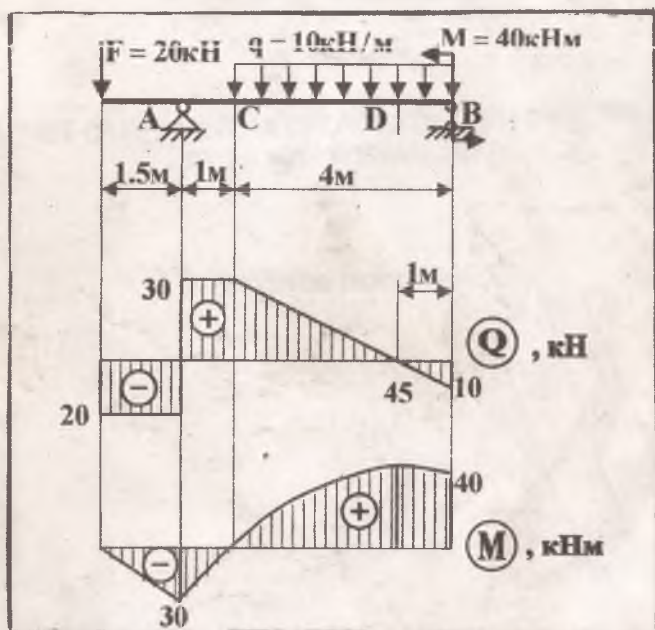


Н.Н. Кох, Н.А. Серов, И.И. Туренко, В.В. Чумичев,
Э.В. Шемякин

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ДЕФОРМАЦИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



Министерство образования Российской Федерации
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ
ПОЛИМЕРОВ

Николай Николаевич Кох
Николай Александрович Серов
Иван Иванович Туренко
Владимир Васильевич Чумичев
Эдуард Валентинович Шемякин

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ
ВИДАХ ДЕФОРМАЦИЙ

Учебное пособие



Санкт-Петербург
2002

ББК 30. 121
Р 248
УДК 531 (0.7 0.7)

Расчет стержней на прочность при различных видах деформации: Учебное пособие. Авторы: Н.Н. Кох, Н.А.Серов, И.И. Туренко, В.В. Чумичев, Э.В. Шемякин; СПбГТУРП. СПб., 2002, 76с.; 28 ил. – ISBN 5- 230-14357-6.

Целью настоящего учебного пособия является развитие навыков самостоятельного расчета стержней на прочность при различных видах деформации. Учебное пособие содержит краткие сведения по теории курса «Сопротивление материалов» и варианты заданий для выполнения расчетно-графических работ.

Учебное пособие предназначается для студентов специальностей 170400, 170500, 100700, 100800, 260300, 250100, 250500, 320700, 072500 всех форм обучения, выполняющих расчетно-графические работы по курсам «Сопротивление материалов», «Прикладная механика» и «Механика».

Рецензенты: доцент кафедры «Сопротивление материалов» Санкт-Петербургского государственного технического университета, к.т.н. Ю.Э. Хангу; профессор кафедры «Материаловедения и технологии машиностроения» Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, д-р техн. наук А.М. Кучер.

Утверждено Редакционно-издательским Советом университета в качестве учебного пособия.

ISBN 5-230-14357-6 ББК 30.121

С Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров, 2002

© Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров, 2002

ВВЕДЕНИЕ

Расчетно-графические работы состоят из нескольких задач (от четырех до шести) по определению усилий в различных стержнях (вал, штанга, однопролетная и консольная балки, рама) и подбору сечений элементов конструкций. Варианты задач зависят от объема курса и особенностей специальности. Условия задач приведены в разделе 2.

Студент получает от преподавателя, ведущего практические занятия, шифр в виде трехзначного числа. Первая цифра указывает вариант схемы, а вторая и третья - комбинации размеров и нагрузок. Например, при шифре 740 для каждой задачи необходимо взять седьмой вариант расчетной схемы и данные четвертой и десятой строк из соответствующих столбцов таблиц раздела 2.

Работа выполняется на одной стороне стандартного листа формата А4 и брошюруется. Текст и формулы пишутся чернилами. Рисунки вычерчиваются карандашом с соблюдением масштабов (масштабы выбираются самостоятельно из соображений наибольшей выразительности чертежа). На титульном листе указывается название работы, шифр задания, фамилия и инициалы студента, номер группы.

Перед решением каждой задачи должно быть приведено условие задачи, т.е. схема и все заданные величины. Расчет следует сопровождать заголовками с указанием их нумерации и краткими пояснениями. В аналитических выкладках сначала записываются формулы, а затем подставляются численные значения символов. В итоговых величинах указывается размерность. Образец оформления титульного листа представлен в Приложении 1.

В окончательных результатах следует сохранять только оправданное количество значащих цифр. Так, если определен ряд значений той или иной величины, то эталоном является максимальное абсолютное значение, в котором удерживается 3 - 4 значащих цифры, например, 1,86; 1,02; 0,75; 0,04; или 1,864; 1,018; 0,753; 0,035.

Для измерения физических и механических величин исполь-

зуется международная система единиц. Напомним, что в качестве основных единиц в СИ приняты: метр (м); секунда (с); килограмм массы (кг); ньютон (Н); паскаль (Па) – давление (напряжение), равное Н/м². Ввиду относительной малости единиц силы и напряжения используют кратные единицы: килоньютон (1 кН = 10³ Н) и меганьютон (1 МН = 10⁶ Н), а также мегапаскаль (1 МПа = 1 Н/мм² = 10⁶ Па).

1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ

В данных методических указаниях рассматриваются два основных вопроса:

1. Определение усилий в стержнях при различных видах деформации.
2. Подбор сечений элементов конструкций.

1.1. Определение усилий в сечениях стержней

В достаточно жестких стержнях, где допустим расчет по недеформированной схеме, определение усилий производится по законам статики абсолютно твердого тела*.

Пусть стержень находится в равновесии при действии пространственной системы сил (рис. 1,а).

Мысленно рассечем стержень плоскостью S на две части-левую и правую. Рассмотрим равновесие его левой части (рис.1,б). Внутренние усилия $\vec{p}$, возникающие в сечении S, являются реакцией правой (отброшенной) части. Совокупность внутренних усилий можно рассматривать как пространственную систему сил, которая по основной теореме статики в общем случае приводится к главному

* В сопротивлении материалов (в отличие от теоретической механики) точки приложения силовых факторов считаются фиксированными, так как перенос силы по ее линии действия или вектора момента на параллельную линию действия, как правило, вызывает изменение внутренних усилий.

вектору и главному моменту*. Примем за полюс приведения центр тяжести поперечного сечения (точку C) и обозначим главный вектор через $\vec{R}^{PP}$, а главный момент – через $\vec{M}_C^{PP}$ (рис. 1,в). Условия равновесия в векторном виде для левой части стержня имеют вид:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ЛЕВ} + \vec{R}^{PP} = 0, \quad \vec{M}_C = \sum_{i=1}^n \vec{M}_C(\vec{F}_i^{ЛЕВ}) + \vec{M}_C^{PP} = 0,$$

или в проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n X_i^{ЛЕВ} + R_x^{PP} = 0, & M_{Cx} &= \sum_{i=1}^n M_{Cx}(F_i^{ЛЕВ}) + M_{Cx}^{PP} = 0, \\ R_y &= \sum_{i=1}^n Y_i^{ЛЕВ} + R_y^{PP} = 0, & M_{Cy} &= \sum_{i=1}^n M_{Cy}(F_i^{ЛЕВ}) + M_{Cy}^{PP} = 0, \\ R_z &= \sum_{i=1}^n Z_i^{ЛЕВ} + R_z^{PP} = 0, & M_{Cz} &= \sum_{i=1}^n M_{Cz}(F_i^{ЛЕВ}) + M_{Cz}^{PP} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} R_x^{PP} &= -\sum_{i=1}^n X_i^{ЛЕВ}, & M_{Cx}^{PP} &= -\sum_{i=1}^n M_{Cx}(F_i^{ЛЕВ}), \\ R_y^{PP} &= -\sum_{i=1}^n Y_i^{ЛЕВ}, & M_{Cy}^{PP} &= -\sum_{i=1}^n M_{Cy}(F_i^{ЛЕВ}), \\ R_z^{PP} &= -\sum_{i=1}^n Z_i^{ЛЕВ}, & M_{Cz}^{PP} &= -\sum_{i=1}^n M_{Cz}(F_i^{ЛЕВ}). \end{aligned} \quad (1)$$

* По этой теореме система сил, расположенных как угодно в пространстве, всегда может быть приведена к силе (главному вектору) и паре сил (главному моменту). Главный вектор равен геометрической сумме сил системы, а главный момент-геометрической сумме векторов момента всех сил относительно полюса приведения.

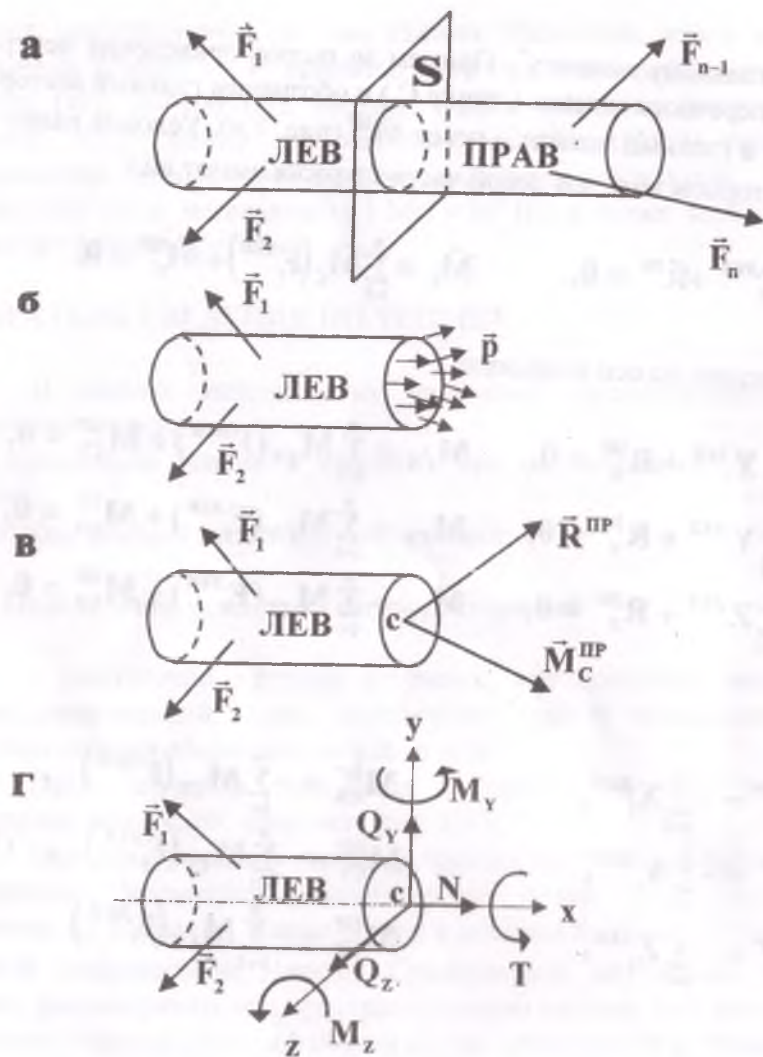


Рис. 1

Совокупность внутренних усилий $\bar{p}$ в сечении S стержня представляет собой действие отброшенной правой части и поэтому статически эквивалентна внешним силам, приложенным к этой части. Отсюда следует, что $\bar{R}^{np}$ и $\bar{M}_C^{np}$ являются главным вектором

и главным моментом всех внешних сил, расположенных справа от секущей плоскости S (рис. 1). Это позволяет использовать второй путь для определения $\bar{R}^{np}$ и $\bar{M}_C^{np}$, а именно по основной теореме статики:

$$\bar{R}^{np} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{np}, \quad \bar{M}_C^{np} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_C(\bar{F}_i^{np}),$$

а их проекции

$$\begin{aligned} R_X^{np} &= \sum_{i=1}^n X_i^{np}, & M_{CX}^{np} &= \sum_{i=1}^n M_{CX}(F_i^{np}), \\ R_Y^{np} &= \sum_{i=1}^n Y_i^{np}, & M_{CY}^{np} &= \sum_{i=1}^n M_{CY}(F_i^{np}), \\ R_Z^{np} &= \sum_{i=1}^n Z_i^{np}, & M_{CZ}^{np} &= \sum_{i=1}^n M_{CZ}(F_i^{np}). \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, проекции главного вектора и главного момента внутренних усилий в данном сечении бруса можно определять либо из условия равновесия рассматриваемой части стержня (формулы (1)), либо по основной теореме статики, приводя к точке C силы, приложенные к отброшенной правой части стержня (формулы (2)).

В сопротивлении материалов каждая из составляющих главного вектора и главного момента имеет наименование в соответствии с видом деформации. Так, R_X^{np} называется продольной силой (N), R_Y^{np} и R_Z^{np} - поперечными силами (Q_Y и Q_Z); M_{CX}^{np} - крутящим моментом (T), а M_{CY}^{np} и M_{CZ}^{np} - изгибающими моментами (M_Y и M_Z) [1].

Из формул (1) и (2) следуют правила определения усилий:

- продольная и поперечные силы численно равны алгебраическим суммам проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на соответствующие оси координат;

* При данных индексах предполагается, что начало координат совпадает с центром тяжести сечения, а ось x - с геометрической осью стержня.

- крутящий и изгибающие моменты численно равны алгебраическим суммам моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, относительно соответствующих осей координат.

В символической записи

$$N = -\sum_{i=1}^n X_i^{\text{ЛЕВ}} = \sum_{i=1}^n X_i^{\text{ПР}}, \quad T = -\sum_{i=1}^n M_{\text{СХ}}(F_i^{\text{ЛЕВ}}) = \sum_{i=1}^n M_{\text{СХ}}(F_i^{\text{ПР}}),$$

$$Q_Y = -\sum_{i=1}^n Y_i^{\text{ЛЕВ}} = \sum_{i=1}^n Y_i^{\text{ПР}}, \quad M_Y = -\sum_{i=1}^n M_{\text{СХ}}(F_i^{\text{ЛЕВ}}) = \sum_{i=1}^n M_{\text{СХ}}(F_i^{\text{ПР}}), \quad (3)$$

$$Q_Z = -\sum_{i=1}^n Z_i^{\text{ЛЕВ}} = \sum_{i=1}^n Z_i^{\text{ПР}}, \quad M_Z = -\sum_{i=1}^n M_{\text{СХ}}(F_i^{\text{ЛЕВ}}) = \sum_{i=1}^n M_{\text{СХ}}(F_i^{\text{ПР}}).$$

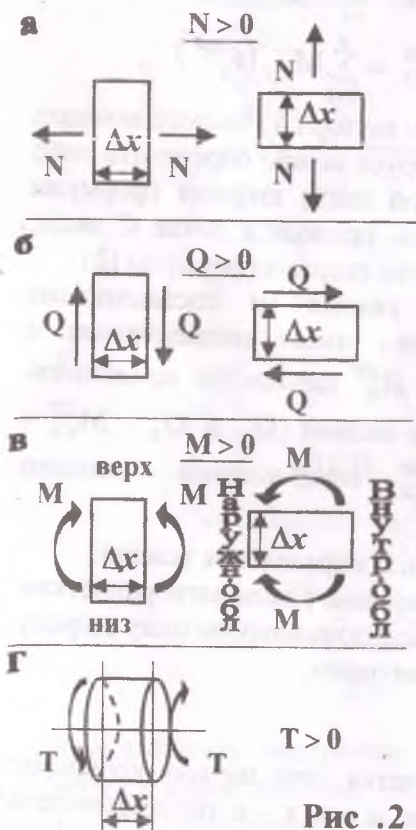


Рис. 2

Установим правила знаков для различных усилий [2].

Положительной считается продольная сила N , направленная по внешней нормали к рассматриваемому элементу (рис. 2, а), т.е. вызывающая растяжения. Слева на всех схемах показан элементарный отрезок горизонтального стержня, справа – вертикального.

Положительными принято считать значения Q и M , соответствующие тем направлениям, которые указаны на рис. 2, б и рис. 2, в. Т.е. поперечные силы, создающие момент по часовой стрелке, считается положительными. Изгибающий момент в сечении положителен, если он вызывает сжатие в верхних волокнах (рис. 2, в, левая схема). В вертикальных стержнях (стойках) за “верх” принято считать наружную область, а за “низ” – внутреннюю область конструкции

(рис. 2, в, правая схема).

Будем считать крутящий момент T положительным, если он направлен против часовой стрелки при взгляде с торца на элемент вала (рис. 2, г).

Если в сечениях бруса все усилия не равны нулю, то имеет место общий случай сложного сопротивления. Чтобы отчетливее представить это состояние, рассмотрим простейшие виды деформации, показанные на рис. 3.

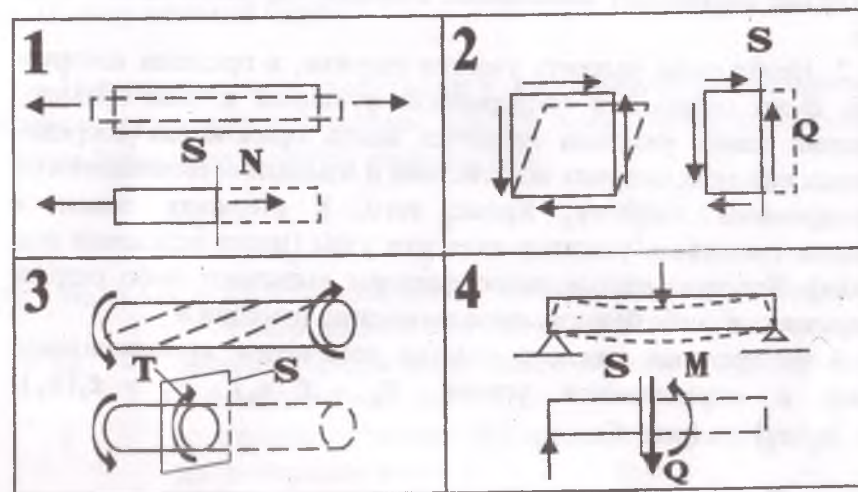


Рис. 3

Схема 1 - осевое растяжение (сжатие); 2 - сдвиг; 3 - кручение; 4 - поперечный изгиб.

Таким образом, в общем случае стержень может испытывать одновременно поперечный изгиб в двух плоскостях, кручение и продольную деформацию.

1.2. Построение эпюр усилий

Допустим, что рассматривается усилие S (под ним будем подразумевать любое из усилий: M , T , Q или N).

