

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»**
Высшая школа технологии и энергетики
Кафедра автоматизации технологических процессов и производств

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Выполнение контрольной работы

Методические указания для студентов заочной формы обучения
по направлению подготовки
15.03.04 — Автоматизация технологических процессов
и производств

Составитель
И. В. Ремизова

Санкт-Петербург
2023

Утверждено
на заседании кафедры АТПиП
27.04.2022 г., протокол № 4

Рецензент Е. П. Дятлова

Методические указания соответствуют программам и учебным планам дисциплины «Основы теории принятия решений» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств».

В методических указаниях представлен порядок выполнения и оформления контрольной работы. Приведен пример построения математической модели, получения оптимального управленческого решения, проведен анализ чувствительности решения.

Методические указания предназначены для бакалавров заочной формы обучения.

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД
в качестве методических указаний

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
– Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 14.03.2023 г. Рег.№ 5246/21

Высшая школа технологии и энергетики СПб ГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Процесс принятия управленческого решения.....	5
Проработка ситуации и формализация исходной проблемы.....	6
Построение математической модели.....	9
Изучение математической модели и получение математического решения проблемы.....	12
Анализ математического решения проблемы и формирование управленческого решения.....	20
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	34

ВВЕДЕНИЕ

Наука об управлении, принятии решений и методах, связанных с ней, привлекает к себе внимание при решении задач все более различной направленности. Решение, обоснованное математически, будет гораздо эффективнее, чем решение, принятое только на основании опыта и интуиции. Решение однокритериальных задач принятия решений основывается на методах исследования операций, а в частности, при использовании методов линейного программирования. При наличии большого числа специальных пакетов и программ, позволяющих принимать управленческие решения, широкое распространение при обосновании решения получила программа *Microsoft Excel*. Решение задачи линейного программирования и анализ чувствительности задачи с помощью *MS Excel* и является тематикой данных методических указаний.

Перед обучающимися стоит цель – изучить возможности надстройки Поиск решения пакета *MS Excel* для решения однокритериальных задач теории принятия решений.

При выполнении работы следует придерживаться следующей последовательности действий:

- Изучение теории и рассматриваемого примера поставленной задачи.
- Построение математической модели проблемы в виде задачи линейного программирования.
- Решение задачи с использованием надстройки *Поиск решения* пакета *MS Excel*.
- Анализ чувствительности полученного решения с использованием сценариев.
- Составление отчёта по лабораторной работе, включающего: формулировку задания; математическую модель и пояснение к её построению; «скриншоты» экрана монитора, содержащие табличную модель задачи с исходными данными и результатами решения, снимки отчетов по результатам, устойчивости и пределам, а также снимок отчета по сценариям с содержательными пояснениями к ним; выводы по выполненной работе.

ПРОЦЕСС ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Процесс принятия управленческого решения можно представить как последовательность выполнения следующих действий (этапов получения решения).

Проработка ситуации и формализация исходной проблемы. Требуется четко сформулировать проблему, понять и определить цели, которые требуется достичь при решении поставленной задачи. Таким образом, надо *поставить проблему*, определить *цели*, возможные *решения* и *факторы*, влияющие на решение проблемы. Результат этого этапа представляется в виде *вербальной модели* задачи (записанной естественным языком), где собраны воедино цели, решения и факторы и где присутствует основа для формализации отношений между ними.

Построение математической модели. Перевод формальной модели, построенной на предыдущем этапе, на язык математических отношений.

Изучение математической модели и получение математического решения проблемы. Рассматривается построенная математическая модель, проверяется адекватность модели и находится решение задачи оптимизации, вытекающей из этой модели. Если для решения задачи используется вычислительная техника, то предварительно строится *вычислительная модель* задачи. На данном этапе используются известные и апробированные алгоритмы решения математических задач.

Анализ математического решения проблемы и формирование управленческого решения. Анализируется полученное математическое решение, выполняется так называемый *анализ чувствительности*. На основе этого математического решения формируется управленческое решение. После выполнения этих этапов следует этап реализации принятого решения.

ПРОРАБОТКА СИТУАЦИИ И ФОРМАЛИЗАЦИЯ ИСХОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ

Проработка ситуации и формализация исходной проблемы – первый этап процесса принятия решения.

В связи с изменившимися запросами рынка фабрика бумажно-картонных изделий планирует разработать новый производственный план для выпуска офсетной и обложечной бумажной продукции, не трогая пока производство другой продукции. Допустим, что фабрика имеет месячный цикл производства. Таким образом, нужно определить, сколько в месяц следует производить бумаги офсетной и сколько – обложечной. В первом приближении ответ прост: чем больше, тем лучше, с учетом производственных возможностей. *Первая цель* – увеличить до *максимума* производство обоих видов продукции.

Пусть производственные мощности позволяют выпускать в месяц суммарно 500 т бумаги всех типов. Отсюда появляется *первое ограничение*: общее количество бумаги обоих видов не должно превышать 500 т.

Как видно, первую цель достичь можно, однако проблема остается плохо структурированной, поскольку дает неоднозначное решение. Всякое производство должно приносить прибыль. Отсюда можно сформулировать *вторую цель* – производственный план должен приносить *максимальную* прибыль. Пусть одна тонна офсетной бумаги приносит в среднем 1800 руб. прибыли, а одна тонна обложечной бумаги – 2300 руб. Здесь величины удельной прибыли (т.е. прибыли на одну тонну бумаги) являются *факторами*, которые влияют на конечную цель.

На этом шаге осуществляется *упрощение* реальной ситуации, т. к. удельная прибыль любого производимого изделия зависит от многих факторов (конъюнктуры рынка, стоимости исходных материалов, себестоимости производства, уровня рентабельности и т. д.) и не является величиной постоянной даже на протяжении относительно небольшого временного промежутка. Тем более сложно предсказать и трудоемко подсчитать ее значение на будущий более-менее продолжительный период времени. Можно только оценить будущую удельную прибыль, да и то с определенной степенью точности. Пусть получены вероятностные оценки разброса будущей удельной прибыли при производстве офсетной [1400; 2100] и обложечной [2000; 2800] бумаги в руб.

Приведенные выше величины удельных прибылей 1800 и 2300 руб. являются наиболее вероятными ожидаемыми значениями. Далее именно эти величины принимаются за значения удельных прибылей, а возможные последствия от их неточного задания учитываются при проведении анализа полученного решения.

Из оценки величин удельной прибыли очевидно, что для достижения второй цели надо производить только обложечную бумагу и забыть об офсетной бумаге. Однако отдел маркетинга требует, чтобы офсетной бумаги производилось не менее 190 т в месяц, поскольку есть договоры на такое количество, а обложечную бумагу нельзя производить более 168 т, поскольку

большее количество трудно реализовать. Итак, появляются еще *два ограничения*: произведенное количество офсетной бумаги должно быть не меньше 190 т, а обложечной бумаги – не более 168 т.

Такие ограничения позволяют составить простейший план: надо производить 168 т обложечной бумаги и (500 т всего – 168 т тах обложечной = 332 т) 332 т офсетной бумаги. Этот план учитывает только ограничения по производственным мощностям и маркетинговые ограничения. Однако при производстве любой продукции возникает необходимость в исходных материалах. Пусть на изготовление бумаги обоих типов потребуется сырье трех видов согласно следующей таблице.

Таблица – Ограничения по видам сырья бумаги

Показатели	Бумага, кг		Месячный запас, т
	Офсетная	Обложечная	
Целлюлоза	40	90	48
Древесная масса	60	70	31
Наполнитель	30	60	24

В таблице показано, сколько и какого сырья необходимо для производства одной тонны офсетной бумаги и одной тонны обложечной бумаги, а также величины месячных запасов каждого сырья. Очевидно, что общее количество сырья, используемого для производства бумаги, не должно превышать их месячные запасы. Таким образом, появляются еще *три ограничения* – по одному на каждый тип сырья. С учетом этих ограничений расчет производственного плана существенно усложняется.

В представленной задаче сделано еще одно существенное упрощение предлагаемой ситуации – реальный процесс производства любой продукции зависит не только от наличия исходных материалов, необходимых для создания конечного продукта, но и от многих других факторов: наличия достаточных производственных мощностей, наличия рабочей силы, периодичности поступления исходных материалов, качества этих материалов и т.д. Здесь эти факторы опущены, оставлены только ограничения на сырье трех видов. При этом сделано еще одно неявное допущение, что другие компоненты, необходимые для производства бумаги, имеются в достаточном количестве и не влияют на объемы производства. Проработка ситуации приводит к следующей формализации задачи.

Постановка проблемы: разработать производственный план для получения максимума прибыли с учетом всех видов ограничений.

Цель: получить максимальную прибыль.

Решение: представляется в виде количества тонн офсетной и оберточной бумаги, производимой в месяц.

Факторы, от которых зависит решение: значения удельной прибыли каждого типа бумаги, предельное число производимой бумаги, предельные числа производимой бумаги обоих типов (маркетинговые ограничения), количества сырья (необходимых для производства одной тонны бумаги), значения запасов сырья (всего 14 факторов).

Факторы, влияющие на прибыль: все перечисленные факторы, кроме значений количества сырья, необходимого для производства одной тонны бумаги. (Состав композиции бумаги считается неизменным.)

Ограничения: на предельное общее количество производимой бумаги, на предельные количества офсетной и обложечной бумаги в отдельности, на предельные количества используемого сырья (всего 6 ограничений).

Для проведения в дальнейшем анализа чувствительности решения факторы, влияющие на прибыль, выделены отдельно.

