

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный технологический
университет растительных полимеров

*80 летию СПбГТУРП
посвящается*

А.Г. Кривошеев

Э.В. Шемякин

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2011

УДК 621.77 (07)
ББК 30.121я7
К 821

Кривошеев А.Г., Шемякин Э.В. Сопротивление материалов: учебно-методическое пособие / СПб ГТУРП. – СПб., 2011. – 90 с.

В настоящем учебно-методическом пособии изложены основные теоретические понятия и расчетные формулы для изучения различных видов деформации стержня. Даны примеры решения заданий на растяжение-сжатие, кручение и плоский изгиб стержня и исходные данные для самостоятельного выполнения этих заданий.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов химико-технологического факультета и факультета промышленной энергетики.

Рецензенты:

доцент Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики, канд. физ.-мат. наук, Иванов С.Е.;

профессор Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, канд. техн. наук, Гаузе А.А.

Подготовлено и рекомендовано к печати кафедрой сопротивления материалов Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол № 5 от 2 июня 2011 г.).

Утверждено к изданию методической комиссией факультета механики автоматизированных производств СПб ГТУРП (протокол № 8 от 24 июня 2011 г.)

Редактор и корректор В.А. Басова

Техн. редактор Л.Я. Титова

Темплан 2011 г., поз. ____

Подп. к печати 21.11.11. Формат 60х84/16. Бумага тип. №1. Печать офсетная. Объем 5,5 печ. л.; 5,5 уч.-изд. л. Тираж 100 экз. Изд. №__. Цена "С". Заказ ____

Ризограф Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, СПб, 198095, ул. И. Черных, 4.

© ФГБОУВПО Санкт-Петербургский
государственный технологический университет
растительных полимеров, 2011

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов – инженерная дисциплина, в которой изучаются теоретические и экспериментальные основы методов оценки прочности и жесткости конструкций. Под *прочностью* конструкции понимается ее способность сопротивляться разрушению, то есть выдерживать заданную внешнюю нагрузку без разрушения и без потери своего функционального назначения. *Жесткость* конструкции – ее способность сопротивляться *деформациям*, то есть сохранять в определенных пределах свою форму и размеры под действием внешней нагрузки. В сопротивлении материалов также изучаются задачи расчета конструкций на *устойчивость*, то есть их способность сохранять определенную начальную форму упругого равновесия. Вместе с этим конструкция должна удовлетворять и определенным экономическим требованиям, то есть иметь приемлемые показатели по стоимости изготовления и материалоемкости.

Сопротивление материалов как инженерная и общетехническая наука имеет свою богатую событиями историю. Проблемы обеспечения прочности конструкций различного назначения решаются человечеством на всем протяжении его развития. Наука о сопротивлении материалов в основном сложилась к концу XIX – началу XX веков как результат совместных усилий ученых и инженеров ведущих стран мира, в том числе представителей российской школы механиков.

Эта дисциплина играет несколько ролей в учебных программах технических университетов. Во-первых, она имеет самостоятельное применение в инженерной практике, потому что представленные в ней методы вполне достаточны для решения многих задач прочности и жесткости типовых элементов и деталей современных машин, механизмов, приборов и т. п. Во-вторых, в курсе сопротивления материалов вводятся основные понятия и законы, которые необходимы для расчетов сложных составных конструкций и получают дальнейшее развитие в специальных учебных дисциплинах на старших курсах. При этом решение сложных задач расчета конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, как правило, осуществляется с использованием современных пакетов компьютерных программ, таких как ABAQUS, ANSYS, CATIA, COSMOS, NASTRAN, SolidWorks и др.

Таким образом, сопротивление материалов является одной из важнейших дисциплин в общетехническом образовании инженеров. Современная техника, использующая новейшие технологии и материалы, предъявляет все более жесткие требования к качеству, надежности и экономичности разрабатываемых изделий. Это требует высокого уровня знания науки о сопротивлении материалов и смежных дисциплин.

1. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

1.1. Основные виды элементов и опор конструкций

К основным видам элементов, на которые подразделяются составные конструкции, относятся стержень (или брус), оболочка, пластина и массивное тело. Такая классификация элементов определяется их геометрическими свойствами, выраженными соотношениями характерных размеров этих элементов. Математические модели поведения этих элементов под действием внешней нагрузки, как правило, значительно отличаются по уровню сложности их исследования.

Стержнем называется тело, один из размеров которого (длина) существенно превышает два других его поперечных размера. *Осью стержня* называется линия, образованная центрами тяжести его поперечных сечений. По виду оси стержни бывают прямолинейными или криволинейными. Различают также стержни с постоянным или переменным поперечным сечением. На рис 1.1 показан прямолинейный стержень с постоянным прямоугольным поперечным сечением, для которого выполняется соотношение его размеров: $l \gg h, b$; по прямолинейной оси стержня направлена координатная ось Ox .

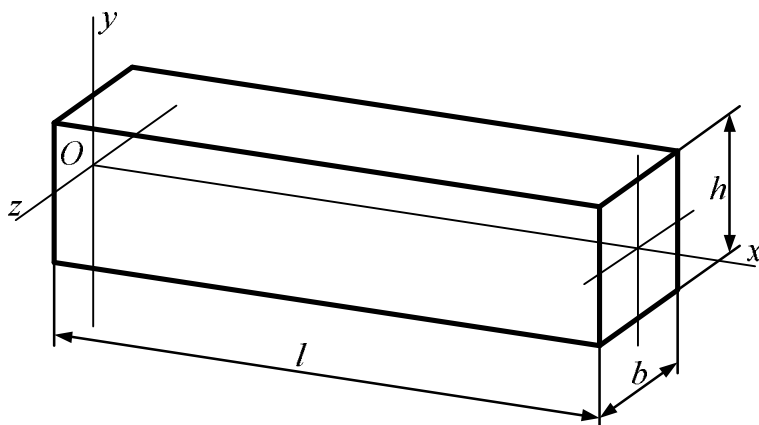


Рис. 1.1. Прямолинейный стержень с постоянным прямоугольным поперечным сечением

Оболочкой называется тело, один из размеров которого (толщина) существенно меньше двух других его размеров. На рис. 1.2 показана криволинейная оболочка, толщина h и размеры a и b которой, удовлетворяют соотношению: $h \ll a, b$ (в 5-6 раз или более). Оболочки могут иметь постоянную или переменную толщину. Геометрическая форма оболочки характеризуется *серединной поверхностью*, точки которой располагаются на одинаковых расстояниях от ограничивающих оболочку поверхностей. На рис. 1.2 срединная поверхность оболочки показана пунктиром. Оболочка с плоской срединной поверхностью называется *пластиной*.

Массивное тело характеризуется тем, что все его размеры соизмеримы.

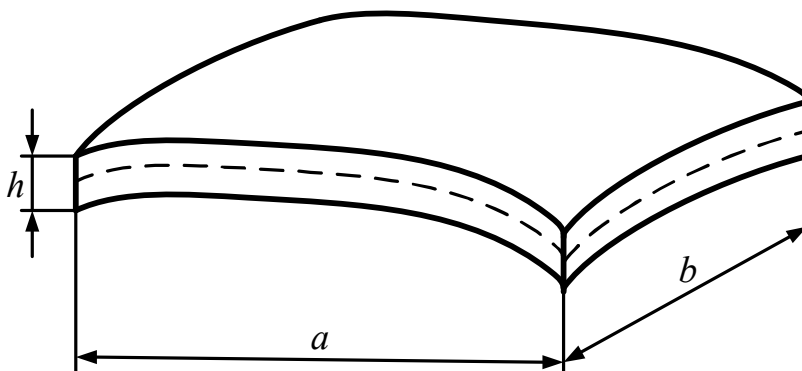


Рис. 1.2. Оболочка

В курсе сопротивления материалов обычно основное внимание уделяется изучению стержневых элементов. На примере стержня наиболее удобно и достаточно просто ввести основные понятия сопротивления материалов и продемонстрировать методы расчета на прочность и жесткость при различных видах деформации стержня. Кроме того, стержневые элементы широко используются в различных областях техники, и полученные в курсе результаты имеют непосредственное практическое применение в инженерных расчетах.

Изучение многомерных элементов конструкций, таких, как оболочки, пластины и массивные тела, является сложным и трудоемким, что требует повышенной математической подготовки. Соответствующие задачи обычно рассматриваются в курсе теории упругости.

Требуемое положение конструкции в пространстве обеспечивается ее соединениями (закреплениями) с другими неподвижными телами, которые называются *связями* или *опорами*. Любая связь конструкции тем или иным образом ограничивает ее перемещение в пространстве. Реальные связи между объектами могут осуществляться различными конструктивными способами, в том числе и достаточно сложными.

Далее ограничимся рассмотрением наиболее простых видов опор стержней, находящихся под действием плоской системы сил. Эти опоры препятствуют перемещению стержня в данной силовой плоскости (рис. 1.3).

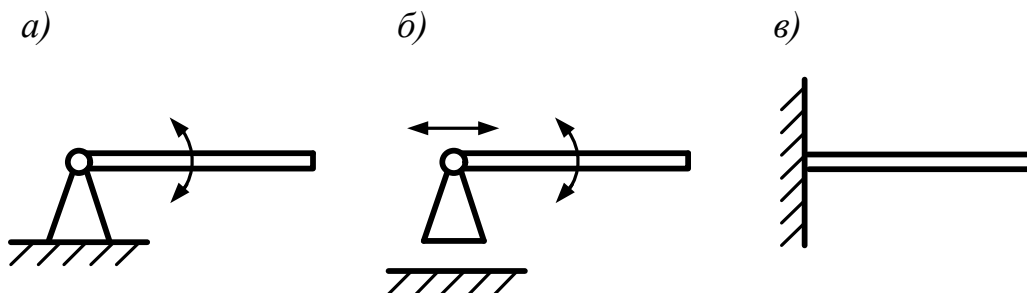


Рис. 1.3. Основные виды опорных закреплений стержня: неподвижный шарнир (а), подвижный шарнир (б) и заделка (в)

Одним из видов таких опор является *неподвижный шарнир* (рис. 1.3, а), который позволяет стержню совершать поворот вокруг шарнира, но препятствует любому поступательному перемещению этого стержня. Другим видом шарнирных опор является *подвижный шарнир* (рис. 1.3, б), который помимо поворота стержня позволяет его прямолинейное перемещение вдоль опорной плоскости. Подвижный шарнир также называют *катковой опорой*.

Еще одним видом опор стержня является *заделка* или *жесткое защемление* (рис. 1.3, в). При таком способе закрепления стержня невозможны ни поступательные и ни вращательные его перемещения.

Под действием внешней нагрузки стержень находится в равновесии из-за появления дополнительных сил, приложенных к нему со стороны опор. Эти силы называются *реакциями связей* или *опорными реакциями*. Во многих задачах расчета стержня на прочность и жесткость опорные реакции могут быть предварительно найдены при заданной внешней нагрузке. С этой целью используются уравнения равновесия стержня, которые изучаются в разделе «Статика» курса теоретической механики. Такие задачи называются *статически определяемыми*.

Задачи, в которых для определения реакций опор уравнений равновесия недостаточно, называются *статически неопределимыми*. В таких задачах используются дополнительные *уравнения совместности деформаций*, которые изучаются в курсе сопротивления материалов.

1.2. Внутренние усилия. Метод сечений

Рассмотрим стержень (рис. 1.1), находящийся в равновесии под действием системы внешних сил, которая включает в себя и опорные реакции. Мысленно разделим этот стержень на две части каким-либо плоским сечением. Если стержень в целом находится в равновесии, то и выделенные его части также находятся в этом состоянии. К каждой из отсеченных частей стержня помимо оставшихся внешних сил в плоскости сечения приложена *система внутренних сил*, непрерывно распределенных по площади этого сечения. Характер распределения внутренних сил зависит от воздействия на стержень системы внешних сил. Для упрощения дальнейших рассуждений будем рассматривать *поперечные сечения* стержня, плоскости которых перпендикулярны его продольной оси Ox (рис. 1.1).

Для оценки прочности стержня требуется знать величину внутренних сил, действующих в каждом его поперечном сечении. Как известно из курса теоретической механики, любая система сил, в частности, рассматриваемая система внутренних сил, может быть эквивалентным образом заменена *главным вектором* и *главным моментом*, приложенными к некоторой заранее выбранной точке. Такая замена системы сил называется *приведением системы сил к центру*. На рис. 1.4 показаны главный вектор $\mathbf{R}$ и главный момент $\mathbf{L}_C$ системы внутренних сил, действующих на левую отсеченную часть стержня. Векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{L}_C$ приложены к центру тяжести сечения C .

Главный вектор $\mathbf{R}$ разложим на составляющие N , Q_y , Q_z по координатным осям Cx , Cy , Cz соответственно (рис. 1.4, а). Скалярные величины N , Q_y , Q_z , равные проекциям указанных составляющих вектора $\mathbf{R}$, носят следующие названия: N – продольная (нормальная) сила; Q_y , Q_z – поперечные (перерезывающие) силы.

Главный момент L_C разложим на моменты M_K , M_y , M_z относительно координатных осей Cx , Cy , Cz (рис. 1.4, б). Эти осевые моменты называются: M_K – крутящий момент; M_y , M_z – изгибающие моменты.

Введенные таким образом шесть скалярных величин N , Q_y , Q_z , M_K , M_y , M_z называются внутренними усилиями (внутренними силовыми факторами), действующими в рассматриваемом поперечном сечении стержня. Внутренние усилия являются суммарными характеристиками взаимодействия отсеченных частей стержня.

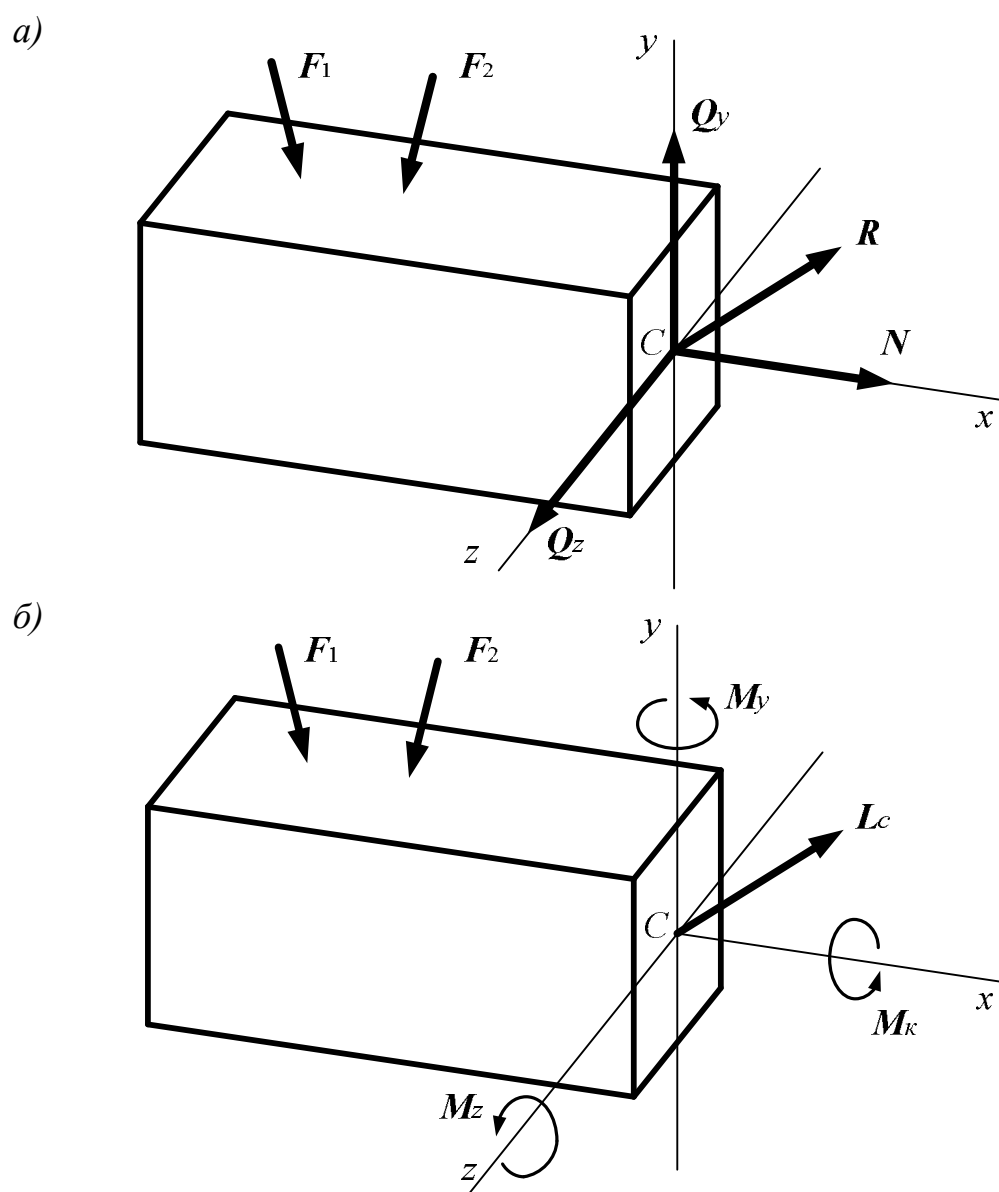


Рис. 1.4. Главный вектор $\mathbf{R}$, главный момент $\mathbf{L}_C$ и внутренние усилия N , Q_y , Q_z , M_K , M_y , M_z , действующие в поперечном сечении стержня

При системах внешних сил определенного вида в поперечных сечениях стержня могут действовать не все шесть внутренних усилий, а только некоторые из них. В зависимости от этого различают следующие *виды деформации* стержня:

растяжение-сжатие, если в поперечных сечениях стержня действует только продольная сила N (при растяжении $N > 0$, при сжатии $N < 0$);

сдвиг (срез), если в поперечных сечениях стержня действуют только поперечные силы Q_y и/или Q_z ;

кручение, если в поперечных сечениях стержня действует только крутящий момент M_k ;

изгиб, если в поперечных сечениях стержня действуют изгибающие моменты M_y и/или M_z (чаще одновременно с изгибающими моментами действуют и поперечные силы Q_y и Q_z);

сложное сопротивление, если в поперечных сечениях стержня действуют одновременно все шесть внутренних усилий.

Определение внутренних усилий в заданном поперечном сечении стержня выполняется *методом сечений*. В этом методе используются уравнения равновесия одной из отсеченных частей стержня. Для левой отсеченной части стержня, показанной на рис. 1.4, эти уравнения записываются в следующем виде:

$$N + \sum F_{ix} = 0; \quad Q_y + \sum F_{iy} = 0; \quad Q_z + \sum F_{iz} = 0; \quad (1.1)$$

$$M_k + \sum M_x(F_i) = 0; \quad M_y + \sum M_y(F_i) = 0; \quad M_z + \sum M_z(F_i) = 0. \quad (1.2)$$

Таким образом, внутренние усилия N , Q_y , Q_z вычисляются из уравнений (1.1) через взятые со знаком «минус» суммы проекций внешних сил F_i ($i = 1, 2, \dots$), действующих на рассматриваемую часть стержня, по формулам:

$$N = - \sum F_{ix}; \quad Q_y = - \sum F_{iy}; \quad Q_z = - \sum F_{iz}; \quad (1.3)$$

а внутренние усилия M_k , M_y , M_z – через взятые со знаком «минус» суммы моментов этих внешних сил относительно осей Cx , Cy , Cz :

$$M_k = - \sum M_x(F_i); \quad M_y = - \sum M_y(F_i); \quad M_z = - \sum M_z(F_i). \quad (1.4)$$

Отметим, что эти внутренние усилия могут быть определены также из уравнений равновесия правой отсеченной части стержня.

Для каждого внутреннего усилия устанавливается *правило знаков*, согласно которому его действие в определенном направлении считается положительным, а в противоположном направлении – отрицательным. Эти правила знаков для внутренних усилий будут сформулированы далее в соответствующих главах настоящего пособия.

Внутренние усилия обычно изменяются вдоль продольной оси стержня. Для наглядного изображения этих зависимостей строятся графики, называемые в сопротивлении материалов *эпюрами внутренних усилий*. В результате построения этих эпюр среди всех поперечных сечений стержня

определяются *опасные сечения*, в которых действуют наибольшие по модулю внутренние усилия.

1.3. Напряжения и деформации

Как отмечалось ранее, отсеченные части стержня взаимодействуют между собой непрерывно по площади сечения. Характеристиками интенсивности этого взаимодействия в разных точках сечения являются напряжения.

Рассмотрим поперечное сечение стержня и выберем какую-либо точку этого сечения (рис.1.5).

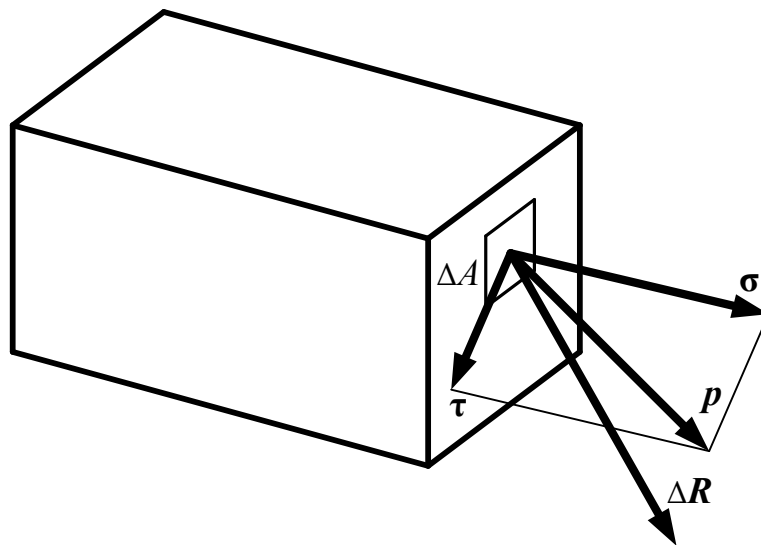


Рис. 1.5. Полное напряжение p , нормальное напряжение σ и касательное напряжение τ в точке поперечного сечения стержня

Если ввести малую площадку ΔA в окрестности этой точки, то на ней действует некоторая система внутренних сил с главным вектором ΔR . Предел отношения $\Delta R/\Delta A$ при бесконечно малом уменьшении площадки ΔA (при стягивании ее в точку) называется *полным напряжением* p в рассматриваемой точке сечения:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}. \quad (1.5)$$

В практических расчетах стержня на прочность важную роль играют составляющие вектора p , действующие в определенных направлениях относительно плоскости поперечного сечения. Его составляющая σ , направленная перпендикулярно плоскости сечения, называется *нормальным напряжением*, а составляющая τ , действующая в плоскости сечения, называется *касательным напряжением* (рис. 1.5). Поскольку векторы σ и τ взаимно перпендикулярны, модуль полного напряжения вычисляется через модули этих составляющих по следующей формуле:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (1.6)$$

Единицей измерения напряжений в системе СИ является *паскаль* (Па = Н/м²). На практике обычно используется кратная ей единица – *мегапаскаль* (МПа = 10⁶ Па = Н/мм²).

Точки стержня под действием внешней нагрузки перемещаются, то есть изменяют свое положение в пространстве. Если перемещения точек различны, то возникает *деформация* стержня, то есть изменение его формы и размеров.

Рассмотрим некоторые из основных характеристик деформации на примере прямолинейного стержня с постоянным прямоугольным поперечным сечением (рис. 1.1), испытывающего деформацию растяжения под действием внешних сил F . При такой деформации длина стержня l увеличивается и становится равной l' , а его поперечные размеры h и b уменьшаются и становятся равными h' и b' (рис. 1.6).

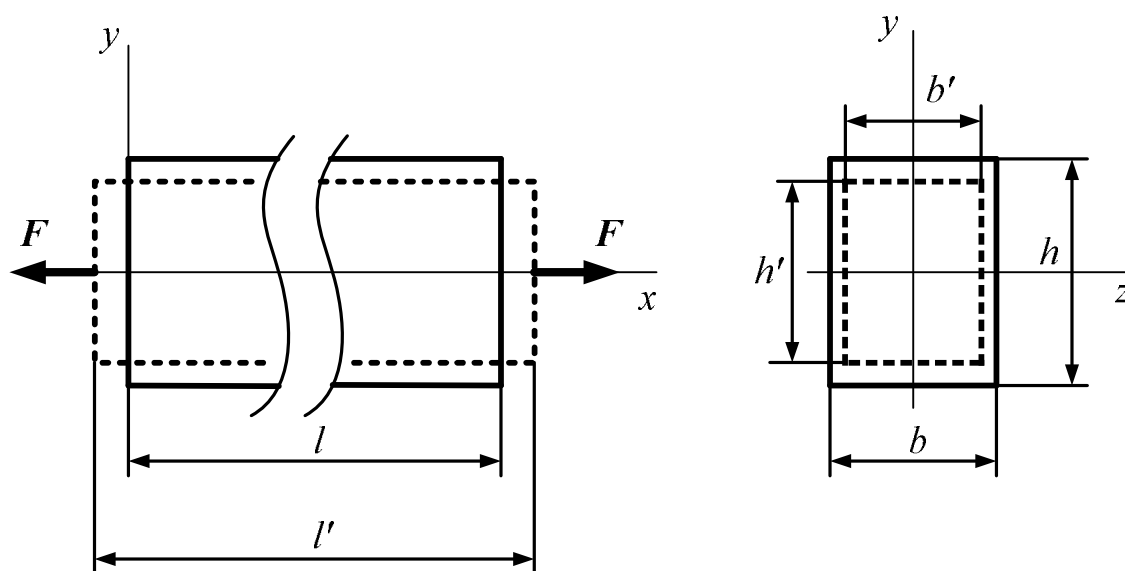


Рис. 1.6. Продольные и поперечные деформации прямолинейного стержня с постоянным прямоугольным поперечным сечением при растяжении

Изменение длины стержня $\Delta l = l' - l$, то есть разность между ее конечной и начальной величинами, называется *абсолютной продольной деформацией* или *удлинением* стержня, а изменения поперечных размеров $\Delta h = h' - h$, $\Delta b = b' - b$ – его *абсолютными поперечными деформациями*. Абсолютные деформации измеряются в единицах длины, например, в миллиметрах.

Относительной продольной деформацией стержня называется величина ϵ_x , равная отношению абсолютной продольной деформации Δl к его первоначальной длине l :

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.7)$$

Относительными поперечными деформациями стержня называются величины ε_y и ε_z , равные отношениям абсолютных поперечных деформаций Δh и Δb к соответствующим первоначальным размерам поперечного сечения h и b :

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta h}{h}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta b}{b}. \quad (1.8)$$

Относительные деформации являются безразмерными величинами.