В общем случае S изменяется по длине стержня, т.е. является функцией x . Наглядное представление об этом дают графики (эпюры), ординаты которых равны усилиям в соответствующих сечениях стержня (рис. 4).

Изложим последовательность построения эпюр усилий:

1. Обычно в число внешних силовых воздействий входят и реакции опорных устройств. Поэтому первой операцией является определение реакций опор из условий равновесия стержня. Исключение составляют консольные стержни, где этого можно и не делать.

2. Необходимо выявить участки стержня, в пределах которых усилие будет плавной и непрерывной функцией x . Как правило, границами таких участков являются места приложения сосредоточенных внешних силовых воздействий и изменения интенсивности распределенных нагрузок. Кроме того, в стержнях ломаного очертания границами участков являются узлы (места переломов оси стержня). Все отмеченные выше факторы вызывают либо разрыв непрерывности, либо безразрывное изменение функции S .

3. В пределах каждого участка намечается промежуточное сечение и определяются усилия: $S_1 = f_1(x_1)$, $S_2 = f_2(x_2)$, $S_3 = f_3(x_3) \dots$ (рис. 4).

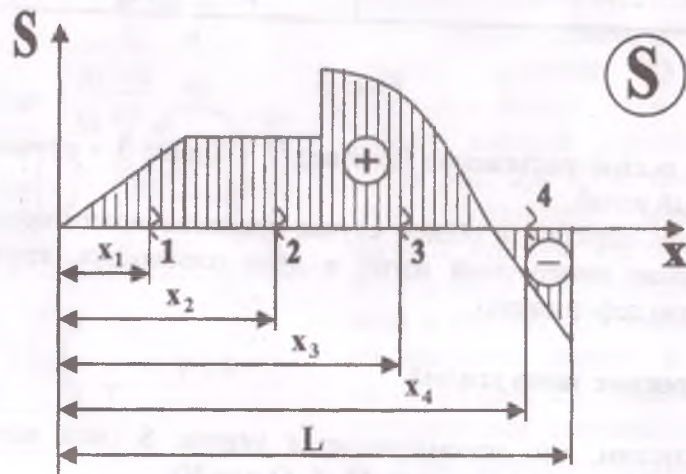


Рис. 4

4. Уяснив по структуре полученных формул законы изменения усилий, вычисляются необходимые ординаты и строится эпюра S в масштабе.

Высказанные соображения носят общий характер, т.е. справедливы при построении эпюр любых усилий. Некоторые же специфические особенности, присущие частным случаям, будут рассмотрены в дальнейшем при разборе конкретных примеров (раздел 3).

1.3. Подбор сечений балок

Нормальные σ и касательные τ напряжения при поперечном изгибе относительно нейтральной оси z в любой точке поперечного сечения балки определяются по формулам

$$\sigma = -\frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{Q_y \cdot S_z^{\text{отс}}}{I_z \cdot b_y},$$

где M_z и Q_y - изгибающий момент и поперечная сила в рассматриваемом сечении;

I_z - момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси z ;

y - расстояние от точки, где определяется напряжение, до нейтральной оси z ;

$S_z^{\text{отс}}$ - статический момент относительно нейтральной оси z отсеченной части сечения, которая лежит выше или ниже рассматриваемого слоя;

b_y - ширина сечения на уровне слоя, в котором определяется касательное напряжение.

Максимальное нормальное напряжение возникает в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси z . Вводя обозначения

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\text{max}}},$$

где W_z - момент сопротивления площади поперечного сечения балки относительно нейтральной оси z ;

y_{max} - расстояние до точки поперечного сечения, наиболее

удаленной от нейтральной оси z , получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{W_z}.$$

Если форма и размеры поперечного сечения балки не меняются по ее длине, то

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{z,\max}|}{W_z}.$$

При изгибе в одной плоскости индексом z обычно пренебрегают.

Обычно рассматривают два условия прочности, относящиеся к различным точкам балки:

а - по нормальным напряжениям $\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} \leq [\sigma]; \quad (4)$

б - по касательным напряжениям $\tau_{\max} = \frac{|Q_{\max}| \cdot S_{z,\max}^{\text{отс}}}{I_z \cdot b_y} \leq [\tau], \quad (5)$

где $[\sigma]$, $[\tau]$ - расчетные допускаемые нормальные и касательные напряжения.

Для балок с поперечным сечением, имеющим не менее двух осей симметрии, материал которых одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то есть когда $[\sigma]_{\text{раст}} = [\sigma]_{\text{сж}} = [\sigma]$, необходимые размеры поперечного сечения балки подбирают из условия прочности по нормальным напряжениям (4). Расчетная формула для подбора сечения в этом случае записывается в следующем виде:

$$W_z \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]}, \quad (6)$$

где $|M_{\max}|$ - наибольший по абсолютной величине изгибающий момент, определяемый по эпюре M_z .

Затем сечения, где действует $|Q_{\max}|$, проверяют на выполнение условия прочности по касательным напряжениям (5).

При этом укажем следующие случаи:

1. При подборе прокатных профилей (швеллер, двутавр, уголок) размер сечения, т.е. требуемый номер профиля, выбирается по

соответствующему сортаменту по вычисленной величине W_z (см. формулу (6)).

2. Если сечение круглое, то $W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$, тогда его диаметр d

определяется по формуле

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_{\max}|}{\pi \cdot [\sigma]}}.$$

3. Для кольцевого сечения наружный диаметр D рассчитывается по формуле

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_{\max}|}{\pi \cdot [\sigma] \cdot (1 - c^4)}},$$

где $c = \frac{d}{D}$ - отношение внутреннего диаметра кольца d к наружному диаметру D .

4. Для прямоугольного сечения

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6},$$

где b - ширина сечения;
 h - высота сечения.

При заданном соотношении сторон $k = \frac{h}{b}$ момент сопротивления равен

$$W_z = \frac{k^2 \cdot b^3}{6}.$$

Тогда ширина сечения

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot |M_{\max}|}{k^2 \cdot [\sigma]}},$$

высота сечения $h = k \cdot b$.

Полученные размеры поперечного сечения согласовываются с нормальным рядом чисел [3].

1.4. Перемещения при изгибе балок

Балки, применяемые в инженерных конструкциях, помимо прочности, должны обладать необходимой жесткостью, т.е. при заданной нагрузке получать прогиб, не превышающий определенной величины. Проверка жесткости сводится к проверке выполнения условия жесткости

$$\frac{f_{\text{MAX}}}{\ell} \leq \left[\frac{f}{\ell} \right],$$

где f_{MAX} - величина наибольшего прогиба балки;
 ℓ - длина балки;
 $\left[\frac{f}{\ell} \right]$ - допустимое значение относительного прогиба.

Для проверки жесткости надо уметь определять перемещение отдельных сечений балки. Существует довольно много методов определения перемещений. Рассмотрим один из них, метод начальных параметров.

Метод основан на следующих исходных положениях:

1. Начало координат выбирают на левом или правом концах балки и не меняют его. Ось y направляют вверх.
2. Выражения для изгибающих моментов M составляют путем вычисления моментов сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, взятого на расстоянии x от начала координат.
3. Если распределенная нагрузка q_i не доходит до противоположного началу координат конца балки, ее продлевают до этого конца балки, а добавленную на этом участке балки нагрузку q_i уравнивают нагрузкой, равной ей по величине и противоположно направленной.
4. Интегрирование уравнений на всех участках производят без раскрытия скобок.

Прогиб y_0 и угол поворота φ_0 в начале координат называются начальными параметрами.

Универсальное уравнение метода начальных параметров можно представить в виде:

$$y = \frac{1}{EI_Z} \left[EI_Z y_0 + EI_Z \varphi_0 x + \sum \frac{M_i (x - a_M)^2}{2} + \sum \frac{F_i (x - a_F)^3}{6} + \sum \frac{q_i (x - a_q)^4}{24} \right], (7)$$

где y - прогиб в сечении с координатой x ;
 y_0, φ_0 - прогиб и угол поворота сечения в начале координат;
 E - модуль Юнга материала балки;
 I_Z - момент инерции поперечного сечения балки;
 M_i, F_i, q_i - нагрузка (сосредоточенный момент, сила, распределенная нагрузка), действующая на балку;
 a_M, a_F - координаты сечения, в котором действуют момент M_i или сила F_i ;
 a_q - координата сечения, начиная с которого на балку действует нагрузка q_i .

Знаки слагаемых в уравнении (7) определяются правилом знаков для изгибающего момента.

Определение перемещений по методу начальных параметров в конечном счете сводится к составлению уравнения (7) для рассматриваемой балки и определению величин начальных параметров y_0, φ_0 .

Пример определения перемещений методом начальных параметров и проверки жесткости будет рассмотрен в разделе 4.

2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

В задачах, предназначенных для расчетно-графических работ, представлены различные схемы стержней и системы сил. В первых пяти задачах нагрузки вызывают простейшие виды деформации: кручение, осевое растяжение, поперечный изгиб; в шестой - сложную деформацию: поперечный изгиб с осевым сжатием или растяжением.

Условия задач формулируются следующим образом.

Задача № 1. Для стержня, загруженного пятью моментами, из которых один имеет неизвестную величину, определить крутящие моменты в сечениях и построить эпюру крутящего момента T .

Задача № 2. Для стержня переменного сечения, загруженного сосредоточенными силами, определить продольные усилия с учетом собственного веса и построить эпюру продольной силы N (объемный вес материала стержня $\gamma = 78 \text{ кН / м}^3$).

Задачи № 3, 4, 5 . Определить усилия в различных балках при поперечном изгибе и построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M .

Задача № 6 . Определить усилия в плоской раме и построить эпюры продольных и поперечных сил и изгибающих моментов.

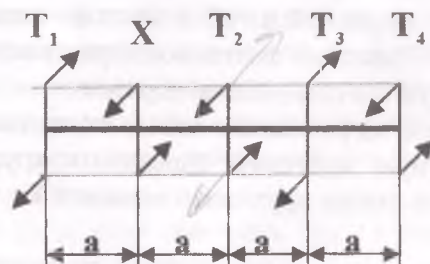
Для каждой задачи предлагается по 10 вариантов расчетных схем, геометрических размеров и значений нагрузок. Расчетные схемы задач и исходные данные представлены на страницах 17-21.

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ УСИЛИЙ

Пусть задан шифр 001 . Тогда для всех задач принимаем нулевой вариант расчетной схемы и данные десятой (нулевой) и первой строк соответствующих столбцов таблиц раздела 3.

3.1. Задача № 1. Построение эпюры крутящего момента T

3.1.1. Исходные данные

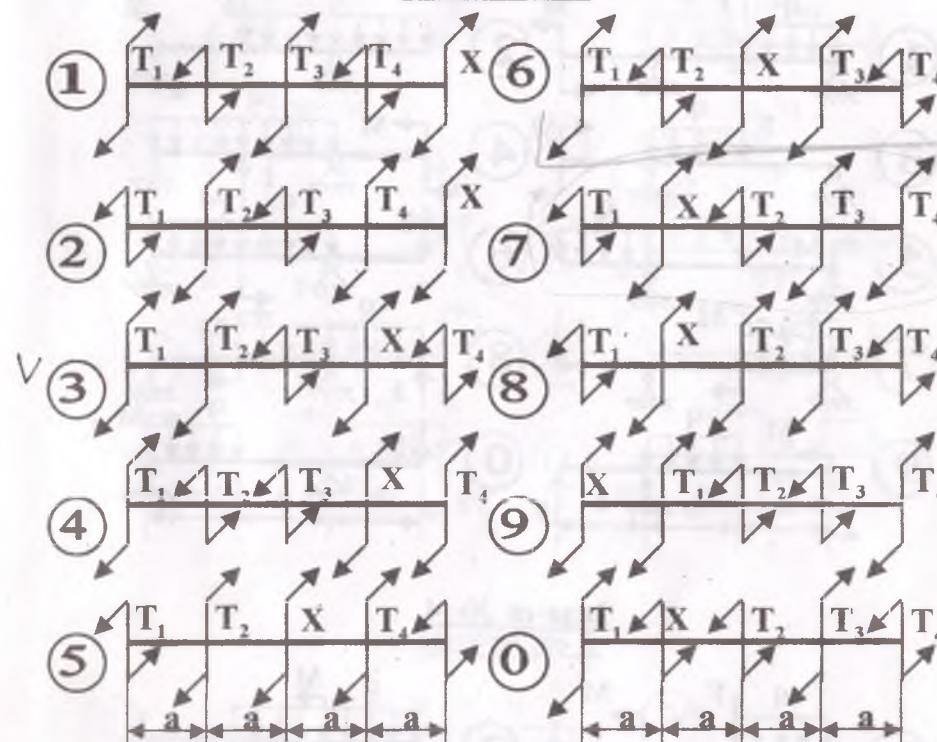


$$\begin{aligned} T_1 &= 10 \text{ кНм}, \\ T_2 &= 20 \text{ кНм}, \\ T_3 &= 45 \text{ кНм}, \\ T_4 &= 30 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

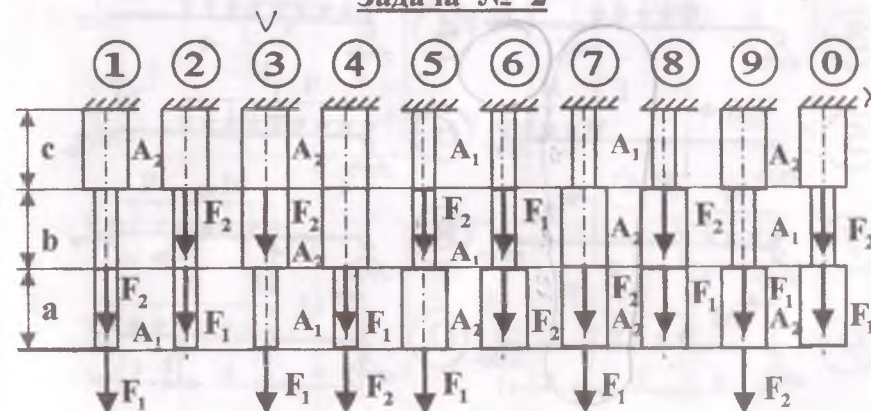
Построить эпюру T .

