

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**  
**ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ**  
**ПОЛИМЕРОВ»**

# **Теоретическая механика**

**Часть 4**

**Динамика системы**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

**Санкт-Петербург**  
**2014**

# **Теоретическая механика**

**Часть 4**

## **Динамика системы**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

**Санкт-Петербург  
2014**

УДК 531 (075)

ББК 22.3я7

Т 338

Теоретическая механика. Ч.4. Динамика системы: учебное пособие / М.В. Максименко, В.Е. Головкин, И.В.Клюшкин, С.В. Сеньюшкин; СПбГТУРП. – СПб., 2014. – 40 с.

В учебном пособии рассматривается часть курса теоретической механики – Динамика системы. Пособие соответствует программе курса теоретической механики и рассчитано на студентов очной, вечерней и заочной форм обучения. В пособии приведены цели и задачи теоретической механики, дана сводка основных понятий. Материал учебного пособия изложен так, что им можно пользоваться при изучении полного и краткого курсов.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям: 27.03.04 «Управление в технических системах», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 15.03.02. «Технологические машины и оборудование».

Рецензенты:

заслуженный работник высшей школы РФ, д-р техн.наук, профессор кафедры системного анализа Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета) Холоднов В.А.; канд. техн. наук, доцент кафедры прочности материалов и конструкций Санкт-Петербургского государственного университета путей сообщения Б.М.Аллахвердов.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия.

© Санкт-Петербургский государственный  
технологический университет  
растительных полимеров

## ВВЕДЕНИЕ

Различные виды техники представляют собой сложные комплексы, состоящие из систем взаимодействующих между собой агрегатов и узлов, звеньев, механическими моделями которых являются твердые тела, материальные точки.

Таким образом возникает механическая модель системы материальных точек как совокупности находящихся в силовом контакте твердых тел, размерами которых можно пренебречь при решении конкретной задачи.

Абсолютно твердое тело представляет собой частный случай этой модели как системы материальных точек, расстояния между которыми не изменяются в процессе движения.

Основная задача состоит в усвоении основ методологии исследования вращательного движения систем материальных точек, обосновании меры инерции при вращении твердого тела и выработке навыков составления дифференциального уравнения вращения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси.

Важным является обобщение меры инерции в случае вращательного движения, которая учитывает распределение масс в твердом теле. Такой мерой является момент инерции.

Существенным является то, что только моменты внешних сил оказывают влияние на вращательное движение твердого тела.

В технике имеется большое количество вращающихся деталей (валы, кривошипы, шкивы), поэтому навыки в исследовании динамики вращательного движения имеют практическое значение.

