$$\begin{aligned} W_{ЗАМ_{ВОЗМ}}(p) &= \frac{Y(p)}{F(p)} = \\ &= -W_{ОБ_{ВОЗМ}}(p) \cdot \frac{1}{1 + W_P(p) \cdot W_{ИМ}(p) \cdot W_{РО}(p) \cdot W_{ОУ_{ВОЗМ}}(p) \cdot W_{ИУ}(p)}. \end{aligned}$$

6.3. Определение передаточной функции замкнутой системы по ошибке регулирования

Передаточная функция АСУ по ошибке регулирования – передаточная функция преобразованной замкнутой АСУ с одним звеном при возмущающем воздействии $f(t)=0$, где в качестве выходной величины выступает ошибка регулирования.

Преобразуем структурно-аналитическую схему САР (рис. 76) для расчета передаточной функции замкнутой системы по ошибке регулирования (рис. 76):

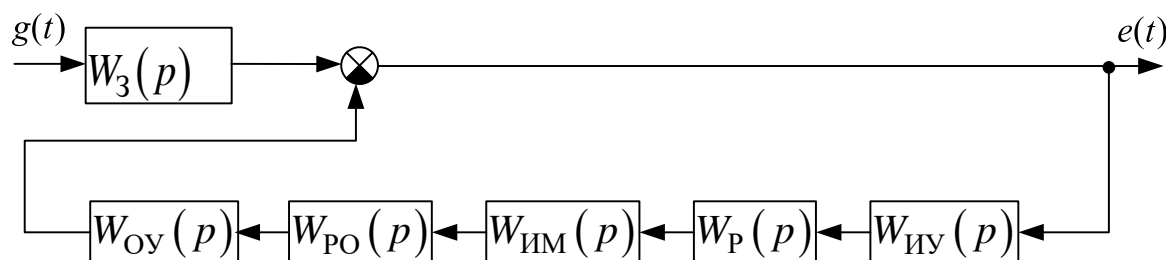


Рис. 78. Структурно-аналитическая схема САР по ошибке регулирования

$$\begin{aligned} W_{\text{зАМ}_{\text{ERR}}}(p) &= \frac{E(p)}{G(p)} = \\ &= W_3(p) \cdot \frac{1}{1 + W_P(p) \cdot W_{\text{ИМ}}(p) \cdot W_{\text{РО}}(p) \cdot W_{\text{ОУ}_{\text{ВОЗМ}}}(p) \cdot W_{\text{ИУ}}(p)}. \end{aligned} \quad (136)$$

Вопросы для проверки

1. Что называется, передаточной функцией?
2. Как получить выражение для передаточной функции, если известно дифференциальное уравнение системы?
3. Укажите связь между передаточными функциями системы в разомкнутом и замкнутом состоянии.
4. Что общее у передаточных функций системы по управляющему, возмущающему воздействиям и по ошибке?

7. ПОНЯТИЯ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ

Проявлением, по которому можно судить об устойчивости или неустойчивости системы, является характер изменения ее сигналов во времени, например, управляемой величины $x(t)$. Если управляемая величина $x(t)$ после прекращения изменения, например, задающего воздействия $x_3(t)$ становится с течением времени постоянной, то система ведет себя устойчиво. Если же управляемая величина $x(t)$ – возрастает, то система ведет себя неустойчиво (рис. 79).

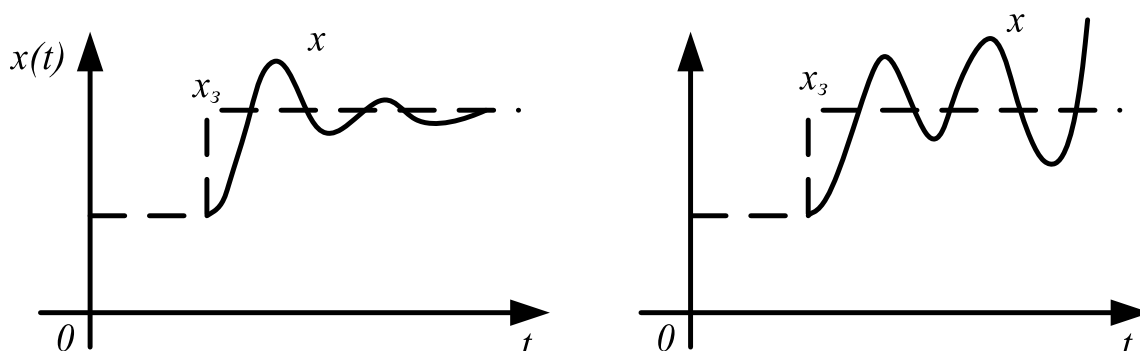


Рис. 79. Графики изменения сигналов АСУ во времени
а – устойчивая АСУ; б – неустойчивая АСУ

Причинами неправильного действия главной обратной связи АСУ:

- Выполнение главной обратной связи АСУ по ошибке положительной вместо отрицательной, что практически при любых параметрах делает систему неустойчивой.
- Значительная инерционность элементов замкнутого контура АСУ (например, объекта управления), из-за которой в режиме колебаний системы сигнал главной обратной связи (например, управляемая величина) значительно отстает от входного сигнала (например, задающего воздействия) и оказывается с ним в фазе. Это означает, что связь, выполненная конструктивно как отрицательная, в динамическом режиме (режиме гармонических колебаний) начинает на определенной частоте действовать как положительная. Это ведет к раскачиванию системы и нарушению ее устойчивости.

Существует много критериев устойчивости объекта в зависимости от типов его моделей. Обычно применяют два подхода к определению устойчивости:

- прямой (непосредственный);
- косвенный.

При прямом подходе записывают любой процесс управления и, зная его желаемое состояние, исходя из определения устойчивости и неустойчивости, делают заключения о его качествах. Однако прямой метод

исследования устойчивости объекта не всегда целесообразен, а иногда и невозможен. В этой ситуации для исследования устойчивости объекта используются обычно следующие косвенные методы (рис. 80):



Рис. 80. Косвенные критерии устойчивости

Задачами анализа устойчивости АСУ:

- определение устойчивости или неустойчивости системы при заданных параметрах;
- определение допустимого по условиям устойчивости диапазона изменения некоторых незадаваемых параметров системы;
- выяснение принципиальной возможности устойчивости системы при заданной ее структуре.