При отсутствии точной постановки исходной проблемы возможна постановка различных целей. Например, можно составить производственный план для нахождения минимума себестоимости продукции. Возможна формулировка более сложных целей, что обычно имеет место в реальных ситуациях. Например, максимум прибыли при одновременном минимуме использования определенных исходных (дорогих, дефицитных) материалов. При этом в зависимости от сформулированных целей могут быть выделены различные факторы, влияющие на эти цели, и могут быть сформированы иные ограничения.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Построение математической модели означает перевод вербальной модели, построенной на предыдущем этапе, на четкий язык математических отношений. Математическая модель должна включать следующие основные элементы:

1. *Переменные*, значения которых необходимо вычислить (это *переменные решения*, полученные на предыдущем этапе).

2. *Целевая функция* – это *цель*, записанная математически в виде функции от переменных. Для функции обязательно указывается направление изменений для решения проблемы: найти максимум функции, ее минимум или конкретное заданное значение.

3. *Ограничения* – записанные математически *ограничения* из формальной модели.

Если определены переменные, то построение целевой функции и ограничений обычно не вызывает затруднений, поскольку на предыдущем этапе и цель, и ограничения уже были сформулированы с привязкой к переменным решения.

Пусть x_1 и x_2 переменные, определяющие месячные объемы производства в тоннах офсетной и обложечной бумаги соответственно. Выше принято, что 1 тонна офсетной бумаги приносит прибыль 1800 руб., а 1 тонна обложечной бумаги – 2300 руб. Тогда суммарная прибыль z при производстве x_1 тонн офсетной бумаги и x_2 тонн обложечной бумаги составит:

$$z = 1800 * x_1 + 2300 * x_2 \text{ (руб.)}.$$

Это и есть целевая функция, *максимум* которой необходимо найти.

Ограничения будут записаны следующим образом.

Первое ограничение вытекает из того, что суммарный объем производства бумаги обоих типов не должен превышать 500 т.

$$x_1 + x_2 \leq 500.$$

Ограничения отдела маркетинга записываются просто:

$$x_1 \geq 190; x_2 \leq 168.$$

Ограничения на сырье. Согласно принятому выше, для производства офсетной и обложечной бумаги расходуется 0,04 т (40 кг) и 0,09 т (90 кг) целлюлозы соответственно. Таким образом, всего на производство x_1 тонн офсетной бумаги и x_2 тонн обложечной бумаги потребуется $0,04 * x_1 + 0,09 * x_2$ тонн целлюлозы. Эта величина не должна превышать 48 т. Отсюда:

$$0,04 * x_1 + 0,09 * x_2 \leq 48.$$

Подобным способом устанавливаются еще два ограничения по древесной массе и по наполнителю:

$$0,06 * x_1 + 0,07 * x_2 \leq 31;$$

$$0,03 * x_1 + 0,06 * x_2 \leq 24.$$

Еще одно неявное ограничение состоит в том, что переменные x_1 и x_2 должны быть неотрицательными, согласно физическому смыслу задачи. Это ограничение называется *условием неотрицательности переменных* и записывается так:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

Однако в представленной постановке задачи условие неотрицательности для переменной x_1 является излишним, т. к. присутствует ограничение $x_1 \geq 190$. Поэтому неравенство $x_1 \geq 0$ из системы ограничений можно исключить.

Особое внимание стоит обратить на то, что размерности всех переменных и параметров должны быть согласованы. Именно поэтому удельные расходы сырья переведены из килограммов в тонны, поскольку переменные измеряются в тоннах.

Обычно ограничение записывают таким образом, чтобы в левой части неравенства находилось выражение с переменными, а в правой части неравенства – только числа. Тогда левую часть неравенства называют *функцией ограничения*.

Окончательно математическая модель задачи запишется следующим образом:

Найти максимум функции z

$$z = 1800 * x_1 + 2300 * x_2 \rightarrow \max$$

при выполнении ограничений

$$x_1 + x_2 \leq 500;$$

$$x_1 \geq 190; x_2 \leq 168;$$

$$0,04 * x_1 + 0,09 * x_2 \leq 48;$$

$$0,06 * x_1 + 0,07 * x_2 \leq 31;$$

$$0,03 * x_1 + 0,06 * x_2 \leq 24;$$

$$x_2 \geq 0.$$

Любое решение, т. е. пара значений переменных x_1 и x_2 , удовлетворяющее *всем* ограничениям модели, называется *допустимым*. Так в рассматриваемом примере решение $x_1 = 190$ и $x_2 = 168$ является допустимым, поскольку не нарушает ни одного ограничения, включая условия неотрицательности. Чтобы убедиться в этом, можно подставить значения $x_1 = 190$ и $x_2 = 168$ в левые части ограничений, выполнить вычисления и проверить, что ни одно неравенство не нарушается. Значение целевой функции при этом решении будет равно $z = 1800 \cdot 190 + 2300 \cdot 168 = 728400$ (руб.).

Математическая модель построена, следующим этапом является отыскание лучшего решения поставленной задачи. Для этих целей удобно использовать программу для работы с электронными таблицами *Microsoft Excel*, задействовав надстройку *Поиск решения*.

ИЗУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ПОЛУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ

Математическая модель, построенная на предыдущем этапе, для дальнейшего выполнения каких-либо вычислений в *Excel*, должна быть структурирована в виде таблицы. Для этого следует определить, в каких ячейках будут располагаться переменные решения, записать в нужные ячейки формулы, по которым будут вычисляться целевая функция и функции ограничений (левые части ограничений), записать в отдельные ячейки значения правых частей ограничений. Полученная совокупность значений и формул, записанных на рабочем листе *Excel*, будет называться *табличной моделью*.

Для табличных моделей задач оптимизации не существует общепринятых канонов их построения. Вот некоторые рекомендации, которые облегчат дальнейшее применение средства *Поиск решения*:

- Значения переменных располагаются в отдельных ячейках и группируются в отдельный блок ячеек.
- Каждому ограничению отводится отдельная строка или столбец таблицы. Ограничения группируются в отдельный блок ячеек.
- Желательно, чтобы ячейки, содержащие переменные и значение целевой функции, а также все ограничения, имели заголовки.
- Коэффициенты целевой функции должны храниться в отдельной строке, располагаясь непосредственно под или над соответствующими переменными; формула для вычисления целевой функции должна находиться в соседней ячейке.
- В каждой строке ограничений за ячейками, содержащими коэффициенты данного ограничения, следует ячейка, в которую записывается вычисленное значение функции ограничения (значение левой части ограничения). За ней может следовать ячейка, в которой стоит соответствующий знак неравенства или равенства ограничения, а затем ячейка, содержащая значение правой части ограничения. Желательно, чтобы правые части ограничений были константами, а не формулами. Дополнительно можно иметь ячейку, в которой вычислена разность между значениями левой и правой частей неравенства.
- Условия неотрицательности переменных решения не обязательно включать в табличную модель. Как правило, они опускаются и указываются непосредственно в диалоговом окне средства *Поиск решения*.

В результате выполнения этих рекомендаций все основные коэффициенты модели содержатся в отдельных ячейках, поэтому их легко изменять, не меняя формул модели. Благодаря группированию упрощается работа со средством *Поиск решения*, поскольку для указания переменных или ограничений можно использовать *диапазоны ячеек*, т. е. задавать переменные и ограничения группой, а не по отдельности. Наличие заголовков сделает понятной табличную модель не только разработчику модели, но и другим людям.

Пример табличной модели для рассматриваемой задачи показан на рисунке 1. Здесь значения переменных решения записаны в ячейках В4 и С4 с

соответствующими заголовками в ячейках В3 и С3. Вначале значения переменных задаются произвольно. Коэффициенты, стоящие перед переменными в формуле целевой функции, записаны в ячейки В7 и С7, а само значение целевой функции вычисляется в ячейке Е7 (соответствующие заголовки записаны над этими ячейками). Ниже в диапазоне В10:С16 записаны коэффициенты функций ограничений, в диапазоне D10:D16 вычисляются значения левых частей ограничений, в диапазоне E10:E16 записаны знаки неравенств ограничений, а в диапазоне F10:F16 – значения правых частей ограничений. Внизу в строке 19 под «левым» заголовком *Решение* еще раз продублированы значения переменных и целевой функции.

	A	B	C	D	E	F
1	План производства фабрики бумажно-картонных изделий					
2		Переменные решения				
3	Офсетная бумага	X_1	X_2	Обложечная бумага		
4	Вид бумаги	0	0			
5						
6		C_1	C_2		Z	
7	Коэффициенты целевой функции	1800	2300	Значение целевой функции	0	
8						
9	Ограничения	Коэффициенты		Левая часть		Правая часть
10	На объем производства	1	1	0	<=	500
11	Маркетинговое на обложечную бумагу	0	1	0	<=	168
12	Целлюлоза	0,04	0,09	0	<=	48
13	Древесная масса	0,06	0,07	0	<=	31
14	Наполнитель	0,03	0,06	0	<=	24
15	Маркетинговое на офсетную бумагу	1	0	0	>=	190
16	Неотрицательность	0	1	0	>=	0
17						
18		X_1	X_2	Z		
19	Решение	0,00 т	0,00 т	0		

Рис. 1. Табличная модель для вычисления производственного плана

Формулы, по которым выполняются все вычисления на рабочем листе, показаны на рисунке 2. Для отображения на рабочем листе *Excel* формул, а не значений надо перейти на вкладку меню *ФОРМУЛЫ*, выбрав команду *Показать формулы* в блоке *Зависимости формул* (*Excel 2013*).

Для вычисления линейных функций подходит функция *СУММПРОИЗВ* (*массив1; массив2*), которая суммирует попарные произведения элементов двух диапазонов, заданных аргументами функции *массив1* и *массив2*.