Расчетные схемы задач

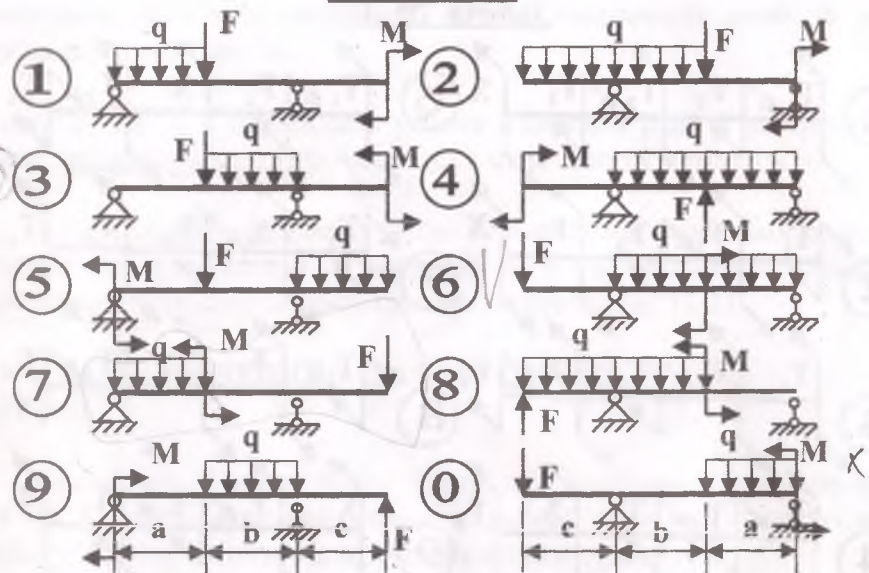
Задача № 1



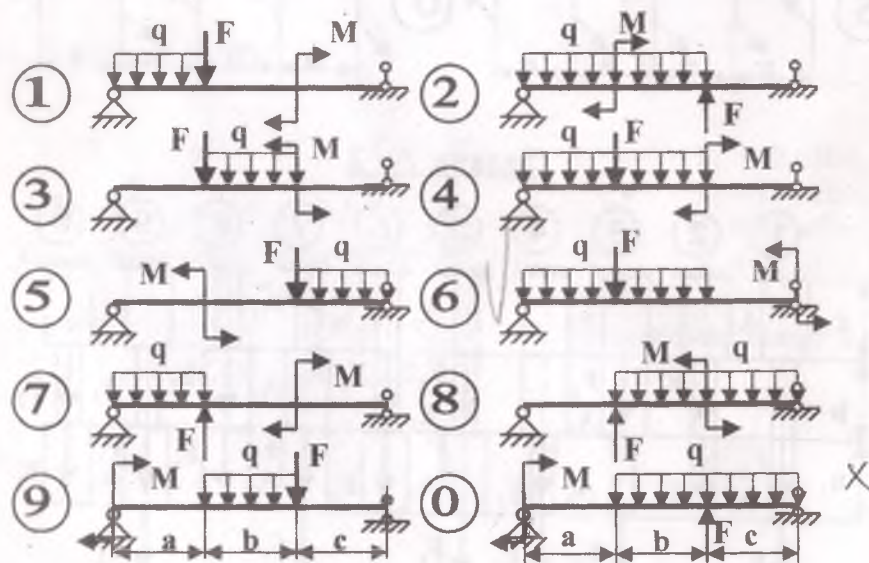
Задача № 2



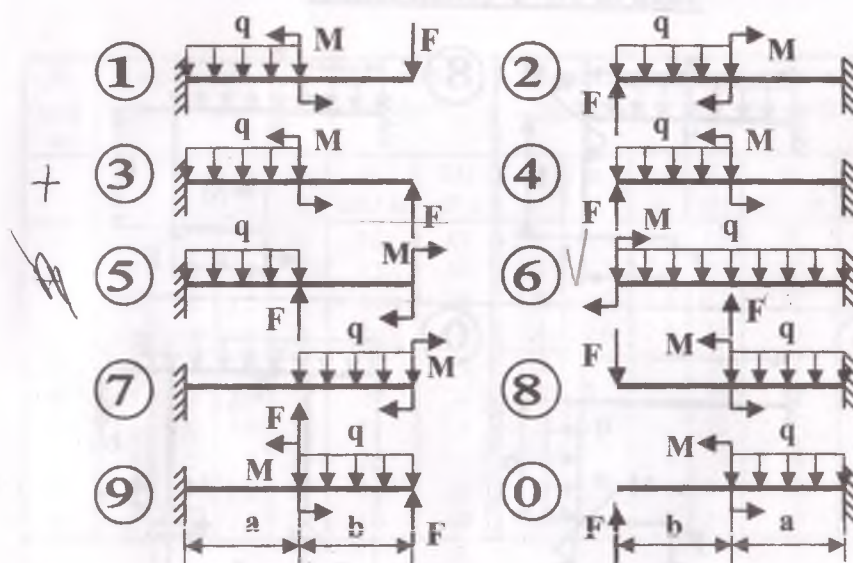
Задача № 3



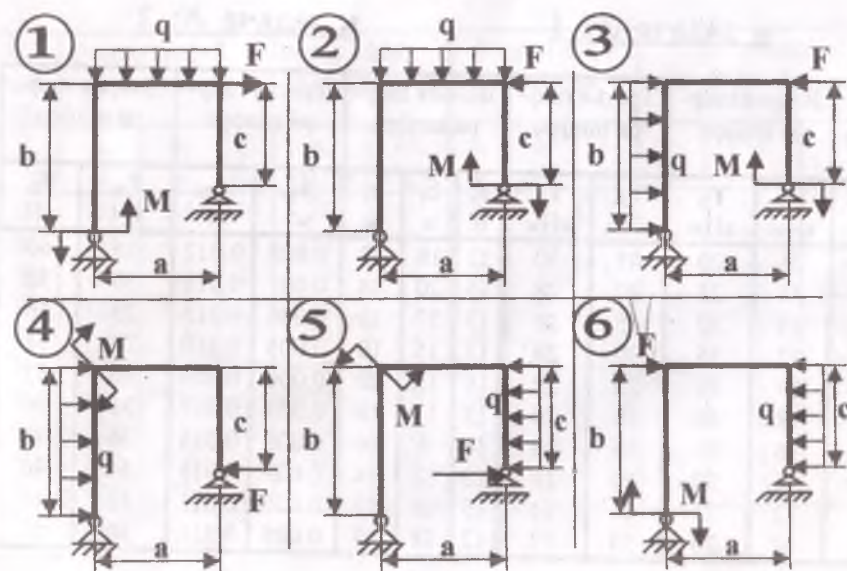
Задача № 4



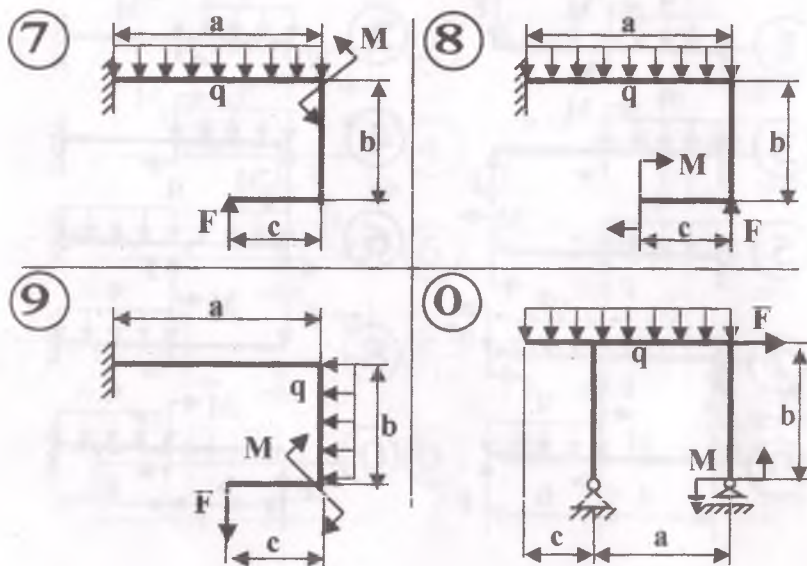
Задача № 5



Задача № 6



Задача № 6 (окончание)



Таблицы исходных данных

к задаче № 1

к задаче № 2

001

№ строки	Вторая цифра шифра		Третья цифра шифра		Вторая цифра шифра			Третья цифра шифра		Вторая цифра шифра	
	T_1 , кНм	T_2 , кНм	T_3 , кНм	T_4 , кНм	a , м	b , м	c , м	A_1 , м ²	A_2 , м ²	F_1 , кН	F_2 , кН
1	26	20	45	30	12	18	12	0.008	0.012	35	60
2	24	25	40	28	16	20	14	0.007	0.010	30	58
3	23	30	35	26	13	17	16	0.006	0.015	25	56
4	22	35	30	24	17	15	18	0.005	0.010	20	54
5	20	40	25	22	16	13	20	0.006	0.009	40	52
6	18	40	30	20	15	11	18	0.007	0.012	38	50
7	16	36	35	18	14	9	16	0.008	0.015	36	48
8	14	30	40	16	13	12	14	0.009	0.016	34	46
9	12	25	45	14	15	15	12	0.006	0.011	32	44
0	10	20	50	12	12	18	10	0.005	0.010	30	50

к задаче № 3

к задаче № 4

№ строки	Вторая цифра шифра			Третья цифра шифра			Вторая цифра шифра			Третья цифра шифра		
	a , м	b , м	c , м	F , кН	q , кН/м	M , кНм	a , м	b , м	c , м	F , кН	q , кН/м	M , кНм
1	2.5	1.5	1.5	20	10	45	2.0	2.0	1.0	18	8	20
2	2.0	3.0	2.0	22	12	40	1.8	2.2	2.0	20	8	75
3	2.4	1.6	1.5	24	14	35	1.6	1.0	1.4	22	10	30
4	1.5	2.5	1.0	26	16	30	1.4	1.6	2.0	24	10	35
5	3.0	1.0	1.5	28	18	25	1.5	1.5	2.5	26	12	40
6	2.5	2.5	2.0	30	20	20	1.5	2.0	1.5	28	12	45
7	2.0	2.0	1.0	28	18	25	1.2	1.8	2.0	30	14	40
8	3.5	1.5	1.5	26	16	30	2.0	1.0	2.0	28	14	35
9	3.0	2.0	2.0	24	14	35	1.4	2.0	1.6	26	10	30
0	4.0	1.0	1.5	22	10	40	1.6	1.4	1.8	24	10	25

к задаче № 5

к задаче № 6

№ строки	Вторая цифра шифра		Третья цифра шифра			Вторая цифра шифра			Третья цифра шифра		
	a , м	b , м	F , кН	q , кН/м	M , кНм	a , м	b , м	c , кН	F , кН	q , кН/м	M , кНм
1	1.6	2.4	30	20	40	6	6	3	30	10	20
2	2.0	4.0	28	18	38	5	4	2	25	12	20
3	1.5	3.5	26	16	36	5	6	3	20	14	25
4	1.0	3.0	24	14	34	6	4	2	15	16	25
5	1.5	2.5	22	12	32	6	5	3	10	18	30
6	2.0	2.0	20	10	30	4	5	2	15	20	30
7	2.5	1.5	22	12	28	4	3	1	20	18	35
8	3.0	1.5	24	14	26	5	5	2	25	16	35
9	3.5	2.0	26	16	24	3	3	1	30	14	40
0	4.0	2.0	28	18	22	4	4	2	35	12	40

3.1.2. Определение неизвестного крутящего момента X

Из условия равновесия вала (рис. 5, а)

$$\sum T = T_1 - X - T_2 + T_3 - T_4 = 0,$$

$$X = 10 - 20 + 45 - 30 = 5 \text{ кНм}.$$

Если X оказывается отрицательным, то это означает, что истинное направление момента противоположно принятому на расчетной схеме (рис. 5, а).

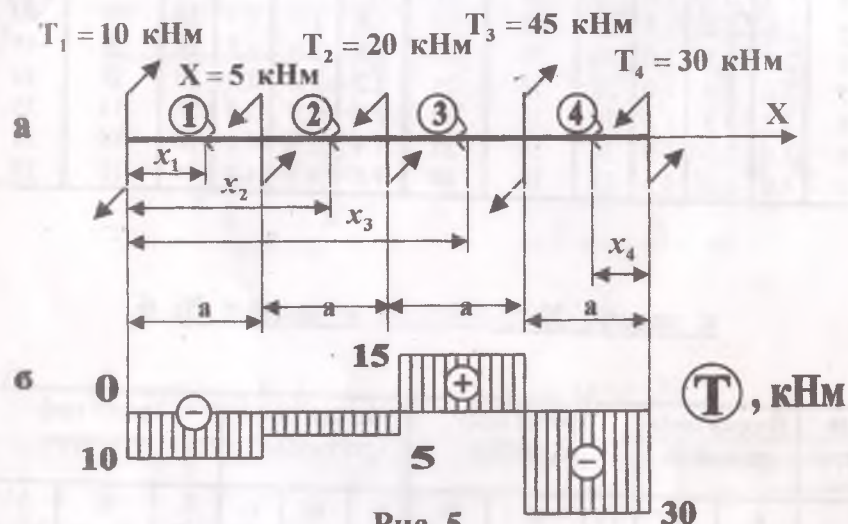


Рис. 5

3.1.3. Определение крутящих моментов на каждом участке

В данной задаче стержень следует расчленить на четыре участка. Границы участков определяются пятью моментами, вызывающими разрывы непрерывности функции $T(x)$. Наметим в пределах каждого участка сечение (рис. 5, а) и определим в нем величину T как алгебраическую сумму моментов (с учетом правила знаков), расположенных по одну сторону от сечения.

Участок 1. $0 \leq x_1 \leq a$.

$$T_1 = \sum T_i^L = -T_1 = -10 \text{ кНм}.$$

Участок 2. $a \leq x_2 \leq 2a$.

$$T_2 = \sum T_i^L = -T_1 + X = -10 + 5 = -5 \text{ кНм}.$$

Участок 3. $2a \leq x_3 \leq 3a$.

$$T_3 = \sum T_i^L = -T_1 + X + T_2 = -10 + 5 + 20 = 15 \text{ кНм}.$$

Участок 4. $0 \leq x_4 \leq a$.

$$T_4 = \sum T_i^{PP} = -T_4 = -30 \text{ кНм}.$$

3.1.4. Построение эпюры T

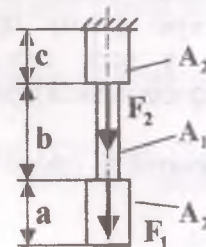
Из полученных выражений T видно, что на всех участках крутящие моменты не зависят от координаты x и, поэтому эпюра T будет иметь постоянные ординаты, а в местах приложения внешних моментов – скачки, равные их значениям. Учитывая сказанное, строим эпюру T (рис. 5, б).

3.1.5. Определение опасного участка

Опасным участком будет четвертый участок, так как в пределах этого участка действует наибольший по модулю крутящий момент $|T_{\max}| = 30 \text{ кНм}$.

3.2. Задача №2. Построение эпюры продольной силы N

3.2.1. Исходные данные



$$a = 12 \text{ м}, \quad A_1 = 0,008 \text{ м}^2,$$

$$b = 18 \text{ м}, \quad A_2 = 0,012 \text{ м}^2,$$

$$c = 10 \text{ м}, \quad \gamma = 78 \text{ кН/м}^3,$$

$$F_1 = 30 \text{ кН}, \quad F_2 = 50 \text{ кН}.$$

Построить эпюру N .

3.2.2 Определение опорных реакций

При данной нагрузке в заделке возможна лишь одна реакция, направленная вдоль оси x (рис. 6,а). Для ее вычисления следует составить одно уравнение статики: $\sum X_i = 0$. Однако в случае стержней с одним заделанным, а другим свободным концом определение опорных реакций не обязательно, так как при вычислении усилий можно рассматривать внешние силы, расположенные со стороны свободного конца штанги. Воспользуемся этим обстоятельством и не будем находить реакцию.

3.2.3 Определение продольных усилий

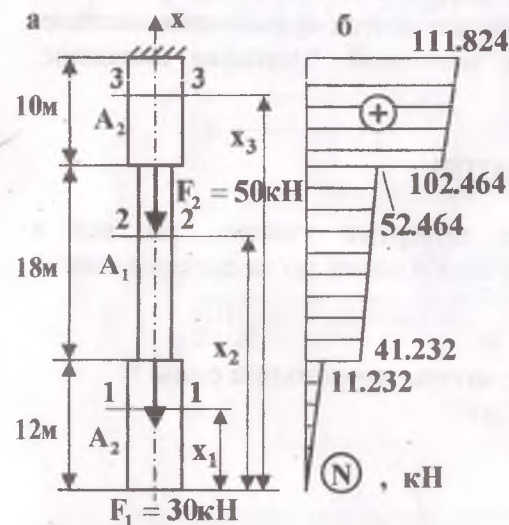


Рис. 6

женных снизу от сечения.

Так, на 1 участке в сечении с координатой x_1 продольной силой будет вес G_{1x} отсеченной нижней части.

* Гибкие стержни, работающие преимущественно на растяжение, принято называть штангами.

При определении N принято считать растягивающее продольное усилие положительным, а сжимающее – отрицательным. Разобьем стержень на три участка, границами которых являются точки приложения сосредоточенных сил (F_1 , F_2) и изменения интенсивности нагрузки от собственного веса штанги. Проведем в пределах каждого участка сечение (рис. 6, а) и определим величину продольной силы, как алгебраическую сумму проекций на ось x всех сил (с учетом правила знаков), располо-

Участок 1: $0 \leq x_1 \leq 12 \text{ м}$.

$$N_1 = \sum X_i^H = G_{1x} = \gamma A_2 x_1 = 78 \cdot 0,012 x_1 = 0,936 x_1.$$

На 2 участке продольной силой будет сумма веса 1 участка $G_1 = \gamma A_2 a$, силы F_1 и веса штанги G_{2x} длиной $x_2 - a$, имеющей площадь поперечного сечения A_1 .

Участок 2: $12 \text{ м} \leq x_2 \leq 30 \text{ м}$.

$$N_2 = \sum X_i^H = G_1 + F_1 + G_{2x} = \gamma A_2 \cdot 12 + F_1 + \gamma A_1 (x_2 - 12) = 78 \cdot 0,012 \cdot 12 + 30 + 78 \cdot 0,008 (x_2 - 12) = 41,232 + 0,624 (x_2 - 12).$$

Участок 3: $30 \text{ м} \leq x_3 \leq 40 \text{ м}$.

$$N_3 = \sum X_i^H = G_1 + G_2 + F_1 + F_2 + G_{3x} = \gamma A_2 \cdot 12 + \gamma A_1 \cdot 18 + F_1 + F_2 + \gamma A_2 (x_3 - 30) = 78 \cdot 0,012 \cdot 12 + 78 \cdot 0,008 \cdot 18 + 50 + 30 + 78 \cdot 0,012 (x_3 - 30) = 102,464 + 0,936 (x_3 - 30).$$

3.2.4. Построение эпюры N

Из формул для N_i видно, что в пределах всех участков продольная сила изменяется по линейному закону. Поэтому для построения эпюры достаточно найти по два значения N на каждом участке, причем эти величины целесообразно определять в граничных сечениях. Итак,

при $x_1 = 0$, $N_1 = 0$; при $x_1 = 12 \text{ м}$, $N_1 = 0,936 \cdot 12 = 11,232 \text{ кН}$;
при $x_2 = 12 \text{ м}$, $N_2 = 41,232 \text{ кН}$; при $x_2 = 30 \text{ м}$, $N_2 = 41,232 + 0,624 \cdot (30 - 12) = 52,464 \text{ кН}$;
при $x_3 = 30 \text{ м}$, $N_3 = 102,464 \text{ кН}$; при $x_3 = 40 \text{ м}$, $N_3 = 102,464 + 0,936 \cdot (40 - 30) = 111,824 \text{ кН}$.

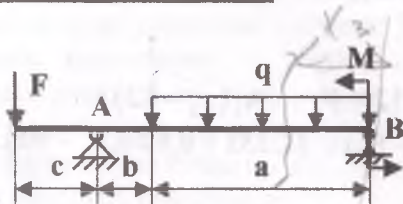
По найденным ординатам строим эпюру N (рис. 6,б). Заметим, что скачки на эпюре равны величинам сосредоточенных сил.

3.2.5. Определение опасного сечения

Опасным сечением будет сечение в заделке (верхнее сечение штанги), где действует наибольшая растягивающая сила $N_{\max} = 111,824 \text{ кН}$.

3.3. Задача №3. Построение эпюр поперечной силы Q и изгибающего момента M

3.3.1. Исходные данные



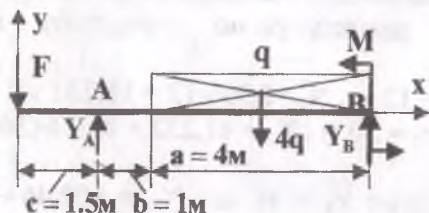
$$a = 4 \text{ м}, b = 1 \text{ м}, c = 1,5 \text{ м}, \\ M = 40 \text{ кНм}, F = 20 \text{ кН}, \\ q = 10 \text{ кН/м}.$$

Построить эпюры Q и M.

3.3.2. Определение опорных реакций

Балка, показанная на рис. 7, находится в равновесии при действии плоской системы параллельных сил*.

Составим уравнения статики и определим реакции опор (распределенную нагрузку заменим равнодействующей $4q$).



$$\sum Y = -F + Y_A - 4q + Y_B = 0, \\ \sum M_A = F \cdot c - q \cdot a \left(b + \frac{a}{2} \right) + M + \\ + Y_B \cdot (a + b) = 0;$$

$$20 \cdot 1,5 - 10 \cdot 4 \cdot 3 + 40 + 5Y_B = 0$$

Отсюда $Y_B = 10 \text{ кН}$, $Y_A = 50 \text{ кН}$.

$$\text{Проверка: } \sum M_B = F \cdot 6,5 - Y_A \cdot 5 + \\ + 4q \cdot 2 + M = 250 - 250 = 0.$$

Рис. 7

Заметим, что если какая-либо из реакций оказывается отрицательной, то это означает, что ее истинное направление противоположно принятому на расчетной схеме.

* В этом случае горизонтальная реакция в неподвижной шарнирной опоре A равна нулю.

3.3.3. Определение усилий

Разобьем балку на три участка, границы которых обусловлены силовыми воздействиями. В пределах каждого участка наметим сечение (рис. 8, а) и определим в них Q и M.

Напомним, что поперечная сила численно равна алгебраической сумме проекций на ось y всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, а изгибающий момент - алгебраической сумме моментов относительно соответствующих точек всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения. Составляя выражения усилий в сечениях 1 и 2, целесообразно рассматривать силы слева от сечения, а в сечении 3 - справа.