Получается, что устойчивость определяется характером движения системы, когда воздействия, выведшие ее из состояния равновесия, прекратили действовать или изменяться во времени. Такое движение системы называют свободным. Оно происходит за счет внутренней энергии самой системы и зависит только от ее свойств (параметров).

7.1. Необходимое и достаточное условие устойчивости непрерывной системы управления (корневой критерий)

Свободное движение линейной или линеаризованной АСУ описывается однородным дифференциальным уравнением:

$$a_0 \cdot \frac{d^n \cdot x(t)}{dt^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1} \cdot x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \cdot x(t) = 0, \quad (137)$$

где $x(t)$ – свободная составляющая выходной (управляемой) величины системы.

Вынужденная составляющая выходной величины, зависящая от вида внешнего воздействия и соответственно от правой части уравнения, на устойчивость системы не влияет.

С математической точки зрения:

- система устойчива, если свободная составляющая $x(t)$ переходного процесса с течением времени стремится к нулю;
- система неустойчива, если свободная составляющая $x(t)$ переходного процесса с течением времени неограниченно возрастает;

- система находится на границе устойчивости, если свободная составляющая $x(t)$ переходного процесса с течением времени не стремится ни к нулю, ни к бесконечности.

Решение уравнения (137) равно сумме:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k \cdot e^{-p_k \cdot t}, \quad (138)$$

где C_k – постоянные, зависящие от начальных условий; p_k – корни характеристического уравнения:

$$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (139)$$

Корни характеристического уравнения могут быть действительными ($p_k = \alpha_k$), мнимыми ($p_k = \pm j\beta_k$) и комплексными ($p_k = \alpha \pm j\beta_k$). При этом комплексные корни всегда попарно сопряжены между собой: если есть корень с положительной мнимой частью, то обязательно существует корень с такой же по модулю, но отрицательной мнимой частью.

Переходная составляющая (138) $x(t)$ при времени $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю лишь в том случае, если каждое слагаемое вида $C_k \cdot e^{-p_k \cdot t} \rightarrow 0$. Характер этой функции времени зависит от вида корня p_k . На рис. 81 изображены возможные случаи расположения корней p_k на комплексной плоскости и соответствующие им функции $x_k(t)$, которые показаны внутри окружностей.

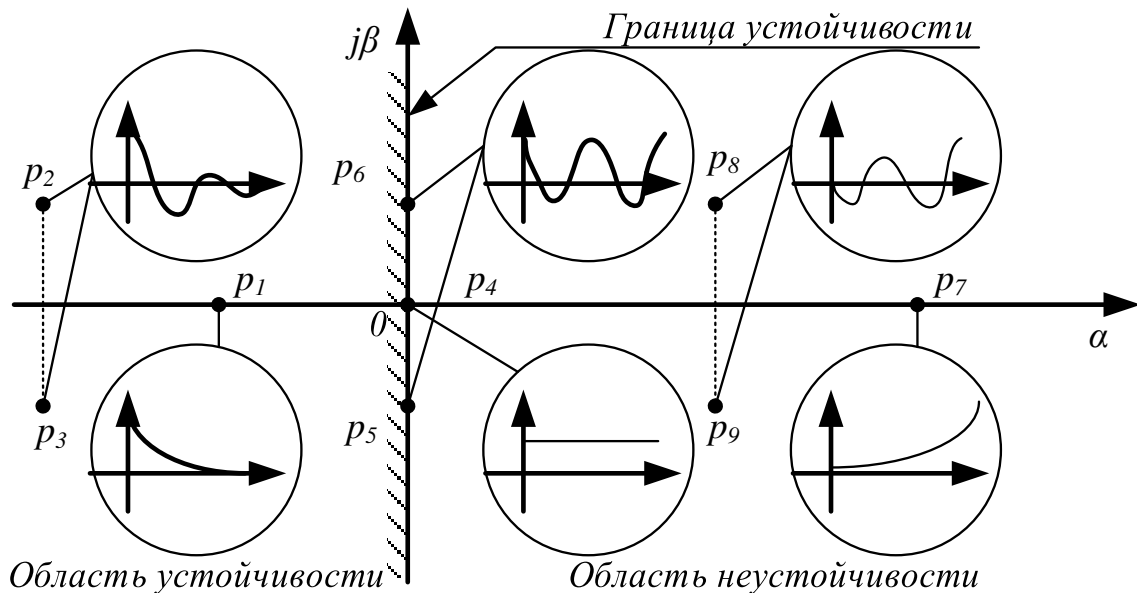


Рис. 81. Влияние корней характеристического уравнения АСУ на составляющие ее свободного движения

Анализ рис. 81 позволяет сформулировать **общее математическое условие устойчивости**: для устойчивости линейной АСУ необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех корней характеристического уравнения системы были отрицательными (или чтобы все корни

характеристического уравнения системы располагались в левой части комплексной плоскости).

Устойчивость системы зависит только от вида корней характеристического уравнения и не зависит от характера внешних воздействий на систему, т. е. устойчивость есть внутреннее свойство системы, присущее ей вне зависимости от внешних условий.

Если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть (располагается в правой части комплексной плоскости), то система будет неустойчивой.

Мнимая ось является границей устойчивости в плоскости корней. Если характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней, то в системе устанавливаются незатухающие гармонические колебания, в этом случае говорят, что система находится на *границе устойчивости*.

7.2. Оценка устойчивости непрерывной системы управления с использованием критерия Рауса-Гурвица (алгебраический критерий)

Критерий Гурвица позволяет провести анализ по коэффициентам характеристического полинома замкнутой системы $D(p)$. Рассмотрим данный критерий.