Пример, формула

$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{\$B\$4:\$C\$4};\text{B7:C7}),$

приведенная в ячейке E7, вычисляет значение целевой функции и эквивалентна формуле: $=\text{B4}*\text{B7}+\text{C4}*\text{C7}$. Абсолютные¹ ссылки $\text{\$B\$4:\$C\$4}$ на диапазон B4:C4, содержащий значения переменных x_1 и x_2 , сделаны для возможности копирования данной формулы из ячейки E7 в ячейки D10:D16 для вычисления левых частей неравенств, где также участвуют значения переменных решения.

	A	B	C	D	E	F
1	План производства фабрики бумажно-картонных изделий					
2	Переменные решения					
3	Офсетная бумага	x_1	x_2	Обложечная бумага		
4	Вид бумаги	0	0			
5						
6		C_1	C_2		Z	
7	Коэффициенты целевой функции	1800	2300	Значение целевой функции	$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{\$B\$4:\$C\$4};\text{B7:C7})$	
8						
9	Ограничения	Коэффициенты		Левая часть		Правая часть
10	На объем производства	1	1	$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{\$B\$4:\$C\$4};\text{B10:C10})$	$\leq$	500
11	Маркетинговое на обложечную бумагу	0	1	$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{\$B\$4:\$C\$4};\text{B11:C11})$	$\leq$	168
12	Целлюлоза	0,04	0,09	$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{\$B\$4:\$C\$4};\text{B12:C12})$	$\leq$	48
13	Древесная масса	0,06	0,07	$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{\$B\$4:\$C\$4};\text{B13:C13})$	$\leq$	31
14	Наполнитель	0,03	0,06	$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{\$B\$4:\$C\$4};\text{B14:C14})$	$\leq$	24
15	Маркетинговое на офсетную бумагу	1	0	$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{\$B\$4:\$C\$4};\text{B15:C15})$	$\geq$	190
16	Неотрицательность	0	1	$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{\$B\$4:\$C\$4};\text{B16:C16})$	$\geq$	0
17						
18		x_1	x_2	Z		
19	Решение	$=\text{ФИКСИРОВАННЫЙ}(\text{B4};2)\&"\text{т}"$	$=\text{ФИКСИРОВАННЫЙ}(\text{C4};2)\&"\text{т}"$	$=\text{E7}$		

Рис. 2. Формулы табличной модели

Левые части ограничений также вычисляются с помощью функции $\text{СУММПРОИЗВ}()$. Простые ограничения типа $x_2 \leq 168$ также представляются в виде $0*x_1 + 1*x_2 \leq 168$ (см. маркетинговое ограничение на оберточную бумагу, рис. 1).

В примере ограничения сгруппированы по типу неравенств – сначала идут ограничения типа «меньше или равно» $\leq$, а затем типа «больше или равно» $\geq$. Порядок представления этих групп несущественен.

Наличие групп однотипных ограничений позволит в дальнейшем задавать их в средстве *Поиск решения* не по отдельности, а целой группой. Знаки неравенств в диапазоне E10:E16 вставлены только для пояснения ограничений, средство *Поиск решения* их не использует.

Средство *Поиск решения* использует заголовки строк, содержащих ограничения, формируя отчеты. Поэтому рекомендуется давать содержательные заголовки в ячейках A10:A16. С другой стороны, заголовки не являются обязательным элементом табличной модели, заголовки полезны для документирования результата решения задачи.

¹ Абсолютная ссылка — это ссылка на определённую (фиксированную) ячейку. Обозначается знаком (\$), например, (\$A\$1).

Надстройка *Поиск решения Microsoft Excel* расположена на вкладке *Данные* в блоке *Анализ*. Если соответствующий инструмент не найден, следовательно, данная надстройка не подключена к *Excel*. Для подключения данной функции надо перейти на вкладку *Файл* открыть раздел *Параметры*.

В открывшемся окне *Параметры Excel* (рис. 3) перейти на вкладку *Надстройки*. На данной вкладке надо отметить нажатием левой кнопки мыши строку *Поиск решения*, после чего нажать кнопку *Перейти...*, находящуюся внизу окна. В открывшемся окне требуется активировать галочку возле пункта *Поиск решения* и завершить работу нажатием кнопки *ОК*.

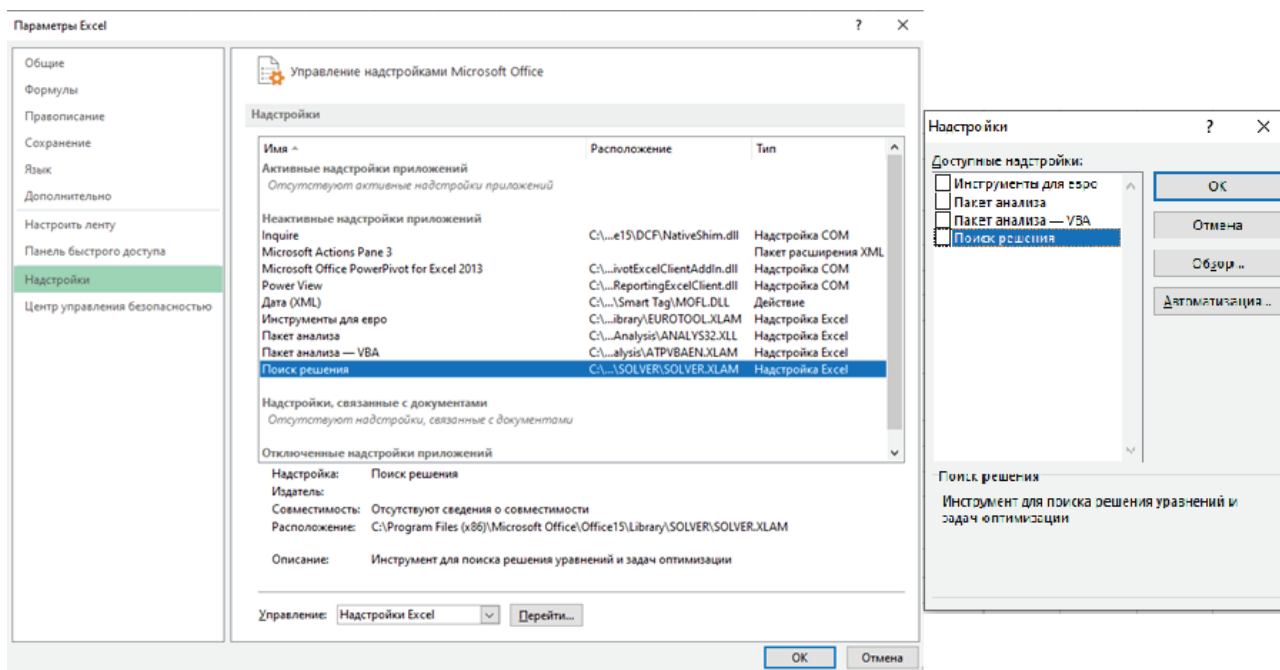


Рис. 3. Окна подключения надстройки «Поиск решения»

После того как табличная модель построена и проверена, выполняется переход к этапу оптимизации и находится решение задачи линейной оптимизации. На вкладке *Данные* следует нажать кнопку *Поиск решения*.

- В открывшемся диалоговом окне *Параметры поиска решения* следует указать требуемые данные (рис. 4).

Согласно принятой терминологии, в данном окне переменные решения, точнее, ячейки, содержащие значения этих переменных, называются *изменяемыми ячейками*. Ячейка, содержащая значение целевой функции, называется *целевой ячейкой*. Название *ограничения* остается неизменным.

В поле *Оптимизировать целевую функцию* вводится адрес ячейки, содержащей значение целевой функции. Для рассматриваемой модели в это поле следует ввести \$E\$7 или щелкнуть указателем мыши по этой ячейке, чтобы ввести ее адрес автоматически.

Рис. 4. Диалоговое окно «Параметры поиска решения»

Оптимизировать целевую функцию можно до достижения максимального либо минимального значения, или определенного значения, заданного пользователем в соответствующем окне. Исходя из поставленной задачи нужно щелкнуть на переключателе требуемого значения (*До: Максимум Минимум Значения:*).

Поле *Изменяя ячейки переменных* позволяет указать ячейки, в которых содержатся переменные модели; в данном случае это диапазон $B\$4:C\4 .

- Следующим действием необходимо задать ограничения. При нажатии на кнопку *Добавить* открывается диалоговое окно *Добавление ограничения*, показанное на рисунке 5. Ограничения можно вносить построчно (результат представлен на рисунке 4) или диапазоном. В поле *Ссылка на ячейки* следует ввести или указать на рабочем листе левую часть ограничения, т. е. ссылку на ячейку (например, $D\$10$) или диапазон $D10:D14$, в соседнем поле указывается знак неравенства $\leq$, а в поле *Ограничение* вводится или указывается на рабочем листе правая часть ограничения, ссылка на ячейку $F\$10$ или диапазон $F10:F14$ соответственно.

Нажатие кнопки *Добавить* фиксирует введенное ограничение. После осуществляется ввод последующих ограничений. В случае ввода второй группы ограничений: в поле *Ссылка на ячейки* вводится D15:D16, в соседнем раскрывающемся списке выбирается знак неравенства $\geq$, а в поле *Ограничение* заносится F15:F16. Нажатие кнопки *ОК* возвращает в диалоговое окно *Параметры* поиска решения.