Участок 1: $0 \leq x_1 \leq 1,5 \text{ м}$.

$$Q_1 = \sum Y_i^{\text{л}} = -F = -20 \text{ кН}; \quad M_1 = \sum M_i^{\text{л}} = -Fx_1 = -20x_1.$$

Участок 2: $1,5 \text{ м} \leq x_2 \leq 2,5 \text{ м}$.

$$Q_2 = \sum Y_i^{\text{л}} = -F + Y_A = -20 + 50 = 30 \text{ кН};$$

$$M_2 = \sum M_i^{\text{л}} = -Fx_2 + Y_A(x_2 - 1,5) = -20x_2 + 50(x_2 - 1,5).$$

Участок 3: $0 \leq x_3 \leq 4 \text{ м}$.

$$Q_3 = \sum Y_i^{\text{пр}} = -Y_B + qx_3 = -10 + 10x_3;$$

$$M_3 = \sum M_i^{\text{пр}} = Y_B x_3 + M - q \frac{x_3^2}{2} = 10x_3 + 40 - 5x_3^2.$$

3.3.4. Построение эпюр Q и M

Вычислим усилия в характерных сечениях

Участок 1: $Q_1 = -20 \text{ кН}$;

при $x_1 = 0$, $M_1 = 0$; при $x_1 = 1,5 \text{ м}$, $M_1 = -20 \cdot 1,5 = -30 \text{ кНм}$.

Участок 2: $Q_2 = 30 \text{ кН}$;

при $x_2 = 1,5 \text{ м}$, $M_2 = -20 \cdot 1,5 = -30 \text{ кНм}$;

при $x_2 = 2,5 \text{ м}$, $M_2 = -20 \cdot 2,5 + 50 \cdot 1 = 0$.

Участок 3: при $x_3 = 0$; $Q_3 = -10 \text{ кН}$; $M_3 = 40 \text{ кНм}$;

при $x_3 = 4 \text{ м}$, $Q_3 = -10 + 10 \cdot 4 = 30 \text{ кН}$,

$$M_3 = 10 \cdot 4 + 40 - 5 \cdot 4^2 = 40 + 40 - 80 = 0.$$

Заметим, что если на данном участке усилие изменяется по линейному закону, то вычисляются ординаты у границ участка, а

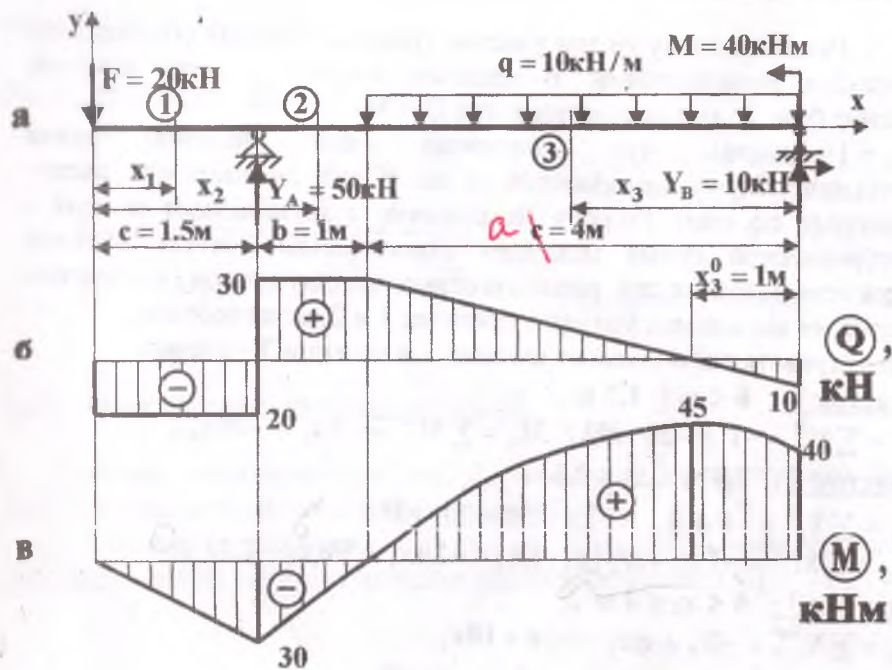


Рис. 8

если по нелинейному закону, то около границ и по середине участка.

Прежде чем приступить к построению эпюр Q и M , напомним, что из дифференциальных зависимостей при изгибе

$$\frac{dQ}{dx} = q, \quad \frac{dM}{dx} = Q,$$

следует, что на участках,

где распределенной нагрузки нет ($q = 0$), поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону (на эпюре Q - прямая, параллельная оси абсцисс, а на эпюре M - наклонная прямая);

где действует равномерно распределенная нагрузка ($q = \text{const}$), поперечная сила изменяется по линейному закону, а момент по параболическому закону (на эпюре Q - наклонная прямая, а на эпюре M - квадратная парабола с выпуклостью в сторону, обратную

направлению нагрузки);

где поперечная сила меняет знак (переходит через нуль), изгибающий момент достигает местного экстремума;

где распределенная нагрузка направлена вверх ($q > 0$), поперечная сила Q является возрастающей функцией x , а при $q < 0$ поперечная сила Q убывает;

где поперечная сила Q положительна, изгибающий момент M является возрастающей функцией x , при $Q < 0$ момент убывает.

Кроме того, необходимо помнить, что

в месте приложения на балке сосредоточенной силы (включая опорные реакции) на эпюре Q должен быть скачок, равный величине силы, а на эпюре M - перелом;

в месте приложения пары сил очертание эпюры Q не меняется, а на эпюре M - скачок, равный моменту пары;

в месте ступенчатого изменения величины q на эпюре Q перелом, а на эпюре M - плавное сопряжение кривых.

Таким образом, при расчете балок на поперечный изгиб сначала целесообразно строить эпюру Q . Если на ней окажутся участки с "нулевыми точками", то вычислить экстремальные значения изгибающих моментов, а затем построить эпюру M и проверить эпюры по изложенным выше требованиям.

Возвратимся к примеру и построим эпюру Q (рис. 8, б).

В пределах третьего участка Q , изменяясь по линейному закону, переходит через нуль. Следовательно, здесь изгибающий момент имеет экстремальное значение и его необходимо определить:

$$\frac{dM_3}{dx_3} = Q_3 = -10 + 10x_3^0 = 0; \quad x_3^0 = 1 \text{ м};$$

$$\max M_3 = 10 \cdot 1 + 40 - 5 \cdot 1^2 = 50 - 5 = 45 \text{ кНм}.$$

По полученным данным строим эпюру M (рис 8, в).

Сопоставление эпюр Q и M с изложенными выше контрольными требованиями показывает, что они удовлетворяются.

3.3.5. Определение опасных сечений

Опасным сечением, где действует наибольший по модулю изгибающий момент $|M_{\max}| = 45 \text{ кНм}$, является сечение, располо-

женное на расстоянии 1 м от правого конца балки (от опоры В). В этом сечении нормальные напряжения σ достигают максимального значения.

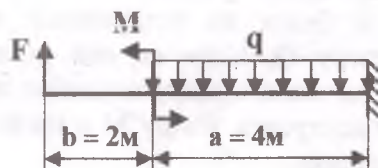
В опасном сечении изгибающий момент действует так, что вызывает сжатие в верхней части сечения.

На 2-м участке, где поперечная сила Q максимальна, будут действовать в балке максимальные касательные напряжения τ .

Решение задачи № 4 аналогично решению задачи № 3, а поэтому в методическом указании не рассматривается.

3.4. Задача № 5. Построение эпюр поперечной силы Q и изгибающего момента M

3.4.1. Исходные данные



$$a = 4 \text{ м}; \quad b = 2 \text{ м}; \\ F = 30 \text{ кН}; \quad q = 20 \text{ кН/м}; \\ M = 40 \text{ кНм}.$$

Построить эпюры Q и M .

3.4.2. Определение опорных реакций

Как известно, усилия в консольных балках можно вычислить и не находя реакций заделки, а рассматривая внешние силы со стороны свободного конца консоли. Так мы поступим и в данном случае.

3.4.3. Определение усилий

Подробный разбор этого вопроса, а также построение эпюр Q и M были даны в предыдущем примере. Поэтому здесь ограничимся минимумом пояснений.

Разобьем балку на два участка, наметим сечения (рис. 9, а) и определим в них усилия.

Участок 1: $0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м}$.

$$Q_1 = \sum Y_i^{\text{л}} = F = 30 \text{ кН}; \quad M_1 = \sum M_i^{\text{л}} = P \cdot x_1 = 30 x_1.$$

Участок 2: $2 \text{ м} \leq x_2 \leq 6 \text{ м}$.

$$Q_2 = \sum Y_i^{\text{л}} = P - q(x_2 - 2) = 30 - 20(x_2 - 2);$$

$$M_2 = \sum M_i^{\text{л}} = -M + Fx_2 - \frac{q}{2}(x_2 - 2)^2 = -40 + 30x_2 - 10(x_2 - 2)^2.$$

3.4.4. Построение эпюр Q и M

Вычислим характерные ординаты эпюр.

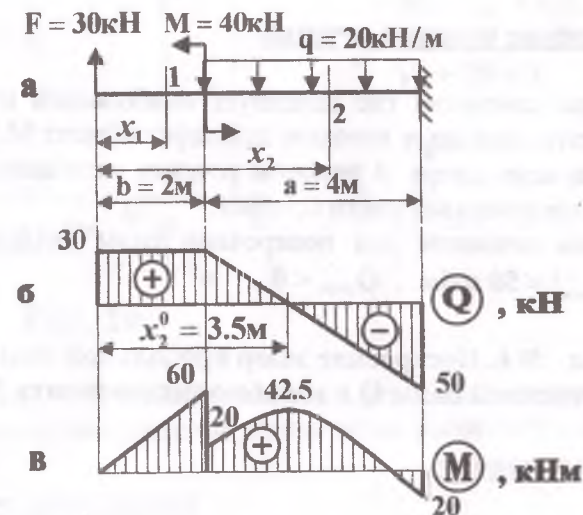


Рис. 9

По выведенным выше выражениям Q и M находим

Участок 1

$$Q = 30 \text{ кН} = \text{const}; \quad \text{при } x_1 = 0 \quad M_1 = 0; \quad \text{при } x_1 = 2 \text{ м} \quad M_1 = 60 \text{ кНм}.$$

Участок 2

$$\text{При } x_2 = 2 \text{ м} \quad Q_2 = 30 \text{ кН}, \quad M_2 = -40 + 30 \cdot 2 = -40 + 60 = 20 \text{ кНм};$$

$$\text{при } x_2 = 6 \text{ м} \quad Q_2 = 30 - 20(6 - 2) = 30 - 80 = -50 \text{ кН};$$

$$M_2 = -40 + 30 \cdot 6 - 10(6 - 2)^2 = -40 + 180 - 160 = -20 \text{ кНм}.$$

Строим эпюру Q (рис. 9, б).

В пределах второго участка поперечная сила, изменяясь по линейному закону, переходит через нуль. Следовательно, здесь момент имеет экстремальное значение:

$$\frac{dM_2}{dx_2} = Q_2 = 30 - 20(x_2^0 - 2) = 0, \quad x_2^0 = 3,5 \text{ м};$$

$$\max M_2 = -40 + 30 \cdot 3,5 - 10(3,5 - 2)^2 = 42,5 \text{ кНм}.$$

Строим эпюру M (рис. 9,в) и проверяем эпюры Q и M (см. предыдущий пример).

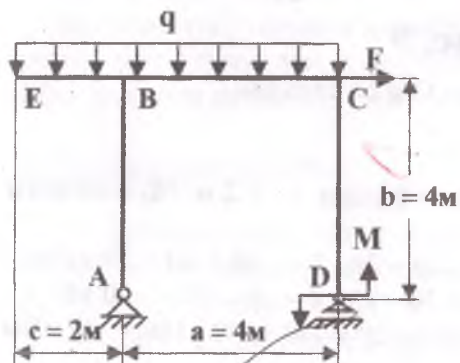
3.4.5. Определение опасных сечений

Опасным сечением, где действует наибольший изгибающий момент, является сечение, в котором действует момент $M_{\max} = 60 \text{ кНм}$ при подходе к нему слева. В опасном сечении изгибающий момент вызывает сжатие в верхней части сечения.

Опасным сечением для поперечной силы является заделка балки, где $|Q_{\max}| = 50 \text{ кНм}$, $Q_{\max} < 0$.

3.5. Задача № 6. Построение эпюр продольной силы N , поперечной силы Q и изгибающего момента M

3.5.1. Исходные данные



$a = 4 \text{ м}; \quad b = 4 \text{ м};$
 $c = 2 \text{ м}; \quad F = 30 \text{ кН};$
 $q = 10 \text{ кН/м}; \quad M = 20 \text{ кНм}.$
 Построить эпюры N , Q и M .

3.5.2. Определение опорных реакций

Рама, показанная на рис. 10, находится в равновесии при действии плоской системы сил.

Составим уравнения статики и определим реакции опор (распределенную нагрузку заменим равнодействующей).

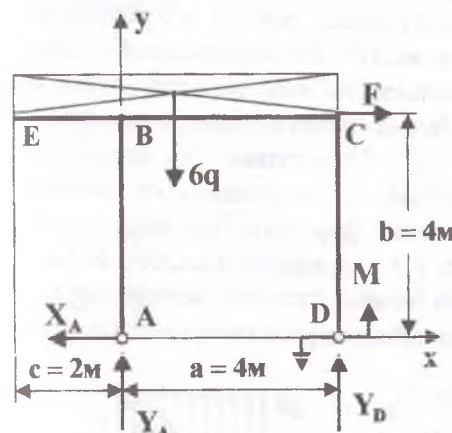


Рис. 10

$$\begin{aligned} \sum X_i &= F - X_A = 0; \\ \sum Y_i &= Y_A + Y_D - 6q = 0; \\ \sum M_A &= -6q \cdot 1 - F \cdot 4 + \\ &\quad + M + Y_D \cdot 4 = 0 \\ X_A &= 30 \text{ кН}, Y_D = 40 \text{ кН}, \\ Y_A &= 20 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\sum M_D = 6q \cdot 3 + M - Y_A \cdot 4 - F \cdot 4 = 200 - 200 = 0.$$

Заметим, что положительные значения опорных реакций подтверждают их направление, принятое на расчетной схеме.

3.5.3. Определение усилий

При плоском изгибе рамы в сечениях ее элементов возникают продольные и поперечные силы и изгибающие моменты, т.е. стержни рамы работают в условиях сложной деформации (сочетание сжатия или растяжения с поперечным изгибом).

При определении внутренних усилий в рамах рассматриваются все внешние силы, приложенные по одну сторону от сечения (к одной отсеченной части), например, к частям 1 или 2, показанным на рис. 11.

* Стержень ломаного очертания можно называть и рамой, т.е. конструкцией, состоящей из нескольких стержней, как правило, жестко сочлененных между собою в узлах. В рамах данного типа стержни АВ и ДС называют стойками, ВС - ригелем, ВЕ - консолью.

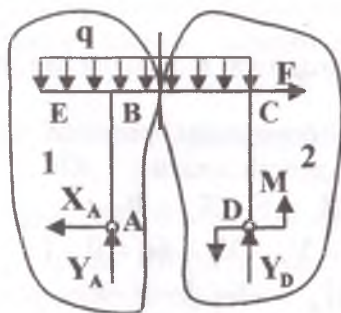


Рис. 11

Напомним, что продольное и поперечное усилия численно равны алгебраическим суммам проекций всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения на соответствующие оси, а изгибающий момент – алгебраической сумме моментов тех же сил относительно центра тяжести сечения.

Приступим к определению усилий в заданной раме. Разобьем конструкцию на четыре участка (в данном случае помимо силовых факторов границы участков определяют еще и узловые точки) и в пределах каждого из них наметим сечение (рис. 12, а). При этом начало отсчета координат сечений целесообразно принимать на каждом участке отдельно, располагая их у одной из границ.

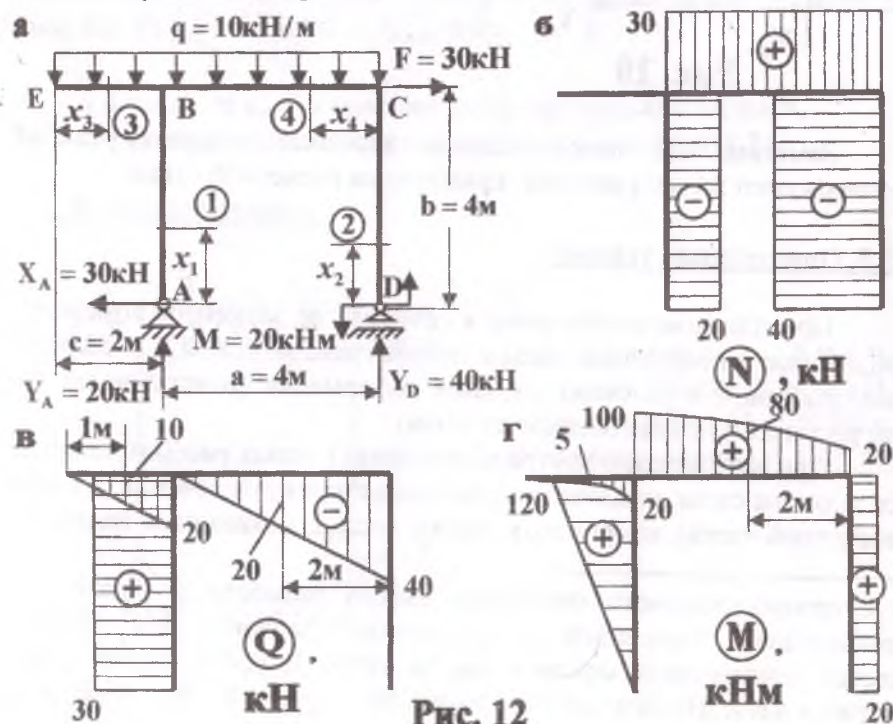


Рис. 12

Вычисляем усилия.

Участок 1 (левая стойка): $0 \leq x_1 \leq 4 \text{ м}$.

$$N_1 = \sum X_i^H = -Y_A = -20 \text{ кН}; \quad Q_1 = \sum Y_i^H = X_A = 30 \text{ кН};$$

$$M_1 = \sum M_i^H = X_A x_1 = 30 x_1.$$

Участок 2 (правая стойка): $0 \leq x_2 \leq 4 \text{ м}$.

$$N_2 = \sum X_i^H = -Y_D = -40 \text{ кН}; \quad Q_2 = \sum Y_i^H = 0;$$

$$M_2 = \sum M_i^H = M = 20 \text{ кНм}.$$

Участок 3 (консоль): $0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$.

$$N_3 = \sum X_i^H = 0; \quad Q_3 = \sum Y_i^H = -q \cdot x_3 = -10 x_3;$$

$$M_3 = \sum M_i^H = -\frac{q x_3^2}{2} = -5 x_3^2.$$

Участок 4 (ригель): $0 \leq x_4 \leq 4 \text{ м}$.

$$N_4 = \sum X_i^H = F = 30 \text{ кН}; \quad Q_4 = \sum Y_i^H = -Y_D + q \cdot x_4 = -40 + 10 x_4;$$

$$M_4 = \sum M_i^H = M + Y_D \cdot x_4 - \frac{q x_4^2}{2} = 20 + 40 x_4 - 5 x_4^2.$$

3.5.4. Построение эпюр усилий

Определим значения характерных ординат эпюр усилий.