### 1. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ РАДИУС ИНЕРЦИИ

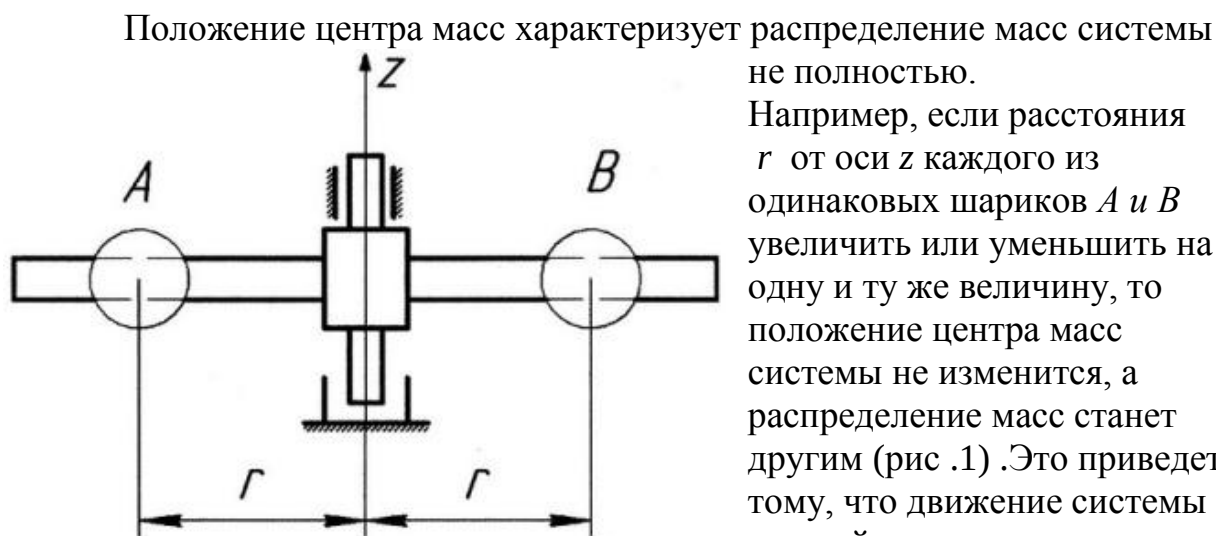


Рис.1

приложенных сил изменится, т.е. вращение вокруг оси  $Z$  станет происходить медленнее или быстрее.

Значит, не изменяя положения центра масс системы, можно изменить распределение масс, что приведет к изменению движения системы. Это требует введения дополнительных характеристик распределения масс.

Такой характеристикой является момент инерции тела относительно сил.

Моментом инерции  $J_z$  твердого тела относительно некоторой оси (осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений массы  $m_i$  каждой точки тела на квадрат расстояния от этой точки до оси.

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (1)$$

При непрерывном распределении масс материальных точек в твердом теле осевой момент инерции определяется формулой.

$$J_z = \int_{(V)} r^2 dm, \quad (2)$$

где:  $dm$  - масса элементарной частицы тела;

$r$ — расстояние этой частицы от оси  $Z$ .

Из определения следует, что осевой момент инерции является величиной положительной и не равен нулю.

В дальнейшем будет показано, что *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении*, т.е. выполняет такую же роль, какую масса при поступательном движении тела. Момент инерции тела относительно данной оси  $Z$  можно представить в виде произведения массы тела на квадрат длины некоторого отрезка  $J_z$ , называемого радиусом инерции тела относительно этой оси, т.е.

$$J_z = m i_z^2 \quad (3)$$

Следовательно, моментом инерции тела относительно данной оси называется скалярная величина, равная произведению массы тела на квадрат радиуса инерции тела относительно этой оси.

Радиусом инерции тела относительно какой - либо оси называется такое расстояние от этой оси, в конце которого нужно сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту

инерции всего тела. Если момент инерции тела относительно данной оси известен, то радиус инерции тела относительно этой оси находится по формуле:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}} \quad (4)$$

Таким образом, зная момент инерции, можно найти, радиус инерции тела и наоборот.

Осевой момент инерции измеряется в следующих единицах:

$$[J_z] = [m][r]^2$$

Система «СИ» -  $[J_z] = 1\text{кг} \cdot 1\text{м}^2 = 1\text{кг} \cdot 1\text{м}^2$

$$\text{Система М КГсС} - [J_z] = 1 \text{ т. е. м} \cdot 1 \text{ м}^2 = 1 \text{ кгм} \cdot \text{с}^2$$

$$1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 = 9.81 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$1 \text{ кгм}^2 = 0,102 \text{ кгмс}^2$$

## 2. ТЕОРЕМА О МОМЕНТАХ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ (ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА)

Через центр масс  $C$  тела проведем координатные оси  $XYZ$ , а через любую точку  $O$  на оси  $SU$  проведем ось  $Z1$ , параллельную оси  $Z$  (рис.2).