Важнейшей характеристикой деформационных свойств материала является коэффициент Пуассона, или коэффициент поперечной деформации. Коэффициентом Пуассона называется абсолютная величина отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации. Для изотропных материалов, механические свойства которых одинаковы во всех направлениях, относительные поперечные деформации равны: $\varepsilon_y = \varepsilon_z$. При этом условии формула для коэффициента Пуассона μ записывается в следующем виде:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| = \left| \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \right|. \quad (1.9)$$

В формуле (1.9) отношения деформаций берутся по модулю, так как они имеют разные знаки: $\varepsilon_x > 0$, $\varepsilon_y < 0$, $\varepsilon_z < 0$ – при растяжении; $\varepsilon_x < 0$, $\varepsilon_y > 0$, $\varepsilon_z > 0$ – при сжатии. Коэффициент Пуассона для различных материалов имеет разные значения, но всегда не превышает 0,5 ($0 < \mu < 0,5$).

Помимо рассмотренных здесь *линейных деформаций*, характеризующих изменение размеров стержня при растяжении или сжатии, при других видах деформации, например, при сдвиге, используются *угловые деформации*, характеризующие изменение формы стержня.

В заключение отметим ряд *допущений (гипотез)*, которые используются при решении задач в сопротивлении материалов:

- материал конструкции считается *сплошным*, то есть непрерывно заполняющим данный ее объем и обладающим определенными механическими свойствами;
- материал конструкции считается *однородным* и *изотропным*, то есть обладающим одинаковыми механическими свойствами во всех точках и по всем направлениям;
- материал обладает свойством *идеальной упругости*, то есть способностью полностью восстанавливать первоначальную форму и размеры конструкции после снятия внешней нагрузки; это допущение справедливо лишь при напряжениях, не превышающих определенной величины для данного материала;
- результат действия на конструкцию системы внешних нагрузок равен сумме результатов действия на нее каждой нагрузки в отдельности (*принцип независимости действия сил* или *принцип суперпозиции*); это положение

справедливо при достаточно малых деформациях, линейно зависящих от возникающих напряжений;

– поперечные сечения стержня, плоские до его деформации, остаются плоскими и после деформации (*гипотеза плоских сечений* или *гипотеза Бернулли*).

1.4. Контрольные вопросы для самопроверки

1. Что является предметом изучения дисциплины «Сопротивление материалов»?
2. Какие свойства конструкции называются прочностью, жесткостью и устойчивостью?
3. Каким образом выполняются расчеты сложных конструкций на прочность и жесткость?
4. На какие основные элементы подразделяются составные конструкции?
5. Какие элементы конструкции называются стержнем, оболочкой, пластиной и массивным телом?
6. Какие основные виды опор используются для закрепления стержня? Какую подвижность стержня допускают эти опоры?
7. Что такое опорные реакции стержня? С использованием каких уравнений они определяются?
8. Какие задачи в сопротивлении материалов называются статически-определимыми?
9. Как называются внутренние усилия, действующие в поперечном сечении стержня?
10. Какие виды деформации стержня называются растяжением-сжатием, сдвигом, кручением, изгибом и сложным сопротивлением?
11. Каким методом определяются внутренние усилия и какие уравнения в нем используются?
12. Что называется эпюрами внутренних усилий?
13. Что называется полным, нормальным и касательным напряжениями в точке поперечного сечения стержня?
14. Какие поперечные сечения стержня называются опасными?
15. Какие величины характеризуют линейные деформации стержня при растяжении и сжатии? В каких единицах они измеряются?
16. Что называется коэффициентом Пуассона? В каких пределах он изменяется для различных материалов?
17. Какие гипотезы используются при решении задач в сопротивлении материалов?

2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.1. Основные понятия

Растяжением – сжатием называется такой вид деформации стержня, при котором во всех его поперечных сечениях действует только одно *внутреннее усилие (внутренний силовой фактор) – продольная сила*. Продольную силу также называют *нормальной силой* и обозначают буквой N . Продольная сила приложена к центру тяжести поперечного сечения стержня и направлена перпендикулярно плоскости сечения по оси стержня. Деформация растяжения и сжатия возникает в стержне под действием внешних сил, направленных по оси стержня, или внешних силовых нагрузок, равнодействующая которых направлена также вдоль продольной оси стержня.

Для продольной силы используется следующее *правило знаков*: при растяжении продольная сила направлена по внешней нормали к поперечному сечению стержня и считается положительной (рис. 2.1, а); при сжатии продольная сила считается отрицательной (рис. 2.1, б).

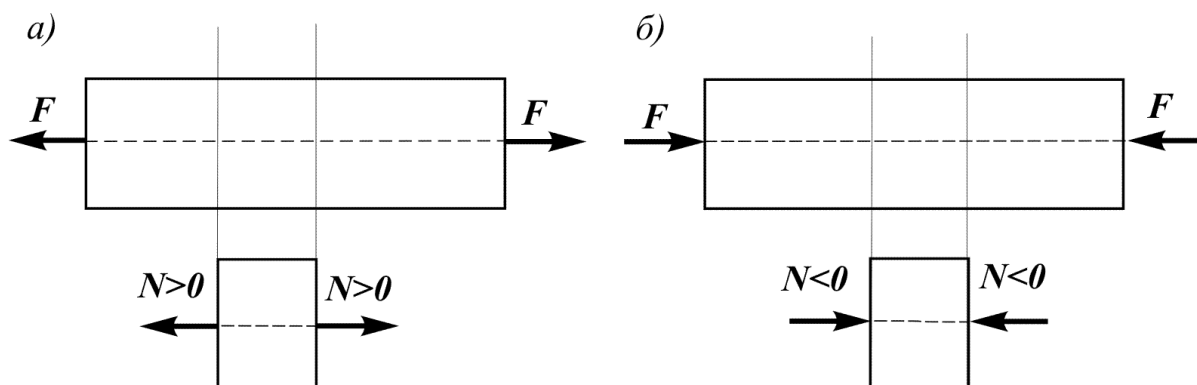


Рис. 2.1. Правило знаков продольной силы N : при растяжении $N > 0$ (а); при сжатии $N < 0$ (б).

Внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях стержня, могут изменяться вдоль его продольной оси. Для наглядного представления характера этого изменения внутренних усилий строят их графики, которые называются *эпюрами*. При построении эпюр сначала устанавливаются границы *участков нагружения*, в пределах которых внутренние усилия изменяются по определенной зависимости от координаты поперечного сечения.

Для определения внутренних усилий в заданном поперечном сечении стержня применяется *метод сечений*. В этом методе используются уравнения равновесия для отсеченной части стержня, то есть для части стержня, расположенной по одну сторону от заданного сечения.

Для определения продольной силы методом сечений используется уравнение равновесия проекций сил на продольную ось стержня. На этом основании можно сформулировать следующее *правило определения продольной силы*: продольная сила в заданном сечении стержня равна алгебраической сумме внешних сил F_i , приложенных к одной из отсеченных (левой или правой) частей стержня и взятых со знаками, показанными на рис. 2.2. Внешние силы F_i берутся при суммировании со знаком «плюс», если они действуют в направлении от заданного сечения, то есть стремятся растягивать стержень в этом сечении, а внешние силы, направленные к сечению и стремящиеся сжимать стержень в этом сечении, берутся со знаком «минус». Следовательно, продольная сила в рассматриваемом примере вычисляется по следующим формулам: $N = -F_1 + F_2$ – с использованием левой отсеченной части стержня; $N = F_3 - F_4$ – с использованием правой отсеченной части.

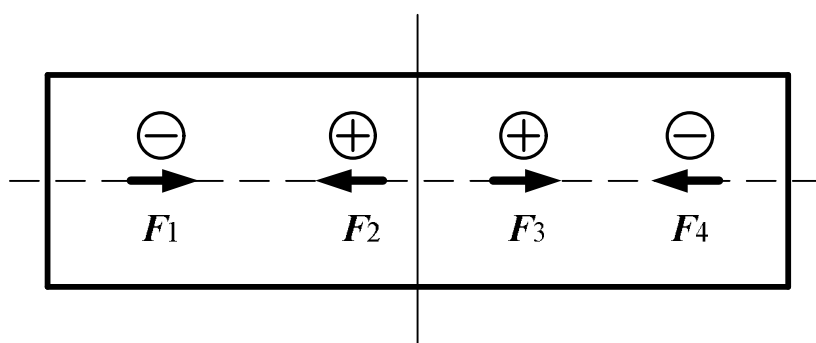


Рис. 2.2. Выбор знаков внешних сил F_i при определении продольной силы N методом сечений

Рассмотрим вопрос о распределении напряжений, действующих в поперечных сечениях стержня при растяжении и сжатии. Это распределение существенно зависит от способа приложения внешних сил лишь вблизи мест нагружения стержня, а в его частях, достаточно удаленных от мест приложения внешних сил, распределение напряжений практически зависит только от статического эквивалента этих сил (*принцип Сен-Венана*).

Распределение нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня при его растяжении и сжатии показано на рис. 2.3. Неравномерностью распределения напряжений вблизи мест приложения внешних нагрузок обычно пренебрегают и при расчете стержня на растяжение и сжатие считают, что *нормальные напряжения во всех поперечных сечениях стержня распределены равномерно*, то есть эти напряжения одинаковы во всех точках поперечного сечения.

В поперечном сечении стержня с площадью A , в котором действует продольная сила N , нормальные напряжения σ вычисляются по следующей формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (2.1)$$

Для нормальных напряжений принимается такое же правило знаков, как и для продольной силы: *растягивающие нормальные напряжения считаются положительными, сжимающие – отрицательными* (рис 2.3). Нормальное напряжение обычно измеряется в *мегапаскалях* ($\text{МПа} = 10^6 \text{ Па} = \text{Н/мм}^2$).

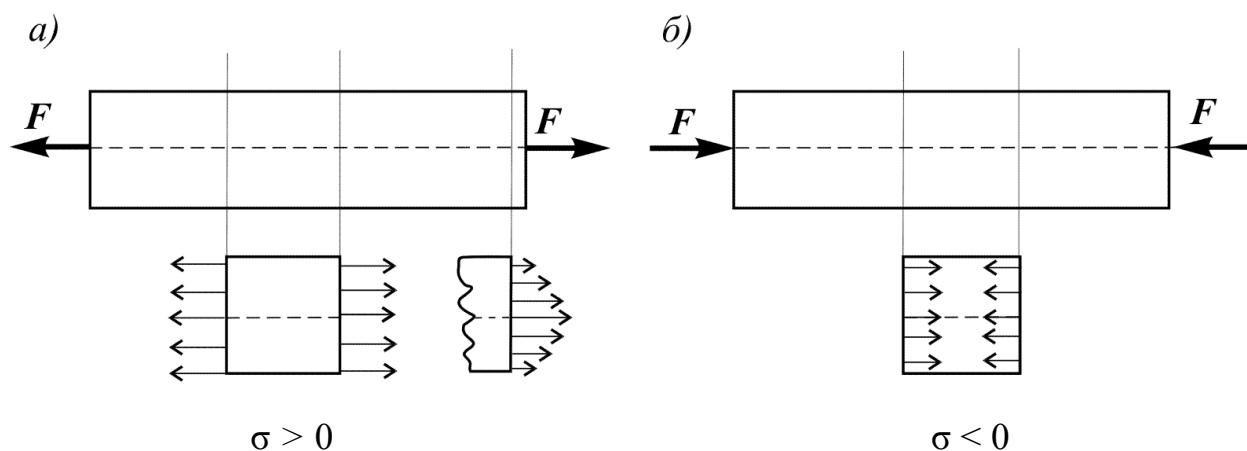


Рис. 2.3. Распределение нормальных напряжений σ в поперечных сечениях стержня при растяжении (а) и сжатии (б).

Пусть стержень (или участок стержня) с первоначальной длиной l и постоянной площадью поперечного сечения A испытывает деформацию растяжения или сжатия с одинаковой продольной силой N во всех поперечных сечениях. При этом его первоначальная длина l изменяется на величину Δl , которую называют *абсолютной продольной деформацией*. Отношение абсолютной продольной деформации Δl к первоначальной длине стержня l называется *относительной продольной деформацией*:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l} . \quad (2.2)$$

При растяжении деформации Δl и ϵ_x являются положительными, при сжатии – отрицательными.

Согласно *закону Гука при растяжении и сжатии* относительная продольная деформация ϵ_x пропорциональна нормальному напряжению σ :

$$\epsilon_x = \frac{\sigma}{E} , \quad (2.3)$$

где E (МПа) – постоянная величина, называемая *модулем нормальной (продольной) упругости* или *модулем Юнга*. Она характеризует жесткость материала, то есть его способность сопротивляться деформированию, и является важнейшей характеристикой механических свойств материала. Отметим, что закон Гука выполняется при нормальных напряжениях, не превышающих по модулю *предела пропорциональности* (см. гл. 3).

При выполнении закона Гука на основании формул (2.1), (2.2), (2.3) абсолютная продольная деформация стержня определяется по формуле:

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} l = \frac{Nl}{EA}. \quad (2.4)$$

Произведение EA называют *жесткостью сечения стержня* при растяжении и сжатии.

Если стержень состоит из n участков с первоначальными длинами l_i , постоянными площадями поперечных сечений A_i , на каждом из которых действуют постоянные продольные силы N_i , то абсолютная продольная деформация всего стержня равна сумме абсолютных продольных деформаций этих участков:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E A_i}. \quad (2.5)$$

Прочность стержней, работающих на растяжение или сжатие, оценивается по *методу допускаемых напряжений* (см. гл. 3). Согласно этому методу *условием прочности* стержня при деформации этого вида является выполнение условия: максимальное по модулю нормальное напряжение, равное наибольшей величине отношения модуля продольной силы к площади поперечного сечения стержня, не должно превышать *допускаемое нормальное напряжение*. Это условие записывается в виде следующего неравенства:

$$\max |\sigma| = \max \frac{|N|}{A} \leq [\sigma], \quad (2.6)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение, равное $[\sigma]_p$ при расчете стержня на растяжение, или равное $[\sigma]_c$ – при сжатии. Отметим, что в условии (2.6) площадь поперечного сечения стержня A может быть переменной.

Для *пластичных материалов* допускаемые нормальные напряжения $[\sigma]_p$ и $[\sigma]_c$ являются одинаковыми, а для *хрупких материалов* – разными. Допускаемые напряжения определяют на основании экспериментальных испытаний материалов (см. гл. 3).

Условие прочности (2.6) может использоваться с разными целями. Рассмотрим *виды расчета на прочность* на примере стержня с постоянным поперечным сечением площадью A , испытывающего деформацию растяжения под действием внешних сил F (рис. 2.1, а). В этом случае во всех поперечных сечениях стержня действуют одинаковые продольные силы $N = F$ и одинаковые нормальные напряжения $\sigma = F/A$ (рис. 2.3, а).

Во-первых, может выполняться *проверочный расчет*, целью которого является просто проверка условия прочности (2.6), которое в

рассматриваемом примере записывается следующим образом:

$$\max |\sigma| = \frac{F}{A} \leq [\sigma].$$

Во-вторых, может определяться *максимальная нагрузка* $F_{\max}$, которую не должны превышать внешние силы F , действующие на стержень:

$$F \leq F_{\max} = [\sigma] A.$$

В-третьих, при заданных внешних силах F может выполняться *проектный расчет*, целью которого является *подбор размеров поперечного сечения стержня*. Из условия прочности (2.6) следует, что площадь поперечного сечения стержня A должна превышать ее минимальную величину $A_{\min}$:

$$A \geq A_{\min} = \frac{F}{[\sigma]}.$$

Для однозначного выбора размеров поперечного сечения стержня требуется предварительно задать его форму. Например, минимальный размер $a_{\min}$ стороны квадратного поперечного сечения вычисляется по следующей формуле:

$$a_{\min} = \sqrt{A_{\min}} = \sqrt{\frac{F}{[\sigma]}}.$$

Условие жесткости стержня при растяжении или сжатии обычно формулируется как ограничение его абсолютной продольной деформации Δl или относительной продольной деформации ϵ_x :

$$|\Delta l| \leq [\Delta l]; \quad |\epsilon_x| \leq [\epsilon_x], \quad (2.7)$$

где $[\Delta l]$ – допускаемая абсолютная деформация, а $[\epsilon_x]$ – допускаемая относительная деформация стержня. Эти допускаемые деформации устанавливаются техническими условиями при конкретной эксплуатации стержня.

2.2. Пример выполнения задания

Расчёт стержня на прочность и жёсткость

при растяжении и сжатии

Стержень из пластичной стали (рис. 2.4) состоит из двух участков длиной $l = 100$ мм, постоянные площади поперечных сечений которых равны $A_1 = 10 \text{ мм}^2$ и $A_2 = 20 \text{ мм}^2$. К стержню приложены внешние силы $F_1 = 400$ Н и $F_2 = 800$ Н. Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; допускаемое нормальное напряжение на растяжение и сжатие $[\sigma] = 160$ МПа.

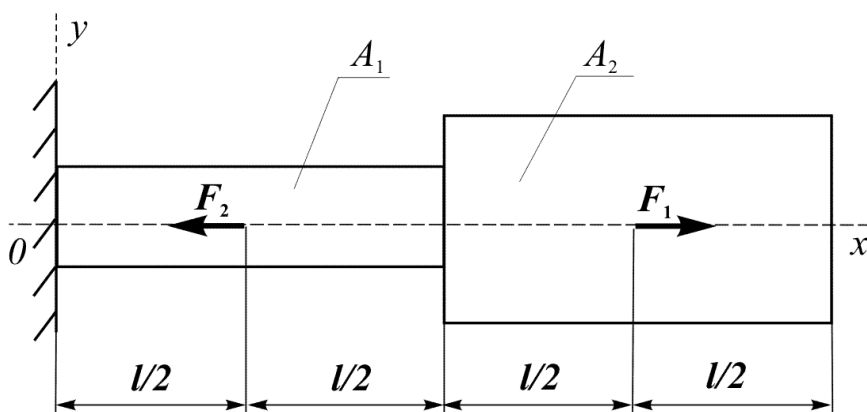


Рис. 2.4. Расчетная схема стержня в рассматриваемом примере

Построить эпюры продольной силы N (Н), нормального напряжения σ (МПа) и продольных перемещений поперечных сечений u (мм); проверить стержень на условие прочности.

Решение

Разобьем стержень на участки *нагружения*, границами которых являются середина стержня, в которой происходит скачкообразное изменение площади поперечного сечения, а также сечения, в которых действуют внешние силы F_1 и F_2 . В результате получаются четыре участка длиной по $l/2$, которые пронумеруем слева направо (рис. 2.5, а). На каждом из этих участков продольные силы и нормальные напряжения будут постоянными.

Определим продольные силы в данном примере методом сечений с использованием как левых, так и правых отсеченных частей стержня.

Для использования левых отсеченных частей стержня требуется предварительно найти реакцию X в заделке из уравнения равновесия

$$\sum F_x = -X - F_2 + F_1 = 0;$$

$$X = -F_2 + F_1 = -800 + 400 = -400 \text{ (Н)}.$$

Знак «минус» у найденной реакции X означает, что она действует в противоположном направлении, показанном на рис. 2.5 а, и по модулю равна 400 Н.

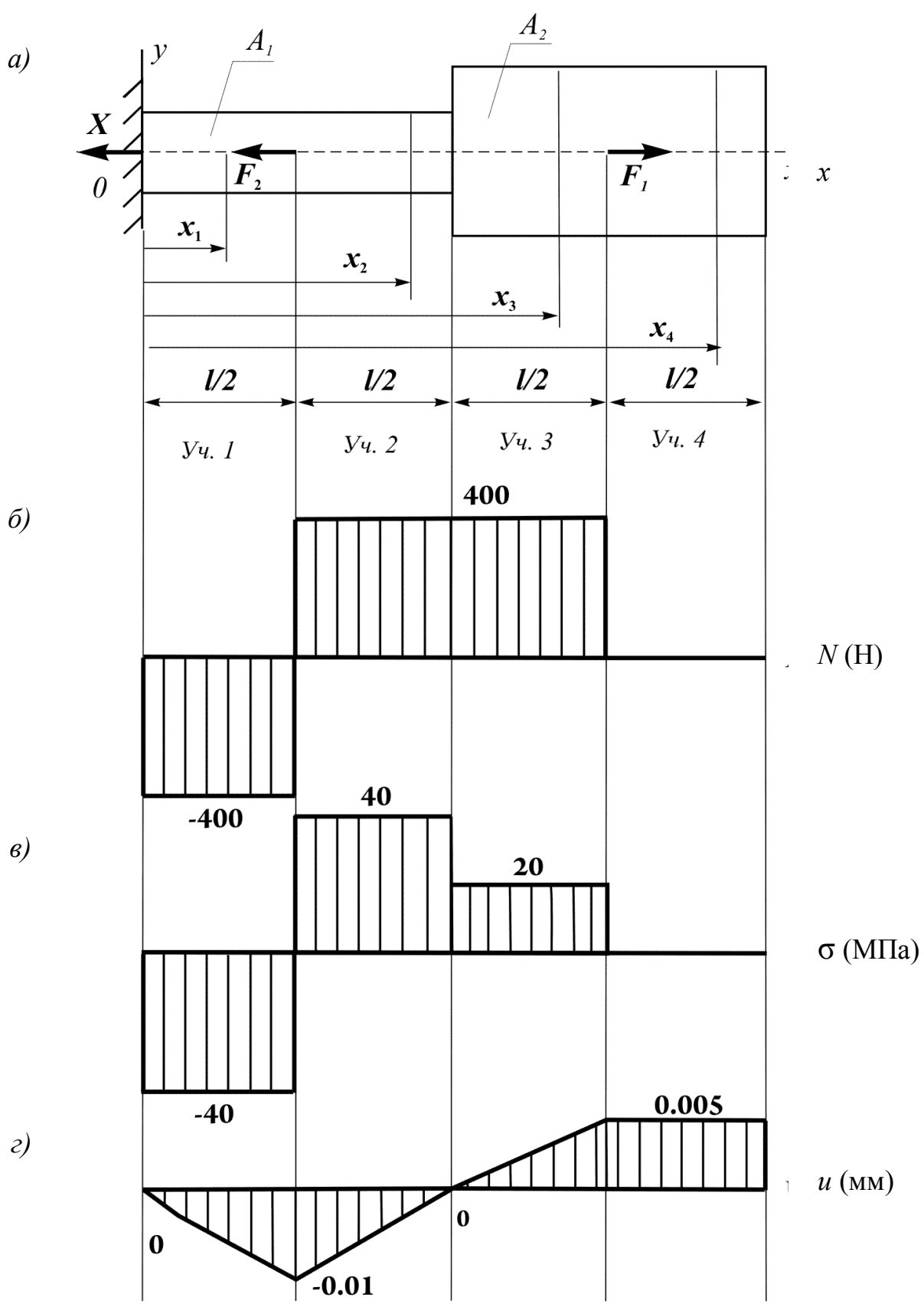
Продольная сила определяется на каждом участке при использовании левых отсеченных частей стержня следующим образом (см. правило выбора знаков для внешних сил на рис. 2.2):

$$N(x_1) = X = -400 \text{ (Н) при } 0 \leq x_1 \leq l/2;$$

$$N(x_2) = X + F_2 = -400 + 800 = 400 \text{ (Н) при } l/2 \leq x_2 \leq l;$$

$$N(x_3) = X + F_2 = 400 \text{ (Н) при } l \leq x_3 \leq 3l/2;$$

$$N(x_4) = X + F_2 - F_1 = -400 + 800 - 400 = 0 \text{ при } 3l/2 \leq x_4 \leq 2l.$$



При использовании правых отсеченных частей стержня определение реакции X не требуется и продольные силы вычисляются по формулам (см. правило выбора знаков для внешних сил на рис. 2.2):

$$N(x_1) = -F_2 + F_1 = -800 + 400 = -400 \text{ (Н) при } 0 \leq x_1 \leq l/2;$$

$$N(x_2) = F_1 = 400 \text{ (Н) при } l/2 \leq x_2 \leq l;$$

$$N(x_3) = F_1 = 400 \text{ (Н) при } l \leq x_3 \leq 3l/2;$$

$$N(x_4) = 0 \text{ при } 3l/2 \leq x_3 \leq 2l.$$

При самостоятельном выполнении этого задания достаточно провести вычисления с использованием либо левых, либо правых отсеченных частей стержня (по собственному выбору).

Таким образом, продольная сила N является кусочно-постоянной функцией с разрывами (скачками) на границах участков, в которых приложены внешние силы и реакция заделки. Величина разрыва равна величине действующей силы. Эпюра продольной силы показана на рис. 2.5 б. На первом участке стержень испытывает деформацию сжатия ($N < 0$), на втором и третьем участках – деформацию растяжения ($N > 0$), на четвертом участке деформации нет ($N = 0$).

Определяем нормальные напряжения на участках нагружения стержня по формуле (2.1), деля продольные силы на площади поперечных сечений:

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{A_1} = \frac{-400}{10} = -40 \text{ (МПа)};$$

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{A_1} = \frac{400}{10} = 40 \text{ (МПа)};$$

$$\sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{A_2} = \frac{400}{20} = 20 \text{ (МПа)};$$

$$\sigma(x_4) = \frac{N(x_4)}{A_2} = \frac{0}{20} = 0.$$

Найденные значения нормальных напряжений удовлетворяют условию прочности (2.6): $\max|\sigma| = 40 \text{ (МПа)} \leq [\sigma] = 160 \text{ (МПа)}$. Эпюра нормальных напряжений изображена на рис. 2.5 в.

Далее находим абсолютные продольные деформации на участках нагружения стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma(x_1)}{E} \cdot \frac{l}{2} = \frac{-40 \cdot 100}{2 \cdot 10^5 \cdot 2} = -0,01 \text{ (мм)};$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma(x_2)}{E} \cdot \frac{l}{2} = \frac{40 \cdot 100}{2 \cdot 10^5 \cdot 2} = 0,01 \text{ (мм)};$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma(x_3)}{E} \cdot \frac{l}{2} = \frac{20 \cdot 100}{2 \cdot 10^5 \cdot 2} = 0,005 \text{ (мм)};$$

$$\Delta l_4 = \frac{\sigma(x_4)}{E} \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

Следовательно, первоначальная длина первого участка, равная 50 мм, при его сжатии уменьшается на 0,01 мм; на втором участке – увеличивается на 0,01 мм; на третьем участке – увеличивается на 0,005 мм; первоначальная длина четвертого участка не изменяется.

Используя полученные значения абсолютных продольных деформаций участков стержня, определяем перемещения границ этих участков. Перемещение правого граничного сечения каждого участка равно перемещению левого граничного сечения этого участка, сложенному с его абсолютной продольной деформацией:

$$u(0) = 0 \text{ (левое сечение закреплено заделкой)};$$

$$u(l/2) = u(0) + \Delta l_1 = 0 - 0,01 = - 0,01 \text{ (мм)};$$

$$u(l) = u(l/2) + \Delta l_2 = - 0,01 + 0,01 = 0 \text{ (мм)};$$

$$u(3l/2) = u(l) + \Delta l_3 = 0 + 0,005 = 0,005 \text{ (мм)};$$

$$u(2l) = u(3l/2) + \Delta l_4 = 0,005 + 0 = 0,005 \text{ (мм)}.$$

Поскольку нормальные напряжения на каждом участке стержня являются постоянными, продольные перемещения промежуточных сечений на всех участках изменяются по линейному закону между перемещениями его граничных сечений. Эпюра продольных перемещений поперечных сечений стержня показана на рис. 2.5, г.