Пусть линейная стационарная система задана передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}. \quad (140)$$

Характеристический полином системы представляет собой полином, стоящий в знаменателе передаточной функции:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n. \quad (141)$$

По его коэффициентам составляется матрица Гурвица размерности $n \times n$:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}. \quad (142)$$

Порядок составления матрицы H :

1. По главной диагонали выписываются коэффициенты полинома $D(p)$ в порядке возрастания индексов, начиная с a_1 ;
2. Каждая строка заполняется коэффициентами полинома $D(p)$ таким образом, чтобы индексы слева направо возрастали и чтобы строки с четными и нечетными индексами чередовались. Вместо

коэффициентов с индексами, меньше нуля и больше n выписываются нули.

Определителями Гурвица Δ_i где $i = 1, \dots, n$ называются главные диагональные миноры матрицы Гурвица.

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \dots; \Delta_n = \det H, \quad (143)$$

где обозначение $\begin{vmatrix} \end{vmatrix}$ подразумевает определитель матрицы.

Формулировка критерия: для того чтобы линейная стационарная система была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при a_0 все определители Гурвица были строго положительными: $\Delta_i > 0$ где $i = 1, \dots, n$.

Частные случаи критерия:

1. Для асимптотической устойчивости системы первого порядка ($n = 1$) необходимо и достаточно:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0; \quad (144)$$

2. Для асимптотической устойчивости системы второго порядка ($n = 2$) необходимо и достаточно:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0; \quad (145)$$

3. Для асимптотической устойчивости системы третьего порядка ($n = 3$) необходимо и достаточно:

$$a_i > 0 \text{ где } i = 1, \dots, 3; \quad (146)$$

$$a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3; \quad (147)$$

4. Для асимптотической устойчивости системы четвертого порядка ($n = 4$) необходимо и достаточно:

$$a_i > 0 \text{ где } i = 1, \dots, 4; \quad (148)$$

$$a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3; \quad a_3 \cdot (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) > a_1^2 \cdot a_4; \quad (149)$$

5. Для асимптотической устойчивости системы пятого порядка ($n = 5$) необходимо и достаточно:

$$a_i > 0 \text{ где } i = 1, \dots, 5; \quad a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3; \quad (150)$$

$$(a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) \cdot (a_3 \cdot a_4 - a_2 \cdot a_5) > (a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5)^2. \quad (151)$$

Пример: Определить методом Гурвица является ли устойчивой система, заданная структурной схемой на рис. 82.

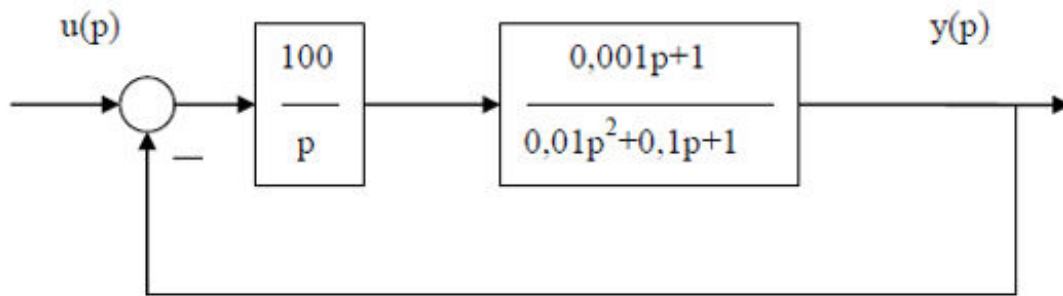


Рис. 82. Структурная схема замкнутой САУ

Решение. Свернем контур регулирования и выпишем передаточную функцию замкнутой системы в виде:

$$W_{\text{ЗАМ}_{\text{УПР}}}(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\frac{100}{p} \cdot \frac{0,001 \cdot p + 1}{0,01 \cdot p^2 + 0,1 \cdot p + 1}}{1 + \frac{100}{p} \cdot \frac{0,001 \cdot p + 1}{0,01 \cdot p^2 + 0,1 \cdot p + 1}} =$$

$$= \frac{100 \cdot (0,001 \cdot p + 1)}{0,01 \cdot p^3 + 0,1 \cdot p^2 + 1,1 \cdot p + 100}.$$
(152)

Очевидно, что данная система является системой третьего порядка и ее характеристический полином $D(p)$:

$$D(p) = 0,01 \cdot p^3 + 0,1 \cdot p^2 + 1,1 \cdot p + 100$$

$$\Downarrow$$

$$D(p) = a_0 \cdot p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3$$
(153)

6. Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости при $n = 3$:

$$a_i > 0, \text{ где } i = 1, \dots, 3; - \text{выполнен}$$
(154)

$$a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$$

$\Downarrow$

$$0,1 \cdot 1,1 > 0,01 \cdot 100; \quad - \text{не выполнено}$$
(155)

Следовательно, система неустойчива.

7.3. Частотные критерии устойчивости

7.3.1. Принцип аргумента

Процессы управления в линейных САУ описываются уравнениями вида:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x.$$
(156)

Общее решение однородного уравнения

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = 0, \quad (157)$$

имеет вид: $y_i(t) = c_i e^{p_i t}$, $i = 1, \dots, n$, где p_i являются корнями характеристического уравнения:

$$A_p(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n), \quad (158)$$

и определяют устойчивость системы, т.е. способность возвращаться в установившееся состояние после снятия управляющих или возмущающих воздействий.

Система является устойчивой, если все корни располагаются в левой полуплоскости комплексной переменной, т.е. являются отрицательными или имеют отрицательные вещественные части. Для определения устойчивости используются различные критерии, позволяющие определять знаки вещественных частей корней без их вычисления.

Наибольшее применение нашли частотные критерии устойчивости, а среди них критерий Найквиста и метод ЛЧХ, основанные на принципе аргумента. При переходе в частотную область заменой $p = j\omega$ изменение аргумента каждого сомножителя $(j\omega - p_i)$ в уравнении (158) при $-\infty \leq \omega \leq +\infty$ определяется в среднем следующим выражением:

$$\Delta \arg(j\omega - p_i) = \pm \pi, \quad (159)$$

где знак "+" соответствует корню p_i левой, а "-" – правой полуплоскости (рис. 83).