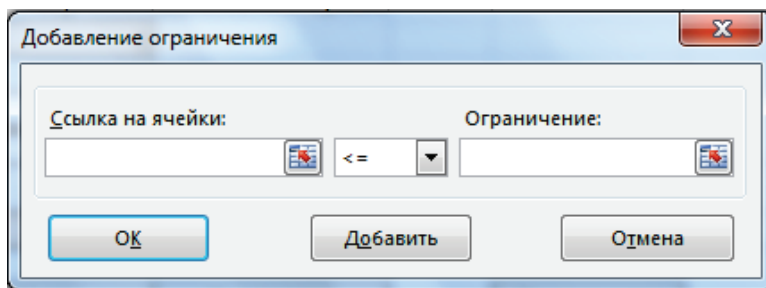


Рис. 5. Диалоговое окно «Добавление ограничения»

- После задания ограничений, при необходимости, в диалоговом окне *Параметры* можно задать дополнительные условия для поиска решения (рис. 6) либо, ознакомившись, параметры можно оставить без изменений. Окно *Параметры* открывается после щелчка на кнопке *Параметры* окна *Параметры* поиска решения.

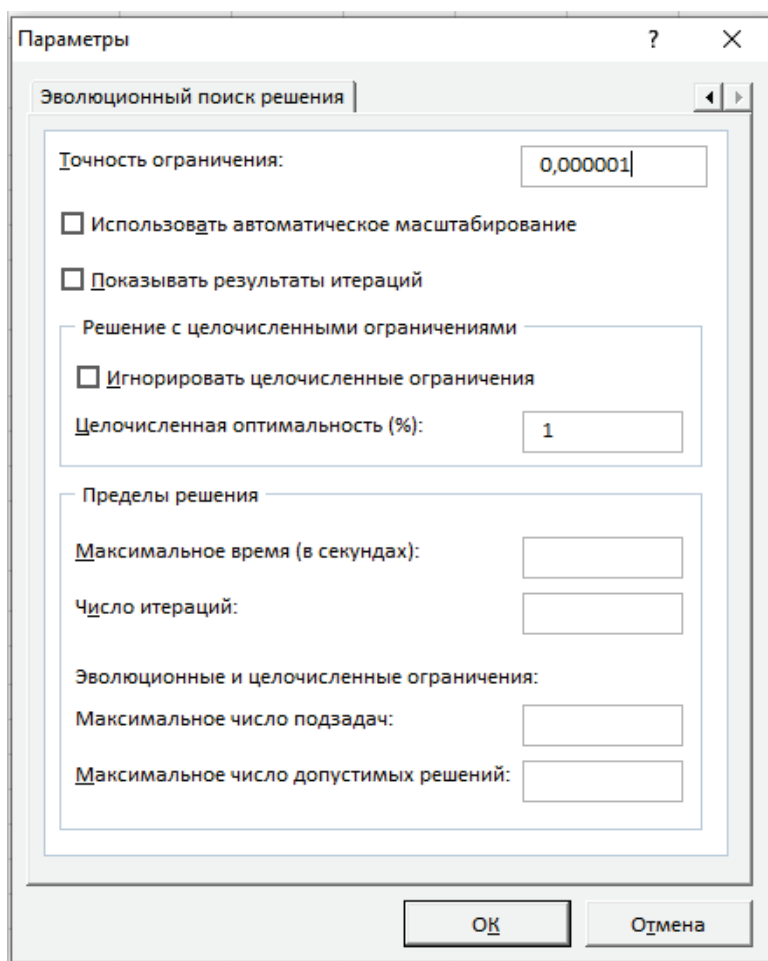


Рис. 6. Диалоговое окно «Параметры»

Флажок *Использовать автоматическое масштабирование* рекомендуется устанавливать в случае, если диапазон чисел в математической модели варьируется от наименьшего до наибольшего более чем в 10^7 раз (во избежание влияния погрешности округления на поиск правильного решения).

В случае необходимости просмотра в ходе решения изменений значений переменных и целевой функции, нужно установить флажок параметра *Показывать результаты итераций*. При этом после каждой итерации поиск решения приостанавливается и на листе показываются текущие значения, а в появившемся окне можно выбрать либо продолжение показа итераций, либо остановку с возможностью сохранения найденного промежуточного решения.

Блок *Решение с целочисленными ограничениями* используется в случае нахождения целочисленного решения. Флажок *Игнорировать целочисленные ограничения* позволяет решать задачу без учета условий целочисленности. *Целочисленная оптимальность* указывает, на сколько процентов полученное значение целевой функции может отличаться от оптимального. Для ускорения получения решения это значение может быть увеличено. Если же требуется получить точное решение, то следует установить этот параметр равным 0 %, однако это приведет к значительному увеличению времени оптимизации.

Блок *Пределы решения* часто используется для решения целочисленных задач, в блок входят параметры: *Максимальное время*, *Число итераций*, *Максимальное число подзадач*, *Максимальное число допустимых решений*. *Максимальное время* позволяет задать в секундах максимальное время, которое отводится на поиск решения. *Число итераций* позволяет определить максимальное количество итераций при поиске решения. *Максимальное число подзадач* позволяет задать максимальное количество подзадач при целочисленном решении. *Максимальное число допустимых решений* позволяет определить максимальное количество рассматриваемых допустимых целочисленных решений.

Щелчок на кнопке *ОК* возвращает в диалоговое окно *Параметры поиска решения*.

- Если в математической модели ограничение неотрицательности накладывается на **все** переменные, следует установить флажок *Сделать переменные без ограничений неотрицательными*. В разбираемом примере условие неотрицательности наложено только на переменную x_2 , поэтому этот флажок не устанавливается.

Рассматриваемый пример является линейной моделью, т. к. целевая функция и все ограничения линейны относительно переменных, следовательно, в открывающемся списке *Выберите метод решения* необходимо выбрать «Поиск решения лин. задач симплекс-методом».

- После задания необходимых данных (указания ячейки, содержащей формулу для вычисления целевой функции; ячеек, в которых находятся переменные; задания ограничений) требуется нажать кнопку *Найти решение*.

Средство *Поиск решения* выполняет оптимизацию. После окончания работы *Поиск решения* выводит на экран диалоговое окно *Результаты поиска*

решения. Положительный результат завершения поиска решения представлен на рисунке 7.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	План производства фабрики бумажно-картонных изделий													
2		Переменные решения												
3	Офсетная бумага	X_1	X_2	Обложечная бумага										
4	Вид бумаги	320,6666667	168											
5														
6		C_1	C_2		Z									
7	Коэффициенты целевой функции	1800	2300	Значение целевой функции	963600									
8														
9	Ограничения	Коэффициенты		Левая часть		Правая часть								
10	На объем производства	1	1	488,6666667	<=	500								
11	Маркетинговое на обложечную бумагу	0	1	168	<=	168								
12	Целлюлоза	0,04	0,09	27,94666667	<=	48								
13	Древесная масса	0,06	0,07	31	<=	31								
14	Наполнитель	0,03	0,06	19,7	<=	24								
15	Маркетинговое на офсетную бумагу	1	0	320,6666667	>=	190								
16	Неотрицательность	0	1	168	>=	0								
17														
18		X_1	X_2	Z										
19	Решение	320,67 т	168,00 т	963600										

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

☒ Сохранить найденное решение
 ☐ Восстановить исходные значения

☐ Вернуться в диалоговое окно параметров

☐ Отчеты со

Отчеты

Результаты

Устойчивость

Пределы

ОК

Отмена

Сохранить сценарий...

Отчеты

Создает указанные типы отчетов и размещает каждый отчет на отдельном листе книги

Рис. 7. Результат поиска решения задачи оптимизации

Если оптимальное решение найдено, в диалоговом окне *Результаты поиска решения* должно отобразиться сообщение *Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены*. Если получено такое сообщение, можно или *Сохранить найденное решение*, выбрав соответствующий параметр, или отбросить его, выбрав параметр *Восстановить исходные значения*. В результате ячейкам переменных будут возвращены значения, которые в них находились до запуска функции *Поиск решения*.

Справа в окне с сообщением о результатах, если решение найдено, можно определить для получения до трех типов отчетов о решении: *Результаты*, *Устойчивость*, *Пределы* (см. рис.7). Требуется выделить в списке один или несколько типов отчетов, которые появятся по нажатию кнопки *ОК* на отдельных листах рабочей книги.

Флажок *Вернуться в диалоговое окно параметров* предназначен для возвращения в окно поиска решения, изменения параметров и повторного вычисления. Флажок *Отчеты со структурами* предназначен для выдачи отчетов в компактном виде.

В разбираемом примере решение найдено, что отражено на рисунке 7: для получения оптимального решения требуется производить 320,67 т офсетной бумаги и 168 т обложечной, при этом будет получена прибыль в размере 963600 руб. В диалоговом окне *Результаты поиска решения* выделены необходимые отчеты.

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ И ФОРМИРОВАНИЕ УПРАВЛЕНЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Полученное решение математической модели надо проанализировать. В процессе построения модели были сделаны различные допущения, упрощающие реальную ситуацию, позволяющие формализовать модель. Зависимости, зафиксированные в модели, только приближенно отображают реальные зависимости между факторами, переменными решения и целью. Понимание влияния факторов на результат приближенно. Анализ полученного математического решения проблемы дает понимание, насколько может измениться решение и изменится ли вообще при хоть малом отличии реальных значений параметров от тех, что заложены в модели. Подобный вид анализа называется *анализом чувствительности решения*.

Анализ чувствительности должен дать ответы на следующие вопросы.

- В каких пределах могут изменяться параметры модели так, чтобы сохранилось полученное решение?
- Какие ограничения связанные, т. е. лимитируют, сдерживают целевую функцию, а какие ограничения не влияют на решение?
- Если изменить значения правых частей связанных ограничений, то насколько может измениться значение целевой функции?
- Если значение какой-то переменной решения равно нулю, то при каких условиях она может принять положительное значение?