2.3. Исходные данные для самостоятельной работы

Стержень из пластичной стали состоит из двух участков одинаковой длины $l = 100$ мм, постоянные площади поперечных сечений которых равны $A_1 = 10 \text{ мм}^2$ и $A_2 = 20 \text{ мм}^2$. К стержню приложены внешние силы $F_1 = 400$ Н, $F_2 = 800$ Н и $F_3 = 1200$ Н. Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; допускаемое напряжение на растяжение и сжатие $[\sigma] = 160$ МПа.

Построить эпюры продольной силы N (Н), нормального напряжения σ (МПа) и продольных перемещений поперечных сечений u (мм); проверить условие прочности стержня.

Исходные данные для самостоятельного выполнения этого задания приведены в табл. 2.1. Например, варианту №1 соответствует расчетная схема стержня, показанная на рис. 2.6.

Таблица 2.1

№	Площадь поперечного сечения		Проекции внешних сил F_{ix} ($i = 1, 2, 3$)			
	$0 \leq x \leq l$	$l \leq x \leq 2l$	$x = l/2$	$x = l$	$x = 3l/2$	$x = 2l$
1	A_2	A_1	F_3	—	$-F_1$	F_2
2	A_1	A_2	$-F_1$	F_3	—	F_2
3	A_2	A_1	$-F_1$	—	F_2	$-F_3$
4	A_2	A_1	$-F_3$	—	F_2	F_1
5	A_1	A_2	F_1	—	F_2	$-F_3$
6	A_1	A_2	F_1	F_3	—	$-F_2$
7	A_2	A_1	F_2	—	$-F_1$	F_3
8	A_1	A_2	F_3	—	F_1	$-F_2$
9	A_2	A_1	F_3	—	$-F_2$	$-F_1$
10	A_1	A_2	$-F_1$	—	$-F_2$	F_3
11	A_1	A_2	$-F_2$	$-F_1$	—	F_3
12	A_2	A_1	—	$-F_1$	$-F_3$	F_2
13	A_1	A_2	$-F_1$	F_3	—	$-F_2$
14	A_2	A_1	$-F_1$	F_2	—	F_3
15	A_1	A_2	—	F_1	$-F_3$	F_2
16	A_2	A_1	—	$-F_1$	F_2	F_3
17	A_1	A_2	F_3	—	$-F_2$	F_1
18	A_2	A_1	F_1	—	F_2	$-F_3$
19	A_1	A_2	F_1	F_2	—	$-F_3$
20	A_2	A_1	—	$-F_2$	F_1	$-F_3$
21	A_2	A_1	F_3	$-F_1$	—	$-F_2$
22	A_2	A_1	F_1	$-F_2$	—	F_3
23	A_2	A_1	$-F_2$	F_1	—	F_3
24	A_2	A_1	$-F_2$	F_3	—	F_1
25	A_1	A_2	—	$-F_2$	F_1	F_3
26	A_2	A_1	F_3	F_2	—	$-F_1$
27	A_1	A_2	$-F_3$	—	F_1	$-F_2$
28	A_2	A_1	F_2	—	F_1	$-F_3$
29	A_1	A_2	F_2	—	$-F_1$	$-F_3$
30	A_2	A_1	$-F_3$	$-F_1$	—	F_2

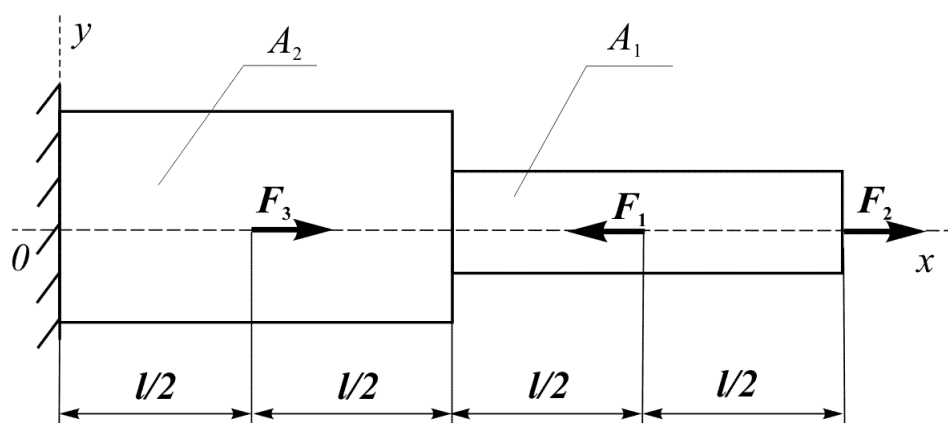


Рис 2.6. Расчетная схема стержня в варианте №1

2.4. Контрольные вопросы для самопроверки

1. Какой вид деформации стержня называется растяжением-сжатием?
2. Как называется внутреннее усилие, действующее в поперечных сечениях стержня при растяжении и сжатии? В каких единицах оно измеряется?
3. Как формулируется правило знаков для внутреннего усилия, действующего в поперечных сечениях стержня?
4. Как направлено внутреннее усилие при растяжении и сжатии относительно плоскости поперечного сечения? К какой точке поперечного сечения приложено это внутреннее усилие?
5. Как называется метод определения внутреннего усилия при растяжении и сжатии? Как оно определяется с использованием этого метода?
6. Как называются напряжения, действующие в поперечных сечениях стержня при растяжении и сжатии? В каких единицах они измеряются?
7. По какой формуле вычисляется напряжение в поперечных сечениях стержня при растяжении и сжатии?
8. Что называется абсолютной продольной деформацией стержня?
9. Что называется относительной продольной деформацией стержня?
10. Как формулируется закон Гука при растяжении и сжатии? При каком условии он выполняется?
11. Как называется характеристика механических свойств материала, используемая в законе Гука? В каких единицах она измеряется?
12. По какой формуле вычисляется абсолютная продольная деформация стержня?
13. Как определяется абсолютная деформация всего стержня с несколькими участками нагружения?
14. Как формулируется условие прочности при растяжении и сжатии стержня из пластичного и хрупкого материала?
15. Как формулируется условие жесткости при растяжении и сжатии стержня?

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

3.1. Испытания материалов на растяжение

При проектировании конструкций требуется знать параметры материалов, характеризующие их прочностные и деформационные свойства. Эти характеристики материалов обычно определяются путем экспериментальных исследований, проводимых на соответствующих испытательных машинах. Среди множества испытаний, которым могут подвергаться различные материалы, далее рассматриваются испытания пластичных и хрупких материалов на растяжение и сжатие.

Наибольшую информацию о механических свойствах материалов можно получить при их испытаниях на растяжение.

Например, для испытания на растяжение металлов используются специальные образцы, обычно имеющие круглые поперечные сечения.

На рис. 3.1 показан типовой металлический образец, имеющий *рабочую часть* с круглым поперечным сечением диаметром d_0 и первоначальной длиной l_0 . Рабочая часть образца расположена между *захватами*, с помощью которых передается растягивающее усилие F на образец от специальных устройств машины. Различают длинные образцы с отношением $l_0 / d_0 \sim 10$ и короткие $l_0 / d_0 \sim 5$.

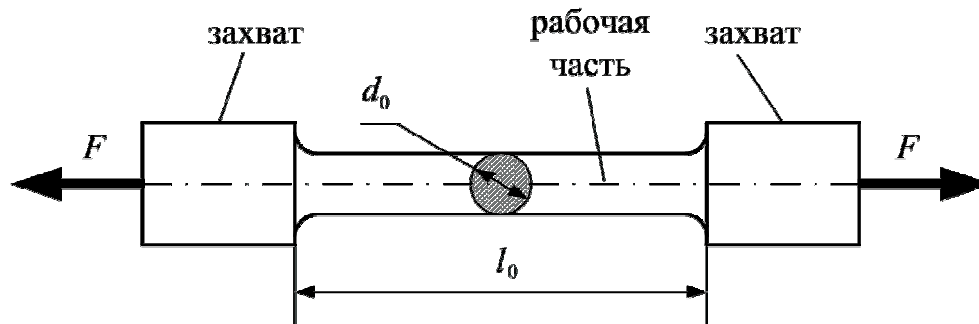


Рис. 3.1. Первоначальный вид образца при испытании на растяжение

Все машины, используемые при испытаниях материалов на растяжение, снабжены устройствами для автоматической записи в определенном масштабе *диаграммы растяжения*, то есть графика зависимости между удлинением рабочей части образца Δl и растягивающей образец силой F .

Рассмотрим диаграмму растяжения пластичного материала, получаемую при испытании образца из низкоуглеродистой стали с достижением его полного разрушения (разрыва), показанную на рис. 3.2.

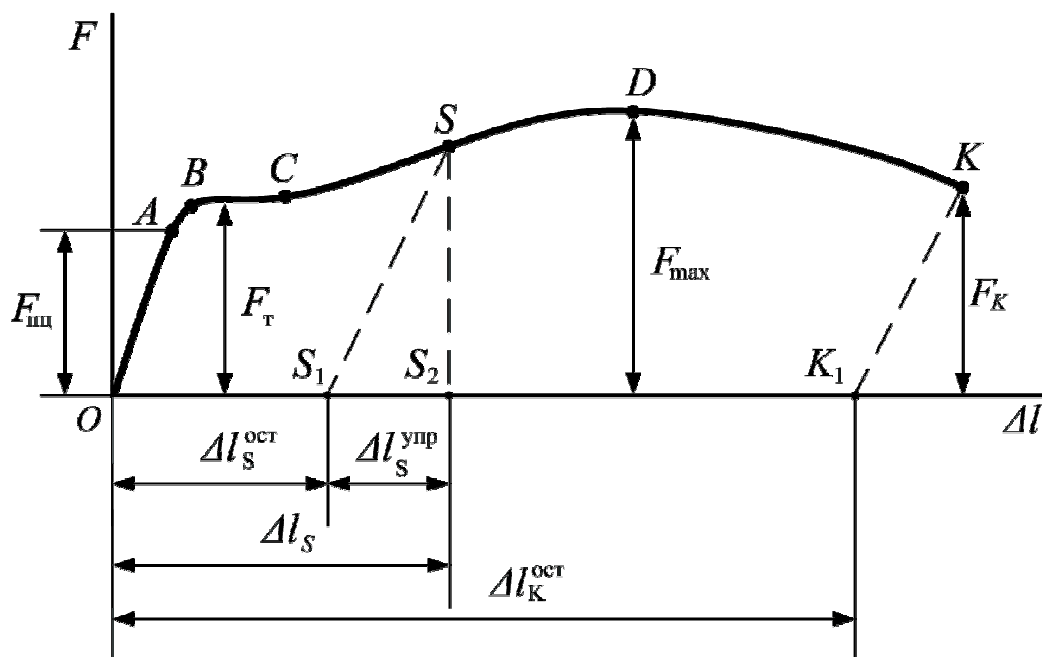


Рис. 3.2. Диаграмма растяжения образца из пластичного материала

На начальной стадии нагружения образца диаграмма растяжения представляет собой прямолинейный отрезок OA , который называется *участком пропорциональности* или *зоной упругости*. На этом участке выполняется прямо пропорциональная зависимость между удлинением Δl и растягивающей нагрузкой F , что свидетельствует о выполнении закона Гука. В точке A измеряется нагрузка $F_{\text{пц}}$, которая используется для определения предела пропорциональности. *Пределом пропорциональности* $\sigma_{\text{пц}}$ называется нормальное напряжение в поперечных сечениях рабочей части образца, до которого выполняется закон Гука:

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{F_{\text{пц}}}{A_0}, \quad (3.1)$$

где $A_0 = \pi d_0^2/4$ – первоначальная площадь круглого поперечного сечения рабочей части образца с диаметром d_0 .

При дальнейшем нагружении образца его деформация начинает увеличиваться быстрее, чем нагрузка, и диаграмма становится криволинейной. После участка пропорциональности диаграмма переходит в почти горизонтальный участок BC , который называется *площадкой текучести*. Здесь деформации растут практически без увеличения нагрузки. Нагрузка F_T , измеряемая на площадке текучести, используется для определения предела текучести. *Пределом текучести* σ_T называется нормальное напряжение в поперечных сечениях образца, при котором он деформируется без заметного увеличения растягивающей нагрузки:

$$\sigma_{\tau} = \frac{F_{\tau}}{A_0}. \quad (3.2)$$

Далее образец приобретает способность воспринимать внешнее возрастающее усилие, и диаграмма переходит на криволинейный участок CD , который называется *участком упрочнения*. В конце этого участка достигается нагрузка $F_{\max}$, которая используется для вычисления временного сопротивления (предела прочности). *Временным сопротивлением* $\sigma_{\text{в}}$ называется нормальное напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца:

$$\sigma_{\text{в}} = \frac{F_{\max}}{A_0}. \quad (3.3)$$

При максимальном усилии на образец в его наиболее слабом месте возникает локальное уменьшение поперечного сечения, которое называется *шейкой*. Дальнейшая деформация образца происходит практически в этой его части. Сечение в середине шейки продолжает уменьшаться, но напряжения в этом сечении увеличиваются даже при уменьшении нагрузки, приложенной к образцу. Удлинение части образца, расположенной вне области шейки, происходит незначительно. И наконец, в точке K происходит разрыв образца. В точке K диаграммы измеряется величина разрушающей силы F_K , которая используется для определения напряжения, называемого *истинным сопротивлением разрыву*:

$$S_K = \frac{F_K}{A_K}, \quad (3.4)$$

где $A_K = \pi d_K^2/4$ – площадь шейки в месте ее разрыва с диаметром d_K (рис. 3.3).

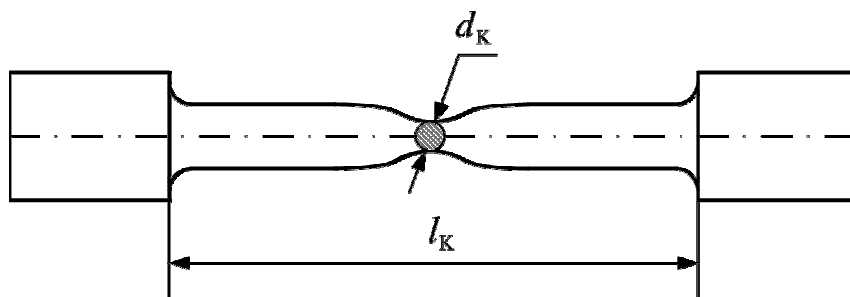


Рис. 3.3. Вид образца из пластичного материала после испытания на растяжение

Предел пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$, предел текучести $\sigma_{\text{т}}$, временное сопротивление $\sigma_{\text{в}}$ и истинное сопротивление разрыву $S_{\text{к}}$, определяемые экспериментально согласно формулам (3.1) – (3.4), называются *характеристиками прочности* пластичного материала. Например, для низкоуглеродистой стали марки Ст3, широко применяемой в строительных конструкциях, эти характеристики имеют следующие значения: $\sigma_{\text{пц}} = 195 \dots 200$ МПа; $\sigma_{\text{т}} = 220 \dots 250$ МПа; $\sigma_{\text{в}} = 370 \dots 470$ МПа; $S_{\text{к}} = 900 \dots 1000$ МПа.

Вместе с вышеназванными характеристиками прочности материала экспериментально определяются его *характеристики пластичности*.

Здесь следует отметить, что после нагрузки $F_{\text{пц}}$, соответствующей пределу пропорциональности, полная деформация $\Delta l_{\text{с}}$ образца в каждой точке S диаграммы начинает складываться из двух частей (рис. 3.2):

$$\Delta l_{\text{с}} = \Delta l_{\text{с}}^{\text{упр}} + \Delta l_{\text{с}}^{\text{ост}} , \quad (3.5)$$

где $\Delta l_{\text{с}}^{\text{упр}}$ – *упругая часть* деформации, которая исчезает после снятия нагрузки на образец; $\Delta l_{\text{с}}^{\text{ост}}$ – *остаточная часть* деформации, которая остается после снятия нагрузки. Для определения этих частей полной деформации из точки S проводится отрезок SS_1 , по которому происходит разгрузка образца параллельно прямолинейному участку диаграммы OA . При этом отрезком S_1S_2 изображается в определенном масштабе упругая часть деформации, а отрезком OS_1 – остаточная часть. На участке пропорциональности деформация является полностью упругой ($\Delta l^{\text{ост}} = 0$).

Одной из характеристик пластичности является *относительное остаточное удлинение после разрыва* δ , которое равно отношению приращения длины рабочей части образца после разрыва к первоначальной ее длине l_0 , выраженному в процентах:

$$\delta = \frac{l_{\text{к}} - l_0}{l_0} 100 \% = \frac{\Delta l_{\text{к}}^{\text{ост}}}{l_0} 100 \% . \quad (3.6)$$

Другой характеристикой пластичности является *относительное сужение после разрыва* ψ , которое представляет собой отношение уменьшения площади поперечного сечения рабочей части образца в месте разрыва (в минимальном сечении шейки) к первоначальной площади поперечного сечения A_0 , выраженному в процентах:

$$\psi = \frac{A_0 - A_{\text{к}}}{A_0} 100 \% . \quad (3.7)$$

Для стали марки Ст3 характеристики пластичности имеют следующие приблизительные значения: $\delta \approx 25...27\%$; $\psi \approx 60...70\%$. Чем больше эти характеристики для данного материала, тем более пластичным считается этот материал.

Рассмотрим далее диаграмму растяжения чугуна, которая имеет вид, типичный при испытании хрупкого материала на растяжение (рис. 3.4).

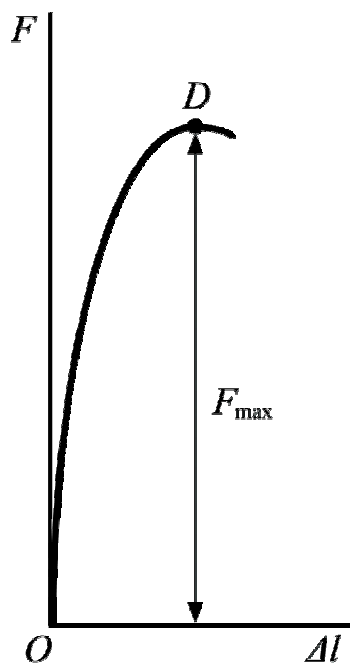


Рис. 3.4. Диаграмма растяжения хрупкого материала

Диаграмма не имеет прямолинейного участка, так как деформации не пропорциональны нагрузкам даже при небольших напряжениях. Нагрузка увеличивается до наибольшего значения $F_{\max}$ в точке D диаграммы, которому соответствует предел прочности $\sigma_b = F_{\max} / A_0$, где A_0 - площадь поперечного сечения образца. Значение предела прочности для чугуна при растяжении $\sigma_b \approx 120...190$ МПа. После точки D без увеличения нагрузки происходит разрыв образца. Образец разрушается при незначительном удлинении и без образования шейки. Остаточные деформации обычно не превышают 1% от первоначальной длины образца. Таким образом, хрупким материалам соответствуют очень малые характеристики пластичности δ и ψ .

3.2. Испытания материалов на сжатие

Испытание материалов на сжатие обычно выполняется на тех же машинах, которые используются при испытаниях на растяжение, но с применением специальных приспособлений. При этом получают *диаграммы сжатия*, графически показывающие зависимость между сжимающей нагрузкой F и деформацией образца Δl . В качестве образцов используются стержни с постоянным круглым или квадратным поперечным сечением, длина которых превышает в 1,5...3 раза его поперечные размеры.

Рассмотрим диаграмму сжатия пластичного материала, показанную на рис. 3.5 а. Начальный участок диаграммы до точки A является прямолинейным и на этом участке выполняется закон Гука. Угол наклона этого участка совпадает с углом наклона аналогичного участка диаграммы растяжения. Это свидетельствует о том, что модуль нормальной упругости E для пластичного материала при растяжении и сжатии является одинаковым. После точки A диаграмма переходит в криволинейный участок, подобный участку диаграммы при растяжении. Площадка текучести здесь выражена слабее, то есть не

является горизонтальной. При дальнейшем нагружении, когда появляются значительные остаточные деформации, образец сплющивается. Обычно на этом испытание заканчивают, так как разрушение образца не происходит. Значения предела пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$ и предела текучести $\sigma_{\text{т}}$ при сжатии, вычисленные по формулам (3.1) и (3.2), практически совпадают с их значениями, полученными при растяжении. Остальные характеристики прочности пластичного материала, то есть временное сопротивление $\sigma_{\text{в}}$ и истинное сопротивление разрыву $S_{\text{к}}$, при сжатии не определяются.

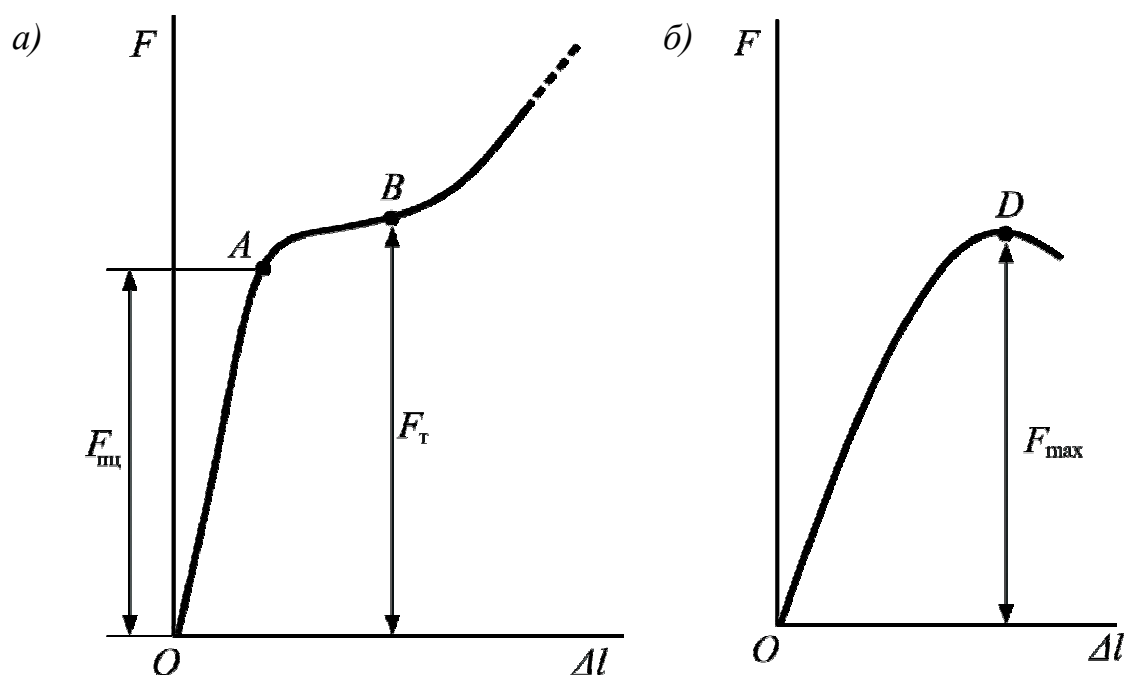


Рис. 3.5. Диаграммы сжатия пластичного (а) и хрупкого (б) материалов

На рис. 3.5 б показана диаграмма сжатия чугуна, как типичный пример такой диаграммы для хрупкого материала. В начале диаграммы имеется почти линейная зависимость между нагрузкой F и деформацией Δl . На этом участке форма и размеры образца изменяются незначительно. При приближении к максимальной нагрузке диаграмма становится более полой. Когда нагрузка достигает значения F_{max} в точке D диаграммы, в образце появляются трещины и наступает разрушение образца. Разрушение хрупкого материала происходит в основном от сдвига в сечениях с наибольшими касательными напряжениями (угол наклона этих сечений к оси образца равен 45°). В точке D диаграммы вычисляется предел прочности $\sigma_{\text{в}} = F_{\text{max}} / A_0$.

Хрупкие материалы сопротивляются сжатию значительно лучше, чем растяжению. Например, у чугуна предел прочности на сжатие $\sigma_{\text{вс}} = 560 \dots 900$ МПа больше предела прочности на растяжение $\sigma_{\text{вр}} = 120 \dots 190$ МПа примерно в 4...5 раз.

Для более полного изучения механических свойств материалов рекомендуется обратиться к учебной литературе [1-3] или справочникам [4-5].

3.3. Метод допускаемых напряжений

Для оценки прочности стержневых элементов конструкции, работающих на растяжение или сжатие, применяется *метод допускаемых напряжений*. Этот метод основан на том, что критерием надежности стержней конструкции является выполнение следующего условия прочности:

$$\max |\sigma| \leq [\sigma], \quad (3.8)$$

где $\max |\sigma|$ – наибольшее по модулю нормальное напряжение среди всех поперечных сечений стержня, которое определяется в результате расчетов; $[\sigma]$ – *допускаемое (предельное) нормальное напряжение*.

Допускаемое нормальное напряжение в реальных условиях эксплуатации конструкции определяется по формуле:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{0, \text{детали}}}{[s]},$$

где $\sigma_{0, \text{детали}}$ – *опасное напряжение* для рассчитываемой детали конструкции; $[s]$ – *допускаемый коэффициент запаса прочности* ($[s] > 1$).

Так как механические свойства материалов находятся экспериментально путем испытания стандартных образцов, имеющих определенные размеры, шероховатость поверхности и геометрическую форму, отличающиеся от рассчитываемых деталей, то необходимо это учитывать введением соответствующих коэффициентов:

$$\sigma_{0, \text{детали}} = \sigma_{0, \text{образца}} \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_t / k_\sigma,$$

где $\sigma_{0, \text{образца}}$ – опасное напряжение для образца, определяемое экспериментально; ε_m – масштабный фактор, учитывающий размеры детали ($\varepsilon_m \leq 1$); ε_t – технологический фактор, учитывающий шероховатость поверхности детали, наличие или отсутствие применения упрочняющих материалов детали технологий ($\varepsilon_t \geq 1$ или $\varepsilon_t < 1$); k_σ – эффективный коэффициент концентрации нормальных напряжений ($k_\sigma \geq 1$). Отметим, что концентрация напряжений особенно опасна для хрупких материалов. Она вызывается, например, следующими особенностями в деталях: отверстиями, резьбой, шпоночными канавками, напрессовкой и т.д. Для пластичных материалов при постоянных во времени напряжениях этот коэффициент принимается $k_\sigma \approx 1$. Поэтому, допускаемое нормальное напряжение для пластичных материалов вычисляется по следующей формуле:

$$[\sigma] = \sigma_{0, \text{образца}} \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_t / [s],$$

а для хрупких материалов по формуле:

$$[\sigma] = \sigma_{0,\text{образца}} \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_T / (k_\sigma \cdot [s]).$$

Для пластичных материалов за экспериментальное опасное напряжение принимается предел текучести: $\sigma_{0,\text{образца}} = \sigma_T$. Поскольку пластичные материалы одинаково сопротивляются растяжению и сжатию при напряжениях, не превышающих предела текучести, в обоих случаях допускаемое напряжение $[\sigma]$ принимается одинаковым. Например, для стали марки Ст3 с пределом текучести $\sigma_T \approx 240$ МПа допускаемое нормальное напряжение принимается $[\sigma] \approx 160$ МПа для статически нагруженных малоответственных деталей.