Участок 1. $N_1 = -20 \text{ кН}$; $Q = 30 \text{ кН}$; при $x_1 = 0$, $M_1 = 0$; при $x_1 = 4 \text{ м}$, $M_1 = 120 \text{ кНм}$.

Участок 2. $N_2 = -40 \text{ кН}$; $Q_2 = 0$; $M_2 = 20 \text{ кНм}$.

Участок 3. $N_3 = 0$; при $x_3 = 0$, $Q_3 = 0$; $M_3 = 0$; при $x_3 = 1 \text{ м}$, $Q_3 = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кН}$, $M_3 = -5 \cdot 1^2 = -5 \text{ кНм}$; при $x_3 = 2 \text{ м}$, $Q_3 = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кН}$, $M_3 = -5 \cdot 2^2 = -20 \text{ кНм}$.

Участок 4. $N_4 = 30 \text{ кН}$; при $x_4 = 0$, $Q_4 = -40 \text{ кН}$, $M_4 = 20 \text{ кНм}$; при $x_4 = 2 \text{ м}$, $Q_4 = -40 + 10 \cdot 2 = -20 \text{ кН}$, $M_4 = 20 + 40 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20 + 80 - 20 = 80 \text{ кНм}$; при $x_4 = 4 \text{ м}$, $Q_4 = -40 + 10 \cdot 4 = 0$, $M_4 = 20 + 40 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 20 + 160 - 80 = 100 \text{ кНм}$.

Контролем при построении эшюр Q и M могут служить зависимости, изложенные в решении задачи № 3.

$$\begin{aligned} \sum X &= 30 - 30 = 0, \\ \sum Y &= 20 - 20 = 0, \\ \sum M_B &= 120 - 100 - 20 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X &= 30 - 30 = 0, \\ \sum Y &= 40 - 40 = 0, \\ \sum \bar{M}_C &= 20 - 20 = 0. \end{aligned}$$

Рис. 13

3.5.5. Определение опасных сечений (участков)

$$|N_{\max}| = 40 \text{ кН}, N_{\max} < 0.$$
$$|Q_{\max}| = 40 \text{ кВ}, Q_{\max} < 0.$$
$$M_{\max} = 120 \text{ кНм}.$$

В опасном сечении изгибающий момент вызывает сжатие в левой части сечения.

4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ПОДБОРУ СЕЧЕНИЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ДЕФОРМАЦИИ

4.1. Подбор сечения штанги

4.1.1 Исходные данные

Дано: $a = 30 \text{ м}$, $b = 35 \text{ м}$, $c = 25 \text{ м}$,
 $F_1 = 40 \text{ кН}$, $F_2 = 20 \text{ кН}$, $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$,

$$\frac{A_2}{A_1} = 2, \quad [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Найти площади поперечных сечений.

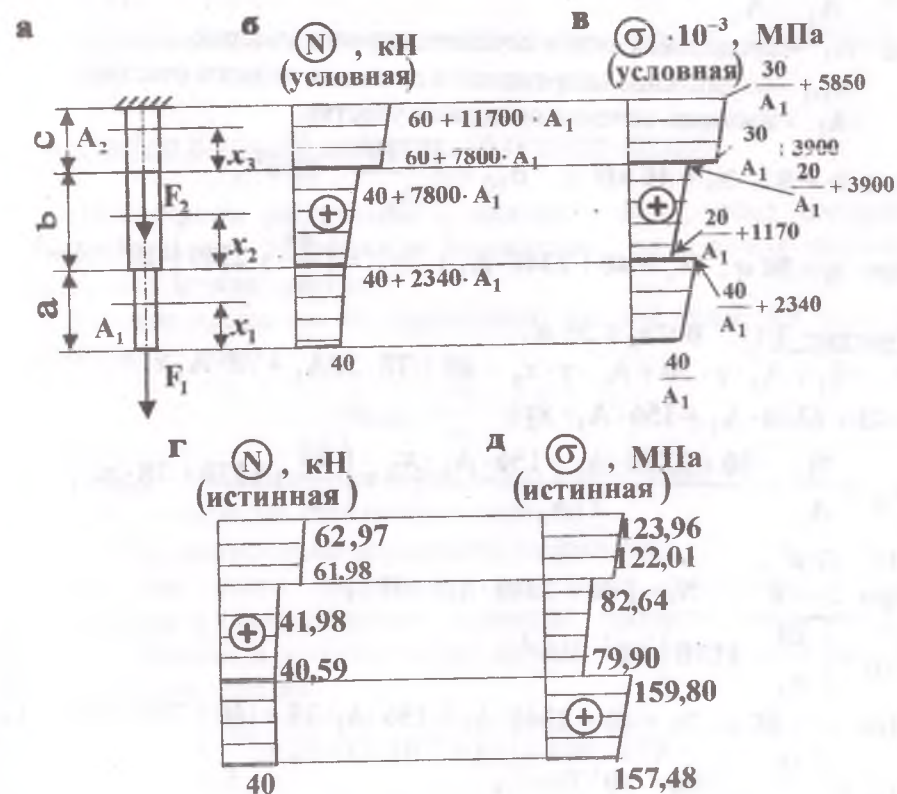


Рис. 14

4.1.2. Построение эпюр усилий и напряжений

Заданная штанга имеет три участка. В пределах каждого проводим произвольное сечение и рассматриваем на каждом участке часть, расположенную от сечения со стороны свободного конца (снизу). На каждом участке определим продольные силы и нормальные напряжения, возникающие в поперечном сечении штанги.

Участок 1: $0 \leq x_1 \leq 30$ м.

$$N_1 = F_1 + A_1 \cdot \gamma \cdot x_1 = 40 + 78 \cdot A_1 \cdot x_1 ;$$

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{40}{A_1} + \gamma \cdot x_1 ,$$

где N_1 - продольная сила в сечениях первого участка;

$\sigma_{(1)}$ - нормальное напряжение в сечениях первого участка;

A_1 - площадь сечения на первом участке.

$$\text{При } x_1 = 0 , N_1 = 40 \text{ кН} ; \quad \sigma_{(1)} = \frac{40 \cdot 10^3}{A_1} \text{ Н/м}^2 .$$

$$\text{При } x_2 = 30 \text{ м} , N_1 = 40 + 2340 \cdot A_1 ; \quad \sigma_{(1)} = \left(\frac{40}{A_1} + 2340 \right) \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2 .$$

Участок 2: $0 \leq x_2 \leq 35$ м.

$$N_2 = F_1 + A_1 \cdot \gamma \cdot 30 + A_2 \cdot \gamma \cdot x_2 = 40 + 78 \cdot 30 A_1 + 78 \cdot A_2 x_2 = 40 + 2340 \cdot A_1 + 156 \cdot A_1 \cdot x_2 ;$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{40 + 2340 \cdot A_1 + 156 \cdot A_1 \cdot x_2}{2 \cdot A_1} = \left(\frac{20}{A_1} + 1170 + 78 \cdot x_2 \right) \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2 .$$

$$\text{При } x_2 = 0 , N_2 = (40 + 2340 \cdot A_1) \text{ кН} ;$$

$$\sigma_{(2)} = \left(\frac{20}{A_1} + 1170 \right) \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2 .$$

$$\text{При } x_2 = 35 \text{ м} , N_2 = 40 + 2340 \cdot A_1 + 156 \cdot A_1 \cdot 35 = (40 + 7800 \cdot A_1) \text{ кН} ;$$

$$\sigma_{(2)} = \left(\frac{20}{A_1} + 3900 \right) \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2 .$$

Участок 3: $0 \leq x_3 \leq 25$ м.

$$N_3 = F_1 + F_2 + \gamma \cdot A_1 \cdot a + \gamma \cdot A_2 \cdot b + \gamma \cdot A_2 \cdot x_3 = 40 + 20 + 78 \cdot 30 A_1 + 78 \cdot 2 \cdot A_1 \cdot 35 + 78 \cdot 2 A_1 \cdot x_3 = 60 + 7800 \cdot A_1 + 156 \cdot A_1 \cdot x_3 ;$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{N_3}{A_2} = \left(\frac{60}{2 \cdot A_1} + 3900 + 78 \cdot x_3 \right) \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2 .$$

$$\text{При } x_3 = 0 , N_3 = (60 + 7800 \cdot A_1) \text{ кН} ;$$

$$\sigma_{(3)} = \left(\frac{30}{A_1} + 3900 \right) \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2 .$$

$$\text{При } x_3 = 25 \text{ м} , N_3 = (60 + 11700 \cdot A_1) \text{ кН} ;$$

$$\sigma_{(3)} = \left(\frac{30}{A_1} + 5850 \right) \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2 .$$

По полученным значениям строим условные эпюры N , σ (рис 14,б и рис. 14,в).

4.1.3. Подбор площади поперечного сечения штанги

При осевом растяжении – сжатии в поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения, одинаковые по величине во всех точках сечения.

Условие прочности по нормальным напряжениям при осевом растяжении – сжатии

$$\sigma_{\max} = \frac{|N|}{A} \leq [\sigma] ,$$

где $\sigma_{\max}$ – максимальные нормальные напряжения;

A – площадь поперечного сечения;

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

Так как эпюра напряжений при учете собственного веса изображается в относительных единицах, проверке подлежат два сечения, а именно, в верхних концах первого и третьего участков.

Конец первого участка

$$\left(\frac{40}{A_1} + 2340 \right) \cdot 10^{-3} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа} ,$$

$$\frac{40}{A_1} \cdot 10^{-3} \leq 160 - 2,34 = 157,66 ,$$

$$A_1 = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{157,66} = 2,54 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,54 \text{ см}^2 .$$

Конец третьего участка

$$\left(\frac{30}{A_1} + 5850 \right) \cdot 10^{-3} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа} ,$$

$$\frac{30}{A_1} \cdot 10^{-3} \leq 160 - 5,85 = 154,15 ,$$

$$A_1 = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{154,15} = 1,946 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,946 \text{ см}^2 .$$

Принимаем площадь A_1 равной $A_1 = 2,54 \text{ см}^2$, тогда площадь $A_2 = 2A_1 = 2 \cdot 2,54 = 5,08 \text{ см}^2$.

Подставив значение A_1 , строим эпюры истинных усилий и напряжений в приемлемом для рисунка масштабе (рис. 14,г и рис. 14,д).

4.2. Подбор сечения однопролетной консольной балки из прокатных профилей

4.2.1. Исходные данные

Задача подбора сечения решается для балки, приведенной в разделе 3.3. При этом рассматриваются два случая: двутавровое сечение и сечение, состоящее из двух швеллеров.

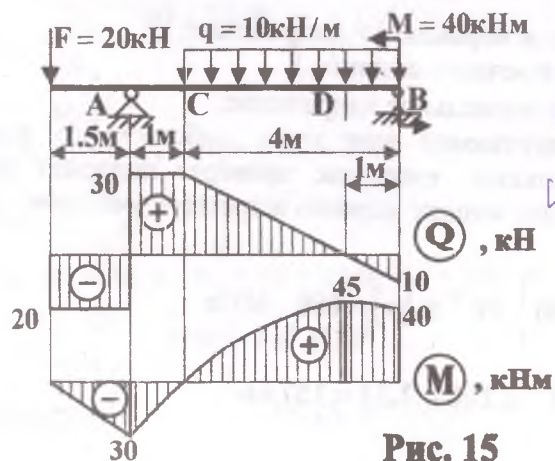


Рис. 15

4.2.2. Определение расчетных усилий

Как правило, сечение подбирают из условия прочности по нормальным напряжениям, а затем проверяют его по касательным напряжениям и на жесткость.

Расчетным или опасным по нормальным напряжениям считается максимальный по модулю изгибающий момент, принимаемый по эпюре M (рис. 15),

$$M_{\text{РАСЧ}} = M_{\text{ОП}} = |M|_{\text{МАХ}} = 45 \text{ кНм} .$$

Опасной или расчетной по касательным напряжениям считается максимальная по модулю поперечная сила, принимаемая по эпюре поперечных сил Q (рис. 15),

$$Q_{\text{РАСЧ}} = Q_{\text{ОП}} = |Q|_{\text{МАХ}} = 30 \text{ кН} .$$

Опасным или расчетным по деформациям будет максимальный по модулю прогиб, принимаемый по эпюре изогнутой оси (раздел 4.2.5.)

4.2.3. Подбор сечения двутавровой балки

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид

$$\sigma_{\text{МАХ}} = \frac{M_{\text{РАСЧ}}}{W_z} \leq [\sigma] ,$$

где $\sigma_{\text{МАХ}}$ – максимальное нормальное напряжение, возникающее от изгиба в сечении балки;

$M_{\text{РАСЧ}}$ – расчетный изгибающий момент;

W_z – осевой момент сопротивления сечения;

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

Из последнего выражения следует, что требуемый момент сопротивления

$$W_z^{\text{ТР}} \geq \frac{M_{\text{РАСЧ}}}{[\sigma]} = \frac{45 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 281,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 281,2 \text{ см}^3 .$$

По сортаменту [4] принимаем двутавр № 24, который имеет размеры и геометрические характеристики, представленные на рис. 16.

В учебном пособии допускается упрощенное изображение сечения (рис. 16,б).

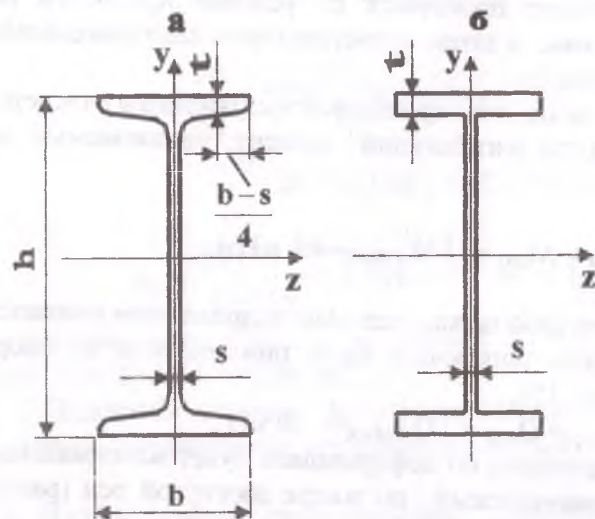


Рис. 16

$h = 24 \text{ см},$
 $b = 11,5 \text{ см},$
 $s = 0,56 \text{ см},$
 $t = 0,95 \text{ см},$
 $A = 34,8 \text{ см}^2,$
 $I_z = 3460 \text{ см}^4,$
 $W_z = 289 \text{ см}^3,$
 $S_z^{\text{отс}} = 163 \text{ см}^3.$

4.2.3.1. Проверка сечения на прочность по нормальным напряжениям

Так как момент сопротивления $W_z = 289 \text{ см}^3$ больше требуемого $W_z^{\text{тр}} = 281,2 \text{ см}^3$, то максимальные напряжения меньше допускаемых.

4.2.3.2. Проверка принятого сечения на прочность по касательным напряжениям

Условие прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{Q_{\text{расч}} \cdot S_{z,\text{MAX}}^{\text{отс}}}{I_z \cdot b_y} \leq [\tau],$$

где τ_{MAX} - максимальное касательное напряжение, возникающее в точках поперечного сечения на нейтральной оси;
 $S_{z,\text{MAX}}^{\text{отс}}$ - максимальный статический момент площади,

отсеченной части сечения относительно оси z ;

I_z - осевой момент инерции сечения;

b_y - ширина сечения на уровне определения τ , $b_y = s$.

Найдем величину наибольшего касательного напряжения в балке и сравним его с допускаемым напряжением

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{3460 \cdot 0,56 \cdot 10^{-10}} = 25,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 25,2 \text{ МПа} \leq [\tau] = 100 \text{ МПа}.$$

4.2.3.3. Проверка прочности сечения по главным напряжениям

Так как материал балки сталь - пластичный материал, то прочность проверяем по IV теории.

Условие прочности по IV теории имеет вид:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma],$$

где $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}}$ - эквивалентное по IV теории прочности нормальное напряжение;

σ - нормальное напряжение в опасной по главным напряжениям точке сечения;

τ - касательное напряжение в опасной по главным напряжениям точке сечения;

$[\sigma]$ - допускаемое нормальное напряжение.

Опасной по главным напряжениям точкой будет наиболее удаленная от оси z точка стенки двутавра (рис 16). Здесь нормальные и касательные напряжения близки к максимальным значениям.

Опасным по главным напряжениям считаем сечение, в котором модули M и Q близки к максимальным значениям. Таких сечений в рассматриваемой задаче два: чуть правее опоры А и чуть левее опоры В. Проверим по главным напряжениям первое из указанных сечений, так как сумма модулей усилий здесь больше:

$$M_{\text{расч}} = 30 \text{ кНм} \quad Q_{\text{расч}} = 30 \text{ кН}.$$

Остается вычислить напряжения и проверить прочность по IV теории.

Нормальное напряжение

$$\sigma = -\frac{M_{\text{расч}}}{I_z} y_{\text{оп}} = -\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 11,05 \cdot 10^{-2}}{3460 \cdot 10^{-8}} = -95,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = -95,8 \text{ МПа} ,$$

где $y_{\text{оп}}$ - координата опасной точки по оси y

$$y_{\text{оп}} = \frac{h}{2} - t = \frac{24}{2} - 0,95 = 11,05 \text{ см} .$$

Касательное напряжение

$$\tau = \frac{Q_{\text{расч}} \cdot S_z^{\text{отс}}}{I_z \cdot b_y} .$$

Статический момент отсеченной части (полки) относительно оси z (из рис.16)

$$S_z^{\text{отс}} = b \cdot t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 11,5 \cdot 0,95 \cdot \left(\frac{24}{2} - \frac{0,95}{2} \right) = 125,9 \text{ см}^3 .$$

$$b_y = s = 0,56 \text{ см} ;$$

$$\tau = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 125,9 \cdot 10^{-6}}{3460 \cdot 0,56 \cdot 10^{-10}} = 19,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 19,5 \text{ МПа} .$$

Условие прочности по IV теории

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{95,8^2 + 3 \cdot 19,5^2} = 101,6 \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

выполняется.