Средство *Поиск решения* может генерировать три вида отчетов: отчет о результатах, отчет об устойчивости и отчет о пределах (рис. 8–10). Все перечисленные виды отчетов *Поиск решения* создает только для линейных моделей. Для целочисленных моделей недоступны отчеты об устойчивости и о пределах, а для нелинейных моделей отчет об устойчивости имеет другой вид. Стоит подробно рассмотреть применение отчетов для выполнения анализа чувствительности линейных моделей.

Отчет по результатам отражает состояние ограничений, какие ограничения связанные, у каких привязка отсутствует. Эти данные приведены в отчете в таблице *Ограничения* в столбце **Состояние**. В столбце **Допуск** той же таблицы показаны значения разностей между левыми и правыми частями ограничений. *Ограничения*, у которых **Допуск** равен нулю, обозначаются словом **Привязка**, а остальные — **Без привязки**. Если разница равна нулю, то соответствующий ресурс будет использован полностью, то есть является дефицитным.

В верхней части отчета по результатам содержится общая информация о ходе решения, заданных параметрах и достигнутых результатах.

В таблице *Ячейки переменных* в графе **Целочисленное** указан тип полученного числового значения: Целочисленное, Бинарное, Продолжить. «Продолжить» означает, что получено вещественное значение.

Microsoft Excel 15.0 Отчет о результатах

Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Модуль поиска решения

Модуль: Поиск решения лин. задач симплекс-методом

Время решения: 0,016 секунд.

Число итераций: 4 Число подзадач: 0

Параметры поиска решения

Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001

Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
\$E\$7	Значение целевой функции z	0	963600

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
\$B\$4	Вид бумаги x1	0	320,6666667	Продолжить
\$C\$4	Вид бумаги x2	0	168	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
\$D\$10	На объем производства Левая часть	488,6666667	\$D\$10<=\$F\$10	Без привязки	11,33333333
\$D\$11	Маркетинговое на обложечную бумагу Левая часть	168	\$D\$11<=\$F\$11	Привязка	0
\$D\$12	Целлюлоза Левая часть	27,94666667	\$D\$12<=\$F\$12	Без привязки	20,05333333
\$D\$13	Древесная масса Левая часть	31	\$D\$13<=\$F\$13	Привязка	0
\$D\$14	Наполнитель Левая часть	19,7	\$D\$14<=\$F\$14	Без привязки	4,3
\$D\$15	Маркетинговое на офсетную бумагу Левая часть	320,6666667	\$D\$15<=\$F\$15	Без привязки	130,6666667
\$D\$16	Неотрицательность Левая часть	168	\$D\$16<=\$F\$16	Без привязки	168

Рис. 8. Отчет о результатах

Содержимое любого отчета можно форматировать, распечатывать или копировать. Например, в отчете, представленном на рисунке 8, некоторые строки были удалены, а содержимое некоторых столбцов выравнено по центру. Для удобства форматирования можно восстановить линии сетки, для чего надо выбрать вкладку *Вид* → *Сетка*.

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$4	Вид бумаги x1	320,6666667	0	1800	171,4285714	1800
\$C\$4	Вид бумаги x2	168	0	2300	1E+30	200

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$D\$10	На объем производства Левая часть	488,6666667	0	500	1E+30	11,33333333
\$D\$11	Маркетинговое на обложечную бумагу Левая часть	168	200	168	112	68
\$D\$12	Целлюлоза Левая часть	27,94666667	0	48	1E+30	20,05333333
\$D\$13	Древесная масса Левая часть	31	30000	31	0,68	7,84
\$D\$14	Наполнитель Левая часть	19,7	0	24	1E+30	4,3
\$D\$15	Маркетинговое на офсетную бумагу Левая часть	320,6666667	0	190	130,6666667	1E+30
\$D\$16	Неотрицательность Левая часть	168	0	0	168	1E+30

Рис. 9. Отчет об устойчивости

Более информативен для анализа чувствительности отчет об устойчивости (рис. 9). Этот отчет показывает, насколько чувствительно найденное решение к изменениям параметров модели: коэффициентов целевой функции и правых частей ограничений. При этом предполагается, что значения всех параметров, за

исключением какого-то одного, остаются неизменными. Отчет состоит из двух таблиц.

В таблице *Ячейки переменных* этого отчета приведена информация о значениях ячеек переменных: адреса изменяемых ячеек; их имена; значения переменных в этих ячейках; приведенная стоимость; целевой коэффициент; допустимое увеличение и уменьшение.

Имя ячейки образуется из текста ячеек слева и сверху, на пересечении которых находится изменяемая ячейка; если имен нет, то это поле остается пустым.

Окончательное значение переменных в этих ячейках найдено посредством *Поиск решения* (320,67; 168).

Приведенная стоимость показывает, как изменится оптимальное значение целевой функции при выпуске продукции, отсутствующей в оптимальном плане (переменной, имеющей в оптимальном плане нулевое значение). В рассматриваемом случае оптимальный план предполагает выпуск обоих видов бумаги, поэтому их приведенная стоимость равна нулю.

Приведенная стоимость, взятая по абсолютной величине, показывает насколько, как минимум, нужно изменить (увеличить, в случае отрицательной приведенной стоимости) коэффициент переменной в целевой функции, чтобы она стала положительной (например, как повысить прибыльность данного типа продукции, чтобы выпускать его стало выгодно).

Приведенная стоимость, но уже с учетом знака показывает, насколько ухудшится значение целевой функции, если сделать нулевую переменную равной 1, не меняя ее коэффициента в целевой функции (например, насколько снизится прибыль, если ввести в план производство единицы продукции, выпускать которое невыгодно).

Целевая функция Коэффициент показывает коэффициент при данной переменной в формуле целевой функции.

Значения в столбцах **Допустимое Увеличение** и **Допустимое Уменьшение** отражают, в каких пределах может изменяться целевой коэффициент при условии, что найденные значения переменных останутся неизменными. При увеличении и уменьшении коэффициентов целевой функции на указанные величины можно получить интервалы оптимальности, которые показывают, в каких пределах могут меняться коэффициенты целевой функции, чтобы сохранялось найденное оптимальное решение. Для данного примера диапазон оптимальных значений по коэффициенту x_1 составит $[0; 1971,43]$, для x_2 $[2100; +\infty)$.

Нулевое значение в этих столбцах – признак наличия альтернативных оптимальных решений. Выражение $1E+30$ означает 10^{30} и соответствует в обозначениях *Excel* бесконечности (∞).

В таблице *Ограничения* приведена следующая информация: адреса ячеек, на значения которых наложены ограничения; их имена; расчетные значения в этих ячейках, полученные в результате *Поиска решения*; теневая цена; значения правых частей ограничений; допустимое увеличение и уменьшение.

Тень Цена (теневая цена) показывает, насколько изменится значение целевой функции при увеличении на единицу правой части данного ограничения, в то время как остальные данные неизменны (например, при добавлении единицы соответствующего ресурса). Теневая цена имеет и еще один смысл: это максимальная цена, которую стоит платить за дополнительное количество дефицитного ресурса, чтобы приобретение было выгодным, или минимальная цена его продажи. Теневая цена отлична от нуля только тогда, когда данное ограничение в оптимальном решении является связанным.

Ограничение Правая сторона – это граничные значения переменных, правая часть ограничений.

Значения в столбцах **Допустимое Увеличение** и **Допустимое Уменьшение** показывают возможности изменения правой части ограничения, в которых действует приведенное значение теневой цены данного ограничения, и при этом в оптимальном решении сохраняется прежний набор ненулевых переменных (например, не меняется ассортимент продукции).

При увеличении и уменьшении правых частей ограничений на указанные величины можно получить интервалы устойчивости (в каких пределах можно менять правую часть ограничения для сохранения найденного оптимального решения). В текущем примере такими интервалами для ограничений по сырью будут: для целлюлозы – $[27,95; +\infty)$, для древесной массы – $[23,16; 31,68]$, для наполнителя – $[19,7; +\infty)$.

Наличие в этих двух столбцах хотя бы одного нулевого значения – признак вырожденности решения. В этом случае выводы из отчета об устойчивости, сделанные выше, могут оказаться неверными.

В отчете о пределах (рис. 9) показано, в каких пределах с учетом всех ограничений и постоянстве значений остальных переменных могут изменяться переменные (значения в столбцах **Верхний Предел** и **Нижний Предел**) и какие при этом значения будет принимать целевая функция (значения в столбцах **Целевая функция Результат**). Если на значения переменной не налагаются явные ограничения, задающие ее верхнюю (или нижнюю) границу, то в столбцах **Верхний Предел** и **Целевая функция Результат** (или **Нижний Предел** и **Целевая функция Результат**) для этой переменной будут стоять значения ошибки #Н/Д.

Целевая функция		
Ячейка	Имя	Значение
\$E\$7	Значение целевой функции z	963600

Переменная			Нижний Целевая функция		Верхний Целевая функция	
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
\$B\$4	Вид бумаги x1	320,66667	190	728400	320,6667	963600
\$C\$4	Вид бумаги x2	168	0	577200	168	963600

Рис. 9. Отчет о пределах

После нахождения оптимального решения можно исследовать различные альтернативные варианты решения. Можно проследить, как отразится на оптимальном значении целевой функции (прибыли) изменение параметров модели: правых частей ограничений (запаса ресурсов); коэффициентов целевой функции (удельной прибыли); коэффициентов ограничений (норм расхода ресурсов).

Анализ чувствительности для текущего примера выглядит следующим образом. Переменные решения не принимают нулевые значения, оба вида продукции задействованы при получении оптимального количества прибыли. Первое ограничение, задающее предельный объем производства, не является лимитирующим (с привязкой). Отсюда следует вывод, что такой производственный план не в полной мере задействует мощности завода. Это большой «минус» данного плана.