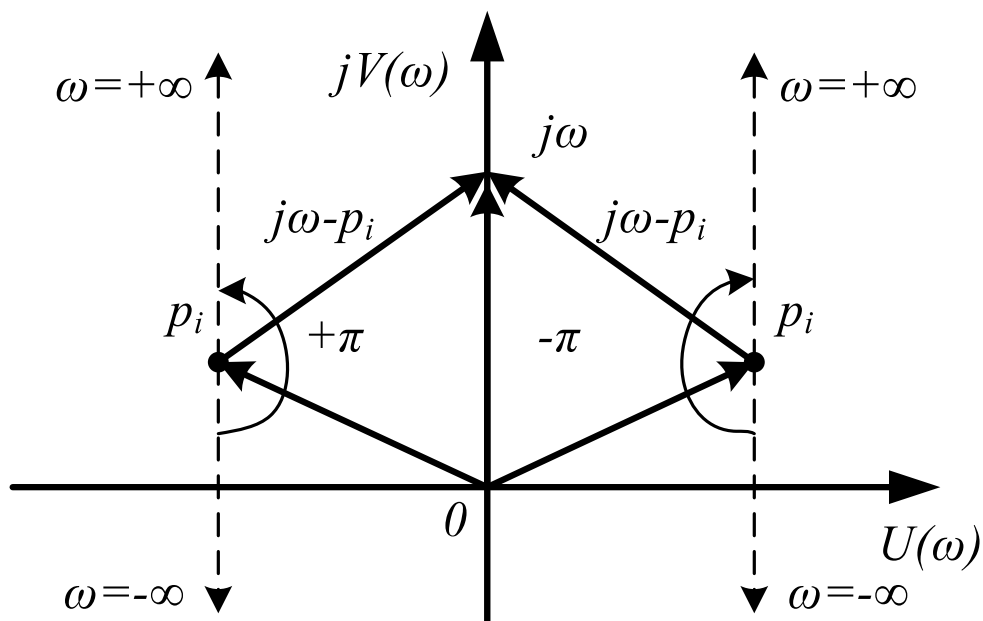


Рис. 83. Изменение аргумента $(j\omega - p_i)$ для корней левой и правой полуплоскостей

Если характеристическое уравнение имеет m корней в правой и $(n - m)$ в левой полуплоскости, то:

$$\Delta \arg A_p(j\omega) = (n - m) \cdot \pi - m \cdot \pi = (n - 2 \cdot m) \cdot \pi \text{ при } -\infty \leq \omega \leq +\infty. \quad (160)$$

Для устойчивой системы $m = 0$ (в правой полуплоскости корни отсутствуют), и принцип аргумента с учетом симметрии $A_p(j\omega)$ определяется выражением:

$$\Delta \arg A_p(j\omega) = \pi \cdot n \text{ при } -\infty \leq \omega \leq +\infty. \quad (161)$$

Анализ устойчивости замкнутых САУ основывается на применении принципа аргумента к выражению:

$$\phi(p) = 1 + W(p) = \frac{A_p(p) + B_p(p)}{A_p(p)} = \frac{A(p)}{A_p(p)}, \quad (162)$$

где $W(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы, $A(p)$ – характеристический полином замкнутой системы.

Согласно данному принципу изменение аргумента определяется выражением:

$$\Delta \arg \phi(j\omega) = \Delta \arg A(j\omega) - \Delta \arg A_p(j\omega) \text{ при } -\infty \leq \omega \leq +\infty. \quad (163)$$

При наличии m корней в характеристическом уравнении замкнутой системы, расположенных в правой полуплоскости комплексной переменной, и при условии устойчивости разомкнутой системы справедливо равенство:

$$\Delta \arg \phi(j\omega) = -\pi \cdot (n - m) + \pi \cdot n = \pi \cdot m \text{ при } -\infty \leq \omega \leq +\infty. \quad (164)$$

7.3.2. Оценка устойчивости непрерывной системы управления с использованием критерия Михайлова

Пусть дан характеристический полином замкнутой системы вида $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$. Проведя замену p на $j\omega$, получим выражение:

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} j\omega + a_n = \\ &= U(\omega) + jV(\omega), \end{aligned} \quad (165)$$

где $U(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots$ – вещественная функция Михайлова;

$V(\omega) = a_{n-1} - a_{n-3}\omega^2 + a_{n-5}\omega^4 - \dots$ – мнимая функция Михайлова.

При изменении частоты конец вектора $D(j\omega)$ прочертит на комплексной плоскости некоторую кривую, которая называется годографом Михайлова [1].

Для того чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при изменении $0 < \omega < \infty$ вектор годографа Михайлова $D(j\omega)$ повернулся

против часовой стрелки вокруг начала координат, нигде не обращаясь в ноль, на угол $\Delta\varphi = \pi \cdot n/2$, где n – порядок системы.

Как видно из выражений для вещественной и мнимой функций Михайлова, для устойчивой системы на частоте $\omega = 0$ годограф Михайлова берет свое начало на вещественной положительной полуоси в точке a_n . При изменении частоты $0 < \omega < \infty$ годограф Михайлова проходит n квадрантов против часовой стрелки, поочередно пересекая вещественную и мнимую оси (рис. 84).