Для хрупких материалов в качестве экспериментального опасного напряжения принимается временное сопротивление (предел прочности): $\sigma_{0,\text{образца}} = \sigma_B$. Как отмечалось ранее, хрупкие материалы работают при растяжении и сжатии неодинаково и, следовательно, используются разные допускаемые напряжения: $[\sigma]_p$ – при растяжении и $[\sigma]_c$ – при сжатии.

Значения допускаемых коэффициентов запаса прочности, а следовательно, и допускаемых нормальных напряжений, устанавливаются техническими условиями и нормами, основанными на практике проектирования и эксплуатации конструкций и сооружений. Обычно для пластичных материалов принимается допускаемый коэффициент запаса прочности $[s] \approx 1,4 \dots 1,6$; для хрупких материалов – $[s] \approx 2,5 \dots 3,5$.

Отметим также, что механические свойства материалов могут существенно зависеть от условий их эксплуатации, в частности, от их температуры. Для большинства материалов характеристики прочности уменьшаются при повышении температуры, а характеристики пластичности – увеличиваются.

3.4. Определение модуля нормальной упругости

Рассмотрим экспериментальное определение важнейшей характеристики упругих свойств материала – модуля нормальной упругости. При этом используется закон Гука при растяжении и сжатии, на основании которого выполняется определение этой характеристики материала. Для практического измерения линейных деформаций обычно применяются тензометрические методы.

Закон Гука при растяжении и сжатии формулируется так: нормальное напряжение σ в поперечных сечениях стержня прямо пропорционально относительной продольной деформации ε :

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (3.9)$$

где E – постоянная величина, называемая *модулем нормальной (продольной) упругости* или *модулем Юнга*. Как следует из (3.9), он играет роль

коэффициента пропорциональности между деформацией ε и напряжением σ в законе Гука. Относительная деформация ε является безразмерной величиной и, следовательно, модуль нормальной упругости E и нормальное напряжение σ измеряются в одинаковых единицах, например, в *мегапаскалях* ($\text{МПа} = 10^6 \text{ Па} = \text{Н/мм}^2$). Отметим, что закон Гука (3.9) выполняется только при упругих деформациях, то есть при напряжениях σ , не превышающих предела пропорциональности $\sigma_{\text{пл}}$.

При экспериментальном определении модуля нормальной упругости E используется формула, получаемая из закона Гука в следующем виде:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F l}{A \Delta l}; \quad (\sigma = \frac{F}{A}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}), \quad (3.10)$$

где F – действующая на образец растягивающая нагрузка; A – площадь поперечного сечения образца; l – *расчетная длина*, то есть первоначальная длина участка образца, на котором измеряется абсолютная продольная деформация (удлинение) Δl .

Историческая справка [1]. Английский ученый Роберт Гук (1635-1705) открыл фундаментальную закономерность между силами и вызываемыми ими перемещениями. Это произошло после многочисленных экспериментов при изучении поведения стальной проволоки, винтовой и спиральной часовой пружин под действием внешних нагрузок. Результаты своих наблюдений и измерений Гук опубликовал в работе «Истинная теория упругости и жесткости» в 1676 г. В этой работе Гук сформулировал важнейшее соотношение, устанавливающее прямо пропорциональную зависимость удлинения от растягивающей силы. В таком виде закон Гука имел больше познавательное, чем практическое значение. Это объясняется тем, что в то время отсутствовали понятия «напряжение» и «деформация».

Работая над проблемой жесткости, английский ученый Томас Юнг (1773-1829) в начале XIX столетия впервые высказал идею о том, что для каждого материала существует постоянная величина, характеризующая его способность сопротивляться воздействию внешних нагрузок. Понятие об этой величине, названной им *модулем упругости* (позже – *модулем Юнга*), было введено в его труде «Натуральная философия» в 1807 г. Следует отметить, что Юнг первый указал на то, что закон Гука справедлив только в определенной области работы материала, то есть при упругом его поведении.

Последний шаг в формулировании закона Гука в его современном виде сделали французский математик Огюстен Луи Коши (1789-1857), который в 1822 г. сформулировал и ввел в научную литературу такие понятия, как «напряжение» и «деформация», а также французский ученый и инженер Луи Мари Анри Навье (1785-1836), который в 1826 г. дал определение *модуля упругости* как отношения нагрузки, приходящейся на единицу площади поперечного сечения, к произведенному ей относительному удлинению.

Отметим также, что Навье издал первый систематический курс сопротивления материалов для инженеров.

Таким образом, потребовалось почти 150 лет со дня открытия закона Гука, чтобы он получил практическое применение в виде формулы (3.9).

В применении формулы (3.10) наибольшую сложность представляет собой измерение малой деформации Δl . Одним из широко используемых способов измерения этой деформации является применение *тензометров*. Тензометр – *датчик*, который воспринимает изменение какого-либо своего электрического параметра. В частности, применяют электрические тензометры в виде проволочных датчиков омического сопротивления, называемых *тензорезисторами* (рис. 3.6).

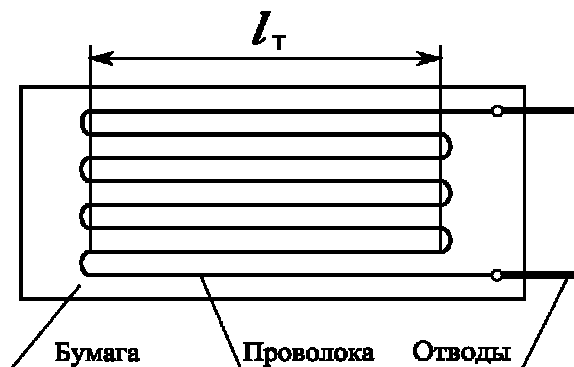


Рис. 3.6. Тензорезистор

Проволочный датчик представляет собой несколько петель тонкой проволоки (диаметром 0,025...0,030 мм) или фольги, наклеенных на полоску бумаги или полимерную пленку. Датчик наклеивается специальным клеем на поверхность используемого образца. Деформации образца передаются проволоке датчика. Вследствие деформации изменяется сопротивление проволоки датчика: растяжение проволоки приводит к увеличению ее сопротивления, а сжатие – к уменьшению ее сопротивления. Такие изменения сопротивления датчика регистрируются специальной аппаратурой. В пределах малых деформаций выполняется линейная зависимость между относительным изменением сопротивления и относительной деформацией проволоки тензорезистора.

Изменение омического сопротивления проволочных датчиков при изменении деформации очень малы, что требует применения чувствительной измерительной аппаратуры. Обычно тензорезистор включают как одно из сопротивлений R_4 моста Уитстона, схема которого показана на рис. 3.7.

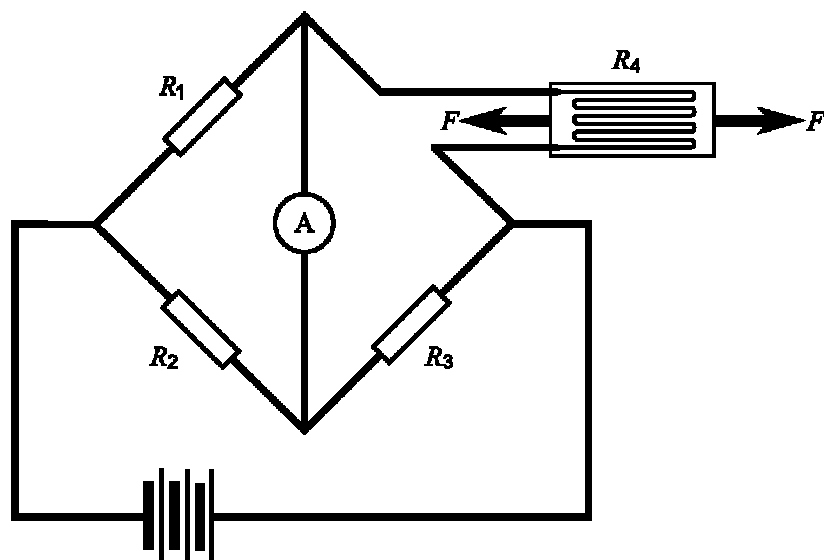


Рис. 3.7. Схема моста Уитстона для измерения сопротивления датчика R_4

Под *балансом моста* понимается такой подбор сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 и R_4 , при котором ток в диагонали моста отсутствует и амперметр показывает нулевой отсчет. При балансе моста выполняется следующее соотношение между этими сопротивлениями: $R_1 R_3 = R_2 R_4$. Деформация, полученная датчиком в ходе испытания образца на растяжение, приводит к изменению его сопротивления R_4 и, как следствие, к нарушению баланса. Изменяя одно из сопротивлений R_1 , R_2 или R_3 , мост балансируют, то есть регистрируют изменение сопротивления R_4 . При балансировке моста снимаются показания прибора C , которое в результате дает величину деформации $\Delta l = m \Delta C$, где m – масштабный коэффициент; ΔC – изменение показаний прибора при изменении нагрузки. В качестве расчетной длины принимается длина витков проволоки датчика, которая называется *базой датчика* (рис. 3.6). Например, могут применяться датчики, длина базы l_T которых равна 20 мм или значительно меньше.

При растяжении образца может происходить отклонение от продольного направления действия внешней нагрузки, в результате чего возможно его неравномерное растяжение. Поэтому для получения более точных результатов измеряются деформации с использованием двух датчиков, расположенных на двух взаимно противоположенных поверхностях образца (на рис. 3.8 датчик, расположенный на обратной поверхности образца, показан пунктиром). В качестве результата измерения показания ΔC принимается среднее арифметическое показаний обоих датчиков:

$$\Delta C = (\Delta C_1 + \Delta C_2) / 2.$$

Процесс испытания образца следует начинать не с нулевой нагрузки, а с некоторой начальной величины F_n . При этом ликвидируются начальные люфты, имеющиеся в захватах образца. Затем производится увеличение нагрузки образца с одинаковыми приращениями ΔF до конечного значения

F_k . Это делается для того, чтобы убедиться в выполнении закона Гука при растяжении, на котором основана формула (3.10). Закон Гука выполняется, если одинаковым приращением нагрузки ΔF соответствуют одинаковые приращения показаний датчиков ΔC .

Таким образом, формула (3.10) для определения модуля нормальной упругости приобретает следующий окончательный вид:

$$E = \frac{(F_k - F_n) l_t}{A m \Delta C}, \tag{3.11}$$

где в качестве нагрузки F принимается разность конечной и начальной нагрузок $F_k - F_n$; расчетная длина l равна базе датчика l_t ; $A = hb$ – площадь поперечного прямоугольного сечения образца с размерами h и b ; деформация $\Delta l = m \Delta C$.

Данная лабораторная работа по определению модуля нормальной упругости может выполняться практически на реальной экспериментальной установке с занесением полученных результатов в подготовленный бланк отчета или с использованием специальной программы, осуществляющей компьютерное моделирование этой работы [8].

Значения модулей нормальной упругости в гигапаскалях ($\text{ГПа} = 10^3 \text{МПа} = 10^9 \text{Па}$) для некоторых материалов даны в табл. 3.1.

Рис. 3.8. Схема установки для определения модуля нормальной упругости

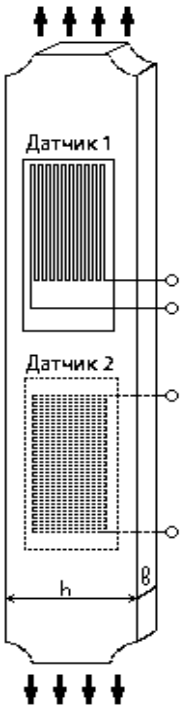


Таблица 3.1

Материал	Модуль нормальной упругости, ГПа	Коэффициент Пуассона
Сталь прокатная	206	0,3
Алюминиевые сплавы	70	0,3
Медь, латунь, бронза	100...130	0,31...0,35
Бетон	4...40	0,2
Кирпичная кладка	0,1...7,8	0,25
Древесина		
вдоль волокон	10	0,5
поперек волокон	0,4	0,02
Резина	0,007	0,5

3.5. Определение коэффициента Пуассона

Рассмотрим далее экспериментальное определение другой важнейшей характеристики упругих свойств материала – коэффициента Пуассона.

Коэффициентом Пуассона μ называется абсолютная величина отношения относительной поперечной деформации ε_2 к относительной продольной деформации ε_1 :

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right|. \quad (3.12)$$

Коэффициент Пуассона является положительной безразмерной величиной, характеризующей упругие свойства материала. Отметим, что относительные деформации ε_1 и ε_2 имеют противоположные знаки: $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 < 0$ – при растяжении; $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_2 > 0$ – при сжатии. Поэтому их отношение в формуле (3.12) вычисляется по модулю.

Для всех материалов его величина лежит в диапазоне значений от 0 до 0,5. Например, для большинства металлов коэффициент Пуассона имеет значения от 0,25 до 0,35. Значения коэффициента Пуассона для некоторых материалов приведены в табл. 3.1.

Историческая справка [1]. Коэффициент μ носит имя французского ученого Симона Дени Пуассона (1781-1840), который ввел его в теорию сопротивления материалов. Пуассон считал, что при деформации растяжения или сжатия объем элемента не изменяется, а изменяется лишь его форма. При таком подходе не учитывалось влияние свойств материала и коэффициент μ принимался одинаковым для любого материала, равным 0,25.

В дальнейшем английский исследователь Джордж Грин теоретически обосновал, что коэффициент Пуассона не может иметь одинакового значения для всех материалов. После этого были проведены различными исследователями многочисленные эксперименты, которые показали, что объем деформированного тела может изменяться. Следовательно, коэффициент Пуассона имеет определенное значение только для данного материала в пределах упругих деформаций.

В рассматриваемом эксперименте обычно используются образцы такого же вида, как и при определении модуля нормальной упругости. Однако датчики расположены другим образом: датчик 1, витки проволоки которого ориентированы вдоль растягивающей нагрузки, используется для определения продольной деформации, а датчик 2, витки проволоки которого направлены перпендикулярно направлению нагрузки, – для определения поперечной деформации (рис. 3.9).

Определение относительных деформаций с использованием этих датчиков выполняется по формулам:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l},$$

где Δl_1 – абсолютная продольная деформация; Δl_2 – абсолютная поперечная деформация; l – расчетная длина, на которых измеряются деформации Δl_1 и Δl_2 , равная базам датчиков $l_{\text{т}}$. При этом формула (3.12) для определения коэффициента Пуассона записывается в виде:

$$\mu = \left| \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} \right|. \quad (3.13)$$

Прикладывая к образцу растягивающую нагрузку от начального значения $F_{\text{н}}$ до конечного значения $F_{\text{к}}$ с одинаковым приращением ΔF , определяются деформации $\Delta l_1 = m \Delta C_1$ и $\Delta l_2 = m \Delta C_2$, где m – масштабный коэффициент.

В результате формула (3.13) записывается в окончательном виде:

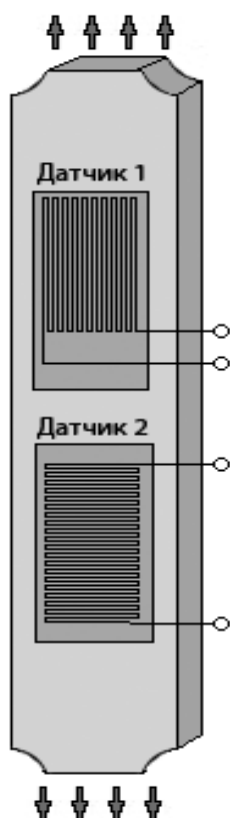
$$\mu = \left| \frac{\Delta C_2}{\Delta C_1} \right| = \left| \frac{C_{2\text{к}} - C_{2\text{н}}}{C_{1\text{к}} - C_{1\text{н}}} \right|,$$

(3.14)

где $C_{1\text{к}}$, $C_{2\text{к}}$ – показания датчиков 1 и 2 при конечной нагрузке $F_{\text{к}}$; $C_{1\text{н}}$, $C_{2\text{н}}$ – показания этих датчиков при начальной нагрузке $F_{\text{н}}$.

При экспериментальном определении коэффициента Пуассона деформации образца должны быть упругими, то есть должен выполняться закон Гука. Поэтому нагрузку прикладывают к образцу с одинаковыми приращениями ΔF . При выполнении закона Гука таким приращениям нагрузки соответствуют одинаковые приращения показаний датчиков 1 и 2. Приращения показаний для датчика 1 являются положительными, а для датчика 2 – отрицательными.

Рис. 3.9. Схема установки для определения коэффициента Пуассона



3.6. Контрольные вопросы для

самопроверки

1. Изобразите диаграмму растяжения низкоуглеродистой стали. Какие характерные участки имеет эта диаграмма?
2. Какие величины характеризуют прочность стали? В каких единицах они измеряются?
3. Что называется пределом пропорциональности? Какую роль он играет в законе Гука?
4. Что называется пределом текучести?
5. Что называется временным сопротивлением (пределом прочности)?
6. Поясните, как происходит разрушение образца из пластичного материала? Что называется истинным сопротивлением разрыву?
7. Какие деформации образца называются упругими и остаточными? Как они определяются по диаграмме растяжения?
8. Какой точке диаграммы растяжения соответствует наибольшая упругая деформация?
9. Какие величины характеризуют пластичность стали? В каких единицах они измеряются?
10. Что называется относительным остаточным удлинением после разрыва?
11. Что называется относительным остаточным сужением после разрыва?
12. Изобразите диаграмму сжатия пластичного материала. Какие характеристики прочности определяются при этом испытании материала?
13. Изобразите диаграммы растяжения и сжатия хрупкого материала. Какие характеристики прочности определяются при этих испытаниях?
14. Как оценивается прочность материала при растяжении и сжатии по методу допускаемых напряжений?
15. Чем отличается применение этого метода к пластичным и к хрупким материалам?
16. Какая характеристика упругих свойств материала называется модулем нормальной упругости? В каких единицах она измеряется?
17. Как ориентированы датчики на образце по отношению к направлению действия внешней нагрузки при его определении?
18. На какой расчетной длине определяется модуль нормальной упругости? Как она называется и чему она равна?
19. Какая характеристика упругих свойств материала называется коэффициентом Пуассона?
20. Почему отношение относительных деформаций ε_2 и ε_1 вычисляется по модулю?
21. В каком диапазоне значений изменяется коэффициент Пуассона для различных материалов?
22. Как ориентированы датчики на образце по отношению к направлению действия внешней нагрузки при определении коэффициента Пуассона?

23. Почему приложение нагрузки к образцу следует производить с одинаковыми приращениями?

4. КРУЧЕНИЕ

4.1. Основные понятия

Кручением называется такой вид деформации стержня, при котором во всех его поперечных сечениях действует только одно внутреннее усилие – *крутящий момент*. Крутящий момент принято обозначать M_k . Крутящий момент действует в плоскости поперечного сечения стержня вокруг его оси. Деформация кручения стержня возникает под действием *внешних крутящих моментов* в плоскостях, перпендикулярных оси стержня.

Для крутящего момента используется следующее *правило знаков*: при направлении по ходу часовой стрелки со стороны внешней нормали n к поперечному сечению стержня крутящий момент считается положительным (рис. 4.1 а); при направлении против хода часовой стрелки – отрицательным (рис. 4.1 б).

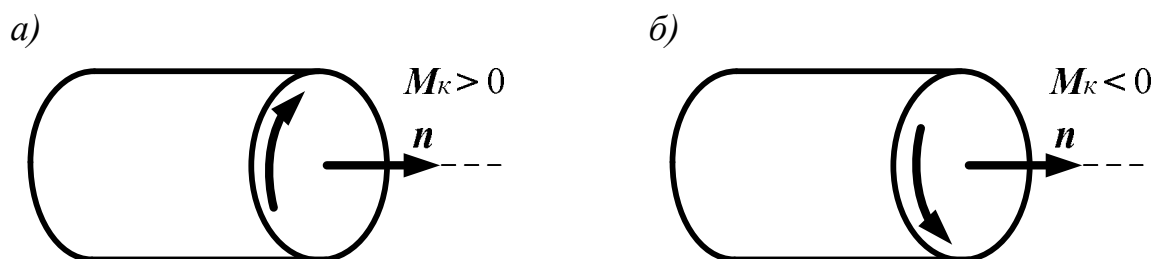


Рис. 4.1. Правило знаков крутящего момента M_k

При действии на стержень нескольких внешних моментов крутящий момент в его поперечных сечениях изменяется вдоль продольной оси. Для построения эпюры крутящего момента *методом сечений* следует воспользоваться уравнением равновесия внешних моментов T_i и крутящего момента M_k , действующих на одну из отсеченных частей стержня, относительно продольной оси стержня Ox . На этом основании можно сформулировать следующее *правило определения крутящего момента*: крутящий момент в заданном сечении равен алгебраической сумме внешних крутящих моментов T_i , приложенных к одной из отсеченных частей стержня и взятых со знаками, показанными на рис. 4.2. Следовательно, внешний момент T_1 для левой отсеченной части стержня берется при суммировании со

знаком «минус», так как он действует по ходу часовой стрелки, глядя со стороны положительного направления оси стержня Ox , а внешний момент T_2 – со знаком «плюс»: $M_k = -T_1 + T_2$; для левой отсеченной части – наоборот: $M_k = T_3 - T_4$.

Рассмотрим вопрос о напряжениях, действующих в поперечных сечениях стержня при кручении. При этом виде деформации стержня в его поперечных сечениях действуют *только* касательные напряжения τ .

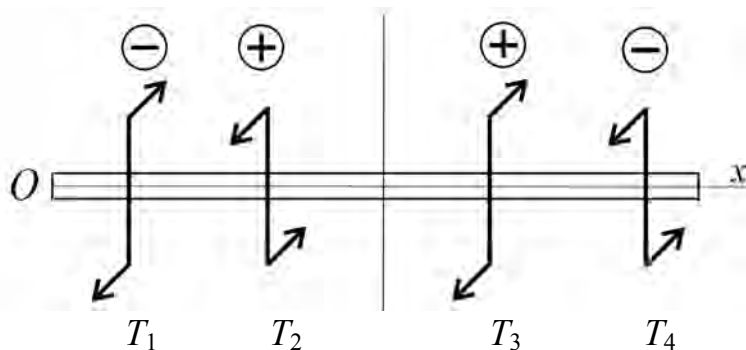


Рис. 4.2. Выбор знаков внешних моментов T_i при определении внутреннего крутящего момента M_k методом сечений

Например, для стержня с круглым поперечным сечением касательное напряжение τ распределено по величине прямо пропорционально расстоянию ρ до центра сечения C и направлено перпендикулярно диаметру, проходящему через рассматриваемую точку, в сторону крутящего момента (рис. 4.3).

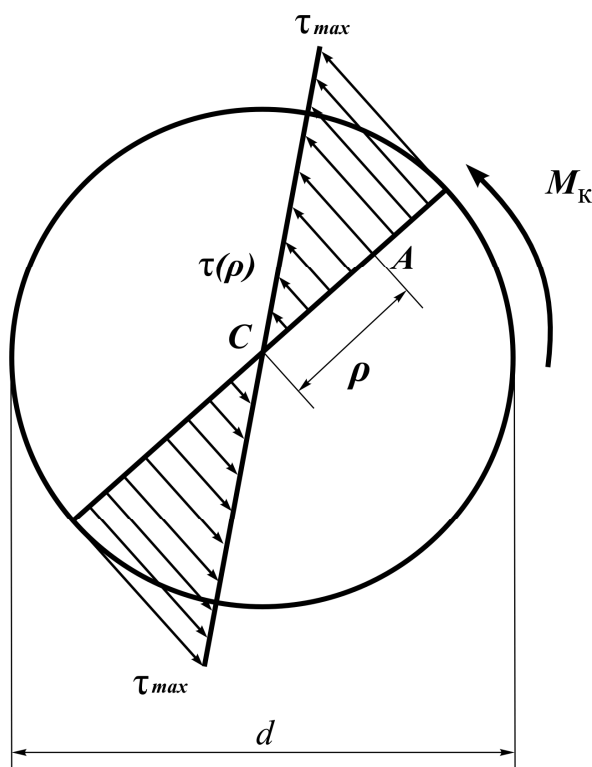


Рис.4.3. Распределение касательных напряжений в круглом поперечном сечении стержня при кручении

В точке A круглого сечения касательное напряжение вычисляется по формуле:

$$\phi(c) = \frac{M_{\kappa}}{I_p} c, \quad 0 \leq c \leq \frac{d}{2}. \quad (4.1)$$

где $I_p = \pi d^4/32$ - геометрическая характеристика круглого сечения, называемая *полярным моментом инерции*; d - диаметр сечения. Касательное напряжение обычно измеряется в *мегапаскалях* (МПа).

В рассматриваемом сечении касательное напряжение равно нулю в центре сечения ($\rho = 0$), а максимальное по модулю касательное напряжение $\tau_{\max}$ достигается в наиболее удаленных от центра C точках сечения с расстоянием $\rho_{\max} = d/2$ и вычисляется по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{\kappa}|}{I_p} \rho_{\max} = \frac{|M_{\kappa}|}{W_p}, \quad (4.2)$$

где $W_p = \pi d^3/16$ называется *полярным моментом сопротивления* круглого поперечного сечения стержня.

Полярный момент инерции и полярный момент сопротивления круглого сечения допускается вычислять по приближенным формулам:

$$I_p = \frac{\pi}{32} d^4 \approx 0,1 d^4; \quad W_p = \frac{\pi}{16} d^3 \approx 0,2 d^3. \quad (4.3)$$

При кручении стержня предполагается, что его длина не изменяется и его поперечные сечения остаются плоскими, поворачиваясь вокруг продольной оси стержня (*гипотеза плоских сечений Бернулли*).

Пусть стержень (или участок стержня) длиной l с круглым поперечным сечением диаметром d испытывает деформацию кручения с постоянным крутящим моментом M_{κ} . На рис. 4.4 изображен такой стержень, кручение которого создается двумя внешними моментами T , равными по величине и действующими в граничных сечениях стержня в противоположных направлениях. При этом во всех поперечных сечениях стержня действует одинаковый крутящий момент $M_{\kappa} = T$.

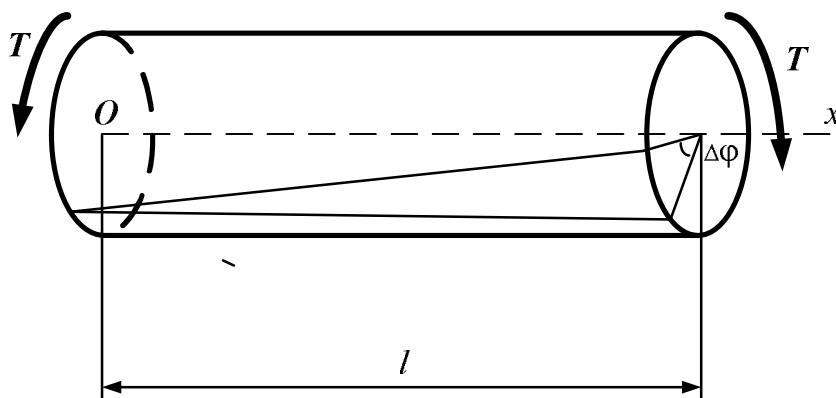


Рис. 4.4. Угол закручивания стержня $\Delta\varphi$

Угол поворота одного граничного сечения стержня относительно другого граничного сечения называется *углом закручивания стержня* и обозначается $\Delta\varphi$ (рад) (рис. 4.4). Угол закручивания стержня прямо пропорционален крутящему моменту (*закон Гука при кручении*) и вычисляется по формуле:

$$\Delta\varphi = \frac{M_k l}{G I_p}, \quad (4.4)$$

где величина G (МПа) является характеристикой механических свойств материала и называется *модулем сдвига* или *модулем касательной упругости*. Формула (4.4) справедлива в ограниченном диапазоне значений крутящего момента M_k .