4.2.3.4. Построение эпюр нормальных σ и касательных τ напряжений в опасных сечениях двутавра

По нормальным напряжениям опасным является сечение **D**, по касательным напряжениям опасным является любое сечение участка **АС**.

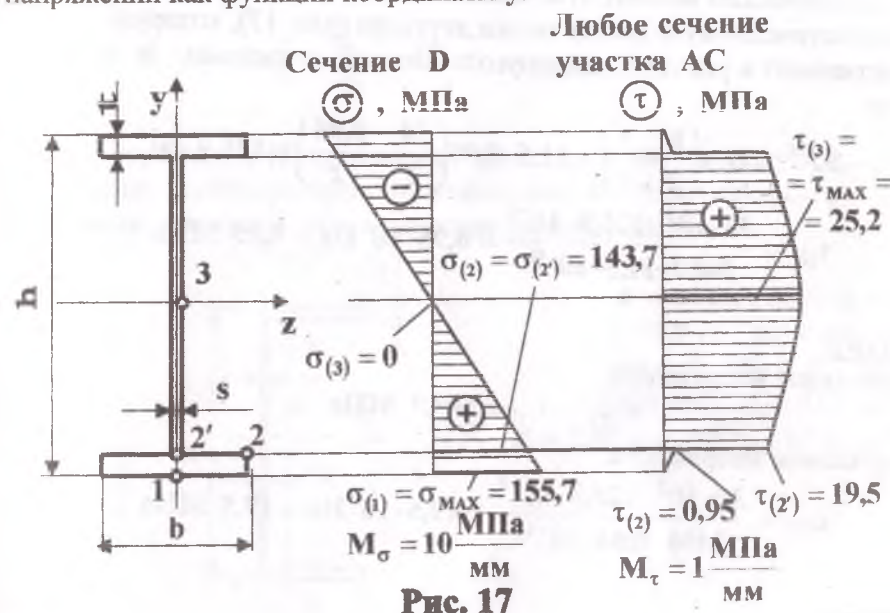
Из формулы для нормальных напряжений

$$\sigma = -\frac{M_{\text{расч}}}{I_z} \cdot y$$

видно, что нормальные напряжения линейно меняются по высоте сечения (y в первой степени). Графиком линейной зависимости является прямая линия. На оси z ($y = 0$) нормальные напряжения равны нулю. Из формулы Журавского для касательных напряжений

$$\tau = \frac{Q_{\text{расч}} \cdot S_z^{\text{отс}}}{I_z \cdot b_y}$$

следует, что на участках сечения, где b_y не меняется (по высоте полки и по высоте стенки профиля), касательные напряжения меняются по закону изменения статического момента отсеченной части – по квадратичному закону. Вычислим напряжения в характерных точках (1, 2, 2', 3) и построим эпюры (графики) напряжений как функции координаты y .



Точка 1

Нормальное напряжение

$$\sigma_{(1)} = \sigma_{\text{MAX}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_z} = \frac{45 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 155,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 155,7 \text{ МПа} .$$

Касательное напряжение

$\tau_{(1)} = 0$, так как $S_z^{\text{отс}} = 0$ для этой точки.

Точка 2

Нормальное напряжение

$$\sigma_{(2)} = \frac{M_{\text{расч}}}{I_z} \cdot y = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{24}{2} - 0,95\right) \cdot 10^{-2}}{3460 \cdot 10^{-8}} = 143,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 143,7 \text{ МПа}.$$

Касательное напряжение.

Статический момент отсеченной части относительно оси z равен статическому моменту полки двутавра (рис. 17), которую представляют в расчетах прямоугольником со сторонами b и t. Тогда

$$S_z^{\text{отс}} = b \cdot t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 11,5 \cdot 0,95 \left(\frac{24}{2} - \frac{0,95}{2}\right) = 125,9 \text{ см}^3,$$

$$\tau_{(2)} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 125,9 \cdot 10^{-6}}{3460 \cdot 11,5 \cdot 10^{-10}} = 0,95 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,95 \text{ МПа}.$$

Точка 2'

Нормальное напряжение

$$\sigma_{(2')} = \sigma_{(2)} = 143,7 \text{ МПа}.$$

Касательное напряжение

$$\tau_{(2')} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 125,9 \cdot 10^{-6}}{3460 \cdot 0,56 \cdot 10^{-10}} = 19,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 19,5 \text{ МПа}.$$

Точка 3

Нормальное напряжение

$$\sigma_{(3)} = 0, \text{ так как } y = 0.$$

Касательное напряжение

$$\tau_{(3)} = \tau_{\text{max}} = 25,2 \text{ МПа}.$$

4.2.3.5. Знаки напряжений

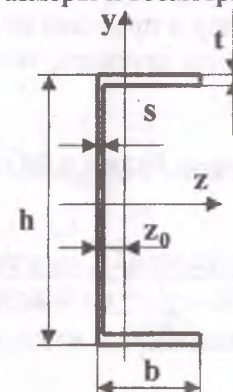
Знак касательных напряжений τ совпадает со знаком поперечной силы $Q_{\text{расч}}$. Учитывая, что эпюра моментов строится на сжатом волокне, а $M_{\text{расч}} = 45 > 0$, волокна выше оси z сжаты, ниже - растянуты.

4.2.4. Подбор сечения, составленного из двух швеллеров

Необходимый момент сопротивления сечения был нами найден в пункте 4.2.1 и равен $W_z = 281,2 \text{ см}^3$. Так как сечение состоит из двух швеллеров, то требуемый момент сопротивления одного швеллера равен

$$W_z^C = \frac{W_z}{2} = \frac{281,2}{2} = 140,6 \text{ см}^3.$$

По сортаменту [5] принимаем швеллер № 20. Упрощенное изображение швеллера представлено на рис. 18. Швеллер имеет следующие размеры и геометрические характеристики:



$$h = 20 \text{ см}, b = 7,6 \text{ см},$$

$$t = 0,9 \text{ см}, s = 0,52 \text{ см},$$

$$A = 23,4 \text{ см}^2, W_z = 152 \text{ см}^3,$$

$$I_z = 1520 \text{ см}^4, I_y = 113 \text{ см}^4,$$

$$Z_0 = 2,07 \text{ см}, S_z^{\text{отс}} = 87,8 \text{ см}^3.$$

Рис. 18

4.2.4.1. Проверка сечения на прочность по нормальным напряжениям

Так как $W_z = 152 > W_z^* = 140,6 \text{ см}^3$, нормальное напряжение в опасной точке (наиболее удаленной от оси z) будет меньше допускаемого.

4.2.4.2. Проверка сечения на прочность по касательным напряжениям

Условие прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\text{расч}} \cdot S_z^{\text{отс}}}{Y_z \cdot b_y} \leq [\tau] .$$

Подставляя в последнее выражение значения входящих в него величин из рис. 18, получим

$$\tau_{\max} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 87,8 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1520 \cdot 2 \cdot 0,52 \cdot 10^{-10}} = 16,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 16,7 \text{ МПа} < [\tau] = 100 \text{ МПа} .$$

Условию прочности по касательным напряжениям сечение удовлетворяет.

Сечение из двух швеллеров требует проверки по главным напряжениям. В конструкциях пары швеллеров устанавливают стенка к стенке, что в сечении дает двутавр и проверка по главным напряжениям оказывается такой же, как для двутавра, поэтому здесь не приводится.

4.2.4.3. Сравнение площадей двутавровой балки и балки, составленной из двух швеллеров

Площадь двутаврового сечения по сортаменту $A^I = 34,8 \text{ см}^2$.
Площадь сечения из двух швеллеров $A^{2C} = 2 \cdot 23,4 = 46,8 \text{ см}^2$.
Материалоемкость двутавровой балки меньше, чем из двух швеллеров на

$$\frac{A^{2C} - A^I}{A^I} \cdot 100 = \frac{46,8 - 34,8}{34,8} \cdot 100 = 34,5\% .$$

КОНЕЦ

4.2.5. Проверка двутавровой балки на жесткость

Из условия прочности в п. 4.2.3. было выбрано сечение в виде двутавра № 24.

Исходными данными для проведения проверки являются: геометрическая характеристика сечения $I_z = 3460 \text{ см}^4$;

допустимое значение относительного прогиба $\left[\frac{y}{\ell} \right] = 0,002$;

модуль продольной упругости для стали $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$.

Расчетная схема балки и эпюра момента представлены на рис. 19.

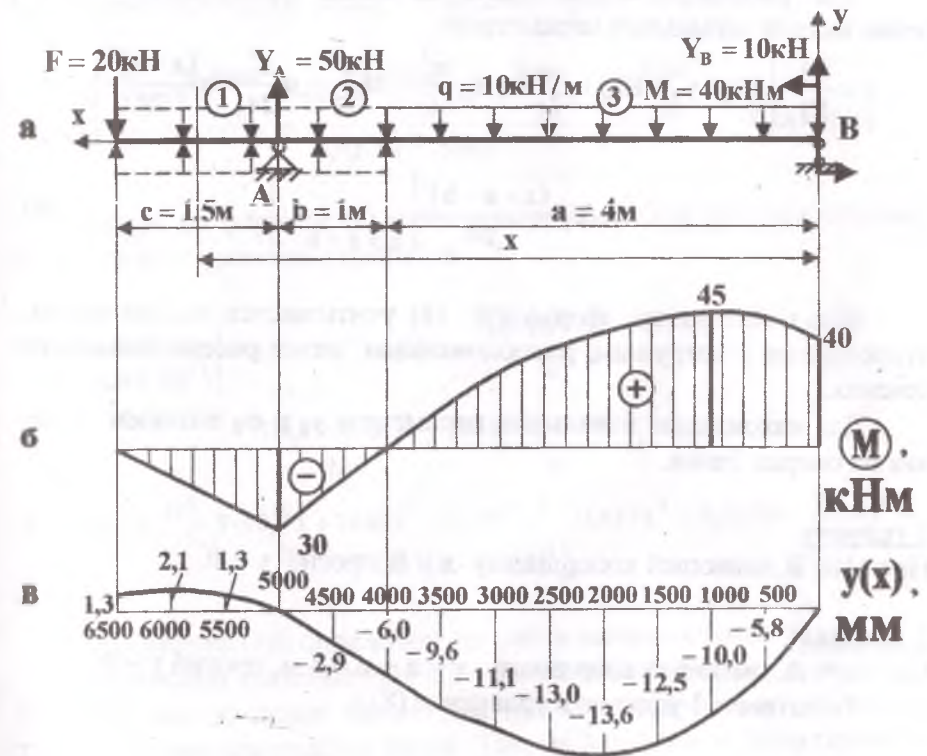


Рис. 19

Перемещения определяем с помощью метода начальных параметров. Начало координат выбираем на правом конце балки, на опоре В. При этом ось y направляем вверх, ось x — влево. Распре-

деленную нагрузку, действующую вниз, продолжим до левого конца балки. Для этой нагрузки координата $a_q = 0$ (см. уравнение (7)). Добавленную часть уравновесим нагрузкой, равной ей по величине, но действующей вверх, для которой координата $a_q = a = 4\text{ м}$.

Для 1 участка балки, как для участка наиболее удаленного от начала координат, напишем выражение изгибающего момента, используя правило знаков для правой части

$$M = \sum M^{\text{пр}} = Y_B \cdot x + M \cdot x^0 - \frac{q \cdot x^2}{2} + \frac{q(x-a)}{2} + Y_A(x-a-b)$$

Для рассматриваемой задачи напишем универсальное уравнение метода начальных параметров:

$$y = \frac{1}{EI_Z} \left[EI_Z \cdot y_0 + EI_Z \cdot \varphi_0 \cdot x + Y_B \frac{x^3}{6} + M \frac{x^2}{2} - q \frac{x^4}{24} + q \frac{(x-a)^4}{24} + Y_A \frac{(x-a-b)^4}{24} \right] \quad (8)$$

При пользовании формулой (8) учитываются только члены, относящиеся к нагрузкам, расположенным левее рассматриваемого сечения.

Для нахождения начальных параметров y_0 и φ_0 запишем условия на опорах балки.

1 условие

На опоре В, имеющей координату $x = 0$, прогиб $y = 0$.

2 условие

На опоре А, имеющей координату $x = a + b = 5\text{ м}$, прогиб $y = 0$.

Подставим 1 условие в уравнение (8):

$$0 = \frac{1}{EI_Z} [EI_Z \cdot y_0 + 0 + 0 + 0 - 0]$$

Отсюда следует, что прогиб в начале координат $y_0 = 0$.

Подставим 2 условие в уравнение (8):

$$0 = \frac{1}{EI_Z} \left[EI_Z \varphi_0(a+b) + Y_B \frac{(a+b)^3}{6} + M \frac{(a+b)^2}{2} - q \frac{(a+b)^4}{24} + q \frac{b^4}{24} \right]$$

Откуда

$$\varphi_0 = \frac{-Y_B \frac{(a+b)^3}{6} - M \frac{(a+b)^2}{2} + q \frac{(a+b)^4}{24} - q \frac{b^4}{24}}{EI_Z \cdot (a+b)} \quad (9)$$

где EI_Z - жесткость при изгибе, $EI_Z = 2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4 = 6,92 \cdot 10^{12} \text{ Н} \cdot \text{мм}^2$.

Подставив численные значения величин в формулу (9) (силу выражаем в ньютонах, длину - в миллиметрах), получим

$$\varphi_0 = \frac{-10 \cdot 10^3 \frac{5000^3}{6} - 40 \cdot 10^6 \frac{5000^2}{2} + 10 \frac{5000^4}{24} - 10 \frac{1000^4}{24}}{6,92 \cdot 10^{12} \cdot 5000} = -0,013 \text{ рад.}$$

Теперь по формуле (8) найдем выражение для прогиба сечений балки, то есть уравнение прогибов

$$y = \frac{1}{6,92 \cdot 10^{12}} \left[-6,92 \cdot 10^{12} \cdot 0,013x + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot x^3}{6} + \frac{40 \cdot 10^6 \cdot x^2}{2} - \frac{10x^4}{24} + \frac{10(x-4000)^4}{24} + \frac{50 \cdot 10^3(x-5000)^3}{6} \right] =$$

$$= 1,445 \cdot 10^{-13} \left[-9 \cdot 10^{10}x + 1666x^3 + 2 \cdot 10^7x^2 - 0,417x^4 + 0,417(x-4000)^4 + 8333(x-5000)^3 \right] \quad (10)$$

Уравнение (10) определяет прогиб в любом сечении балки.

Вычислим значения прогибов в 14 сечениях балки с шагом $\Delta x = 500 \text{ мм}$ по длине балки. Для примера рассчитаем по одному прогибу на каждом участке балки. Так, на 3 участке найдем прогиб в сечении с координатой $x = 1000 \text{ мм}$:

$$y|_{1000} = 1,445 \cdot 10^{-13} (-9 \cdot 10^{10} \cdot 1000 + 1666 \cdot 1000^3 + 2 \cdot 10^7 \cdot 1000^2 - 0,417 \cdot 1000^4) = -10,0 \text{ мм.}$$

На 2 участке определим прогиб в сечении с координатой $x = 4500$ мм:

$$y|_{4500} = 1,445 \cdot 10^{-13} (-9 \cdot 10^{10} \cdot 4500 + 1666 \cdot 4500^3 + 2 \cdot 10^7 \cdot 4500^2 - 0,417 \cdot 4500^4 + 0,417 \cdot 500^4) = -2,9 \text{ мм}.$$

На 1 участке определим прогиб на левом конце балки в сечении с координатой $x = 6500$ мм:

$$y|_{6500} = 1,445 \cdot 10^{-13} (-9 \cdot 10^{10} \cdot 6500 + 1666 \cdot 6500^3 + 2 \cdot 10^7 \cdot 6500^2 - 0,417 \cdot 6500^4 + 0,417 \cdot 2500^4 + 8333 \cdot 1500^3) = 1,3 \text{ мм}.$$

Результаты вычислений представим в виде таблицы:

Таблица

1	2	3	4	5	6	7	8
x , мм	0	500	1000	1500	2000	2500	3000
y , мм	0	-5,8	-10,0	-12,5	-13,6	-13,0	-11,1

Продолжение таблицы

9	10	11	12	13	14	15
3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500
-9,6	-6,0	-2,9	0	1,3	2,1	1,3

На рис. 19,в показана эпюра прогибов $y(x)$, построенная по расчетным значениям прогибов.

Следует иметь в виду, что в тех сечениях балки, в которых изгибающий момент равен нулю, на упругой линии должна быть точка перегиба. На участках балки, где изгибающий момент положителен, выпуклость упругой линии направлена вниз, а где изгибающий момент отрицателен, выпуклость упругой линии направлена вверх.

Определим максимальные по абсолютной величине значения прогибов в пролете $|u_{\max, \text{прол}}|$ и на консоли $|u_{\max, \text{конс}}|$:

$$|u_{\max, \text{прол}}| = 13,6 \text{ мм},$$

$$|u_{\max, \text{конс}}| = 2,1 \text{ мм}.$$

Проверим выполнение условия жесткости в пролете

$$\frac{|u_{\max, \text{прол}}|}{a+b} = \frac{13,6}{5000} = 0,0027 > \left[\frac{y}{\ell} \right] = 0,002.$$

Условие жесткости в пролете не выполняется.

Условие жесткости на консоли

$$\frac{|u_{\max, \text{конс}}|}{2 \cdot c} = \frac{2,1}{3000} = 0,00067 < \left[\frac{y}{\ell} \right] = 0,002.$$

Условие жесткости на консоли выполняется.

В целом жесткость двутавровой балки № 24 не достаточна.

Жесткость балки должна быть увеличена в $\frac{0,0027}{0,002} = 1,35$ раз.

Следовательно, момент инерции сечения балки должен быть больше $3460 \cdot 1,35 = 4671 \text{ см}^4$. По сортаменту [4] выбираем сечение в виде двутавра № 27, у которого $I_z = 5010 \text{ см}^4$.

Проверяем жесткость новой балки в сечении с координатой $x = 2000$ мм:

$$y|_{2000} = \frac{13,6 \cdot 3460}{5010} = 9,4 \text{ мм}.$$

$$\text{Условие жесткости в пролете } \frac{9,4}{5000} = 0,0019 < \left[\frac{y}{\ell} \right] = 0,002$$

выполняется.

Следовательно, новое сечение балки (двутавр № 27) имеет достаточную прочность и жесткость.

При решении задач по проверке жесткости балок, требующих большой вычислительной работы, можно использовать компьютер. С этой целью в пособии приводится программа расчета на жесткость балки (Приложение 2).