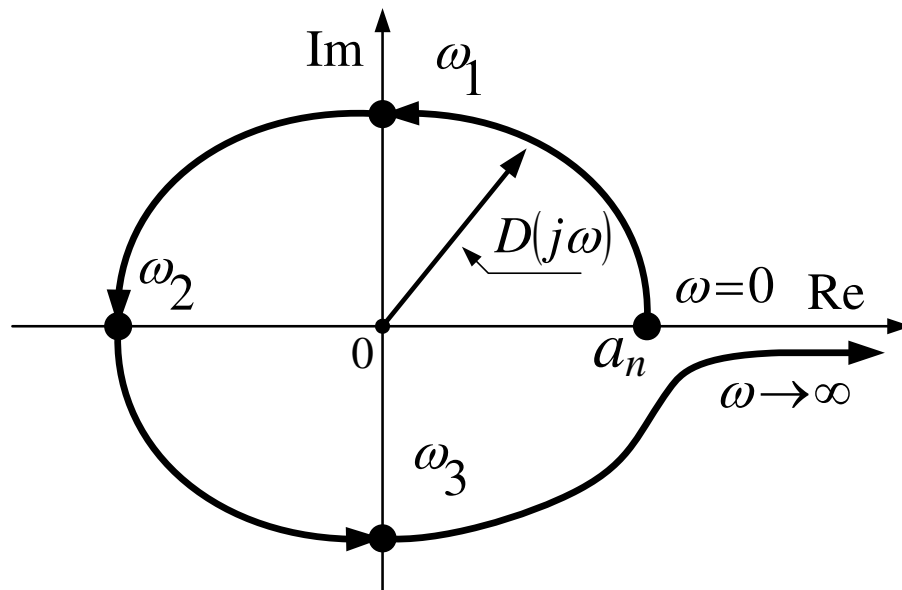


Рис. 84. Годограф Михайлова

В эти моменты, соответственно, то мнимая $V(\omega)$, то вещественная $U(\omega)$ функции Михайлова обращаются в ноль. Причем на частоте $\omega = 0$ именно мнимая функция Михайлова равна нулю $V(0) = 0$.

Следствие из критерия Михайлова: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы корни мнимой и вещественной функций чередовались, т.е. $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 \dots$,

где $V(0) = 0, V(\omega_2) = 0, V(\omega_4) = 0; U(\omega_1) = 0, U(\omega_3) = 0$.

Пример

С помощью критерия Михайлова исследовать устойчивость системы.

Решение.

Характеристический полином данной системы имеет вид:

$$D(p) = 0.01p^3 + 0.1p^2 + 1.1p + 100. \quad (166)$$

Проведем замену $p \rightarrow j \cdot \omega$:

$$D(j\omega) = 0.01(j\omega)^3 + 0.1(j\omega)^2 + 1.1j\omega + 100. \quad (167)$$

Выделим вещественную и мнимую функции Михайлова:

$$\begin{cases} U(\omega) = 100 - 0.1 \cdot \omega^2 \\ V(\omega) = 1.1 \cdot \omega - 0.01 \cdot \omega^3 = \omega \cdot (1.1 - 0.01\omega^2) \end{cases}, \quad (168)$$

Для нахождения корней вещественной функции Михайлова приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} U(\omega) &= 100 - 0.1\omega^2 = 0; \\ \Downarrow \\ \omega_B &= 31,62 \text{ с}^{-1}. \end{aligned} \quad (169)$$

Для нахождения корней мнимой функции Михайлова приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} V(\omega) &= 1.1\omega - 0.01\omega^3 = 0 \\ \Downarrow \\ \omega_{M1} &= 0, \text{ с}^{-1} \quad \omega_{M2} = 10,45, \text{ с}^{-1}. \end{aligned} \quad (170)$$

Полученные частоты расставим в порядке возрастания:

$$0_{\omega_{M1}} < 10,45_{\omega_{M2}} < 31,62_{\omega_B}. \quad (171)$$

Таким образом, данная система является неустойчивой, так как корни вещественной и мнимой функций Михайлова не чередуются.

7.3.3. Оценка устойчивости замкнутой непрерывной системы регулирования при известной передаточной функции разомкнутой системы с использованием критерия Найквиста

Данный критерий позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовой частотной характеристике или по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы.

Пусть система замкнута единичной обратной связью (см. рис. 85):

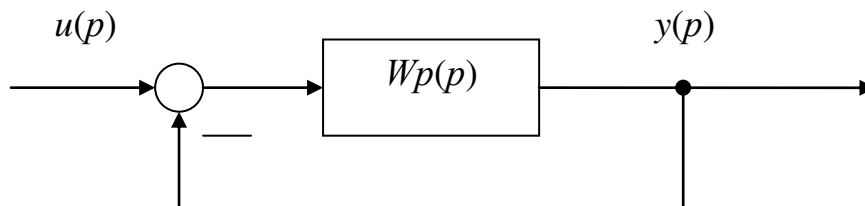


Рис. 85. Структурная схема САУ

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}. \quad (172)$$

Согласно принципу аргумента (163) и (164) очевидно, что для систем, устойчивых в разомкнутом и замкнутом состояниях, выполняется условие критерия Найквиста:

$$\Delta \arg \phi(j\omega) = 0 \text{ при } -\infty \leq \omega \leq +\infty.$$

Графическая интерпретация этого условия для статической системы показана на рис. 86.

Переход к ЧПФ САУ, т.е. к её комплексному коэффициенту передачи, полученному из (162) по выражению:

$$K(j\omega) = W(p)\big|_{p=j\omega} = \phi(j\omega) - 1,$$

дает возможность сформулировать критерий Найквиста следующим образом:

Устойчивая в разомкнутом состоянии САУ, устойчива в замкнутом состоянии только в том, случае, если АФЧХ разомкнутой системы, построенная при $-\infty \leq \omega \leq +\infty$, не охватывает критическую точку с координатами $[-1, j0]$ (рис. 86).

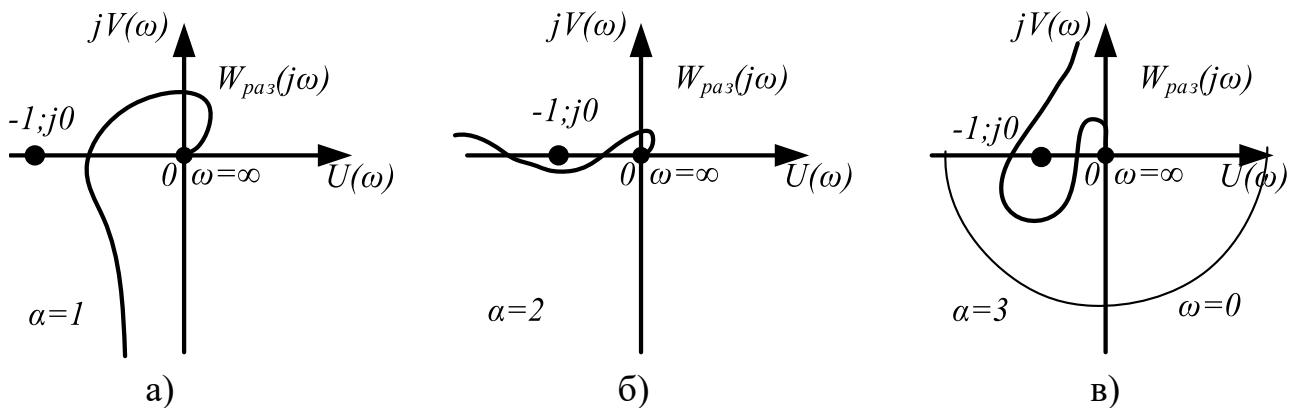


Рис. 86. Интерпретация критерия устойчивости Найквиста в области АФЧХ

а) система с порядком астатизма – 1; б) система с порядком астатизма – 2; в) система с порядком астатизма – 3