Угол закручивания, приходящийся на единицу длины стержня, называется *относительным углом закручивания* ϑ (рад/м):

$$\vartheta = \frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{M_k}{G I_p}. \quad (4.5)$$

Условие прочности при кручении стержня формулируется следующим образом: максимальное по модулю касательное напряжение $\max|\tau|$ среди всех поперечных сечений стержня, равное максимальному отношению модуля крутящего момента $|M_k|$ к полярному моменту сопротивления сечения W_p , не должно превышать *допускаемого касательного напряжения* $[\tau]$:

$$\max|\tau| = \max \frac{|M_k|}{W_p} \leq [\tau]. \quad (4.6)$$

Условие прочности (4.6) может использоваться с разными целями. Рассмотрим *виды расчета на прочность при кручении* на примере стержня с постоянным круглым поперечным сечением, испытывающего деформацию кручения под действием одинаковых по величине внешних моментов T (рис. 4.4). Как уже отмечалось, в этом примере крутящий момент во всех поперечных сечениях стержня является постоянным ($M_k = T$).

Во-первых, может выполняться *проверочный расчет*, целью которого является просто проверка условия прочности (4.6), которое в рассматриваемом примере записывается следующим образом:

$$\max |\Phi| = \frac{T}{W_p} \leq [\Phi]. \quad (4.7)$$

Во-вторых, может определяться *максимальная нагрузка* $T_{\max}$, которую не должны превышать внешние моменты T :

$$T \leq T_{\max} = [\tau] W_p. \quad (4.8)$$

В-третьих, при заданных внешних моментах T может выполняться *проектный расчет*, целью которого является *подбор размеров поперечного сечения стержня*. Из условия прочности (4.6) следует, что момент сопротивления поперечного сечения стержня W_p должен превышать его минимальную величину $W_{p\min}$:

$$W_p \geq W_{p\min} = \frac{T}{[\tau]}.$$

При этом минимальный диаметр $d_{\min}$ круглого поперечного сечения стержня с использованием приближенной формулы (4.3) для вычисления полярного момента сопротивления W_p определяется следующим образом:

$$d_{\min} = \sqrt[3]{5W_{p\min}} = \sqrt[3]{\frac{5T}{[\tau]}}. \quad (4.9)$$

Условия жесткости при кручении стержня, рассматриваемого в данном примере, обычно формулируется как ограничения на его угол закручивания $\Delta\varphi$ или относительный угол закручивания ϑ , которые могут быть вычислены по формулам (4.4), (4.5) при $M_k = T$. Эти ограничения записываются в виде следующих неравенств:

$$|\Delta\varphi| \leq [\Delta\varphi]; \quad |\vartheta| \leq [\vartheta], \quad (4.10)$$

где $[\Delta\varphi]$ – допускаемый угол закручивания, а $[\vartheta]$ – допускаемый относительный угол закручивания стержня. Эти допускаемые углы закручивания устанавливаются техническими условиями при конкретной эксплуатации стержня.

4.2. Пример выполнения задания

Расчёт стержня на прочность и жёсткость при кручении

Стержень из пластичной стали (рис. 4.5) состоит из трех участков одинаковой длины $l = 80$ мм с круглыми поперечными сечениями диаметрами $d_1 = 10$ мм и $d_2 = 20$ мм. В граничных сечениях участков приложены внешние крутящие моменты $T_1 = 4 \cdot 10^3$ Н·мм; $T_2 = 8 \cdot 10^3$ Н·мм; $T_3 = 16 \cdot 10^3$ Н·мм. Модуль сдвига материала $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 100$ МПа.

Построить эпюры крутящего момента M_k (Н·мм), максимального касательного напряжения $\tau_{\max}$ (МПа) и угла поворота поперечных сечений φ (рад); проверить стержень на условие прочности при кручении.

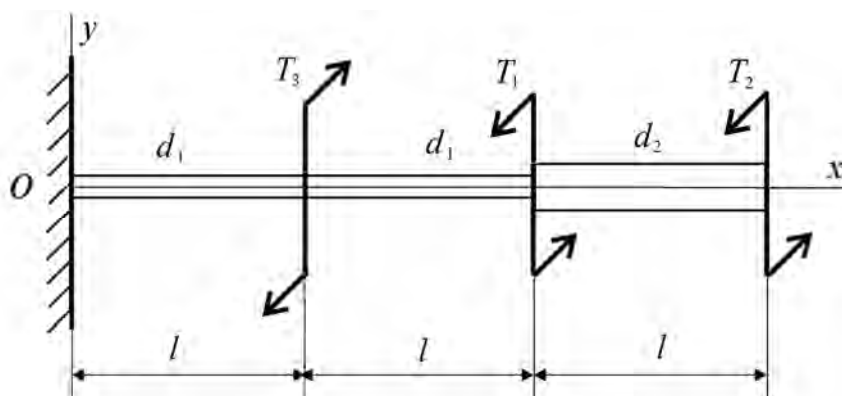


Рис. 4.5. Расчетная схема стержня

Решение

У стержня имеются три участка нагружения, на которых крутящие моменты будут постоянными. Определим крутящий момент на каждом из этих участков методом сечений с использованием как левых отсеченных частей стержня, так и правых.

Для использования левых отсеченных частей стержня требуется предварительно найти моментную реакцию M_O в заделке (рис. 4.6 а) из уравнения равновесия:

$$\sum M_x = M_O - T_3 + T_1 + T_2 = 0.$$

Следовательно,

$$M_O = T_3 - T_1 - T_2 = 16 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^3 - 8 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^3 \text{ (Н·мм)}.$$

Знак «плюс» найденного момента M_O означает, что он направлен так, как показано на рис. 4.6 а.

Далее крутящий момент на участках стержня определяется суммированием внешних моментов согласно их правилу знаков для левой отсеченной части стержня (рис. 4.2) следующим образом:

$$M_k(x_1) = M_O = 4 \cdot 10^3 \text{ (Н·мм) при } 0 \leq x_1 \leq l;$$

$$M_k(x_2) = M_O - T_3 = 4 \cdot 10^3 - 16 \cdot 10^3 = -12 \cdot 10^3 \text{ (Н·мм) при } l \leq x_2 \leq 2l;$$

$$M_k(x_3) = M_O - T_3 + T_1 = 4 \cdot 10^3 - 16 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = -8 \cdot 10^3 \text{ (Н·мм) при } 2l \leq x_3 \leq 3l.$$

При использовании правых отсеченных частей стержня определение реакции в заделке не требуется и крутящие моменты определяются согласно правилу знаков для внешних моментов (рис.4.2) по формулам:

$$M_k(x_1) = T_3 - T_1 - T_2 = 16 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^3 - 8 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^3 \text{ (Н·мм) при } 0 \leq x_1 \leq l;$$

$$M_k(x_2) = -T_1 - T_2 = -4 \cdot 10^3 - 8 \cdot 10^3 = -12 \cdot 10^3 \text{ (Н·мм) при } l \leq x_2 \leq 2l;$$

$$M_k(x_3) = -T_2 = -8 \cdot 10^3 \text{ (Н·мм) при } 2l \leq x_3 \leq 3l.$$

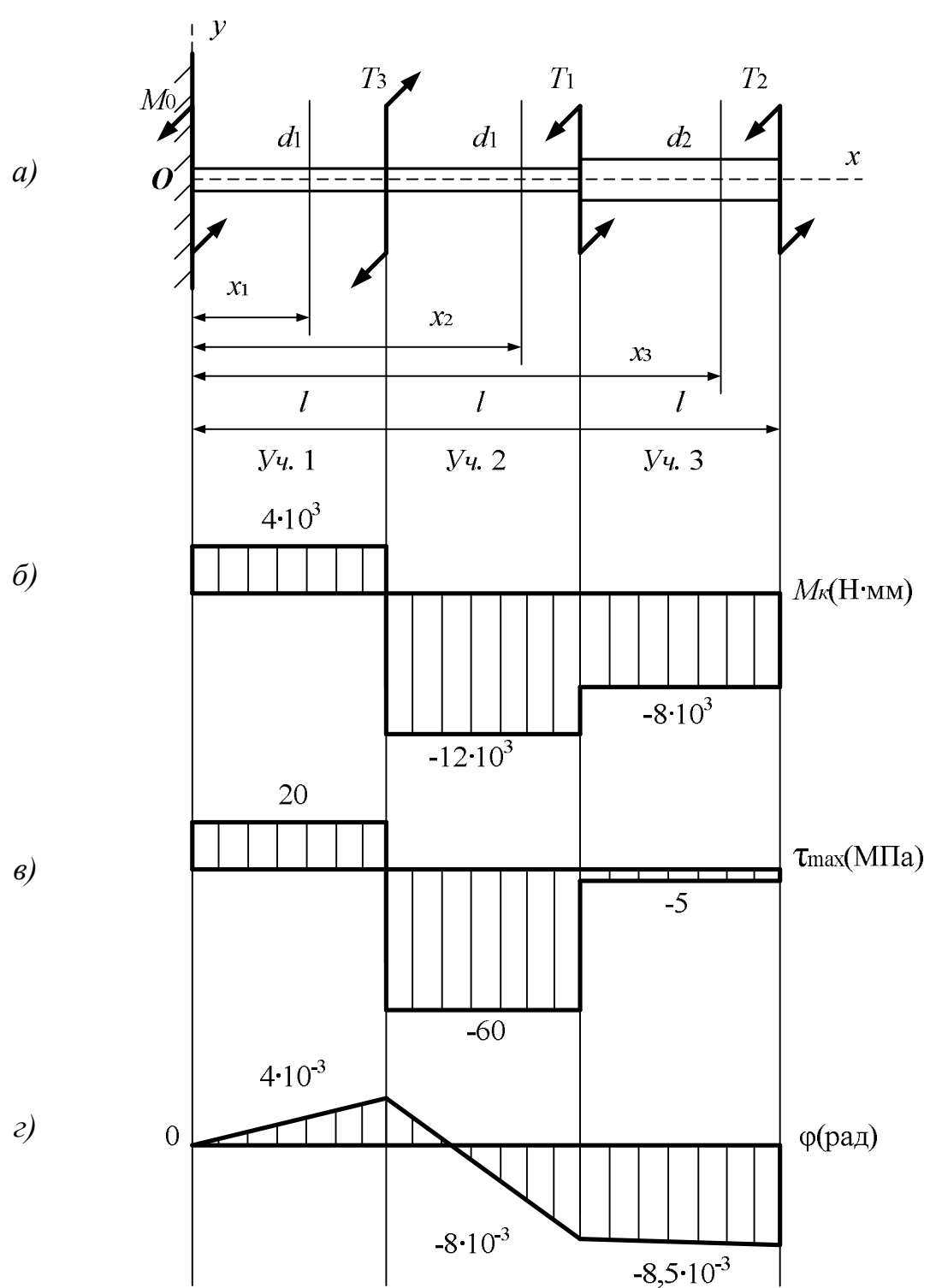


Рис. 4.6. Эпюры крутящего момента M_k , максимального касательного напряжения τ_{max} и угла поворота поперечных сечений ϕ

По полученным результатам расчетов строится эпюра крутящего момента M_k (рис. 4.6 б). Таким образом, крутящий момент является кусочно-постоянной функцией с разрывами (скачками) на границах участков, в которых приложены внешние крутящие моменты и момент в заделке. Величина этих скачков равна величине действующих моментов.

При самостоятельном выполнении этого задания достаточно провести вычисления с использованием либо левых, либо правых отсеченных частей стержня (по собственному выбору).

Вычислим полярные моменты инерции и полярные моменты сопротивления круглых поперечных сечений с заданными диаметрами d_1 и d_2 по приближенным формулам (4.3):

$$I_{p1} \approx 0,1 d_1^4 = 0,1 \cdot 10^4 = 1 \cdot 10^3 \text{ (мм}^4\text{)};$$

$$I_{p2} \approx 0,1 d_2^4 = 0,1 \cdot 20^4 = 16 \cdot 10^3 \text{ (мм}^4\text{)};$$

$$W_{p1} \approx 0,2 d_1^3 = 0,2 \cdot 10^3 \text{ (мм}^3\text{)};$$

$$W_{p2} \approx 0,2 d_2^3 = 0,2 \cdot 20^3 = 1,6 \cdot 10^3 \text{ (мм}^3\text{)}.$$

Определяем максимальные касательные напряжения на участках стержня по формуле (4.2) со знаком, соответствующим крутящему моменту:

$$\tau_{\max}(x_1) = \frac{M_{\kappa}(x_1)}{W_{p1}} = \frac{4 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 10^3} = 20 \text{ (МПа)};$$

$$\tau_{\max}(x_2) = \frac{M_{\kappa}(x_2)}{W_{p1}} = \frac{-12 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 10^3} = -60 \text{ (МПа)};$$

$$\tau_{\max}(x_3) = \frac{M_{\kappa}(x_3)}{W_{p2}} = \frac{-8 \cdot 10^3}{1,6 \cdot 10^3} = -5 \text{ (МПа)}.$$

Условие прочности стержня при кручении согласно условию (4.6) выполняется: $\max |\Phi| = 60 \text{ (МПа)} \leq [\Phi] = 100 \text{ (МПа)}$. По полученным результатам вычислений строится эпюра максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}$ (рис. 4.6 в).

Углы закручивания участков стержня определяем по формуле (4.4):

$$\Delta \varphi_1 = \frac{M_{\kappa}(x_1) l}{G I_{p1}} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 80}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^3} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ (рад)};$$

$$\Delta \varphi_2 = \frac{M_{\kappa}(x_2) l}{G I_{p1}} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 80}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^3} = -12 \cdot 10^{-3} \text{ (рад)};$$

$$\Delta \varphi_3 = \frac{M_{\kappa}(x_3) l}{G I_{p2}} = \frac{-8 \cdot 10^3 \cdot 80}{8 \cdot 10^4 \cdot 16 \cdot 10^3} = -0,5 \cdot 10^{-3} \text{ (рад)}.$$

Используя полученные значения углов закручивания участков стержня, определяем углы поворота граничных сечений стержня. Угол поворота

правого граничного сечения каждого участка стержня равен углу поворота его левого граничного сечения, сложенному с углом закручивания этого участка:

$$\varphi(0) = 0 \text{ (сечение в заделке закреплено);}$$

$$\varphi(l) = \varphi(0) + \Delta\varphi_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ (рад);}$$

$$\varphi(2l) = \varphi(l) + \Delta\varphi_2 = 4 \cdot 10^{-3} - 12 \cdot 10^{-3} = -8 \cdot 10^{-3} \text{ (рад);}$$

$$\varphi(3l) = \varphi(2l) + \Delta\varphi_3 = -8 \cdot 10^{-3} - 0,5 \cdot 10^{-3} = -8,5 \cdot 10^{-3} \text{ (рад).}$$

Поскольку крутящий момент на каждом участке стержня постоянный, угол поворота поперечных промежуточных сечений участка изменяется по линейной зависимости между углами поворота соответствующих граничных сечений. Эпюра угла поворота поперечных сечений φ стержня изображена на рис. 4.6 г.

4.3. Исходные данные для самостоятельной работы

Стержень из пластичной стали состоит из трех участков одинаковой длины $l = 80$ мм и с круглыми сечениями диаметрами $d_1 = 10$ мм и $d_2 = 20$ мм. В граничных сечениях участков приложены внешние крутящие моменты $T_1 = 4 \cdot 10^3$ Н·мм; $T_2 = 8 \cdot 10^3$ Н·мм; $T_3 = 16 \cdot 10^3$ Н·мм. Модуль сдвига материала $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 100$ МПа.

Построить эпюры крутящего момента M_k (Н·мм), максимального касательного напряжения $\tau_{\max}$ (МПа) и угла поворота поперечных сечений φ (рад); проверить условие прочности стержня при кручении.

Исходные данные для расчетных схем приведены в табл. 4.1. Внешние крутящие моменты задаются со знаком «плюс», если они действуют в направлении против хода часовой стрелки, глядя со стороны положительного направления продольной оси стержня Ox . Например, варианту №1 соответствует расчетная схема стержня, показанная на рис. 4.7.

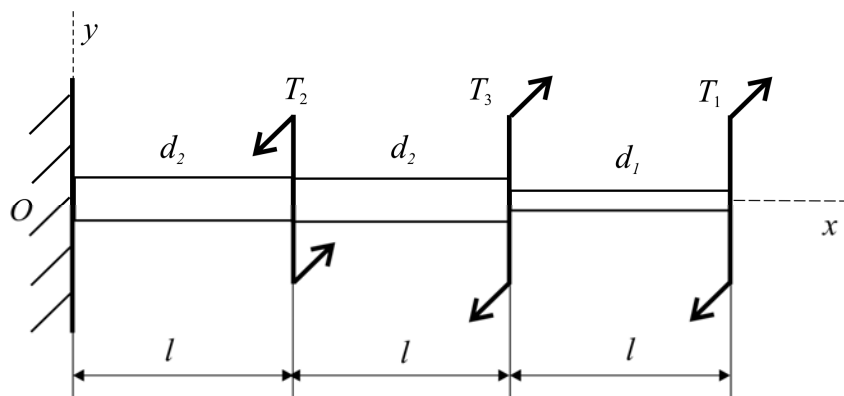


Рис. 4.7. Расчетная схема стержня в варианте №1

Таблица 4.1

№	Диаметры поперечных сечений			Внешние крутящие моменты		
	$0 \leq x \leq l$	$l \leq x \leq 2l$	$2l \leq x \leq 3l$	$x = l$	$x = 2l$	$x = 3l$
1	d_2	d_2	d_1	T_2	$-T_3$	$-T_1$
2	d_2	d_1	d_1	T_2	T_1	$-T_3$
3	d_2	d_1	d_2	$-T_1$	T_3	$-T_2$
4	d_1	d_2	d_2	$-T_3$	T_1	T_2
5	d_1	d_2	d_1	$-T_2$	$-T_3$	T_1
6	d_2	d_1	d_2	T_1	$-T_3$	$-T_2$
7	d_2	d_2	d_1	T_3	$-T_2$	$-T_1$
8	d_1	d_2	d_1	$-T_3$	T_2	T_1
9	d_2	d_1	d_1	$-T_2$	T_1	T_3
10	d_1	d_2	d_2	$-T_3$	T_1	$-T_2$
11	d_1	d_2	d_2	$-T_2$	T_3	$-T_1$
12	d_2	d_1	d_1	T_1	$-T_3$	T_2
13	d_1	d_1	d_2	$-T_2$	$-T_1$	T_3
14	d_1	d_1	d_2	$-T_3$	T_2	$-T_1$
15	d_1	d_2	d_1	T_3	T_1	$-T_2$
16	d_1	d_2	d_2	$-T_1$	$-T_3$	T_2
17	d_2	d_1	d_1	T_2	$-T_3$	T_1
18	d_1	d_2	d_1	$-T_1$	T_3	T_2
19	d_2	d_2	d_1	$-T_2$	T_1	$-T_3$
20	d_1	d_2	d_2	$-T_3$	$-T_2$	T_1
21	d_2	d_1	d_1	T_3	$-T_1$	T_2
22	d_1	d_2	d_1	T_2	T_1	$-T_3$
23	d_1	d_1	d_2	$-T_2$	T_3	T_1
24	d_2	d_2	d_1	T_1	$-T_3$	T_2
25	d_1	d_2	d_2	$-T_2$	$-T_1$	T_3
26	d_2	d_2	d_1	$-T_1$	$-T_2$	T_3
27	d_1	d_1	d_2	T_3	$-T_1$	T_2
28	d_2	d_1	d_2	$-T_2$	T_3	$-T_1$
29	d_1	d_2	d_1	$-T_1$	T_2	T_3
30	d_1	d_2	d_2	$-T_3$	T_1	T_2

4.4. Контрольные вопросы для самопроверки

1. Какой вид деформации стержня называется кручением?
2. Как называется внутреннее усилие, действующее в поперечных сечениях стержня при кручении? В каких единицах оно измеряется?
3. Как формулируется правило знаков для внутреннего усилия, действующего в поперечных сечениях стержня при кручении?
4. Как действует внутреннее усилие при кручении относительно плоскости поперечного сечения?
5. Как называется метод определения внутреннего усилия при кручении? Как оно определяется с использованием этого метода?
6. Как называются напряжения, действующие в поперечных сечениях стержня при кручении? В каких единицах они измеряются?
7. Как распределены напряжения в круглом поперечном сечении стержня при кручении? По какой формуле они вычисляются в заданной точке сечения?
8. Что называется углом закручивания стержня? В каких единицах он измеряется?
9. По какой формуле вычисляется угол закручивания стержня при кручении?
10. Что называется относительным углом закручивания стержня? В каких единицах он измеряется?
11. По какой формуле вычисляется относительный угол закручивания стержня при кручении?
12. Как называется характеристика механических свойств материала, используемая при расчете стержня на кручение? В каких единицах она измеряется?
13. Как формулируется условие прочности стержня при кручении?
14. Какие виды расчетов могут выполняться на основании условия прочности стержня при кручении?
15. Как формулируется условие жесткости стержня при кручении?

5. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

5.1. Основные понятия

Плоским (прямым) изгибом называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях действуют два внутренних усилия: *поперечная сила* и *изгибающий момент*. Такая деформация стержня возникает под действием внешней нагрузки, приложенной в *силовой плоскости* Oxy , проходящей через продольную ось стержня Ox и главную центральную ось его поперечного сечения Oy (рис. 5.1). На этом рисунке показаны следующие виды внешней нагрузки: *сосредоточенная сила* F и *равномерно распределенная нагрузка* с интенсивностью q , действующие перпендикулярно оси Ox , и *сосредоточенный момент* (момент пары сил) M .

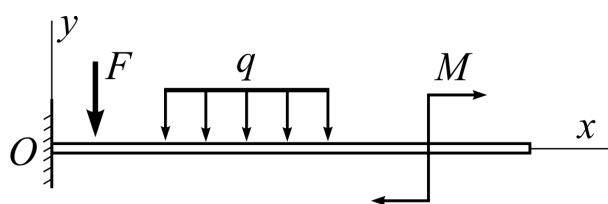


Рис. 5.1. Виды внешней нагрузки при плоском изгибе стержня

Если силовой плоскостью является рассматриваемая плоскость Oxy , то в поперечных сечениях стержня действуют поперечная сила Q_y , приложенная к центру тяжести поперечного сечения стержня и направленная вдоль оси Oy , и изгибающий момент M_z , действующий вокруг поперечной оси стержня, перпендикулярной плоскости рисунка. Далее поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_z будут обозначаться для упрощения записи без индексов, т. е. Q и M .

Рассматриваемый вид изгиба называется плоским потому, что изогнутая под действием внешней нагрузки ось стержня (*упругая линия*) остается в силовой плоскости Oxy .

Для поперечной силы Q и изгибающего момента M используются следующие *правила знаков*:

поперечная сила Q для левой отсеченной части стержня считается положительной, если она действует в направлении, противоположном положительному направлению оси Oy (вниз), а для правой отсеченной части – в положительном направлении оси Oy (вверх) (рис. 5.2, а);

изгибающий момент M считается положительным, если стержень изгибается выпуклостью вниз: при этом продольные волокна стержня, расположенные выше его оси, испытывают сжатие, а расположенные ниже его оси – растяжение (рис. 5.2, б).

Определение поперечной силы и изгибающего момента в заданном поперечном сечении стержня выполняется методом сечений. При этом используются два уравнения равновесия одной из отсеченных частей стержня,

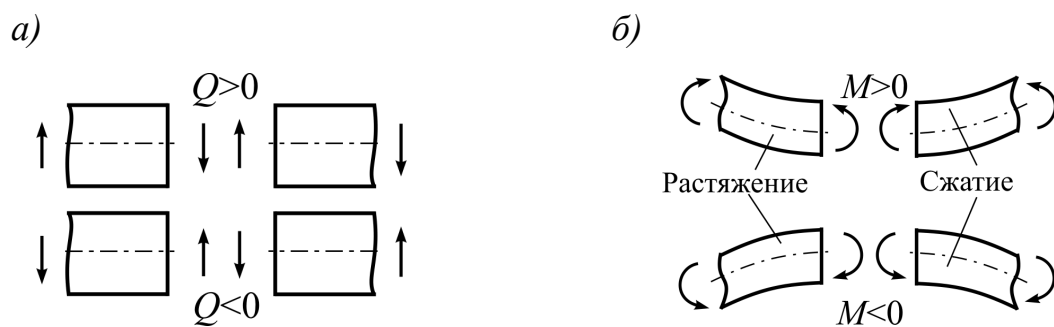


Рис. 5.2. Правило знаков для поперечной силы Q и изгибающего момента M

а именно, уравнение проекций сил на вертикальную ось Oy и уравнение моментов в силовой плоскости Oxy . В результате могут быть сформулированы следующие *правила определения поперечных сил и изгибающих моментов*:

поперечная сила Q в заданном сечении равна алгебраической сумме внешних сил, приложенных к одной из отсеченных частей стержня и взятых со знаками, показанными на рис. 5.3 а;

изгибающий момент M в заданном сечении равен алгебраической сумме внешних моментов, действующих на одну из отсеченных частей стержня, вычисленных относительно поперечной оси Cz , проходящей через центр тяжести этого сечения перпендикулярно плоскости рисунка, и взятых со знаками, показанными на рис. 5.3 б.

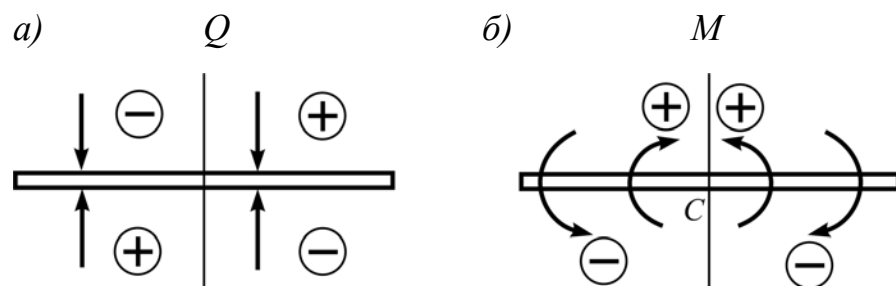


Рис. 5.3. Правило знаков при суммировании внешних нагрузок для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M

Например, для стержня, изображенного на рис. 5.4, поперечная сила и изгибающий момент согласно этим правилам определяются следующим образом.