Лимитирующими, сдерживающими объемы производства, являются маркетинговое ограничение на оберточную бумагу и ограничение по древесной массе (на это указывает отчет о результатах и ненулевые значения теневых цен для этих ограничений в отчете об устойчивости). Влиять на маркетинговое ограничение трудно, поскольку формируется соответствующее ограничение отделом маркетинга. Для полной загрузки мощностей производства, потребуется запланировать еще 11,33 тонны бумаги, на что также требуется разрешение руководства фабрики.

Предельное ограничение по сырью определяется наличием на складе запаса древесной массы. Теневая цена этого ограничения равна 30000. Это означает, что изменение на одну единицу величины правой части данного ограничения (т. е. изменение величины запаса древесной массы на 1 тонну) приведет к изменению на 30000 руб. величины прибыли (значения целевой функции). Очевидно, что в данном случае при увеличении значения правой части ограничения значение целевой функции будет возрастать, а при уменьшении – убывать.

Число в столбце **Допустимое Увеличение** для ограничения по древесной массе равно 0,68. Это значит, что, немного увеличив значение правой части ограничения до величины 31,68, решение останется прежним – значения переменных и целевой функции поменяются, но привязанными и без привязки останутся прежние ограничения. Если же значение правой части ограничения будет равно или превысит величину 31,68, то в качестве лимитирующего в игру вступит другое ограничение, которое на данный момент не является привязанным.

Оценить полученные изменения при корректировке правой части ограничения по древесной массе позволит пересчет с использованием *Поиска решения*. В ячейку F13 следует занести значение 31,68. После чего заново запустить *Данные → Поиск решения*.

В диалоговом окне *Поиск решения* менять ничего не следует (надстройка *Поиск решения* сохраняет все установки своего предыдущего использования), можно сразу щелкнуть кнопку *Выполнить* и в окне результатов поиска решения заново задать создание отчетов о результатах и об устойчивости нового поиска.

Полученное решение показано на рисунке 10.

	A	B	C	D	E	F
1	План производства фабрики бумажно-картонных изделий					
2		Переменные решения				
3	Офсетная бумага	X_1	X_2	Обложечная бумага		
4	Вид бумаги	332	168			
5						
6		C_1	C_2		Z	
7	Коэффициенты целевой функции	1800	2300	Значение целевой функции	984000	
8						
9	Ограничения	Коэффициенты		Левая часть		Правая часть
10	На объем производства	1	1	500	$\leq$	500
11	Маркетинговое на обложечную бумагу	0	1	168	$\leq$	168
12	Целлюлоза	0,04	0,09	28,4	$\leq$	48
13	Древесная масса	0,06	0,07	31,68	$\leq$	31,68
14	Наполнитель	0,03	0,06	20,04	$\leq$	24
15	Маркетинговое на офсетную бумагу	1	0	332	$\geq$	190
16	Неотрицательность	0	1	168	$\geq$	0
17						
18		X_1	X_2	Z		
19	Решение	332,00 т	168,00 т	984000		

Рис. 10. Оптимальное решение с корректировкой по древесной массе

В этом решении $x_1 = 332$, $x_2 = 168$ и $z = 984000$. Новым ограничением с привязкой стало первое ограничение, задающее предельный объем производства (рис. 11). Стоит отметить, что изменение только одного параметра модели (значения правой части ограничения по древесной массе) уже привело к решению (производственному плану), где производственные мощности завода задействованы полностью. В общем случае, если действительно есть необходимость задействовать все мощности производства, скорее всего, возникла бы необходимость проверки других лимитирующих ограничений и возможного изменения их правых частей.

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
\$E\$7	Значение целевой функции z	963600	984000

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
\$B\$4	Вид бумаги x1	320,6666667	332	Продолжить
\$C\$4	Вид бумаги x2	168	168	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
\$D\$10	На объем производства Левая часть	500	\$D\$10<=\$F\$10	Привязка	0
\$D\$11	Маркетинговое на обложечную бумагу Левая часть	168	\$D\$11<=\$F\$11	Привязка	0
\$D\$12	Целлюлоза Левая часть	28,4	\$D\$12<=\$F\$12	Без привязки	19,6
\$D\$13	Древесная масса Левая часть	31,68	\$D\$13<=\$F\$13	Привязка	0
\$D\$14	Наполнитель Левая часть	20,04	\$D\$14<=\$F\$14	Без привязки	3,96
\$D\$15	Маркетинговое на офсетную бумагу Левая часть	332	\$D\$15>=\$F\$15	Без привязки	142
\$D\$16	Неотрицательность Левая часть	168	\$D\$16>=\$F\$16	Без привязки	168

Рис. 11. Отчет о результатах для оптимального решения с корректировкой по древесной массе

Оптимальным производственным планом будет производство 332 тонн офсетной бумаги и 168 тонн обложечной бумаги. Однако, чтобы выполнить такой план, надо увеличить месячные запасы древесной массы на 0,68 тонны, а месячные запасы целлюлозы и наполнителя можно уменьшить на 19,6 и 3,96 тонны соответственно, что не совсем очевидно. При дальнейшем анализе надо подсчитать, на сколько может увеличиться себестоимость краски, если докупить дополнительные объемы сырья по древесной массе, так как возрастут расходы, например, на хранение сырья. Это может повлиять на удельную прибыль бумаги, т. е. могут измениться значения коэффициентов при переменных в формуле целевой функции. Как следствие, потребуется повторить весь процесс вычислений. Кроме того, следует учесть, что значения коэффициентов известны только приближенно, поэтому далее следует рассмотреть влияние коэффициентов при переменных в формуле целевой функции.

В новом отчете об устойчивости (рис. 12) в таблице *Ячейки переменных* в столбцах *Допустимое Увеличение* и *Допустимое Уменьшение* приведены значения, на которые могут изменяться целевые коэффициенты при условии сохранения решения. Сохранение решения здесь означает сохранение значений переменных решения, но значение целевой функции может изменяться. Однако следует учесть, что эти числа имеют смысл при выполнении дополнительного условия, а именно, что целевые коэффициенты изменяются по одному, а не совместно. Таким образом, на основании данных отчета об устойчивости можно утверждать, что если в целевой функции коэффициент c_1 при переменной x_1 будет изменяться в пределах $[0; 1971,43]$ или коэффициент c_2 при переменной x_2 будет изменяться в пределах $[2100; +\infty)$, то значения этих переменных останутся прежними. Каким будет решение, если изменятся *оба* целевых коэффициента одновременно, отчет по устойчивости ответа не дает. В этом случае следует рассмотреть дополнительно различные варианты корректировки исходных данных и получить альтернативные варианты решения.

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$4	Вид бумаги x1	332	0	1800	171,4285714	1800
\$C\$4	Вид бумаги x2	168	0	2300	1E+30	200

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$D\$10	На объем производства Левая часть	500	0	500	1E+30	0
\$D\$11	Маркетинговое на обложечную бумагу Левая часть	168	200	168	121,7142857	0
\$D\$12	Целлюлоза Левая часть	28,4	0	48	1E+30	19,6
\$D\$13	Древесная масса Левая часть	31,68	30000	31,68	0	8,52
\$D\$14	Наполнитель Левая часть	20,04	0	24	1E+30	3,96
\$D\$15	Маркетинговое на офсетную бумагу Левая часть	332	0	190	142	1E+30
\$D\$16	Неотрицательность Левая часть	168	0	0	168	1E+30

Рис. 12. Отчет об устойчивости для оптимального решения с корректировкой по древесной массе

Согласно условиям поставленной задачи целевой коэффициент c_1 при переменной x_1 может изменяться в пределах от 1400 до 2100, а целевой коэффициент c_2 при переменной x_2 – в пределах от 2000 до 2800. Эти пределы смещены относительно крайних значений, полученных в отчете об устойчивости, что в первом приближении не дает понимания, какой результат будет получен при совместном изменении значений целевых коэффициентов. Вероятно, решение останется прежним до тех пор, пока целевой коэффициент c_1 будет меньше целевого коэффициента c_2 . Однако данное утверждение надо проверить, проведя новый расчет с помощью *Поиска решения*. Пусть коэффициент c_1 будет равен 2100, а коэффициент c_2 будет равен 2000. Данные числа заносятся в ячейки В7 и С7 соответственно и осуществляется пересчет с использованием надстройки *Поиск решения*, ничего не меняя в его установках. В окне результатов поиска решения заново задать создание отчета об устойчивости. Полученное решение представлено на рисунке 13.

	A	B	C	D	E	F
1	План производства фабрики бумажно-картонных изделий					
2		Переменные решения				
3	Офсетная бумага	X_1	X_2	Обложечная бумага		
4	Вид бумаги	500	0			
5						
6		C_1	C_2		Z	
7	Коэффициенты целевой функции	2100	2000	Значение целевой функции	1050000	
8						
9	Ограничения	Коэффициенты		Левая часть		Правая часть
10	На объем производства	1	1	500	<=	500
11	Маркетинговое на обложечную бумагу	0	1	0	<=	168
12	Целлюлоза	0,04	0,09	20	<=	48
13	Древесная масса	0,06	0,07	30	<=	31,68
14	Наполнитель	0,03	0,06	15	<=	24
15	Маркетинговое на офсетную бумагу	1	0	500	>=	190
16	Неотрицательность	0	1	0	>=	0
17						
18		X_1	X_2	Z		
19	Решение	500,00 т	0,00 т	1050000		

Рис. 13. Оптимальное решение при крайних значениях целевых коэффициентов

По результатам решения задачи видно: удельная прибыль обложечной бумаги меньше удельной прибыли офсетной, производить обложечную бумагу невыгодно ($x_2 = 0$). Прибыль по сравнению с предыдущим решением выросла (1050 тыс. руб. > 984 тыс. руб.), а сырья всех видов потребуется меньше (ни одно ограничение по сырью не является предельным). Тем не менее, если для поддержания ассортимента продукции необходимо производить обложечную бумагу, следует понять, насколько надо увеличить ее удельную прибыль, чтобы производство данной бумаги стало выгодным. Число 100 в столбце *Допустимое*

Увеличение и в строке *Вид бумаги* x_2 таблицы *Ячейки переменных* нового отчета об устойчивости (рис. 14) показывает, что надо уравнивать удельные стоимости обоих типов бумаги.