7.3.4. Оценка устойчивости непрерывной замкнутой системы управления по ЛЧХ разомкнутой системы

Если характеристическое уравнение для разомкнутой системы $Q(p) = 0$ имеет m корней с неотрицательными (в том числе и нулевыми) вещественными частями, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы разность между числом пересечений логарифмической фазовой характеристикой (ЛФХ) разомкнутой системы уровня $(-\pi)$ снизу вверх $N_{(+)}$ во всех областях, где логарифмическая амплитудная характеристика (ЛАХ) положительна, и числом пересечений сверху вниз $N_{(-)}$ равнялось $m/2$, т.е. $N_{(+)} + N_{(-)} = m/2$.

В частности, если система в разомкнутом состоянии устойчива, то она не имеет корней с неотрицательными вещественными частями ($m = 0$). Следовательно, количество переходов ЛФХ через уровень $(-\pi)$ снизу вверх $N_{(+)}$ и сверху вниз $N_{(-)}$ должно быть одинаково во всех областях, где ЛАХ

положительна: $N_{(+)} = N_{(-)}$ при $L(\omega) > 0$. Если логарифмическая частотная характеристика (ЛЧХ) устойчивой разомкнутой системы имеет монотонный характер, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы на частоте среза $\omega_{\text{ср}}$ (т.е. при $L(\omega_{\text{ср}}) = 0$) ЛФХ разомкнутой САУ располагалась выше уровня $-\pi$ (рис. 87).

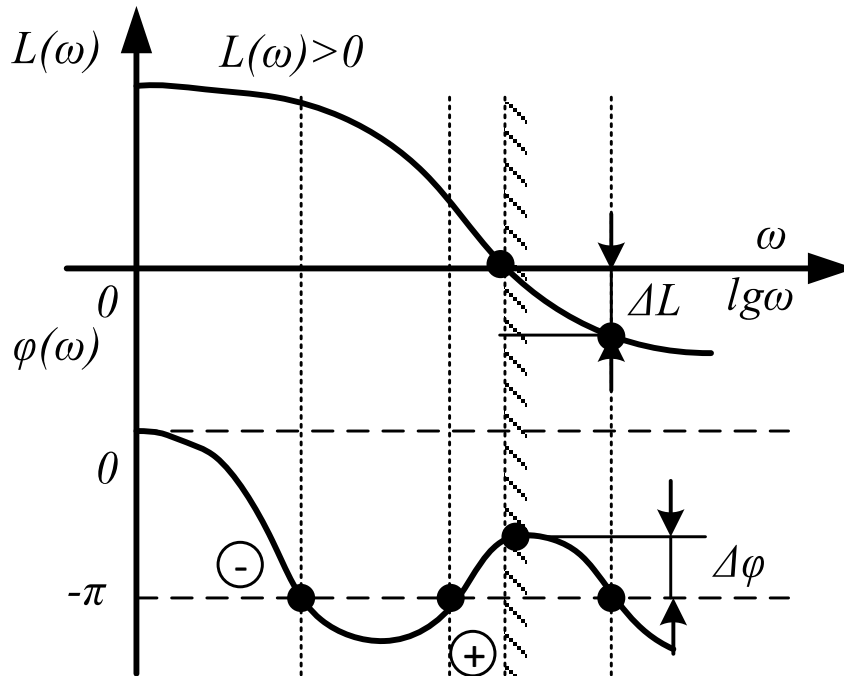


Рис. 87. Интерпретация критерия Найквиста в области ЛЧХ:

Пример

С помощью критерия Найквиста в логарифмической форме определить устойчивость замкнутой системы, представленной на структурной схеме рис. 88.

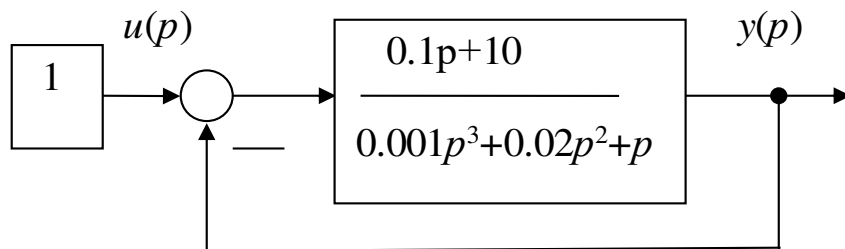


Рис. 88. Структурная схема САУ

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W_p(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{0.1p+10}{0.001p^3+0.02p^2+p} = \frac{10(0.01p+1)}{p(0.01p^2+0.02p+1)}. \quad (173)$$

Характеристическое уравнение разомкнутой системы:

$$Q(p) = p \cdot (0.01p^2 + 0.02p + 1) = 0, \quad (174)$$

имеет три корня: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_{2,3} = -1 \pm j\sqrt{99}$.

Поскольку один из корней имеет неотрицательную вещественную часть ($\lambda_1 = 0$), то в формуле критерия $m = 1$.

Как видно из графика, в области, где ЛАХ положительна ($L(\omega) > 0$) имеет место одно пересечение ЛФХ уровня $-\pi$, сверху вниз. Следовательно, $N_{(+)} = 0$; $N_{(-)} = 1$ и замкнутая САУ неустойчива, так как $N_{(+)} + N_{(-)} \neq m/2 = 1/2$.
 $N_{+} - N_{-} \neq m/2 = 1/2$.