В заданном сечении с координатой x поперечная сила $Q(x)$ с использованием левой отсеченной части стержня вычисляется по формуле:

$$Q(x) = F_1 - F_2,$$

а с использованием правой отсеченной части стержня – по формуле:

$$Q(x) = F_3 - F_4.$$

При вычислении поперечной силы $Q(x)$ действие на отсеченные части стержня моментов M_i не учитывается.

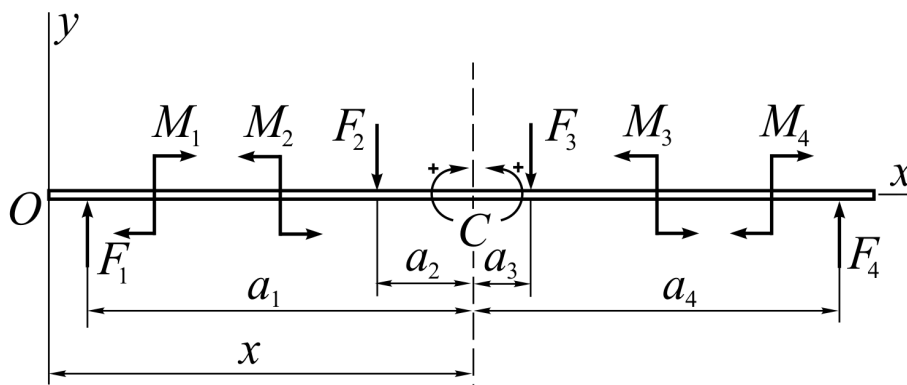


Рис. 5.4. Пример вычисления поперечной силы и изгибающего момента в поперечном сечении стержня с заданной координатой x

В заданном сечении с координатой x изгибающий момент $M(x)$ с использованием левой отсеченной части стержня вычисляется по формуле:

$$M(x) = M_1 - M_2 + F_1 a_1 - F_2 a_2,$$

а с использованием правой отсеченной части стержня – по формуле:

$$M(x) = M_3 - M_4 - F_3 a_3 + F_4 a_4.$$

При определении внутренних усилий Q и M следует учитывать реакции опор, находящихся в отсеченной части стержня.

Например, для консольного стержня, закрепленного слева заделкой A (рис. 5.5, а), реакции заделки определяются из уравнений равновесия:

$$\sum F_x = X_A = 0;$$

$$\sum F_y = Y_A - F_1 + F_2 = 0;$$

$$\sum M_A = -M_A - F_1 a_1 + F_2 a_2 = 0.$$

Таким образом, реакции в заделке A равны:

$$X_A = 0; \quad Y_A = F_1 - F_2; \quad M_A = -F_1 a_1 + F_2 a_2.$$

Отметим, что в практических расчетах определение поперечных сил и изгибающих моментов для консольных стержней целесообразно использовать отсеченную часть стержня, не содержащую заделку. При этом определение реакций в заделке не требуется.

Если стержень закреплен с помощью *неподвижного шарнира A* и *подвижного шарнира B* (рис. 5.5 б), то реакции в этих шарнирах определяются из уравнений равновесия:

$$\sum F_x = X_A = 0;$$

$$\sum F_y = Y_A - F_1 + F_2 + Y_B = 0;$$

$$\sum M_A = -F_1 a_1 + F_2 a_2 + Y_B l = 0.$$

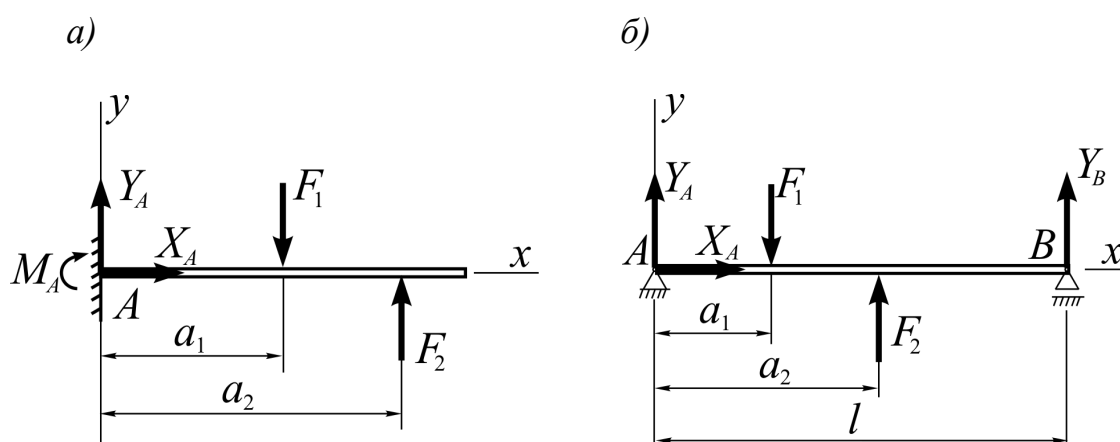


Рис. 5.5. Определение реакций в заделке (а) и реакций в шарнирных опорах (б)

Таким образом, реакции в шарнирах *A* и *B* равны:

$$X_A = 0; \quad Y_B = (F_1 a_1 - F_2 a_2) / l; \quad Y_A = F_1 - F_2 - Y_B.$$

Отметим, что при рассматриваемом шарнирном закреплении стержня определение реакций этих шарниров для вычисления поперечных сил и изгибающих моментов является обязательным. При этом рекомендуется проверить найденные реакции, например, с помощью уравнения равновесия моментов относительно шарнира *B*:

$$\sum M_B = -Y_A l + F_1 (l - a_1) - F_2 (l - a_2) = 0.$$

Для определения внутренних усилий и реакций опор при действии на стержень распределенных нагрузок их следует заменять *равнодействующими сосредоточенными силами*.

При равномерно распределенной нагрузке с интенсивностью q , действующей на участке стержня длиной a , ее равнодействующая сила R приложена в середине этого участка и равна по величине произведению интенсивности q на длину этого участка a (рис. 5.6 а).

Для заданного сечения с координатой x равнодействующие силы равномерно распределенных нагрузок могут зависеть от координаты x рассматриваемого сечения (рис. 5.6 б). В этом примере поперечная сила и изгибающий момент с использованием левой отсеченной части стержня вычисляются по формулам:

$$Q(x) = -R_1 + R_2 = -q_1 a + q_2(x - a);$$

$$M(x) = -R_1(x - a/2) + R_2(x - a)/2 = -q_1 a(x - a/2) + q_2(x - a)^2/2.$$

В этих формулах $Q(x)$ является линейной функцией, а $M(x)$ – квадратичной функцией координаты сечения x .

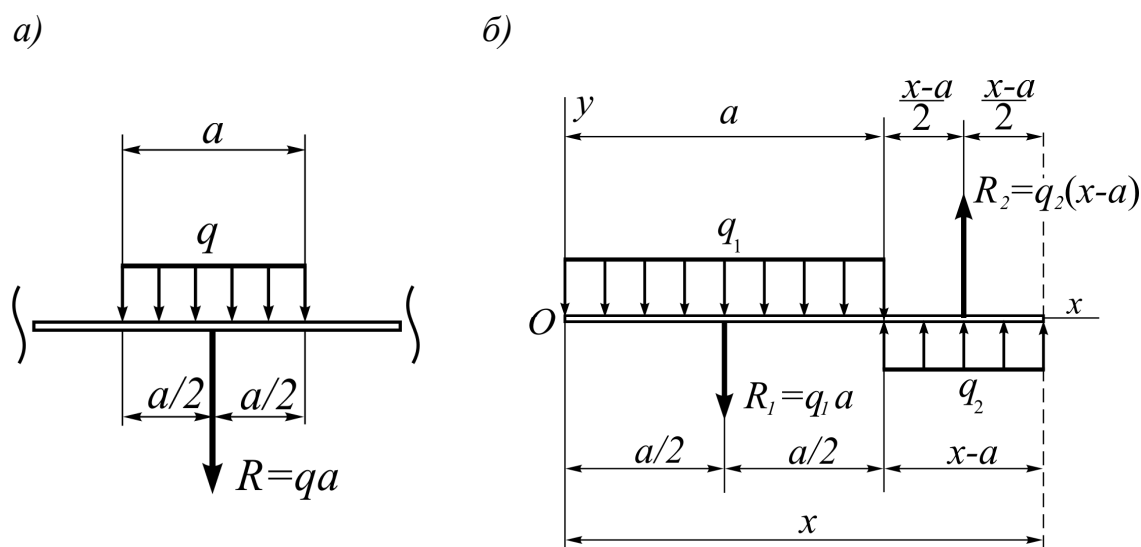


Рис. 5.6. Замена равномерно распределенных нагрузок равнодействующими силами

Определение поперечных сил и изгибающих моментов при построении их эпюр выполняется по участкам нагружения, в пределах которых эти внутренние усилия изменяются по определенным функциям $Q(x)$ и $M(x)$. Границами таких участков являются поперечные сечения стержня, в которых приложены внешние сосредоточенные силы и моменты (в том числе опорные реакции), и в которых также начинается или заканчивается действие распределенных нагрузок. Например, консольный стержень (рис. 5.7, а) и стержень с шарнирными опорами (рис. 5.7, б) разбиваются на пять участков.

На каждом участке рассматриваются сечения стержня с координатами x_i ($i = 1, 2, \dots$) внутри этих участков (рис. 5.7) и определяются поперечные силы $Q(x_i)$ и изгибающие моменты $M(x_i)$ с использованием левой или правой

отсеченной части стержня. Для упрощения расчетов рекомендуется использовать ту отсеченную часть стержня, на которую действует меньшее количество внешних нагрузок.

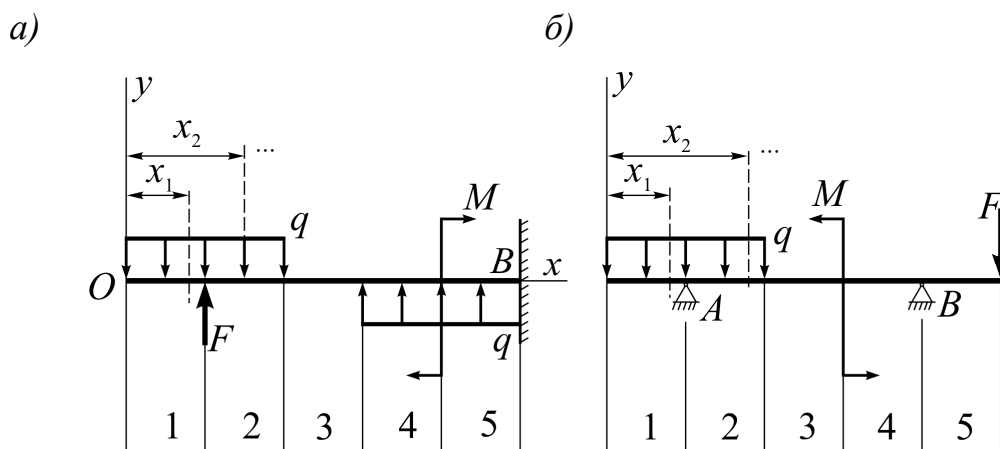


Рис. 5.7. Примеры разбиения стержней на участки нагружения

Интенсивность распределенной нагрузки $q(x)$, поперечная сила $Q(x)$ и изгибающий момент $M(x)$ удовлетворяют следующим дифференциальным зависимостям:

$$\frac{dQ}{dx} = q; \quad \frac{dM}{dx} = Q. \quad (5.1)$$

Как следствие (5.1) выполняется дифференциальная зависимость:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q. \quad (5.2)$$

В этих зависимостях величина интенсивности распределенной нагрузки q считается положительной, если она действует в положительном направлении оси Oy (вверх), а при противоположном направлении – отрицательной.

Из дифференциальных зависимостей (5.1) и (5.2) вытекают следующие свойства эпюр Q и M .

Свойства эпюры поперечной силы Q

1. На участках стержня без действия распределенной нагрузки ($q = 0$) $Q(x)$ является постоянной функцией ($Q(x) = \text{const}$).
2. На участках стержня при действии равномерно распределенной нагрузки ($q(x) = \text{const}$) функция $Q(x)$ изменяется по *линейному закону*; при этом $Q(x)$ возрастает при $q > 0$ или убывает при $q < 0$.
3. В сечениях стержня, где действуют внешние силы или силовые реакции, эпюра Q имеет разрывы (скачки) на величину этой силы и в направлении этой силы; действие на рассматриваемую отсеченную часть стержня моментов на эпюру Q влияния не имеет.

Свойства эпюры изгибающего момента M

1. На участках стержня без действия распределенной нагрузки ($q = 0$) $M(x)$ изменяется по *линейному* закону в зависимости от величины $Q(x) = \text{const}$; при этом функция $M(x)$ возрастает при $Q > 0$ или убывает при $Q < 0$; если $Q = 0$, то $M(x)$ является постоянной функцией ($M(x) = \text{const}$).
2. На участках стержня при действии равномерно распределенной нагрузки ($q(x) = \text{const}$) функция $M(x)$ изменяется по *квадратичному* закону; при этом $M(x)$ возрастает при $Q(x) > 0$ или убывает при $Q(x) < 0$; соответствующая этому участку часть параболы обращена выпуклостью вверх при $q < 0$ или вниз при $q > 0$.
3. Если на рассматриваемом участке стержня имеется сечение, в котором $Q = 0$, то в этом сечении $M(x)$ достигает экстремума (вершина параболы), то есть максимума при $q < 0$ или минимума при $q > 0$.
4. В сечениях стержня, где действуют внешние моменты, эпюра M имеет разрывы (скачки) на величину этих моментов; в сечениях, где действуют внешние силы, эпюра M имеет *изломы*, то есть разрывы своей первой производной dM/dx .

Эти свойства эпюр Q и M рекомендуется использовать при их построении, а также для их проверки.

В результате построения эпюр Q и M определяются *опасные сечения*, в которых действуют максимальные по модулю поперечная сила $Q_{\max}$ и изгибающий момент $M_{\max}$. Отметим, что эти максимальные значения внутренних усилий могут достигаться в разных поперечных сечениях стержня.

Рассмотрим вопрос о напряжениях, действующих в поперечных сечениях стержня при плоском изгибе, и об их распределении в точках этого сечения.

Изгибающий момент M является результатом действия в рассматриваемом поперечном сечении *нормальных напряжений*, направленных перпендикулярно плоскости сечения, а поперечная сила Q – результатом действия *касательных напряжений*, лежащих в плоскости сечения.

Рассмотрим пример, в котором в поперечном сечении стержня действуют положительные внутренние усилия Q и M (рис. 5.8 а).

Точки, расположенные в поперечном сечении стержня с одинаковой координатой y , образуют *слой сечения* (рис. 5.8 б).

Нормальные напряжения одинаковы во всех точках слоя и распределены по линейной зависимости от координаты y :

$$\sigma(y) = -\frac{M}{I_z} y, \quad y_B \leq y \leq y_A, \quad (5.3)$$

где I_z – момент инерции поперечного сечения относительно главной центральной оси Cz ; координата y изменяется в пределах между координатой y_B нижней точки сечения B и координатой y_A верхней точки A этого сечения.

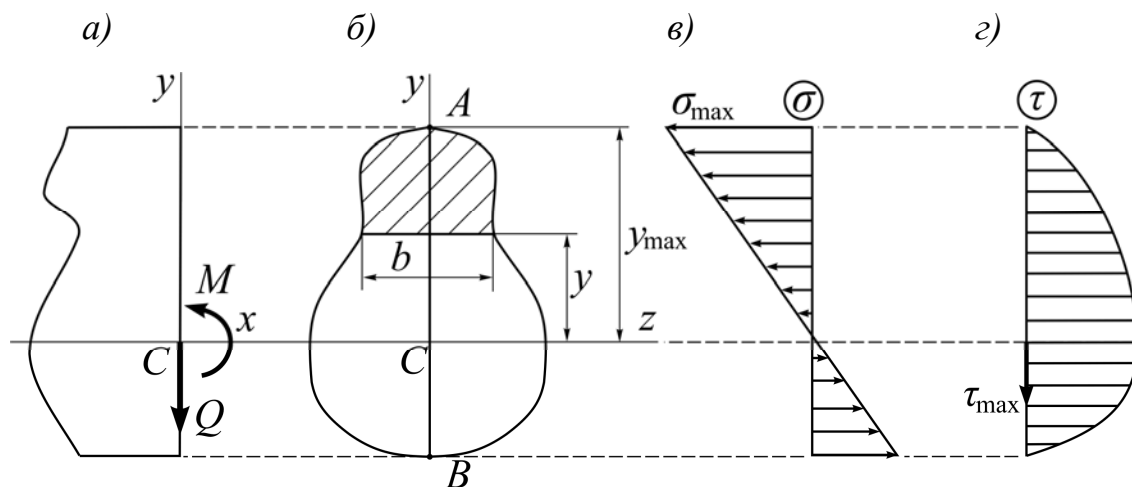


Рис. 5.8. Распределение нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении стержня при плоском изгибе

При положительной величине изгибающего момента M продольные слои стержня с положительной координатой y испытывают деформацию сжатия ($\sigma(y) < 0$), а с отрицательной координатой y – деформацию растяжения ($\sigma(y) > 0$). В слое стержня с координатой $y = 0$ нормальные напряжения $\sigma = 0$, поэтому этот слой называется *нейтральным слоем*.

Максимальное по модулю нормальное напряжение $\sigma_{\max}$ действует в наиболее удаленных от нейтрального слоя точках сечения и вычисляется по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|}{W_z}; \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad (5.4)$$

где W_z – момент сопротивления поперечного сечения относительно оси Cz ; $y_{\max}$ – расстояние от нейтрального слоя до наиболее удаленной от него точки сечения (в данном примере $y_{\max} = y_A$). Эпюра нормальных напряжений σ показана на рис. 5.8 в.

Касательные напряжения также одинаковы во всех точках слоя сечения, распределены по *нелинейному закону* и вычисляются по *формуле Журавского*:

$$\tau(y) = \frac{Q S_z^{\text{отс}}}{I_z b}, \quad (5.5)$$

где Q – поперечная сила, действующая в рассматриваемом сечении; $S_z^{\text{отс}}(y)$ – статический момент части сечения, отделенной слоем сечения с координатой

y (на рис. 5.8, б эта часть сечения стержня показана с наклонной штриховкой); I_z – момент инерции сечения относительно оси Cz ; $b(y)$ – ширина слоя сечения с координатой y .

Касательные напряжения действуют в том же направлении, что и поперечная сила Q . Максимальная величина касательных напряжений $\tau_{\max}$ достигается в нейтральном слое, а минимальные касательные напряжения, равные нулю, соответствуют точкам сечения, наиболее удаленным от оси Cz (в данном примере точкам A и B). Эпюра касательных напряжений τ показана на рис. 5.8, г.

Характерно, что при плоском изгибе стержня максимальные значения нормальных и касательных напряжений оказываются в разных точках сечения. В точках, где нормальные напряжения σ максимальны (наружные волокна стержня), касательные напряжения $\tau = 0$. А там, где касательные напряжения τ максимальны (нейтральный слой), нормальные напряжения $\sigma = 0$.

Для оценки прочности стержня с постоянным поперечным сечением при плоском изгибе используются следующие условия:

условие прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (5.6)$$

где $M_{\max}$ – максимальный по модулю изгибающий момент; W_z – момент сопротивления сечения относительно оси Cz ; $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение;

условие прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{I_z b_0} \leq [\tau], \quad (5.7)$$

где $Q_{\max}$ – максимальная по модулю поперечная сила; $S_{\max}$ – максимальный статический момент *полусечения*, расположенного над или под нейтральным слоем; I_z – момент инерции сечения относительно оси Cz ; b_0 – ширина нейтрального слоя; $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение.

Обычно из условия прочности по нормальным напряжениям (5.6) определяются размеры поперечного сечения стержня принятой формы согласно формуле:

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \quad (5.8)$$

а потом проверяют, удовлетворяет ли выбранное сечение стержня условию прочности по касательным напряжениям (5.7). Отметим, что для однозначного выбора размеров поперечного сечения стержня может потребоваться задание соотношения этих размеров.

Приведем конкретные формулы для расчета на прочность стержней с прямоугольным (рис. 5.9, а), трубчатым (рис. 5.9, б) и круглым поперечными сечениями.

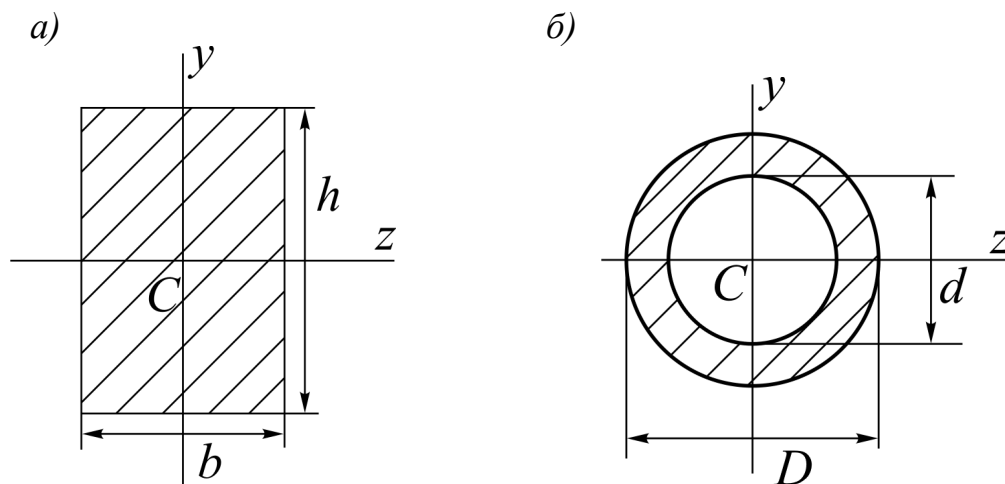


Рис. 5.9. Прямоугольное и трубчатое поперечные сечения стержня

Для прямоугольного сечения (рис. 5.9, а) с размерами h и b при заданном соотношении $\beta = h/b$ используются следующие расчетные формулы:

площадь сечения: $A = hb$;

осевой момент инерции сечения: $I_z = bh^3/12$;

осевой момент сопротивления сечения: $W_z = bh^2/6$ ($y_{\max} = h/2$);

нормальные напряжения в слое стержня с координатой y :

$$\sigma(y) = -\frac{M}{I_z} y, \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2};$$

максимальное нормальное напряжение в опасном сечении с изгибающим моментом $M_{\max}$: $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}$;

касательные напряжения в слоях стержня с координатой y :

$$\tau(y) = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} \left(1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right), \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2};$$

максимальное касательное напряжение: $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\max}}{A}$.

При заданном соотношении сторон прямоугольного сечения $\beta = h/b$ из условия прочности по нормальным напряжениям (5.6) минимальные значения размеров сечения h и b определяются по формулам:

$$h = \sqrt[3]{\frac{6\beta M_{\max}}{[\sigma]}}; \quad b = \frac{h}{\beta},$$

а потом их полученные значения округляются до ближайших величин из *нормального ряда чисел*, приведенных в табл. 5.1 (до 100 мм).

Затем выполняется проверка прочности (5.7) по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau].$$

Таблица 5.1

Нормальные линейные размеры, мм (ГОСТ 6636-69)					
3,2	5,6	10	18	32	56
3,4	6,0	10,5	19	34	60
3,6	6,3	11	20	36	63
3,8	6,7	11,5	21	38	67
4,0	7,1	12	22	40	71
4,2	7,5	13	24	42	75
4,5	8,0	14	25	45	80
4,8	8,5	15	26	48	85
5,0	9,0	16	28	50	90
5,3	9,5	17	30	53	95
					100

Распределение нормальных и касательных напряжений в прямоугольном поперечном сечении стержня при максимальных значениях изгибающего момента $M_{\max}$ и поперечной силы $Q_{\max}$ показано на рис. 5.10.

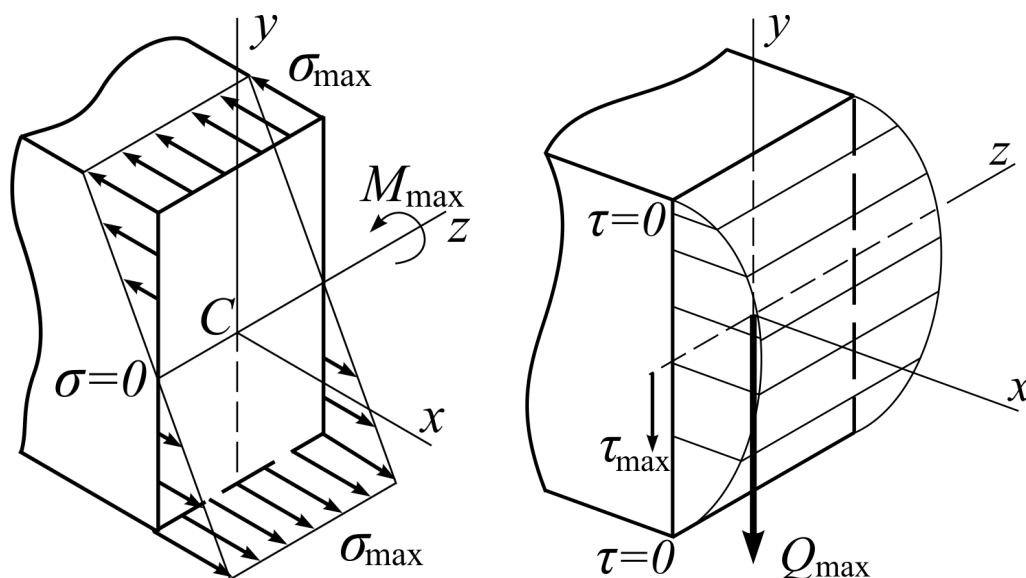


Рис. 5.10. Распределение нормальных напряжений σ и касательных напряжений τ в прямоугольном поперечном сечении стержня

Для трубчатого сечения (рис. 5.9, б) с заданным соотношением $\alpha = d/D$ между внутренним диаметром d и внешним диаметром D используются следующие расчетные формулы:

площадь сечения: $A = \frac{\pi}{4} D^2 (1 - \alpha^2)$;

осевой момент инерции сечения: $I_z = \frac{\pi}{64} D^4 (1 - \alpha^4)$;

осевой момент сопротивления сечения:

$$W_z = \frac{\pi}{32} D^3 (1 - \alpha^4) \approx 0,1 D^3 (1 - \alpha^4) \quad (y_{\max} = D/2);$$

максимальное нормальное напряжение в опасном сечении с изгибающим моментом $M_{\max}$: $y_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}$;

максимальное касательное напряжение: $\tau_{\max} = 2 \frac{Q_{\max}}{A}$.

При заданном соотношении диаметров $\alpha = d/D$ из условия прочности по нормальным напряжениям (5.6) их минимальные значения определяются по формулам:

$$D = \sqrt[3]{\frac{10 M_{\max}}{(1 - \bar{\sigma}^4)[\sigma]}}; \quad d = \bar{\sigma} D,$$

а потом их полученные значения округляются до ближайших величин из нормального ряда чисел.