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$4	Вид бумаги x1	500	0	2100	1E+30	100
\$C\$4	Вид бумаги x2	0	0	2000	100	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$D\$10	На объем производства Левая часть	500	2100	500	28	310
\$D\$11	Маркетинговое на обложечную бумагу Левая часть	0	0	168	1E+30	168
\$D\$12	Целлюлоза Левая часть	20	0	48	1E+30	28
\$D\$13	Древесная масса Левая часть	30	0	31,68	1E+30	1,68
\$D\$14	Наполнитель Левая часть	15	0	24	1E+30	9
\$D\$15	Маркетинговое на офсетную бумагу Левая часть	500	0	190	310	1E+30
\$D\$16	Неотрицательность Левая часть	0	-100	0	168	1E+30

Рис. 14. Отчет об устойчивости для решения при крайних значениях целевых коэффициентов

Если значения удельных прибылей равны, то полученная ситуация относится к случаю *бесконечного множества оптимальных решений* линейной задачи оптимизации (альтернативные оптимальные решения): любая пара неотрицательных чисел x_1 и x_2 , таких, что их сумма равна $x_1 + x_2 = 500$ и выполняется ограничение $x_2 \leq 168$, будет решением данной задачи, при этом значения целевой функции для любых таких решений будут одинаковыми. Чтобы проверить это, в ячейки B7 и C7 надо ввести одинаковые значения, например, 2100. Затем в ячейки B4 и C4 ввести числа, удовлетворяющие перечисленным выше условиям, и запустить *Поиск решения*. (В окне результатов задать создание отчета об устойчивости.) Результатом, с большой вероятностью, будет решение $x_1 = 500$ и $x_2 = 0$ (рис. 15). Это так называемое «крайнее» решение при возможной альтернативе получения бесконечного числа решений.

На практике при решении линейных задач оптимизации множество оптимальных решений встречается относительно редко. Полученная ситуация может проявиться при проведении анализа чувствительности. Признак того, что при данном решении существуют другие альтернативные решения, дает отчет об устойчивости (рис.16). Если в таблице *Ячейки переменных* в столбцах **Допустимое Увеличение** и **Допустимое Уменьшение** для некоторых переменных присутствуют нули, то это и является признаком того, что существуют альтернативные решения. В других отчетах, показанных выше, нули в данных столбцах отсутствуют, поскольку оптимальное решение было единственно.

Если некоторые переменные принимают нулевые значения, то еще одним признаком присутствия множественных решений будут нулевые значения приведенных стоимостей для этих переменных.

Наличие бесконечного множества альтернативных решений приводит к вопросу выбора решения, на котором необходимо остановиться. Относительно целевой функции все эти решения равнозначны. Тем самым может

потребуется привлечь дополнительный критерий отбора решений, который изначально не учитывался в модели.

	A	B	C	D	E	F
1	План производства фабрики бумажно-картонных изделий					
2		Переменные решения				
3	Офсетная бумага	X_1	X_2	Обложечная бумага		
4	Вид бумаги	500	0			
5						
6		C_1	C_2		Z	
7	Коэффициенты целевой функции	2100	2100	Значение целевой функции	1050000	
8						
9	Ограничения	Коэффициенты		Левая часть		Правая часть
10	На объем производства	1	1	500	$\leq$	500
11	Маркетинговое на оберточную бумагу	0	1	0	$\leq$	168
12	Целлюлоза	0,04	0,09	20	$\leq$	48
13	Древесная масса	0,06	0,07	30	$\leq$	31,68
14	Наполнитель	0,03	0,06	15	$\leq$	24
15	Маркетинговое на офсетную бумагу	1	0	500	$\geq$	190
16	Неотрицательность	0	1	0	$\geq$	0
17						
18		X_1	X_2	Z		
19	Решение	500,00 т	0,00 т	1050000		

Рис. 15. Решение с отказом от обложечной бумаги

Например, в рассматриваемом примере среди альтернативных решений можно найти такое решение, которое обеспечивает минимальные суммарные запасы сырья при той же величине прибыли.

Ячейки переменных		Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
\$B\$4	Вид бумаги x1	500	0	2100	1E+30	0
\$C\$4	Вид бумаги x2	0	0	2100	0	1E+30

Ограничения		Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое
Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
\$D\$10	На объем производства Левая часть	500	2100	500	28	310
\$D\$11	Маркетинговое на обложечную бумагу Левая часть	0	0	168	1E+30	168
\$D\$12	Целлюлоза Левая часть	20	0	48	1E+30	28
\$D\$13	Древесная масса Левая часть	30	0	31,68	1E+30	1,68
\$D\$14	Наполнитель Левая часть	15	0	24	1E+30	9
\$D\$15	Маркетинговое на офсетную бумагу Левая часть	500	0	190	310	1E+30
\$D\$16	Неотрицательность Левая часть	0	0	0	168	1E+30

Рис. 16. Отчет об устойчивости в случае бесконечного множества решений

Подведение итогов анализа чувствительности требует структурирования и записи информации, полученной в результате анализа. Для этого можно воспользоваться инструментом *Excel – Сценарии*.

Сценарий – это сохраненные как единое целое значения ячеек рабочего листа, содержащие значения и формулы. *Excel* имеет возможность быстрого переключения между различными сценариями. При сохранении в качестве сценария значений параметров модели и переменных решения, можно быстро восстановить табличную модель и ее решение при различных наборах параметров. Кроме того, на основе сохраненных сценариев *Excel* может создавать отчет в виде структурированной или сводной таблицы. Сценарии могут быть полезны при проведении анализа чувствительности, для сравнения различных решений и для документирования результатов анализа.

В сценариях сохраняются *константы*, т. е. такие значения, которые в ячейки рабочего листа введены напрямую, а не вычислены по формулам. Значения переменных решения, хотя они вычисляются с помощью средства *Поиск решения*, также считаются константами, поскольку для их определения *не используются* формулы рабочего листа. Результаты вычислений не сохраняются, а вычисляются заново при восстановлении на рабочем листе ранее сохраненных констант сценария или при создании отчета по сценариям. В сценариях для рассматриваемого примера необходимо сохранять значения переменных решения, значения целевых коэффициентов и значения правых частей ограничений.

Решение первой полученной модели представлено целевыми коэффициентами c_1 и c_2 со значениями, соответственно, 1800 и 2300, а правая часть ограничения по древесной массе равнялась 31. Следует занести эти значения заново на рабочий лист и запустить средство *Поиск решения* для получения решения. Полученное прежнее решение составляет: $x_1 = 320,67$ $x_2 = 168$ и $z = 963600$ (см. рис. 7). Чтобы создать новый сценарий для текущего рабочего листа, надо выполнить следующий порядок действий.

- Выбрать вкладку *Данные* → группа *Работа с данными* → меню кнопки *Анализ "что-если"* → *Диспетчер сценариев*.
- В открывшемся диалоговом окне *Диспетчер сценариев* щелкнуть на кнопке *Добавить* (рис. 17).

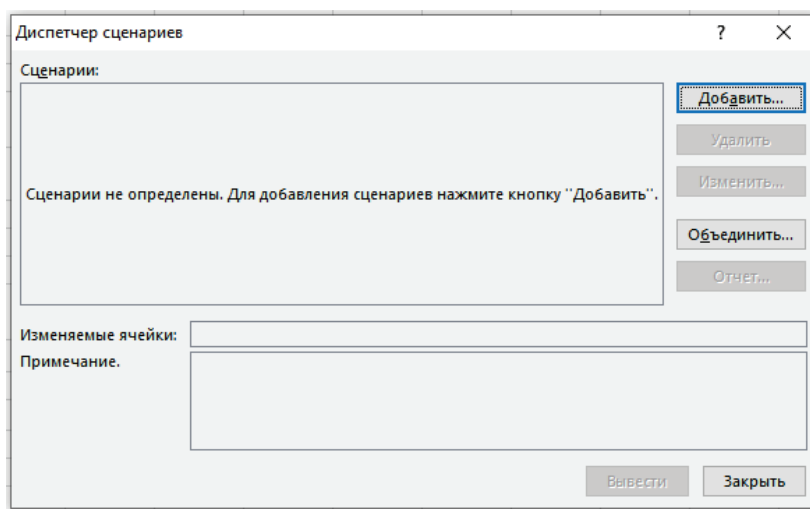


Рис. 17. Диалоговое окно «Диспетчер сценария»

– В диалоговом окне *Добавление сценария* ввести название сценария в поле ввода *Название сценария* (рис. 18). Рекомендуется давать содержательные названия, показывающие отличия данного сценария от других. В текущем примере первый сценарий можно назвать *Начальный*.

– В поле ввода *Изменяемые ячейки* вводятся адреса ячеек, содержащих константы, задающие параметры модели. Эти ячейки в сценариях называются изменяемые ячейки: надо ввести \$B\$4:\$C\$4; \$B\$7:\$C\$7; \$F\$10:\$F\$16. Удобнее вводить адреса ячеек путем выделения ячеек непосредственно на рабочем листе.

– В поле ввода *Примечание* желательно ввести комментарии к создаваемому сценарию. Если не вводить комментарии, то *Excel* автоматически создаст примечание, содержащее имя создателя сценария (по зарегистрированному имени пользователя) и дату его создания.