4.3. Подбор сечения деревянной консольной балки

4.3.1. Исходные данные

Задача подбора сечения решается для балки, приведенной в разделе 3.4. При этом рассматривается 3 случая: круглое сечение, квадратное сечение, прямоугольное сечение.

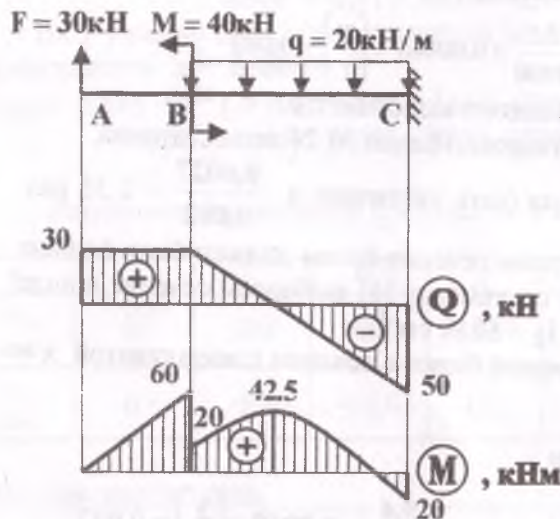


Рис. 20

4.3.2. Определение расчетные усилий

Сечение рассчитываем на расчетные усилия, принимаемые по рис. 20:

$$M_{\text{расч}} = |M|_{\text{max}} = 60 \text{ кНм},$$

$$Q_{\text{расч}} = |Q|_{\text{max}} = 50 \text{ кН}, Q_{\text{расч}} < 0.$$

4.3.3. Определение диаметра балки круглого поперечного сечения

Запишем условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Из условия прочности определяем требуемый момент сопротивления

$$W_z^{\text{тр}} = \frac{M_{\text{расч}}}{[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 6000 \text{ см}^3.$$

Осевой момент сопротивления круга определяется по формуле

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Отсюда, при максимальном диаметре деловой древесины $d_{\text{max}} = 30 \text{ см}$ осевой момент сопротивления одного бревна не может быть больше

$$W_z^1 = \frac{3,14 \cdot 30^3}{32} = 2649 \text{ см}^3.$$

Находим число бревен n , чтобы удовлетворить условию прочности по нормальным напряжениям

$$n = \frac{W_z^{\text{тр}}}{W_z^1} = \frac{6000}{2649} = 2,26.$$

Так как число бревен целое, принимаем $n = 3$, тогда момент сопротивления одного бревна должен быть равен

$$W_{z1} = \frac{W_z^{\text{тр}}}{n} = \frac{6000}{3} = 2000 \text{ см}^3.$$

Требуемый по расчету диаметр бревна

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_{z1}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2000 \cdot 10^{-6}}{3,14}} = 0,273 \text{ м} = 27,5 \text{ см}.$$

Результат округлен до ближайшего размера кратного 5 мм. Площадь сечения

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot n = \frac{3,14 \cdot 27,5^2}{4} \cdot 3 = 1781 \text{ см}^2.$$

4.3.3.1. Проверка сечения на прочность по нормальным напряжениям

Условие прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_z} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 32}{3,14 \cdot 0,273^3 \cdot 3} = 9,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 9,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 10 \text{ МПа}$$

выполняется.

4.3.3.2. Проверка на прочность сечения по касательным напряжениям

Формула Журавского для максимального касательного напряжения круга преобразуется к виду

$$\tau_{\max} = \frac{4 Q_{\text{расч}}}{3 A}$$

где A - площадь поперечного сечения.

Условие прочности по касательным напряжениям

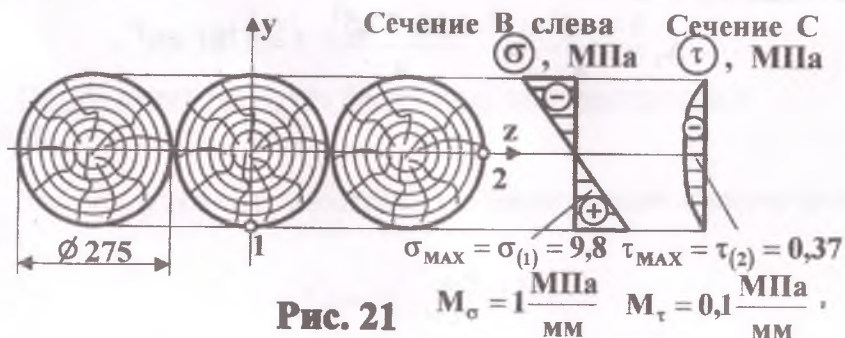
$$\tau_{\max} = \frac{4 Q_{\text{расч}}}{3 A_1} \leq [\tau]$$

Подстановка значений величин, входящих в последнее выражение дает

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{50 \cdot 10^3}{1781 \cdot 10^{-4}} = 0,37 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,37 \text{ МПа} < [\tau] = 2 \text{ МПа},$$

т.е. условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

4.3.3.3. Построение эпюр нормальных σ и касательных τ напряжений в опасных сечениях балки



Максимальное нормальное напряжение в точке 1

$$\sigma_{\max} = \sigma_{(1)} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_z} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 32}{3 \cdot 3,14 \cdot 27,5^3 \cdot 10^{-6}} = 9,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 9,8 \text{ МПа}.$$

Максимальное касательное напряжение возникает в точке 2, значение которого найдено выше и равно $\tau_{\max} = \tau_{(2)} = 0,37 \text{ МПа}$.

4.3.3.4. Знаки напряжений

Из эпюр на рис. 21 следует, что нормальные напряжения растягивают нижние волокна, касательные напряжения имеют отрицательный знак.

4.3.4. Определение размеров балки, составленной из брусьев квадратного поперечного сечения

Диаметр круга является диагональю вписанного квадрата, поэтому из круглого бревна можно изготовить брус, поперечное сечение которого квадрат со стороной a .

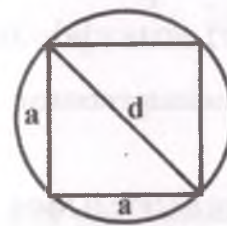


Рис. 22

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2 a^2$$

$$\text{Отсюда } a = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

То есть при $d = 30 \text{ см}$, сторона квадрата не может превышать

$$a = \frac{30}{\sqrt{2}} = 21,2 \text{ см}.$$

Момент сопротивления бруса квадратного сечения равен

$$W_z^2 = \frac{a^3}{6} = \frac{21,2^3}{6} = 1588 \text{ см}^3.$$

Число брусьев из условия прочности по нормальным напряжениям

$$n = \frac{W_z^{\text{TP}}}{W_z^2} = \frac{6000}{1588} = 3,78.$$

Принимаем $n = 4$.

Требуемый момент сопротивления одного бруса

$$W_{z2} = \frac{W_z^{TP}}{n} = \frac{6000}{4} = 1500 \text{ см}^3.$$

Размер a сторон квадратного сечения равен

$$a = \sqrt[3]{6 \cdot W_{z2}} = \sqrt[3]{6 \cdot 1500 \cdot 10^{-6}} = 0,208 \text{ м} = 20,8 \text{ см}.$$

Принимаем $a = 21 \text{ см}$.

Площадь сечения из четырех квадратных брусьев составит

$$A_2 = a^2 \cdot 4 = 21^2 \cdot 4 = 1764 \text{ см}^2.$$

4.3.4.1. Проверка сечения на прочность по нормальным напряжениям

Условие прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Подстановка численных величин, входящих в последнее выражение, дает

$$\sigma_{\max} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 6}{4 \cdot 0,21^3} = 9,72 \cdot 10^6 \text{ Па} = 9,72 \text{ МПа} < [\sigma] = 10 \text{ МПа}.$$

Т.е. условие прочности по нормальным напряжениям выполняется.

4.3.4.2. Проверка сечения на прочность по касательным напряжениям

Формула Журавского для максимальных касательных напряжений квадратного (прямоугольного) сечения преобразуется к виду

$$\tau_{\max} = \frac{3 Q}{2 A_2},$$

где A_2 - площадь поперечного сечения.

Условие прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{3 Q_{\text{расч}}}{2 A_2} \leq [\tau].$$

После подстановки величин, входящих в последнее выражение, получим

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{50 \cdot 10^3}{1764 \cdot 10^{-4}} = 0,43 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,43 \text{ МПа} < [\tau] = 2 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

4.3.4.3. Построение эпюр нормальных σ и касательных τ напряжений в опасных сечениях балки

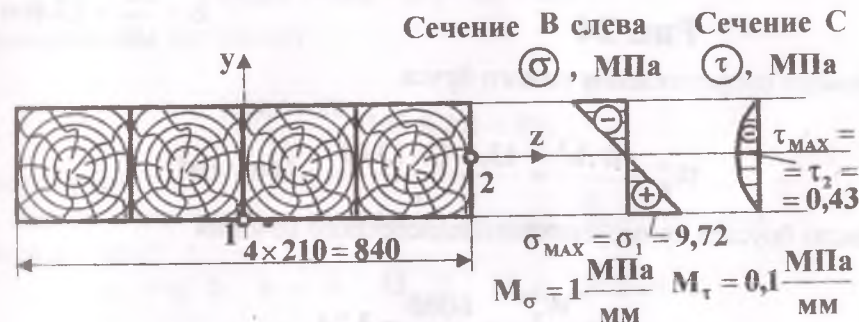


Рис. 23

Максимальное нормальное напряжение в точке 1

$$\sigma_{\max} = \sigma_{(1)} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_z} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 6}{4 \cdot 21^3 \cdot 10^{-6}} = 9,72 \cdot 10^6 \text{ Па} = 9,72 \text{ МПа}.$$

Максимальное касательное напряжение в точке 2

$$\tau_{\max} = \tau_{(2)} = 0,43 \text{ МПа}.$$

Знаки напряжений такие же как и в балке из круглых сечений.

4.3.5. Определение размеров балки, составленной из брусков прямоугольного поперечного сечения.

Из бревна круглого сечения можно изготовить брус, размеры сторон которого b и h при заданном отношении $\frac{h}{b} = 2$, равны, как следует из рис. 24 :

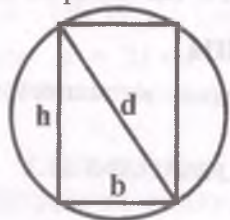


Рис. 24

Момент сопротивления одного бруса

$$W_z^3 = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{13,4 \cdot (2 \cdot 13,4)^2}{6} = 1604 \text{ см}^3.$$

Число брусков прямоугольного поперечного сечения

$$n = \frac{W_z^{TP}}{W_z^3} = \frac{6000}{1604} = 3,74,$$

принимаем $n = 4$.

Требуемый момент сопротивления одного бруса

$$W_{z3} = \frac{W_z^{TP}}{n} = \frac{6000}{4} = 1500 \text{ см}^3.$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения при $\frac{h}{b} = 2$

$$W_{z3} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2 \cdot b)^2}{6} = \frac{2}{3} \cdot b^3.$$

Тогда размер b поперечного сечения

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_{z3}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1500 \cdot 10^{-6}}{2}} = 0,131 \text{ м} = 13,1 \text{ см}.$$

Принимаем $b = 13 \text{ см}$, $h = 2 \cdot b = 2 \cdot 13 = 26 \text{ см}$.

4.3.5.1. Проверка сечения на прочность по нормальным напряжениям

Так как размеры уменьшены, проверяем принятое сечение на прочность по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_{z3}} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 6}{4 \cdot 13 \cdot (2 \cdot 13)^2 \cdot 10^{-6}} = 10,24 \cdot 10^6 \text{ Па} = 10,24 \text{ МПа} > [\sigma] = 10 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение составляет

$$\frac{10,24 - 10}{10} \cdot 100 = 2,4 < 5\%,$$

что допустимо.

Площадь поперечного сечения из четырех прямоугольных брусков составит

$$A_3 = n \cdot b \cdot h = 4 \cdot 13 \cdot 26 = 1352 \text{ см}^2.$$

4.3.5.2. Проверка сечения на прочность по касательным напряжениям

Условие прочности по касательным напряжениям для прямоугольного сечения имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\text{расч}}}{A_3} \leq [\tau].$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{50 \cdot 10^3}{1352 \cdot 10^{-4}} = 0,555 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,555 \text{ МПа} < [\tau] = 2 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

4.3.5.3. Построение эпюр напряжений в опасных сечениях балки

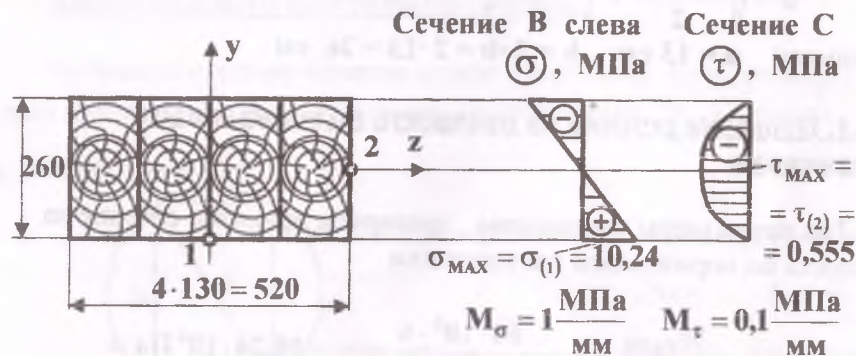


Рис. 25

Максимальное нормальное напряжение в точке 1 равно

$$\sigma_{\text{MAX}} = \sigma_{(1)} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_z} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 6}{4 \cdot 13 \cdot 26^3 \cdot 10^{-6}} = 10,24 \cdot 10^6 \text{ Па} = 10,24 \text{ МПа}.$$

Максимальное касательное напряжение в точке 2

$$\tau_{\text{MAX}} = \tau_{(2)} = 0,555 \text{ МПа}.$$

4.3.6. Сравнение трех балок по расходу материала

Наиболее рациональной по материалоемкости оказалась балка, состоящая из брусков прямоугольного сечения. Экономия материала в сравнении с балкой из круглых брусков составляет

$$\frac{A_1 - A_3}{A_3} \cdot 100 = \frac{1781 - 1352}{1352} \cdot 100 = 31,7\%.$$

Экономия материала в сравнении с сечением из квадратов равна

$$\frac{A_2 - A_3}{A_3} \cdot 100 = \frac{1764 - 1352}{1352} \cdot 100 = 30,5\%.$$

Однако, на балку из прямоугольных брусков требуется ¹⁰четыре бревна вместо ¹⁰трех из круглых. Окончательно вопрос о рациональности решается с учетом дополнительных факторов целесообразности.

4.4. Подбор сечения стального вала

4.4.1. Исходные данные

Задача подбора сечения решается для вала, приведенного в разделе 3.1.

Дополнительные данные

Допускаемое касательное напряжение

$$[\tau] = 50 \text{ МПа}.$$

Допускаемый погонный угол закручивания

$$[\alpha'] = 0,015 \text{ рад/м}.$$

Определить из условия прочности и жесткости диаметр:

а - вала сплошного сечения;

б - вала трубчатого сечения,

при $c = 0,8$,

где $c = \frac{d}{D}$ - отношение внутреннего диаметра к наружному диаметру сечения.

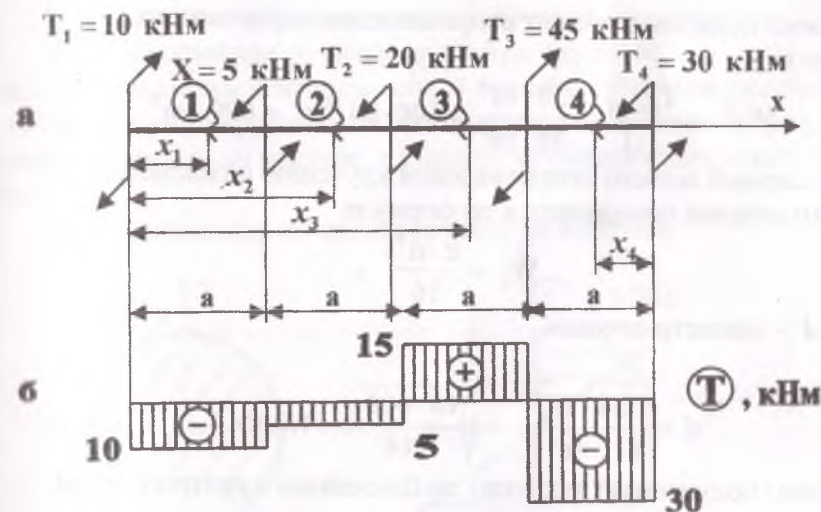


Рис. 26

4.4.2. Расчетное усилие

Расчетным усилием считается максимальный по модулю крутящий момент на эпюре Т (рис. 26)

$$T_{\text{расч}} = |T_{\text{max}}| = 30 \text{ кНм}.$$

Опасным сечением является любое сечение на 4 участке.

4.4.3. Определение диаметра вала сплошного поперечного сечения

Запишем условие прочности при кручении:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{T_{\text{расч}}}{W_p} \leq [\tau],$$

где τ_{max} - максимальное касательное напряжение от кручения;
 $T_{\text{расч}}$ - расчетный крутящий момент;
 W_p - полярный момент сопротивления кручению;
 $[\tau]$ - допускаемое касательное напряжение.

Требуемый полярный момент сопротивления определим из выражения

$$W_p^{\text{тр}} = \frac{T_{\text{расч}}}{[\tau]} = \frac{30 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^6} = 600 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 600 \text{ см}^3.$$

Полярный момент сопротивления кручению сплошного круглого сечения определяется по формуле

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16},$$

где d - диаметр сечения.

Тогда

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_p^{\text{тр}}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 600}{3,14}} = 14,6 \text{ см}.$$

Округляем полученную величину до ближайшего кратного 5 мм значения и принимаем $d = 14,5 \text{ см}$.

4.4.3.1. Проверка сечения по условию прочности при кручении

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_p} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 14,5^3 \cdot 10^{-6}} = 50,14 \cdot 10^6 \text{ Па} = 50,14 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение

$$\frac{\tau_{\text{max}} - [\tau]}{[\tau]} \cdot 100 = \frac{50,14 - 50}{50} \cdot 100 = 0,28 < 5\%,$$

что допускается. Следовательно, условие прочности выполняется.

Площадь сплошного круглого сечения

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 14,5^2}{4} = 165 \text{ см}^2.$$

4.4.3.2. Построение эпюры касательных напряжений τ в опасном сечении

Из формулы распределения касательных напряжений в точках сечения

$$\tau = \frac{T}{I_p} \cdot \rho,$$

где T - крутящий момент;
 I_p - полярный момент инерции сечения при кручении;
 ρ - расстояние от точки до центра кручения,

видно, что касательное напряжение - линейная функция расстояния от точки до центра кручения. Максимальное касательное напряжение возникает в точках на контуре, а в центре кручения напряжение равно нулю.