Затем выполняется проверка прочности (5.7) по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = 2 \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau].$$

Для круглого сечения с заданным диаметром D используются следующие расчетные формулы, получаемые из формул для трубчатого сечения при $\alpha = 0$:

площадь сечения: $A = \frac{\pi}{4} D^2$;

осевой момент инерции сечения: $I_z = \frac{\pi}{64} D^4$;

осевой момент сопротивления сечения:

$$W_z = \frac{\pi}{32} D^3 \approx 0,1 D^3 \quad (y_{\max} = D/2);$$

максимальное нормальное напряжение в опасном сечении с изгибающим

моментом $M_{\max}$: $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}$;

максимальное касательное напряжение: $\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q_{\max}}{A}$.

Из условия прочности по нормальным напряжениям (5.6) минимальное значение диаметра D определяется по формуле:

$$D = \sqrt[3]{\frac{10 M_{\max}}{[\sigma]}} ,$$

а потом полученное значение округляется до ближайшей величины из нормального ряда чисел.

Затем выполняется проверка прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau].$$

5.2. Примеры выполнения задания

Расчёт стержня на прочность при плоском изгибе

Задание 1

Консольный стержень (рис. 5.11) из пластичной стали с трубчатым поперечным сечением при заданном отношении диаметров ($\alpha = d/D = 0,5$) испытывает деформацию плоского изгиба. Заданы следующие значения параметров: $l = 100$ мм, $q = 2$ Н/мм, $F = 2ql$, $[\sigma] = 160$ МПа, $[\tau] = 100$ МПа.

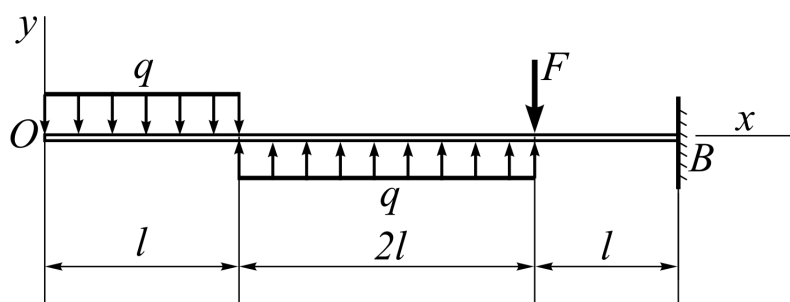


Рис. 5.11. Расчетная схема стержня в примере задания 1

Построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M ; подобрать диаметры D и d поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям; проверить выполнение условия прочности по касательным напряжениям.

Решение

В рассматриваемом примере у стержня имеются три участка нагружения. Для того, чтобы не определять реакции в заделке B , будем использовать при построении эпюр Q и M левые отсеченные части стержня. Найдем функции $Q(x_i)$ и $M(x_i)$ на каждом из этих участков, вычислим значения этих функций в *характерных точках*, то есть в граничных сечениях участков, а также в сечениях, где достигаются экстремальные значения изгибающего момента M . Если на рассматриваемом участке нет экстремального значения изгибающего момента при действии распределенной нагрузки, то следует вычислить значение M в середине этого участка.

Участок 1: $0 \leq x_1 \leq l$;

$$Q(x_1) = -qx_1; \quad Q(0) = 0; \quad Q(l) = -ql;$$

$$M(x_1) = -qx_1^2 / 2; \quad M(0) = 0; \quad M(l/2) = -ql^2 / 8; \quad M(l) = -ql^2 / 2.$$

На первом участке Q убывает по линейному закону, а M изменяется по параболе с выпуклостью вверх и с вершиной в сечении с координатой $x_1 = 0$.

Участок 2: $l \leq x \leq 3l$;

$$Q(x_2) = -ql + q(x_2 - l); \quad Q(l) = -ql; \quad Q(3l) = ql;$$

$$M(x_2) = -ql \cdot (x_2 - \frac{l}{2}) + q \cdot \frac{(x_2 - l)^2}{2}; \quad M(l) = M(3l) = -ql^2 / 2.$$

На втором участке Q имеет разные знаки в граничных сечениях, поэтому следует определить координату x_2^* сечения, в котором $Q = 0$:

$$Q(x_2^*) = qx_2^* - 2ql = 0; \quad x_2^* = 2l.$$

Изгибающий момент в этом сечении $M(x_2^*) = -ql^2$. На втором участке Q возрастает по линейному закону, а M изменяется по параболе с выпуклостью вниз и с вершиной при $x_2^* = 2l$.

Участок 3: $3l \leq x_3 \leq 4l$;

$$Q(x_3) = -ql + q \cdot 2l - F = -ql = \text{const};$$

$$M(x_3) = -ql \cdot (x_3 - \frac{l}{2}) + 2ql \cdot (x_3 - 2l) - F \cdot (x_3 - 3l);$$

$$M(3l) = -ql^2 / 2; \quad M(4l) = -3ql^2 / 2.$$

По полученным результатам расчетов строим эпюры Q и M в масштабах ql и ql^2 соответственно (рис. 5.12) и определяем максимальные по модулю поперечную силу и изгибающий момент:

$$Q_{\max} = ql = 2 \cdot 100 = 200 \text{ (Н)};$$

$$M_{\max} = 1,5ql^2 = 1,5 \cdot 2 \cdot 100^2 = 30000 \text{ (Н} \cdot \text{мм)}.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям определяем диаметры трубчатого сечения:

$$D = \sqrt[3]{\frac{10M_{\max}}{(1 - \alpha^4)[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 30000}{(1 - 0,5^4) \cdot 160}} = 12,60 \text{ (мм)};$$

$$d = \alpha D = 0,5 \cdot 12,6 = 6,30 \text{ (мм)}$$

и округляем их до ближайших значений из нормального ряда чисел, приведенных в табл. 5.1: $D = 13$ мм; $d = 6,3$ мм. Поскольку округление диаметра D произошло в сторону возрастания, то проверка по нормальным напряжениям не требуется.

По полученным округленным размерам поперечного сечения вычисляем его площадь:

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{3,14}{4}(13^2 - 6,3^2) = 101,5(\text{мм}^2).$$

При этом максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = 2 \frac{Q_{\max}}{A} = 2 \frac{200}{101,5} = 3,9(\text{МПа}) < [\tau],$$

т. е. условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

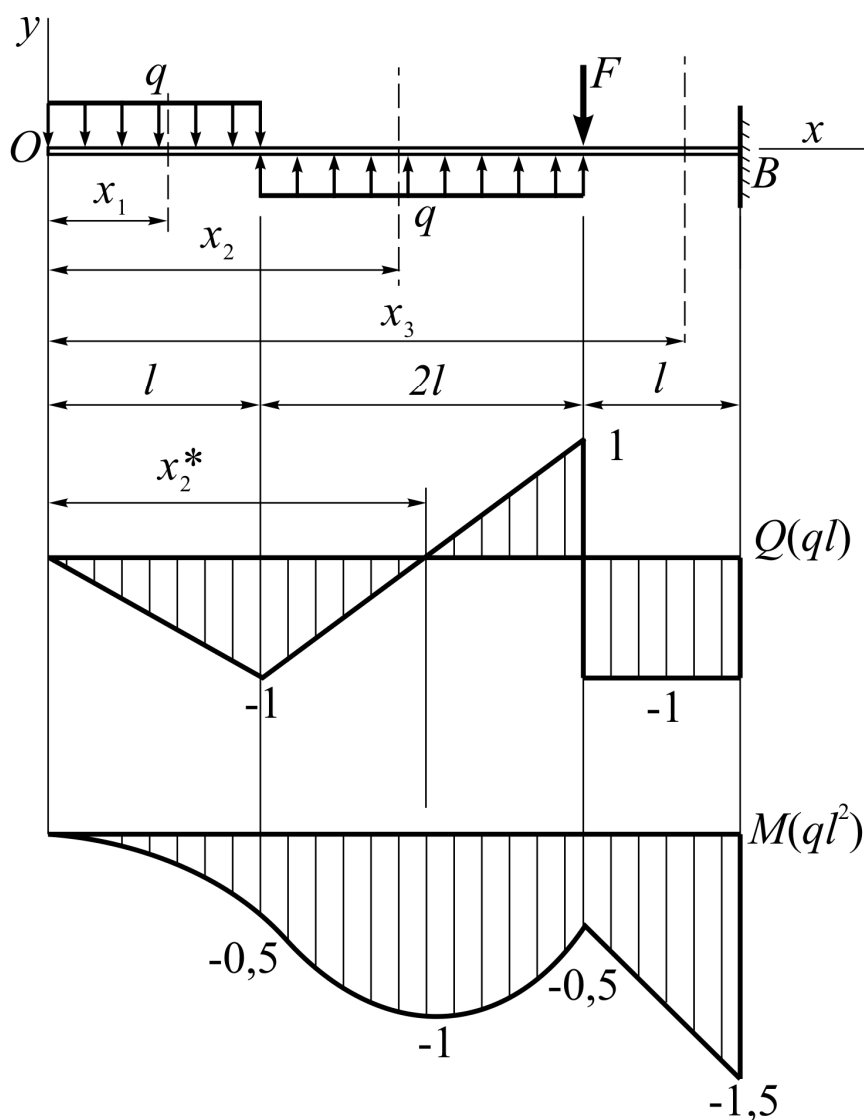


Рис. 5.12. Эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M в примере задания 1

Задание 2

Стержень с шарнирными опорами (рис. 5.13) из пластичной стали с прямоугольным поперечным сечением при заданном соотношении размеров $\beta = h/b = 2$ испытывает деформацию плоского изгиба. Заданы следующие

значения параметров: $l = 100$ мм, $q = 2$ Н/мм, $F = 2ql$, $M_1 = ql^2$, $M_2 = 2ql^2$, $[\sigma] = 160$ МПа, $[\tau] = 100$ МПа.

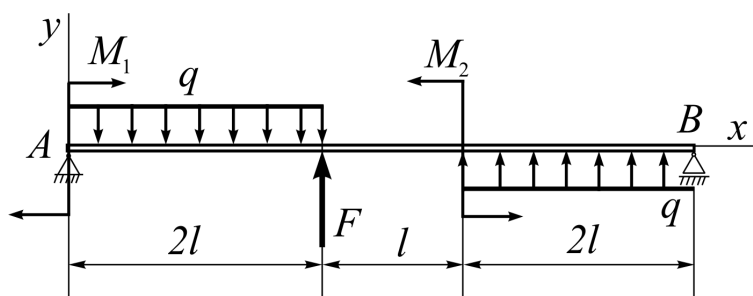


Рис. 5.13. Расчетная схема стержня в примере задания 2

Построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M ; подобрать размеры h и b поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям; проверить выполнение условия прочности по касательным напряжениям.

Решение

В рассматриваемом примере у стержня имеются три участка нагружения. Предварительно требуется определить реакции в шарнирах A и B из следующих уравнений равновесия (рис. 5.14):

$$\sum F_x = X_A = 0;$$

$$\sum F_y = Y_A - 2ql + F + 2ql + Y_B = 0;$$

$$\sum M_A = -M_1 - 2ql \cdot l + F \cdot 2l + M_2 + 2ql \cdot 4l + Y_B \cdot 5l = 0.$$

Из первого уравнения реакция $X_A = 0$, из третьего уравнения находим реакцию $Y_B = -1,8ql$, а затем из второго уравнения определяем реакцию $Y_A = 0,8ql$.

Рекомендуется проверить реакцию Y_A по уравнению равновесия моментов относительно шарнира B :

$$\sum M_B = -Y_A \cdot 5l - M_1 + 2ql \cdot 4l - F \cdot 3l + M_2 - 2ql \cdot l = 0.$$

При определении функций $Q(x_i)$ и $M(x_i)$ на первых двух участках будем использовать левые отсеченные части стержня, а на третьем участке для упрощения расчетов воспользуемся правой отсеченной частью.

Участок 1: $0 \leq x_1 \leq 2l$ (левая отсеченная часть);

$$Q(x_1) = Y_A - qx_1 = 0,8ql - qx_1; \quad Q(0) = 0,8ql; \quad Q(2l) = -1,2ql;$$

$$M(x_1) = Y_A x_1 + M_1 - qx_1^2 / 2 = 0,8qlx_1 + ql^2 - qx_1^2 / 2;$$

$$M(0) = ql^2; \quad M(2l) = 0,6ql^2.$$

На этом участке Q имеет разные знаки в граничных сечениях, поэтому следует определить координату x_1^* сечения, в котором $Q = 0$:

$$Q(x_1^*) = 0,8ql - qx_1^* = 0; \quad x_1^* = 0,8l.$$

Изгибающий момент в этом сечении $M(x_1^*) = 1,32ql^2$. На первом участке Q убывает по линейному закону, а M изменяется по параболе с выпуклостью вверх и с вершиной в сечении с координатой $x_1 = 0,8l$.

Участок 2: $2l \leq x_2 \leq 3l$ (левая отсеченная часть);

$$Q(x_2) = Y_A - 2ql + F = -0,2ql = \text{const};$$

$$\begin{aligned} M(x_2) &= Y_A x_2 + M_1 + 2ql(x_2 - l) + F(x_2 - 2l) = \\ &= 0,8qlx_2 + ql^2 - 2qlx_2 + 2ql^2 + qlx_2 - 2ql^2 = -0,8qlx_2 + ql^2; \end{aligned}$$

$$M(2l) = -0,2ql \cdot 2l + ql^2 = 0,6ql^2; \quad M(3l) = -0,2ql \cdot 3l + ql^2 = 0,4ql^2.$$

На втором участке Q является постоянной функцией, а M убывает по линейному закону.

Участок 3: $3l \leq x_3 \leq 5l$ (правая отсеченная часть);

$$Q(x_3) = -Y_B - q(5l - x_3) = 1,8ql - q(5l - x_3);$$

$$Q(3l) = -0,2ql; \quad Q(5l) = 1,8ql;$$

$$M(x_3) = Y_B(5l - x_3) + q(5l - x_3)^2 / 2;$$

$$M(3l) = -1,6ql^2; \quad M(5l) = 0.$$

На этом участке Q имеет разные знаки в граничных сечениях, поэтому следует определить координату x_3^* сечения, в котором $Q = 0$:

$$Q(x_3^*) = -3,2ql + qx_3^* = 0; \quad x_3^* = 3,2l.$$

Изгибающий момент в этом сечении $M(x_3^*) = -1,62ql^2$. На третьем участке Q возрастает по линейному закону, а M изменяется по параболе с выпуклостью вниз и с вершиной в сечении с координатой $x_3 = 3,2l$.

По полученным результатам расчетов строим эпюры Q и M в масштабах ql и ql^2 соответственно (рис. 5.14) и определяем максимальные по модулю поперечную силу и изгибающий момент:

$$Q_{\max} = 1,8ql = 1,8 \cdot 2 \cdot 100 = 360 \text{ (Н)};$$

$$M_{\max} = 1,62ql^2 = 1,62 \cdot 2 \cdot 100^2 = 32400 \text{ (Н·мм)}.$$

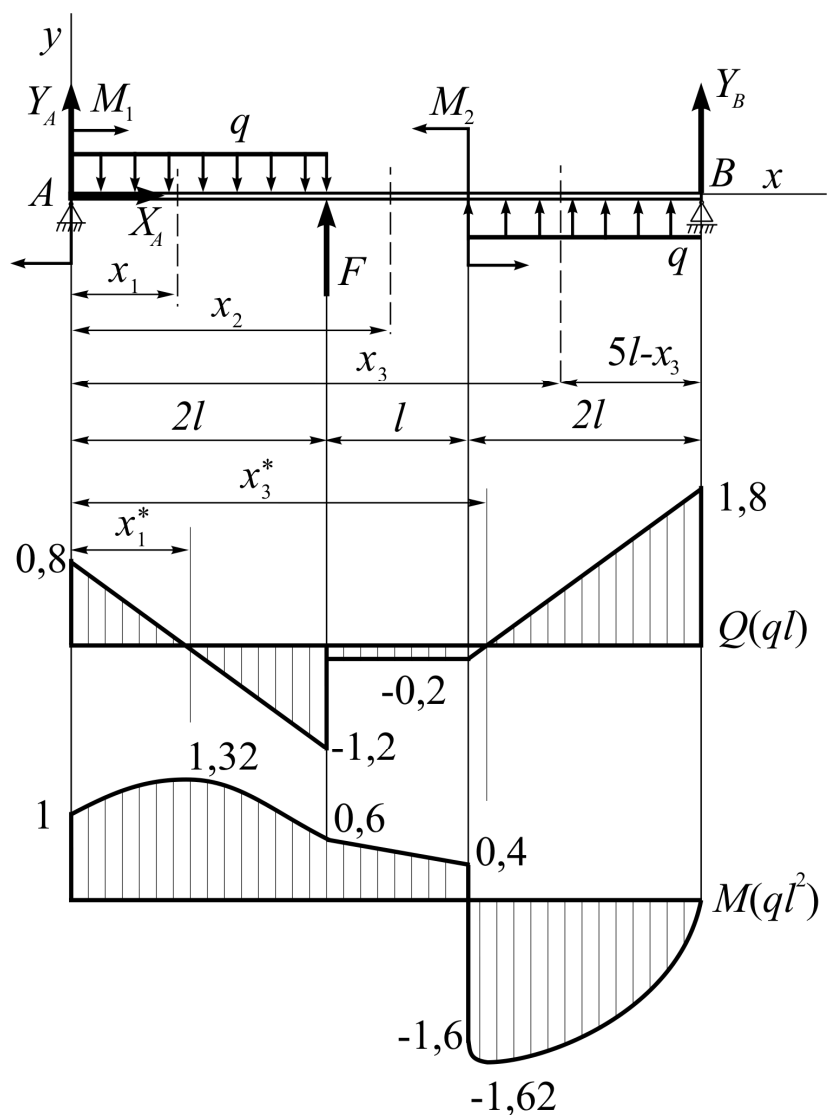


Рис. 5.14. Эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M в примере задания 2

Из условия прочности по нормальным напряжениям определяем размеры прямоугольного сечения:

$$h = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot b \cdot M_{\max}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2 \cdot 32400}{160}} = 13,5(\text{мм}); \quad b = h / 2 = 6,7(\text{мм})$$

и округляем их до ближайших значений из нормального ряда чисел, приведенных в таблице 5.1: $h = 14$ мм; $b = 6,7$ мм. Поскольку округление размера h произошло в сторону увеличения, то проверка по нормальным напряжениям не требуется.

По полученным округленным размерам поперечного сечения вычисляем его площадь:

$$A = hb = 14 \cdot 6,7 = 93,8(\text{мм}^2).$$

При этом максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\max}}{A} = \frac{3 \cdot 360}{2 \cdot 93,8} = 5,8 (\text{МПа}) < [\tau],$$

то есть условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

5.3. Исходные данные для самостоятельной работы

Задание 1

Консольный стержень из пластичной стали с трубчатым поперечным сечением при заданном отношении диаметров $\alpha = d/D$ испытывает деформацию плоского изгиба. Заданы следующие значения параметров: $l = 100$ мм; $q = 2$ Н/мм; $F_1 = ql$, $F_2 = 2ql$; $M_1 = ql^2$; $M_2 = 2ql^2$; $[\sigma] = 160$ МПа, $[\tau] = 100$ МПа.

Построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M ; подобрать диаметры D и d поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям; проверить выполнение условия прочности по касательным напряжениям.

Расчетные схемы стержня приведены в табл. 5.2.

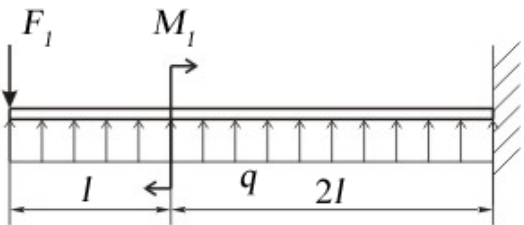
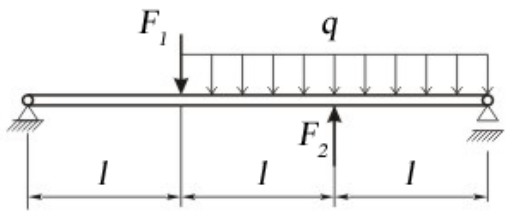
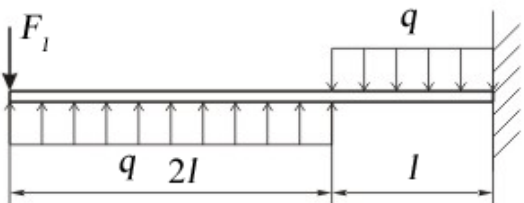
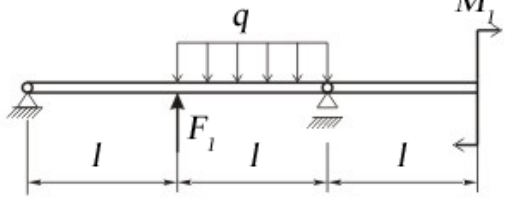
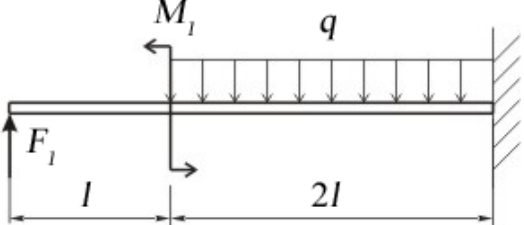
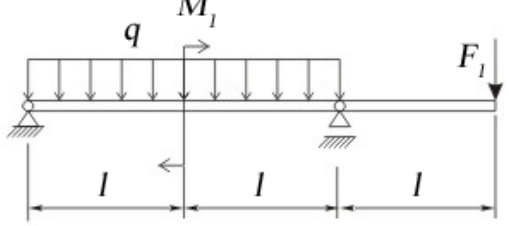
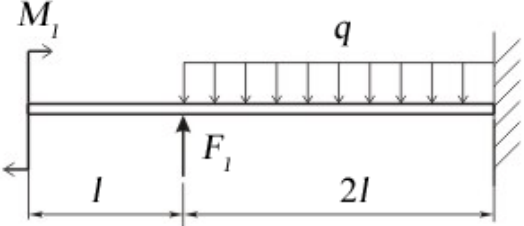
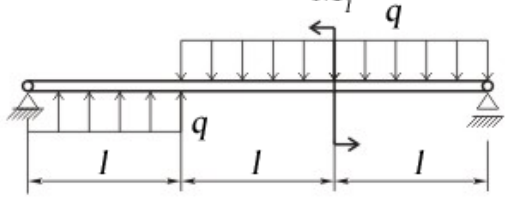
Задание 2

Стержень с шарнирными опорами из пластичной стали с прямоугольным поперечным сечением при заданном соотношении размеров $\beta = h/b$ испытывает деформацию плоского изгиба. Заданы следующие значения параметров: $l = 100$ мм; $q = 2$ Н/мм; $F_1 = ql$; $F_2 = 2ql$; $M_1 = ql^2$; $M_2 = 2ql^2$; $[\sigma] = 160$ МПа, $[\tau] = 100$ МПа.

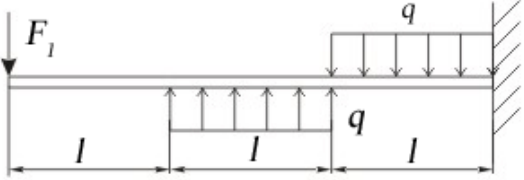
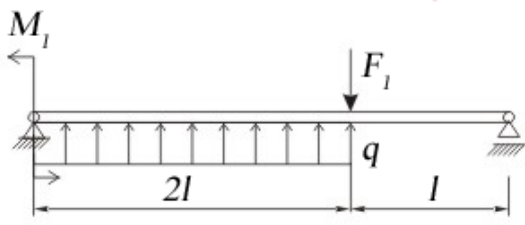
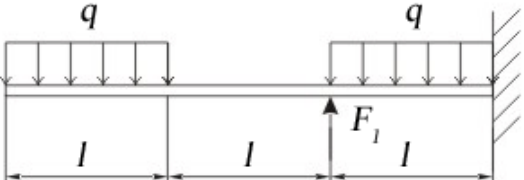
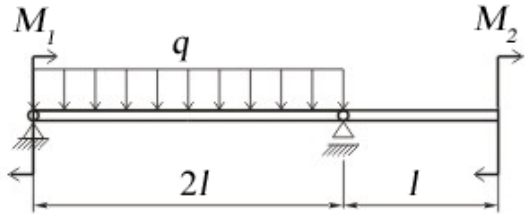
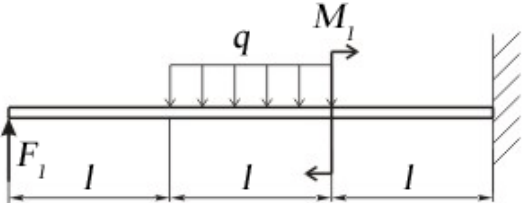
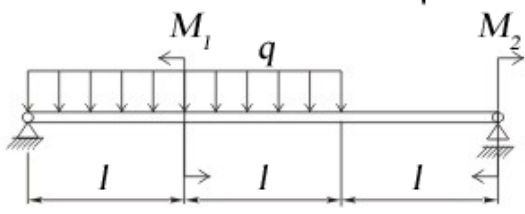
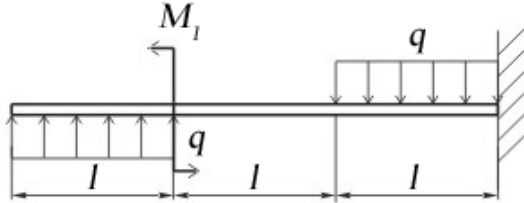
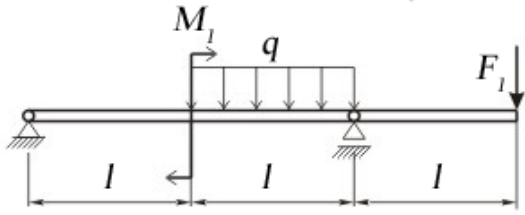
Построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M ; подобрать размеры h и b поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям; проверить выполнение условия прочности по касательным напряжениям.