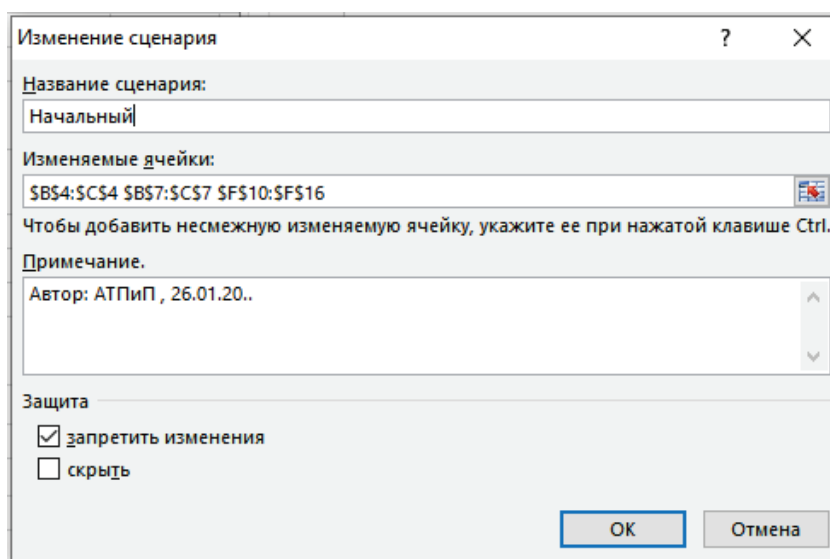


Рис. 18. Диалоговое окно «Изменение сценария»

– Щелкнуть в диалоговом окне *Изменение сценария* на кнопке *OK*.

– В открывшемся диалоговом окне *Значения ячеек сценария* проверьте и при необходимости измените значения для изменяемых ячеек (рис. 19).

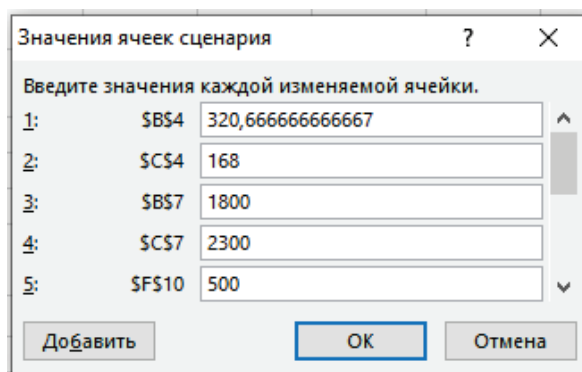


Рис. 19. Диалоговое окно «Значения ячеек сценария»

– Щелкнуть в диалоговом окне *Значения ячеек сценария* по кнопке *ОК*, что создает сценарий и вернет в диалоговое окно *Диспетчер сценариев*.

После создания сценария можно посмотреть, как сценарий вычисляет результаты. Для этого можно изменить какие-либо значения на рабочем листе (например, значения переменных решения) и после выполнить следующие действия. Перейти в меню *Данные* → *Анализ "что-если"* → *Диспетчер сценариев*, в открывшемся диалоговом окне *Диспетчер сценариев* в списке *Сценарии* выбрать нужный сценарий и нажать кнопку *Вывести. Excel* воспроизводит на рабочем листе решение занесенной в сценарий задачи. Если есть числовые расхождения между тем, что показано на рисунке 7, и результатами восстановленного сценария, стоит проверить в сценарии значения изменяемых ячеек.

Далее надо создать сценарий для решения с корректировкой по древесной массе, правая часть ограничения по древесной массе заменена значением 31,68. Необходимо ввести в ячейку F13 данное значение и найти решение с помощью средства *Поиск решения* (рис. 10). Затем повторить описанные выше действия по созданию сценария. Пусть новый сценарий называется *Древесная масса*.

Подобным образом надо создать сценарий, где удельные прибыли бумаги обоих типов равны, и поэтому *Excel* предлагает отказаться от производства обложечной бумаги (см. рис. 15), сценарий с названием *Только офсетная*.

Создание отчета по имеющимся сценариям выполняется следующим образом.

- Меню *Данные* → *Анализ "что-если"* → *Диспетчер сценариев*.
- В открывшемся диалоговом окне *Диспетчер сценариев* щелкнуть по кнопке *Отчет*.
- В диалоговом окне *Отчет по сценарию* указать переключатель, какой *Тип отчета* надо создать: *структура* – создание итогового отчета в виде структурированного рабочего листа либо *сводная таблица* – создание итогового отчета в виде сводной таблицы. Для сценариев решения задач оптимизации наиболее подходит отчет в виде структурированного рабочего листа (рис. 20).
- В поле ввода *Ячейки результата* ввести адреса ячеек, содержащих итоговые результаты. Для задач оптимизации *обязательно* надо указать ячейку с целевой функцией, а также, т. к. в сценариях сохраняются значения правых частей ограничений, ячейки с формулами, вычисляющими значения левых частей ограничений: E7; D10:D16. Щелкнуть по кнопке *ОК*.

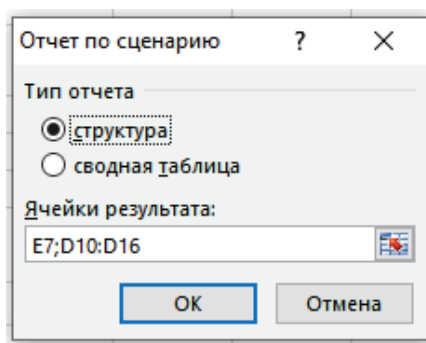


Рис. 20. Диалоговое окно «Отчет по сценарию»

Готовый отчет по сценариям показан на рисунке 21. Полученный отчет может быть использован для структурирования результатов и обоснования принятия решения. Отчет послужит основой для заключительных выводов выполненного анализа чувствительности.

Структура сценария				
	Текущие значения:	Начальный	Древесная масса	Только офсетная
Изменяемые:				
\$B\$4	0	320,6666667	332	500
\$C\$4	0	168	168	0
\$B\$7	1800	1800	1800	2100
\$C\$7	2300	2300	2300	2100
\$F\$10	500	500	500	500
\$F\$11	168	168	168	168
\$F\$12	48	48	48	48
\$F\$13	31,68	31	31,68	31,68
\$F\$14	24	24	24	24
\$F\$15	190	190	190	190
\$F\$16	0	0	0	0
Результат:				
\$E\$7	0	963600	984000	1050000
\$D\$10	0	488,6666667	500	500
\$D\$11	0	168	168	0
\$D\$12	0	27,94666667	28,4	20
\$D\$13	0	31	31,68	30
\$D\$14	0	19,7	20,04	15
\$D\$15	0	320,6666667	332	500
\$D\$16	0	168	168	0

Примечания: столбец "Текущие значения" представляет значения изменяемых ячеек в момент создания Итогового отчета по Сценарию. Изменяемые ячейки для каждого сценария выделены серым цветом.

Рис. 21. Отчет по сценариям

По итогам выполнения анализа чувствительности рассматриваемой задачи можно сделать следующие выводы.

Первоначальное решение (сценарий *Начальный*): требуется производить 320,67 т офсетной и 168 т обложечной бумаги, при этом будет получена прибыль в размере 963600 руб., не загружая полностью производственные мощности.

Чтобы полностью загрузить производственные мощности, надо увеличить месячный запас древесной массы с 31 до 31,68 тонны (сценарий *Древесная масса*), при этом следует производить 332 т офсетной и 168 т обложечной бумаги, тогда будет получена прибыль в размере 984000 руб.

Первые два решения имеют силу, если удельная прибыль обложечной бумаги превышает удельную прибыль офсетной бумаги. Если удельная прибыль обложечной бумаги меньше удельной прибыли офсетной бумаги, то производить обложечную бумагу нерентабельно.

Если удельная прибыль обложечной бумаги примерно равна удельной прибыли офсетной бумаги, то прибыль не зависит от количества произведенной обложечной бумаги (сценарий *Только офсетная*). При этом рационально отказаться от производства обложечной бумаги или уменьшить ее производство до минимума, поскольку это сокращает необходимый для производства суммарный запас всех видов сырья.

Таким образом получены итоги анализа математической модели реальной ситуации. Как итоги, так и полученные «оптимальные» решения должны быть интерпретированы для реальной ситуации производства. Полученные результаты должны помочь и облегчить процесс выработки положительного результата при принятии и реализации эффективного управленческого решения лицу, ответственному за решение поставленной задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кутузов, А. Л. Исследование операций. Линейная оптимизация в Excel и WinQSB [Текст]: учеб. пособие / А. Л. Кутузов. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2015. – 99 с.
2. Балдин, К. В. Математические методы и модели в экономике [Текст] : учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев ; ред. К. В. Балдин. – Изд. 2-е, стер. – М.: ФЛИНТА, 2017. – 328 с.
3. Юрьев, В. Н. Методы оптимизации в экономике и менеджменте [Текст] : учебное пособие / В. Н. Юрьев, В. А. Кузьменков. – Изд. 2-е, испр. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2015.
4. Карлберг, К. Бизнес-анализ с использованием Excel [Текст] / К. Карлберг; пер. В. Гинзбург. – Изд. 4-е. – М.: Изд-во «Вильямс», 2019. – 576 с.
5. Таха Хемди, А. Исследование операций [Текст]. – Изд. 10-е. – М.: Издательство «Диалектика», 2018. – 1056 с.
6. Render B., Stair R.M., Hanna M.E. Quantitative Analysis for Management Pearson Prentice Hall – 2012, 668 pages.