Знак τ совпадает со знаком крутящего момента.

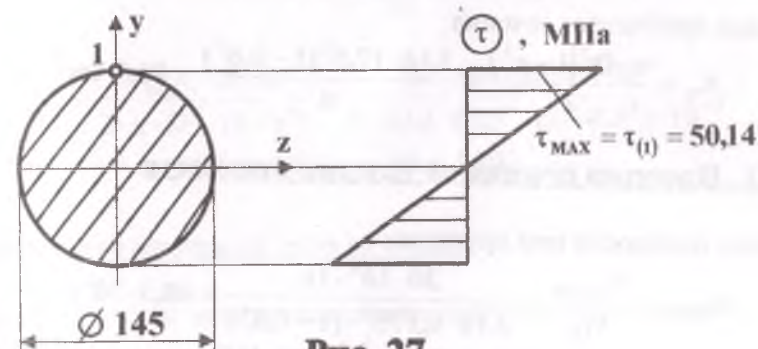


Рис. 27

Максимальное касательное напряжение в точке 1

$$\tau_{\max} = \tau_{(1)} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 32 \cdot 0,145}{3,14 \cdot 0,145^4 \cdot 2} = 50,14 \cdot 10^6 \text{ Па} = 50,14 \text{ МПа}.$$

4.4.4. Определение диаметров вала трубчатого сечения

Выше был найден требуемый момент сопротивления сечения кручению

$$W_p^{\text{TP}} = 600 \text{ см}^3.$$

Полярный момент сопротивления трубчатого сечения определяется по формуле

$$W_p = \frac{\pi \cdot D^3 \cdot (1 - c^4)}{16},$$

где D – наружный диаметр трубчатого сечения.

Приравняв правые части двух последних равенств, получим

$$\frac{\pi \cdot D^3 \cdot (1 - c^4)}{16} = 600 \text{ см}^3,$$

откуда

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 600}{\pi \cdot (1 - c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 600}{3,14 \cdot (1 - 0,8^4)}} = 17,3 \text{ см}.$$

Результат округляем до ближайшего кратного 5 мм размера

$$D = 17,5 \text{ см}.$$

Внутренний диаметр трубчатого сечения равен

$$d = c \cdot D = 0,8 \cdot 17,5 = 14 \text{ см}.$$

Площадь трубчатого сечения

$$A_2 = \frac{\pi \cdot D^2 (1 - c^2)}{4} = \frac{3,14 \cdot 17,5^2 (1 - 0,8^2)}{4} = 86,5 \text{ см}^2.$$

4.4.4.1. Проверка сечения по условию прочности

Условие прочности при кручении

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\text{расч}}}{W_p} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 0,175^3 \cdot (1 - 0,8^4)} = 48,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 48,3 \text{ МПа} < [\tau] = 50 \text{ МПа}$$

выполняется.

4.4.4.2. Построение эпюры касательных напряжений τ для трубчатого сечения

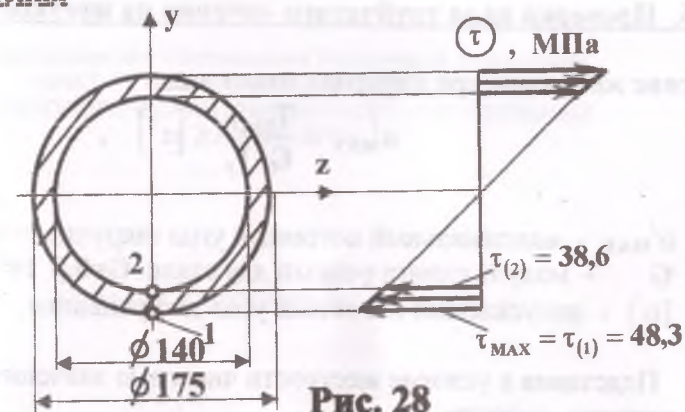


Рис. 28

Вычисление величин касательных напряжений в точках 1 и 2:

$$\tau_{\max} = \tau_{(1)} = \frac{T_{\text{расч}}}{W_p} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 0,175^3 \cdot (1 - 0,8^4)} = 48,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 48,3 \text{ МПа},$$

$$\tau_{(2)} = \frac{T_{\text{расч}} \cdot d}{I_p \cdot 2}.$$

Полярный момент инерции при кручении определяется выражением

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4 \cdot (1 - c^4)}{32},$$

отсюда

$$\tau_{(2)} = \frac{T_{\text{расч}} \cdot d \cdot 32}{2 \cdot \pi \cdot D^4 \cdot (1 - c^4)} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 32 \cdot 14 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 3,14 \cdot 17,5^4 \cdot (1 - 0,8^4) \cdot 10^{-8}} = 38,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 38,6 \text{ МПа}.$$

4.4.5. Сравнение площадей двух сечений

Трубчатое сечение по материалоемкости оказалось экономичнее сплошного на

$$\frac{A_1 - A_2}{A_2} \cdot 100 = \frac{165 - 86,5}{86,5} \cdot 100 = 90,8\%$$

4.4.6. Проверка вала трубчатого сечения на жесткость

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\alpha'_{\max} = \frac{T_{\text{расч}}}{G \cdot I_p} \leq [\alpha'] ,$$

где $\alpha'_{\max}$ - максимальный погонный угол закручивания;
 G - модуль сдвига равный для стали $G=0,8 \cdot 10^5$ МПа;
 $[\alpha']$ - допускаемый погонный угол закручивания.

Подставив в условие жесткости числовые значения входящих туда величин, получим

$$\alpha'_{\max} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 32}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 17,5^4 \cdot (1 - 0,8^4) \cdot 10^{-8}} = 0,0062 < [\alpha'] = 0,015 \frac{\text{рад}}{\text{м}}$$

Таким образом, трубчатое сечение найденных размеров удовлетворяет условию жесткости.

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА

Министерство образования Российской Федерации
 САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
 ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ
 ПОЛИМЕРОВ

Кафедра сопротивления материалов

Расчетно-графическая работа №...

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ
 ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ДЕФОРМАЦИИ

ШИФР 001

РАЗРАБОТАЛ: И.И. ИВАНОВ
 ГР.359
 ПРОВЕРИЛ: П.П. ПЕТРОВ

Санкт-Петербург
 2002

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ПРОГРАММА РАСЧЕТА ПРОГИБОВ БАЛКИ

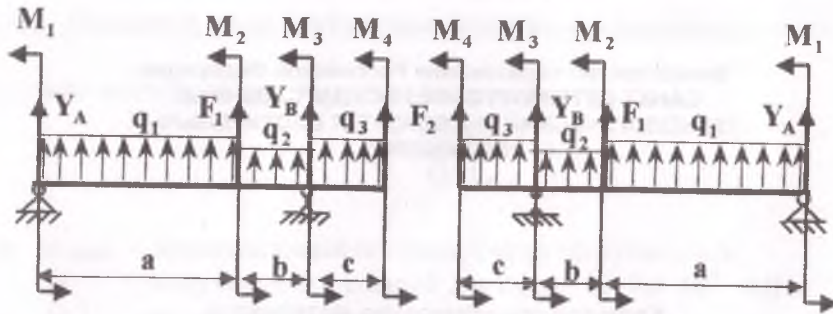


Рис. 29. Схемы балок (показано положительное направление сил)

```

10 REM Расчет прогибов 2-х-опорных консольных балок
20 REM Составлена Шемякиным Э.В. на Бэйсике
30 OPTION BASE 1: DEFINT I,J,K,N: DEFDBL S, Y
40 DEF SNG A = H,L,M,Q,X: DIM Y(100): CLS
50 INPUT "Для левой схемы введите 1, для правой - 1": N
60 INPUT "Введите длины участков a,b,c в метрах": A,B,C
70 PRINT: INPUT "Введите модуль Юнга в МПа E=": E
80 INPUT "Введите осевой момент инерции в см4 Iz=": EI
90 EO=.00001*E*EI: CLS
100 PRINT "При вводе требуемых параметров, если они равны 0,"
110 PRINT "введите 0": PRINT
120 PRINT "Введите в кНм изгибающие моменты M1,M2,M3,M4"
130 INPUT M1,M2,M3,M4: MO=M1+M2+M3+M4: PRINT
140 INPUT "Введите в кН усилия F1,F2": F1,F2: PRINT
150 PRINT "Введите распределенную нагрузку q в кН/м и"
160 PRINT "соответствующую ей длину участка L в метрах"
170 INPUT q1,L1: Q1=L1: INPUT q2,L2: Q2=L2
180 INPUT q3,L3: Q3=L3
190 L4=A+B: L5=L4+C: PRINT: PRINT
200 YB=-F1*A-F2*L5-Q1*L1*L1/2-Q2*L2*(A+L2/2)-Q3*L3*
(L4+L3/2)
210 YB=(YB-MO/N)/L4: YA=-YB-F1-F2-Q1*L1-Q2*L2-Q3*L3
220 PRINT TAB(10)"Реакции опор в кН: Ya=": YA: Yb="YB

```

```

130 PRINT: REM Расчет угла поворота балки в начале координат
140 SO=0.5*N*M1*L4^2-YA*L4^3/6-Q1*L4^4/24+N*M2*B^2/2
150 SO=SO-F1*B^3/6-Q2*B^4/24
160 IF Q1 <> 0 AND L1 = A THEN SO=SO+Q1*B^4/24
170 S1=SO/L4: E2=S1/E0: I1=0: I9=0
180 PRINT "Угол поворота балки в начале координат =", E2
190 PRINT: REM Расчет прогибов балки в мм
200 INPUT "Введите в метрах шаг по оси x =": X0: CLS: I0=L5/X0
210 FOR X=0 TO L5 STEP X0
220 I=I+1: Y(I)=X*(S1-N*M1*X/2+YA*X^2/6+Q1*X^3/24)
230 IF X <= A THEN 400
240 X2=X-A: Y(I)=Y(I)+X2^2*(-N*M2/2+F1*X2/6+Q2*X2^2/24)
250 IF Q1=0 OR L1>A THEN 360 ELSE Y(I)=Y(I)-Q1*X2^4/24: I9=I
260 IF X <= L4 THEN 400
270 X3=X-L4: Y(I)=Y(I)+X3^2*(-N*M3/2+YB*X3/6+Q3*X3^2/24)
280 IF Q1=0 OR L1>L4 OR I9=1 THEN 390 ELSE Y(I)=Y(I)-Q1*
X3^4/24
290 IF Q2=0 OR L2>B THEN 400 ELSE Y(I)=Y(I)-Q2*X3^4/24
300 NEXT X
310 REM Вывод прогибов на экран или принтер
320 PRINT "Если печатать на бумагу, то введите 1"
330 INPUT "Если выводить результаты на экран, то 0": I2
340 I=0: IF I2=1 THEN LPRINT: LPRINT: LPRINT: GOTO 510
350 CLS: PRINT TAB(25)"X, м": TAB(35)"Прогиб: Y, мм"
360 FOR X=0 TO L5 STEP X0
370 I=I+1: X1=1000*Y(I)/E0
380 PRINT TAB(24)"X": PRINT USING "#.###": X1
390 PRINT TAB(37)"Y": PRINT USING "###.###": X1
400 INPUT "Запишите результаты и нажмите ENTER": I1: CLS
410 NEXT X
420 GOTO 560
430 LPRINT TAB(20)"Результаты расчетов прогибов балки"
440 LPRINT: LPRINT TAB(25)"X, м": TAB(35)"Прогиб: Y, мм"
450 FOR X=0 TO L5 STEP X0: I=I+1: X1=1000*Y(I)/E0
460 LPRINT TAB(24)"X": LPRINT USING "#.###": X1
470 LPRINT TAB(37)"Y": LPRINT USING "###.###": X1: NEXT X
480 CLS: PRINT "Если будет работать следующий студент,"
490 INPUT "то введите 1. Если нет, то 0": I2
500 IF I2=1 THEN ERASE Y: GOTO 30
510 END.

```

Литература

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М., МГТУ, 2000.
2. Костенко Н.А. и др. Сопротивление материалов. М., Высшая школа, 2000.
3. ГОСТ 6636-89. Нормальные диаметры и длины в машиностроении.
4. ГОСТ 8239-89. Сталь горячекатанная. Балки двутавровые.
5. ГОСТ 8240-89. Сталь горячекатанная. Швеллер.

Содержание

Стр.

	Введение.....	3
1.	Краткие сведения по теории	4
1.1.	Определение усилий в сечениях стержней	-
1.2.	Построение эпюр усилий.....	9
1.3.	Подбор сечений балок.....	11
1.4.	Перемещение при изгибе балок.....	14
2.	Варианты заданий.....	15
3.	Примеры решения задач по определению усилий.....	16
3.1.	Задача № 1. Построение эпюры крутящего момента T	-
3.1.1.	Исходные данные	-
3.1.2.	Определение неизвестного крутящего момента X	22
3.1.3.	Определение крутящих моментов на каждом участке	-
3.1.4.	Построение эпюры T	23
3.1.5.	Определение опасного участка	-
3.2.	Задача № 2. Построение эпюры продольной силы N	-
3.2.1.	Исходные данные	-
3.2.2.	Определение опорных реакций.....	24
3.2.3.	Определение продольных усилий.....	-
3.2.4.	Построение эпюры N	25
3.2.5.	Определение опасного сечения	-
3.3.	Задача № 3. Построение эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M	26
3.3.1.	Исходные данные	-
3.3.2.	Определение опорных реакций.....	-
3.3.3.	Определение усилий	27
3.3.4.	Построение эпюр Q и M	-
3.3.5.	Определение опасных сечений	29
3.4.	Задача № 5. Построение эпюр поперечной силы Q и изгибающего момента M	30
3.4.1.	Исходные данные	-
3.4.2.	Определение опорных реакций.....	-
3.4.3.	Определение усилий	-
3.4.4.	Построение эпюр Q и M	31
3.4.5.	Определение опасных сечений	32

5.	Задача № 6. Построение эпюр продольной силы N , поперечной силы Q и изгибающего момента M	32
5.1.	Исходные данные	-
5.2.	Определение опорных реакций.....	33
5.3.	Определение усилий	-
5.4.	Построение эпюр усилий.....	35
5.5.	Определение опасных сечений (участков).....	36
6.	Примеры решения задач по подбору сечений при различных видах деформации	37
6.1.	Подбор сечения штанги.....	-
6.1.1.	Исходные данные	-
6.1.2.	Построение эпюр усилий и напряжений	38
6.1.3.	Подбор площади поперечного сечения штанги	39
6.2.	Подбор сечения однопролетной консольной балки из прокатных профилей.....	40
6.2.1.	Исходные данные	-
6.2.2.	Определение расчетных усилий	41
6.2.3.	Подбор сечения двутавровой балки	-
6.2.3.1.	Проверка сечения на прочность по нормальным напряжениям	42
6.2.3.2.	Проверка сечения на прочность по касательным напряжениям	-
6.2.3.3.	Проверка прочности сечения по главным напряжениям	43
6.2.3.4.	Построение эпюр нормальных и касательных напряжений в опасных сечениях двутавра	44
6.2.3.5.	Знаки напряжений.....	47
6.2.4.	Подбор сечения, составленного из двух швеллеров	-
6.2.4.1.	Проверка сечения на прочность по нормальным напряжениям	48
6.2.4.2.	Проверка сечения на прочность по касательным напряжениям	-
6.2.4.3.	Сравнение площадей двутавровой балки и балки, составленной из двух швеллеров	-
6.2.5.	Проверка двутавровой балки на жесткость.....	49
6.3.	Подбор сечения деревянной консольной балки.....	53
6.3.1.	Исходные данные	-
6.3.2.	Определение расчетных усилий	54

4.3.3.	Определение диаметра балки круглого поперечного сечения	-
4.3.3.1.	Проверка сечения на прочность по нормальным напряжениям	56
4.3.3.2.	Проверка сечения на прочность по касательным напряжениям	-
4.3.3.3.	Построение эпюр нормальных и касательных напряжений в опасных сечениях балки.....	-
4.3.3.4.	Знаки напряжений.....	57
4.3.4.	Определение размеров балки, составленной из брусьев квадратного поперечного сечения	-
4.3.4.1.	Проверка сечения на прочность по нормальным напряжениям.....	58
4.3.4.2.	Проверка сечения на прочность по касательным напряжениям	-
4.3.4.3.	Построение эпюр нормальных и касательных напряжений в опасных сечениях балки.....	59
4.3.5.	Определение размеров балки, составленной из брусьев прямоугольного поперечного сечения	60
4.3.5.1.	Проверка сечения на прочность по нормальным напряжениям	61
4.3.5.2.	Проверка сечения на прочность по касательным напряжениям	-
4.3.5.3.	Построение эпюр напряжений в опасных сечениях балки	62
4.3.6.	Сравнение трех балок по расходу материала	-
4.4.	Подбор сечения стального вала.....	63
4.4.1.	Исходные данные	-
4.4.2.	Расчетное усилие.....	64
4.4.3.	Определение диаметра вала сплошного поперечного сечения	-
4.4.3.1.	Проверка сечения по условию прочности при кручении.....	65
4.4.3.2.	Построение эпюр касательных напряжений в опасном сечении	-
4.4.4.	Определение диаметров вала трубчатого сечения	66
4.4.4.1.	Проверка сечения по условию прочности	-
4.4.4.2.	Построение эпюр касательных напряжений для трубчатого сечения.....	67

4.4.5.	Сравнение площадей двух сечений.....	67
4.4.6.	Проверка вала трубчатого сечения на жесткость.....	68
	Приложение 1	69
	Приложение 2	70
	Литература.....	73

Николай Николаевич Кох
 Николай Александрович Серов
 Иван Иванович Туренко
 Владимир Васильевич Чумичев
 Эдуард Валентинович Шемякин

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ДЕФОРМАЦИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор и корректор Т.А.Смирнова

Техн. редактор Л.Я.Титова

Темплан 2002г., поз. 21

Лицензия ЛР № 020410 от 14.05.1997. Подп. к печати 27.03.2002.

Формат 60x84/16. Бумага тин № 1. Печать офсетная. Объем 5,0 уч.-
 изд. л. Усл. печ. л. 4,65. Усл.-кр. отт. 4,77. Тираж 100 экз. Изд. № 21.
 Цена «С» 21. Заказ 215

Ризограф Санкт-Петербургского государственного технологического
 университета растительных полимеров, 198095, ул. И. Черных, 4