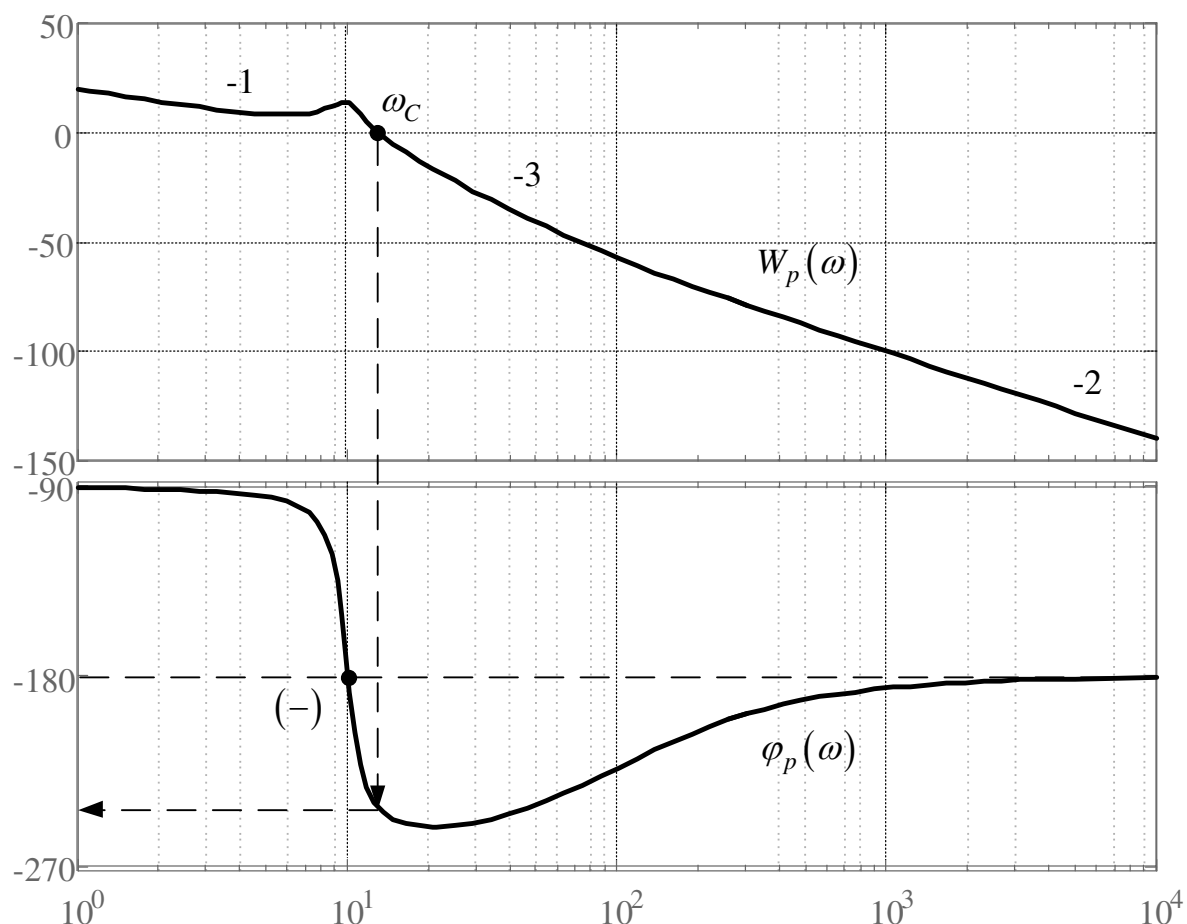


Рис. 89. ЛЧХ разомкнутой системы

Вопросы для проверки

1. Дайте определение устойчивой динамической системы.
2. Как по дифференциальному уравнению системы определить устойчивость?
3. В чем сущность прямого метода анализа устойчивости?
4. Что называется критерием устойчивости?
5. В чем сущность критерия устойчивости Гурвица?
6. В чем сущность критерия устойчивости А.В. Михайлова?
7. В чем сущность критерия устойчивости Найквиста?

8. АСТАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Автоматические системы регулирования принято подразделять на статические и астатические в зависимости от того имеют ли они или не имеют отклонение или ошибку в установившемся состоянии при воздействиях, удовлетворяющих определенным условиям.

Система регулирования называется статической по отношению к внешнему воздействию, если при воздействии, стремящемся с течением времени к некоторому установившемуся постоянному значению, отклонение регулируемой величины так же стремится к постоянному значению, зависящему от величины воздействия.

Система регулирования называется астатической по отношению к внешнему воздействию, если при воздействии, стремящемся с течением времени к некоторому установившемуся постоянному значению, отклонение регулируемой величины стремится к нулю вне зависимости от величины воздействия.

Статизм и астатизм САР рассматривается отдельно применительно к управляющему $u(t)$ и возмущающему $f(t)$ воздействиям.

Система будет статической ($\nu = 0$), если в цепи обратной связи между сигналом ошибки и внешним сигналом интегрирующие звенья в чистом виде отсутствуют, либо все они скомпенсированы дифференцирующими и установившаяся ошибка будет обратно пропорциональна коэффициенту усиления разомкнутой САР, сложенному с единицей. Теоретически ошибку можно приблизить к нулю, устремляя к бесконечности. Это положение реализуется в релейных САР, релейные элементы которых работают в скользящем режиме.

Система будет астатической, если порядок астатизма ПФ разомкнутой системы ($\nu > 0$). Таким образом, в астатической САР в цепи обратной связи между сигналом ошибки и внешним сигналом всегда должны присутствовать интегрирующие звенья в чистом виде (хотя бы одно) – то есть, не должны компенсироваться дифференцирующими звеньями и не должны быть замкнутыми жесткими ОС.

Жесткой обратной связи соответствует обратная связь в виде пропорционального звена.

Если $\nu = 1$, то говорят, что замкнутая САР является астатической 1-го порядка, если $\nu = 2$ – астатической 2-го порядка и т.д.

Для типовых воздействий с помощью теоремы о конечном значении можно рассчитать значения установившейся ошибки.