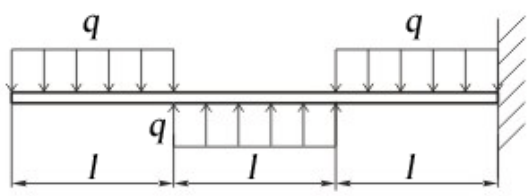
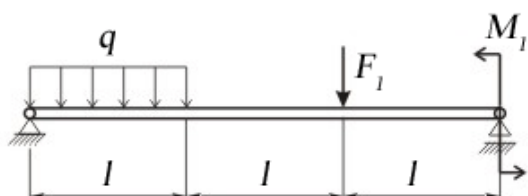
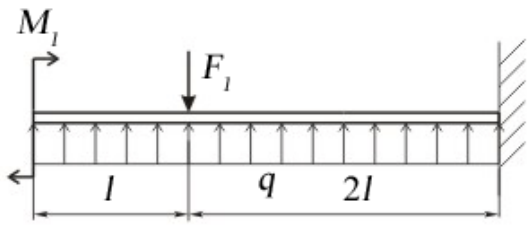
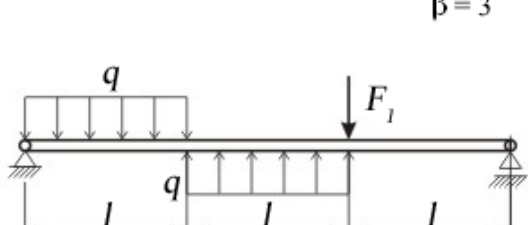
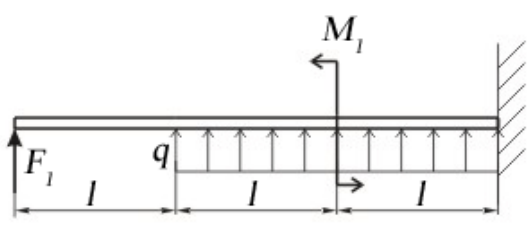
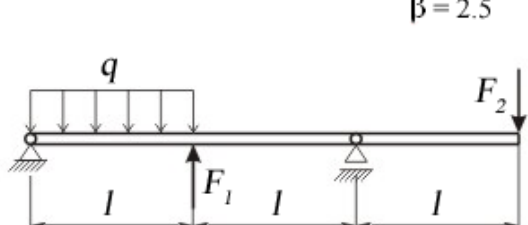
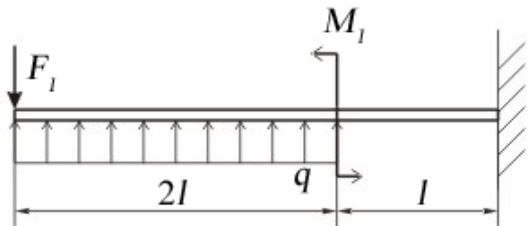
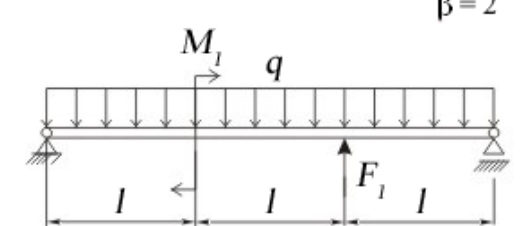
Расчетные схемы стержня приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

№	Расчетные схемы стержня	
	Задание 1	Задание 2
1	$\alpha = 0.4$ 	$\beta = 2$ 
2	$\alpha = 0.5$ 	$\beta = 2.5$ 
3	$\alpha = 0.6$ 	$\beta = 3$ 
4	$\alpha = 0$ 	$\beta = 1.5$ 

№	Расчетные схемы стержня	
	Задание 1	Задание 2
5	$\alpha = 0,5$ 	$\beta = 2.5$
6	$\alpha = 0.6$ 	$\beta = 3$
7	$\alpha = 0$ 	$\beta = 1.5$
8	$\alpha = 0.5$ 	$\beta = 2.5$

№	Расчетные схемы стержня	
	Задание 1	Задание 2
9	$\alpha = 0.4$ 	$\beta = 2$ 
10	$\alpha = 0$ 	$\beta = 2$ 
11	$\alpha = 0.5$ 	$\beta = 2$ 
12	$\alpha = 0.6$ 	$\beta = 1.5$ 

№	Расчетные схемы стержня	
	Задание 1	Задание 2
13	$\alpha = 0,5$ 	$\beta = 2$ 
14	$\alpha = 0$ 	$\beta = 3$ 
15	$\alpha = 0,4$ 	$\beta = 2,5$ 
16	$\alpha = 0,5$ 	$\beta = 2$ 

№	Расчетные схемы стержня	
	Задание 1	Задание 2
17	$\alpha = 0,6$ 	$\beta = 1.5$
18	$\alpha = 0,5$ 	$\beta = 2$
19	$\alpha = 0$ 	$\beta = 3$
20	$\alpha = 0.4$ 	$\beta = 2.5$

5.4. Контрольные вопросы для самопроверки

1. Какой вид деформации стержня называется плоским изгибом? Почему этот вид изгиба называется плоским?
2. При каком действии внешней нагрузки стержень испытывает деформацию плоского изгиба?
3. Как формулируются правила знаков для внутренних усилий, действующих в поперечных сечениях стержня при плоском изгибе?
4. Как определяются эти внутренние усилия с использованием метода сечений?
5. Какими свойствами обладают эпюры поперечной силы?
6. Какими свойствами обладают эпюры изгибающего момента?
7. Как распределены нормальные напряжения в поперечном сечении стержня? По какой формуле они вычисляются в заданной точке сечения?
8. В каких точках поперечного сечения действуют максимальные и минимальные по величине нормальные напряжения?
9. Как распределены касательные напряжения в поперечном сечении стержня? По какой формуле они вычисляются в заданной точке сечения?
10. В каких точках поперечного сечения действуют максимальные и минимальные по величине касательные напряжения?
11. Как формулируется условие прочности по нормальным напряжениям при плоском изгибе?
12. Как формулируется условие прочности по касательным напряжениям при плоском изгибе?
13. Какую роль играют условия прочности по нормальным и касательным напряжениям в расчете стержня на прочность при плоском изгибе?

6. ИНТЕРНЕТ-ЭКЗАМЕН ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

6.1. Общие положения

В целях оказания помощи образовательным учреждениям при создании систем управления качеством подготовки специалистов на основе независимой внешней оценки Национальное аккредитационное агентство в сфере образования проводит Федеральный Интернет-экзамен в сфере профессионального образования (ФЭПО). Содержанием экзамена является проведение компьютерного Интернет-тестирования для внешней оценки соответствия уровня подготовки студентов требованиям государственных образовательных стандартов.

Использование ФЭПО основывается на принципах добровольности участия образовательных учреждений и полного доверия образовательным учреждениям в вопросах соблюдения технологии проведения экзамена по единым измерительным материалам.



Рис. 6.1. Первоначальный вид окна после загрузки сайта www.fepo.ru

ФЭПО обеспечивает возможность тестирования студентов по совокупности образовательных программ или по одной образовательной

программе для всех учреждений высшего и среднего профессионального образования Российской Федерации с использованием среды Интернет и позволяет сравнить результаты освоения стандарта студентами данного образовательного учреждения с результатами других образовательных учреждений, принимавших участие в ФЭПО.

Результаты ФЭПО оформляются в виде информационно-аналитической карты, содержащей материалы, предназначенные для принятия решений в системе управления качеством подготовки специалистов образовательного учреждения.

Интернет-ресурсы ФЭПО размещены на сайте www.fepo.ru (рис. 6.1).

Далее рассматривается применение ФЭПО при обучении студентов СПбГТУРП по направлению 240100.62 «Химическая технология и биотехнология» по дисциплине «Механика (Сопротивление материалов)».

Требования государственного образовательного стандарта (ГОС) по этой специальности к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Индекс	Дисциплина и ее основные разделы	Всего часов
ОПД.Ф	Федеральный компонент	—
ОПД.Ф.02.02	Механика (Сопротивление материалов): прочность при растяжении-сжатии; закон Гука; допускаемые напряжения; деформации при растяжении-сжатии; прочность и деформации при сдвиге и кручении; прочность и деформации при изгибе; прочность при сложном напряженном состоянии (изгиб с кручением, тонкостенные оболочки); усталостная прочность материалов; выносливость при совместном действии изгиба и кручения, устойчивость сжатых стержней; устойчивость труб и оболочек при наружном давлении.	—

Тематическая структура аттестационного педагогического измерительного материала (АПИМ) по данной дисциплине приведена в табл. 6.2. Эта структура разделена на пять дидактических единиц (ДЕ), в каждой из которых содержится по четыре задания. Таким образом, при тестировании задаются 20 заданий. Для успешного прохождения тестирования требуется положительный результат по *каждой* ДЕ. ДЕ считается освоенной, если получено не менее двух правильных ответов по четырем полученным заданиям (дано правильных ответов не менее 50 %). В результате тестирования для каждого студента в информационно-аналитическую карту вносится информация о зачтенных ДЕ и процент правильно выполненных заданий.

Таблица 6.2

№ ДЕ	Наименование дидактической единицы ГОС	№ задания	Тема задания
1	Введение в курс	1	Основные понятия, определения, допущения и принципы
		2	Модели прочностной надежности
		3	Внутренние силы и напряжения
		4	Перемещения и деформации
2	Растяжение и сжатие	5	Продольная сила. Напряжения и деформации
		6	Испытания конструкционных материалов на растяжение и сжатие
		7	Механические свойства материалов
		8	Расчеты стержней на прочность и жесткость
3	Сдвиг. Кручение	9	Расчет на сдвиг (срез)
		10	Крутящий момент. Деформации и напряжения
		11	Расчет на прочность при кручении
		12	Расчет на жесткость при кручении
4	Плоский прямой изгиб	13	Поперечная сила и изгибающий момент и их эпюры
		14	Напряжения в поперечном сечении балки
		15	Расчет балок на прочность
		16	Перемещения при изгибе. Расчет балок на жесткость
5	Сложное сопротивление	17	Виды нагружения стержня
		18	Пространственный и косой изгиб
		19	Изгиб с растяжением-сжатием
		20	Изгиб с кручением

Группа считается успешно сдавшей интернет-экзамен, если количество студентов со всеми зачтенными ДЕ превышает 50 % от количества студентов, участвующих в тестировании. В тестировании должно участвовать не менее 90 % состава группы. Время выполнения теста – 45 минут.

Для подготовки к интернет-экзамену рекомендуется пройти репетиционное тестирование. Для этого следует в меню, расположенном слева в окне ФЕПО (рис. 6.1), выбрать пункт «ТЕСТИРОВАНИЕ репетиционное вузам». Далее в появившемся окне в раскрывающемся списке «Специальность» выбрать «240100.62 - Химическая технология и биотехнология», а в раскрывающемся списке «Дисциплина» выбрать «Механика (Сопротивление материалов)». После этого следует нажать кнопку «Далее» и приступить к выполнению предлагаемого теста (рис. 6.2).

Рис. 6.2. Выбор специальности и дисциплины для прохождения репетиционного теста

6.2. Демонстрационный вариант теста по сопротивлению материалов

Далее показан демонстрационный вариант интернет-экзамена по дисциплине «Механика (Сопротивление материалов)» для студентов, обучающихся специальности «Химическая технология и биотехнология».

Рекомендуется самостоятельно выбрать ответы по предлагаемым заданиям, а затем проверить их по приведенным в конце теста правильным ответам.

ЗАДАНИЕ № 1 (*выберите один вариант ответа*)

Величина, служащая мерой механического действия одного материального тела на другое, называется...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- | | |
|-------------------|------------------------|
| 1) силой | 2) устойчивостью |
| 3) реакцией связи | 4) механической связью |
-

ЗАДАНИЕ № 2 (*выберите один вариант ответа*)

Основным содержанием сопротивления материалов является разработка _____, с помощью которых можно выбрать материал и необходимые размеры элементов конструкции, оценить сопротивление конструкционных материалов внешним воздействиям.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- | | |
|---|--|
| 1) моделей прочностной
надежности летательных
аппаратов | 2) основных принципов расчета
призматических оболочек |
| 3) методов расчета на прочность,
жесткость и устойчивость
элементов конструкций | 4) методов расчета
промышленных сооружений |
-

ЗАДАНИЕ № 3 (*выберите один вариант ответа*)

Метод, позволяющий определить внутренние усилия в сечении стержня, называется...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1) методом сил | 2) методом начальных
параметров |
| 3) методом независимости
действия сил | 4) методом сечений |
-

ЗАДАНИЕ № 4 (выберите один вариант ответа)

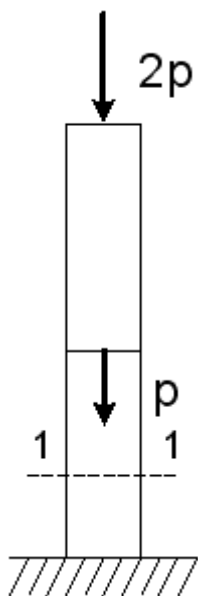
Отношение абсолютного удлинения (укорочения) стержня к первоначальной длине называется...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1) угловой деформацией | 2) относительным изменением объема |
| 3) изменением формы стержня | 4) средней относительной линейной деформацией |
-

ЗАДАНИЕ № 5 (выберите один вариант ответа)

Для стержня, схема которого изображена на рисунке,



нормальные напряжения, действующие в сечении 1-1, будут...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

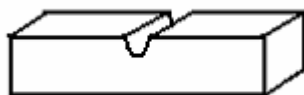
- | | |
|--------------------------------|---------------|
| 1) растягивающими | 2) сжимающими |
| 3) растягивающими и сжимающими | 4) равны нулю |
-

ЗАДАНИЕ № 6 (выберите один вариант ответа)

Образец из малоуглеродистой стали, предназначенный для испытания на растяжение, имеет вид...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1)



2)



3)



4)



ЗАДАНИЕ № 7 (выберите один вариант ответа)

Чугунный образец диаметром 0,015м разрушился при $F = 0,12$ Мн.



Тогда величина предела прочности равна...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) 750 МПа

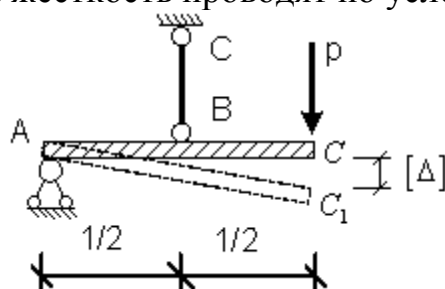
2) 679 МПа

3) 815 МПа

4) 527 МПа

ЗАДАНИЕ № 8 (выберите один вариант ответа)

Если стержень ВС одинаково работает на растяжение и сжатие, то проверку на жесткость проводят по условию



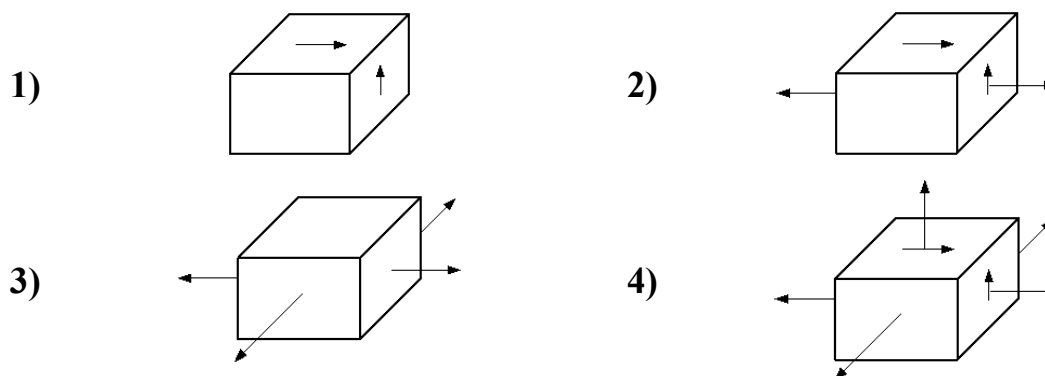
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- | | |
|--|--|
| 1) $\Delta l_{BC} \leq 2[\Delta]$ | 2) $\Delta l_{BC} > \frac{[\Delta]}{2}$ |
| 3) $\Delta l_{BC} \leq \frac{[\Delta]}{2}$ | 4) $\Delta l_{BC} \leq \frac{[\Delta]}{4}$ |
-

ЗАДАНИЕ № 9 (выберите один вариант ответа)

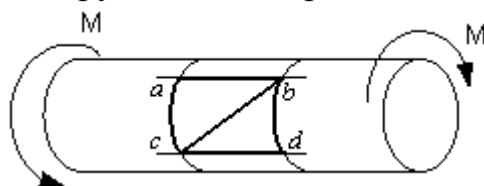
Чистый сдвиг – это вид напряженного состояния, показанный на рисунке...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:



ЗАДАНИЕ № 10 (выберите один вариант ответа)

В процессе скручивания стержня диагональ (cb)...

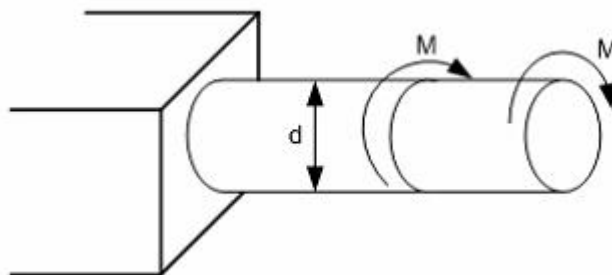


ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- | | |
|-----------------|---|
| 1) искривляется | 2) размер и форма диагонали не изменяются |
| 3) удлиняется | 4) укорачивается |
-

ЗАДАНИЕ № 11 (выберите один вариант ответа)

Максимальные касательные напряжения в поперечном сечении стержня равны...



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\frac{M}{2W_p}$

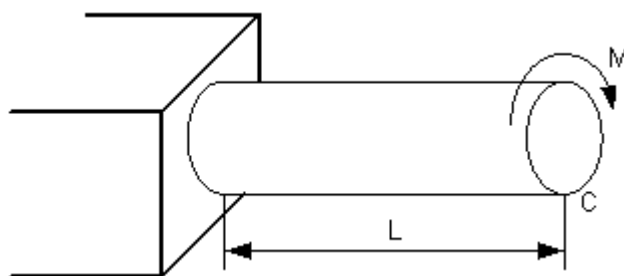
2) $\frac{Md}{2I_p}$

3) $\frac{2M}{W_p}$

4) $\frac{M}{W_p}$

ЗАДАНИЕ № 12 (выберите один вариант ответа)

Пусть $[\varphi]_C$ – допускаемый угол поворота сечения C, GI_p – жесткость поперечного сечения на кручение.



Тогда допускаемая величина M удовлетворяет неравенству...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $M \leq GI_p[\varphi]_C$

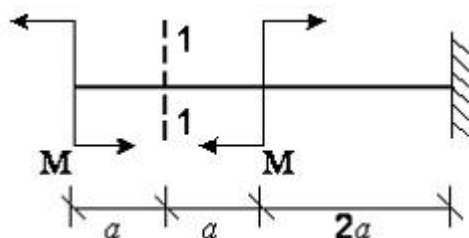
2) $M \leq \frac{GI_p[\varphi]_C}{L}$

3) $M \leq \frac{3GI_p[\varphi]_C}{L}$

4) $M \leq \frac{GI_p[\varphi]_C}{2L}$

ЗАДАНИЕ № 13 (выберите один вариант ответа)

В сечении 1-1 имеют место внутренние силовые факторы...



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $M \neq 0, Q = 0$

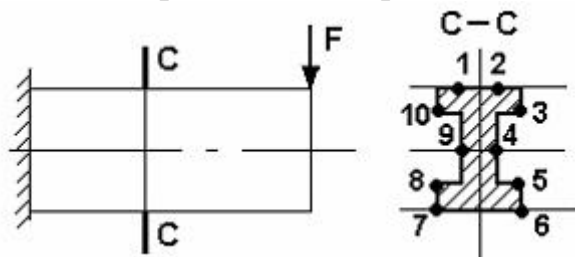
2) $M = 0, Q = 0$

3) $M \neq 0, Q \neq 0$

4) $M = 0, Q \neq 0$

ЗАДАНИЕ № 14 (выберите один вариант ответа)

Максимальные нормальные напряжения действуют в точках...



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) 10, 3, 8, 5

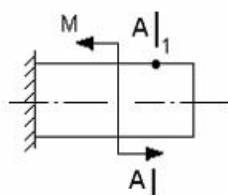
2) 8, 5

3) 1, 2, 7, 6

4) 9, 4

ЗАДАНИЕ № 15 (выберите один вариант ответа)

В точке 1 поперечного сечения А-А балки...

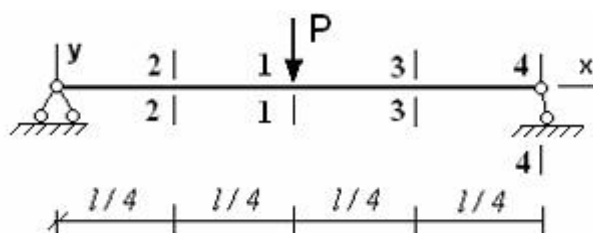


ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1) нет напряжений | 2) действуют нормальное и касательное напряжения |
| 3) действует нормальное напряжение | 4) действует касательное напряжение |
-

ЗАДАНИЕ № 16 (выберите один вариант ответа)

Максимальный прогиб возникает в сечении...

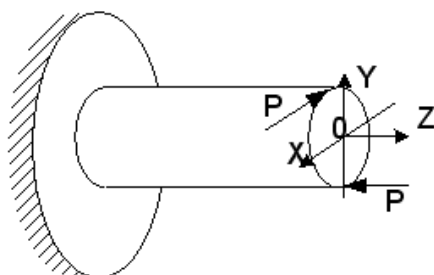


ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- | | |
|--------|--------|
| 1) 2–2 | 2) 1–1 |
| 3) 3–3 | 4) 4–4 |
-

ЗАДАНИЕ № 17 (выберите один вариант ответа)

Для нагруженного стержня вид сложного сопротивления называется...

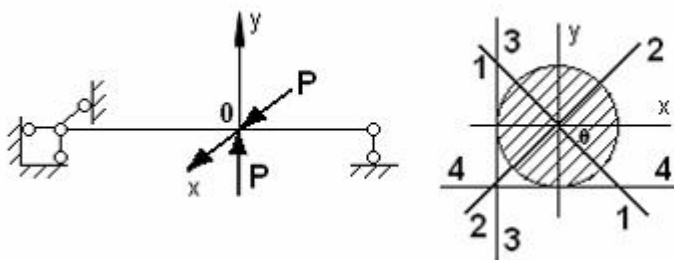


ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- | | |
|---|------------------------|
| 1) нецентральный сжатием | 2) косым изгибом |
| 3) общим случаем сложного сопротивления | 4) изгибом с кручением |
-

ЗАДАНИЕ № 18 (выберите один вариант ответа)

Нейтральной осью поперечного сечения является линия...

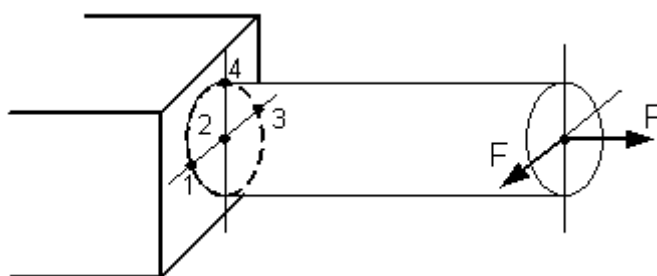


ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- | | |
|--------|--------|
| 1) 1-1 | 2) 3-3 |
| 3) 2-2 | 4) 4-4 |

ЗАДАНИЕ № 19 (выберите один вариант ответа)

Максимальное нормальное напряжение действует...



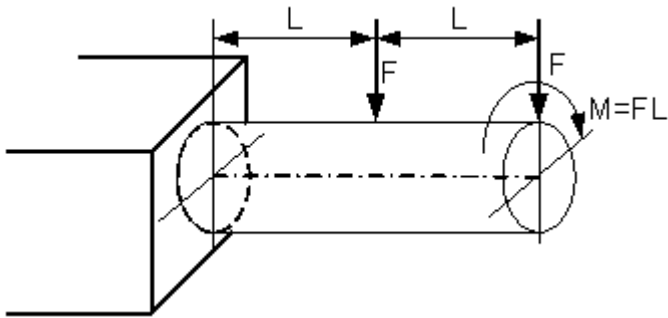
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- | | |
|--------------|--------------|
| 1) в точке 4 | 2) в точке 3 |
| 3) в точке 2 | 4) в точке 1 |

ЗАДАНИЕ № 20 (выберите один вариант ответа)

Условие прочности для опасной точки с использованием формулы для

эквивалентного напряжения $\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_{\text{из}}^2 + M_{\text{кр}}^2}}{W}$ имеет вид...



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1) $\frac{FL\sqrt{10}}{W} \leq [\sigma]$

2) $\frac{FL\sqrt{10}}{2W} \leq [\sigma]$
- 3) $\frac{2FL\sqrt{2}}{W} \leq [\sigma]$

4) $\frac{FL\sqrt{2}}{W} \leq [\sigma]$

Правильные ответы для данного демонстрационного варианта интернет-экзамена по сопротивлению материалов приведены в табл. 6.3.

Таблица 6.3

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ ответа	1	3	4	4	2	4	2	3	1	3
№ задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
№ ответа	3	2	1	3	1	2	3	1	2	1

Библиографический список

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2009. – 560 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. – 590 с.
3. Введение в сопротивление материалов/ Павлов П.А., Паршин Л.К., Колчин Г.Б., Мельников Б.Е.; под ред. Мельникова Б. Е.; Санкт-Петербургский государственный технический университет. – СПб.: Издательство "Лань", 2002. – 155 с.
4. Справочник по сопротивлению материалов/ Писаренко Г.С. и др. – Киев, Наук. Думка, 1988. – 736 с.
5. Конструкционные материалы: справочник/ Арзамасов Б.Н. и др. – М.: Машиностроение, 1990. – 688 с.
6. Кауров П.В., Шемякин Э.В. Определение геометрических характеристик плоских фигур: учебно-методическое пособие/ СПбГТУРП. – СПб., 2006. – 48 с.
7. Расчет стержней при различных видах деформаций: учебное пособие/ Чумичев В.В., Шемякин Э.В.; СПбГТУРП. – СПб., 2006. – 75 с.
8. Мельников В.Г., Иванов С.Е., Мельников Г.И., Кривошеев А.Г. Компьютерные лабораторные работы по сопротивлению материалов. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. – 60 с.

Оглавление

Введение	3
1. Базовые понятия сопротивления материалов.....	4
1.1. Основные виды элементов и опор конструкций	—
1.2. Внутренние усилия. Метод сечений	6
1.3. Напряжения и деформации	9
1.4. Контрольные вопросы для самопроверки	12
2. Растяжение и сжатие	13
2.1. Основные понятия	—
2.2. Пример выполнения задания	
Расчёт стержня на прочность и жёсткость при растяжении и сжатии	17
2.3. Исходные данные для самостоятельной работы	21
2.4. Контрольные вопросы для самопроверки	23
3. Экспериментальные исследования	
механических свойств материалов	24
3.1. Испытания материалов на растяжение.....	—
3.2. Испытания материалов на сжатие	28
3.3. Метод допускаемых напряжений	30
3.4. Определение модуля нормальной упругости	31
3.5. Определение коэффициента Пуассона	36
3.6. Контрольные вопросы для самопроверки	37
4. Кручение	39
4.1. Основные понятия	—
4.2. Пример выполнения задания	
Расчёт стержня на прочность и жёсткость при кручении	43
4.3. Исходные данные для самостоятельной работы	47
4.4. Контрольные вопросы для самопроверки	49
5. Плоский изгиб	50
5.1. Основные понятия	—
5.2. Примеры выполнения задания	63
Расчёт стержня на прочность при плоском изгибе	—
Задание 1	—
Задание 2	65
5.3. Исходные данные для самостоятельной работы	69
Задание 1.....	—
Задание 2	—
5.4. Контрольные вопросы для самопроверки	75
6. Интернет-экзамен по сопротивлению материалов	76
6.1. Общие положения	—
6.2. Демонстрационный вариант теста по	
сопротивлению материалов	79
Библиографический список	89