Например, у САР передаточная функция ошибки по управляющему сигналу имеет вид:

$$\frac{\varepsilon(p)}{g(p)} = \frac{1}{1 + W_{\text{PA3}}(p) \cdot W_{\text{OC}}(p)} = \left\{ \begin{array}{l} W_{\text{PA3}}(p) = \frac{k_v}{p^v} W(p) \\ W_{\text{OC}}(p) = k_{\text{OC}} \end{array} \right\} = \quad (175)$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{k_v}{p^v} W(p) \cdot k_{\text{OC}}} = \frac{p^v}{p^v + k_v \cdot W(p) \cdot k_{\text{OC}}}.$$

Если приложено управляющее воздействие (рис. 90) $g(t) = g_0 t^n$, где n – порядок кривой.

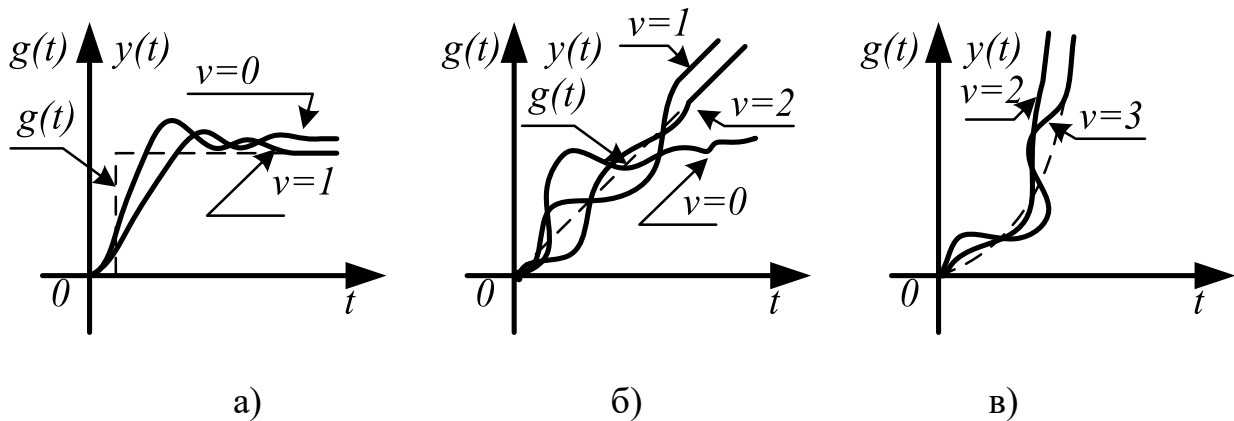


Рис. 90. Графики изменения управляющего воздействия и реакции системы

Изображение управляющего воздействия по Лапласу, будет:

$$g(p) = g_0 \cdot \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Тогда в соответствии с теоремой о конечном значении установившаяся ошибка будет:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{уст}} &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^v}{p^v + k_v \cdot W(p) \cdot k_{\text{OC}}} \cdot g_0 \cdot \frac{n!}{s^{n+1}} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{v-n}}{p^v + k_v \cdot W(p) \cdot k_{\text{OC}}} \cdot g_0 \cdot n!. \end{aligned} \quad (176)$$

Из выражения (176) следует, что $\varepsilon_{\text{уст}} \rightarrow 0$ при $v \geq n + 1$.

Для порядков астатизма $v = 0 \dots 3$ и основных воздействий: постоянное – $n = 0$ (рис. 90, а); линейное – $n = 1$ (рис. 90, б) и парабола $n = 2$ (рис. 90, в) значения установившихся ошибок приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Воздействие	$\nu = 0$	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	рис. 90
Постоянное – $n = 0$	$\frac{g_0}{1 + k_v \cdot k_{OC}}$	0	0	0	а
Линейное – $n = 1$	∞	$\frac{g_0}{k_v \cdot k_{OC}}$	0	0	б
Парабола – $n = 2$	∞	∞	$\frac{2 \cdot g_0}{k_v \cdot k_{OC}}$	0	в

Астатизм САР по возмущающему воздействию определяется порядком астатизма цепи ОС по отношению к возмущению и не зависит от порядка астатизма ОУ. Другими словами, если чистые интеграторы отсутствуют в цепи ОС, то система будет статической, независимо от того, есть ли интеграторы в ОУ или нет.

Вопросы для проверки

1. Какая система называется астатической?
2. Что можно сделать, чтобы повысить точность системы?
3. Какой порядок астатизма должна иметь система для получения постоянного значения ошибки при линейно растущим управляющим сигнале?

Список литературы

1. Теория автоматического управления. Линейные системы: учебно-методическое пособие для выполнения лабораторных работ / Д.А. Ковалев, О.П. Томчина, В.А. Шаряков, О.Л. Шарякова; – СПб. : ВШТЭ СПбГУПТД, – 2019. – 72 с.
2. Лазарева Т. Я., Мартемьянов Ю. Ф. Основы теории автоматического управления: Учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – 352 с.
3. Основы автоматического регулирования теория. / Под ред. В.В. Солодовника – М.: Машгиз, – 1954. – 1142 с.
4. В. В. Резниченко, О. П. Томчина, О. Л. Шарякова. Линейные системы автоматического управления: учеб. пособие / сост.: СПбГАСУ. – СПб., 2016. – 101с.
5. Сенигов П.Н. Теория автоматического управления: Конспект лекций. – Челябинск: ЮУрГУ, 2000. – 93с.
6. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования/ М.: издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, – 1972 г. –768 стр.

Учебное издание

Дмитрий Александрович Ковалёв,
Владимир Анатольевич Шаряков,
Ольга Леонидовна Шарякова

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор и корректор В.А. Басова
Технический редактор Л.Я. Титова

Темплан 2020 г., поз.30

Подп. к печати 24. 05. 20.

Формат 60x84/16.

Бумага тип.№1. Печать офсетная.

Печ. л.5.0.

Уч. – изд. л. 5.0.

Тираж 100 экз. Изд.№ 30.

Цена «С»

Заказ №

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики
Санкт-Петербургского государственного университета промышленных
технологий и дизайна, 198095, СПб., ул. И. Черных, 4.