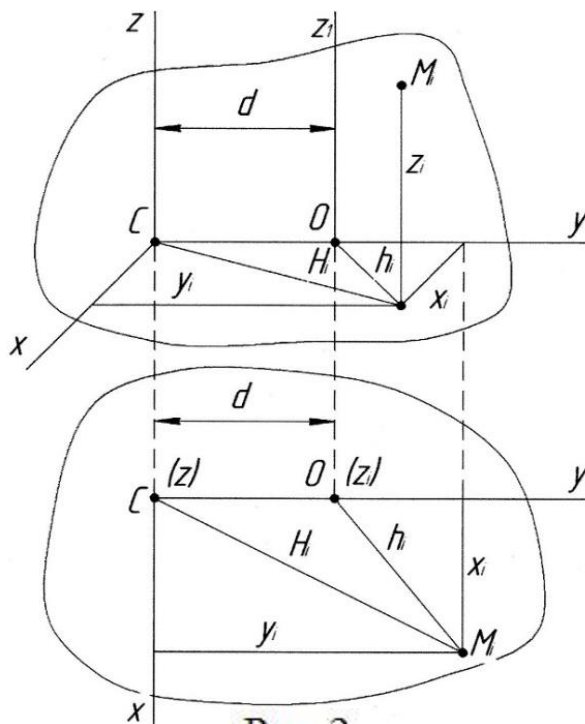


Рис. 2

Оси, проходящие через центр масс тела, называются центральными. Расстояние между осями Z и Z1 обозначим через d. Выделим произвольную точку тела с массой  $M_j$  и координатами  $x_1, y_1, z_1$ . Расстояние этой точки от оси Z обозначим через  $H_j$ ; а от оси Z1 - через  $h_j$ .

Тогда на основании определения момента инерции:

Момент инерции тела относительно центральной оси Z.

$$\begin{aligned}
 J_z &= \sum_{i=1}^n m_i H_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) . \\
 J_{z1} &= \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i [x_i^2 + (y_i - d)^2] = \\
 &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 - 2y_i d + d^2) = \quad (5) \\
 &= J_z - 2d \sum_{i=1}^n m_i y_i + d^2 \sum_{i=1}^n m_i = J_z + md^2 . \\
 \sum_{i=1}^n m_i y_i &= m y_c = 0 . \\
 J_{z1} &= J_z + md^2 .
 \end{aligned}$$

Равенство (5) выражает следующую теорему:

*Момент инерции тела относительно любой оси равен моменту инерции этого тела относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.*

Из этой теоремы следует, что из всех моментов инерции тела относительно параллельных осей наименьшим будет момент инерции относительно центральной оси.

Равенство (5) широко используется в практических расчетах при определении моментов инерции тел относительно осей, не проходящих через центр масс.

### 3. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЕЙШИХ ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

#### 3.1. Тонкий однородный стержень

Определим момент инерции тонкого однородного стержня длиной  $l$  и массой  $m$  относительно оси 2 перпендикулярной к оси стержня и проходящей через его конец (рис. 3 а).

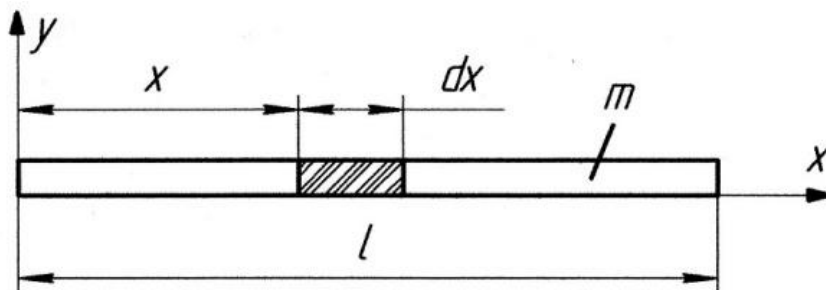


Рис. 3 а

Разобьем стержень по длине на малые отрезки. Тогда масса любого элементарного отрезка стержня длиной  $dx$ , находящегося на расстоянии  $X$  от оси  $Z$ , будет равна:

$$dm = \rho dx = \frac{m}{l} dx ,$$

где :  $m$  – масса стержня;

$\rho = \frac{m}{l}$  – масса единицы длины стержня.

По формуле (2) найдем:

$$J_z = \int_{(V)} r^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{m}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3} .$$

Следовательно,

$$J_z = \frac{1}{3} ml^2 . \quad (6 \text{ а})$$

Момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно к его оси, равен одной третьей произведения массы стержня на квадрат его длины.

Применим теорему Штейнера (5) для определения момента инерции тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его центр тяжести (рис.3 б)

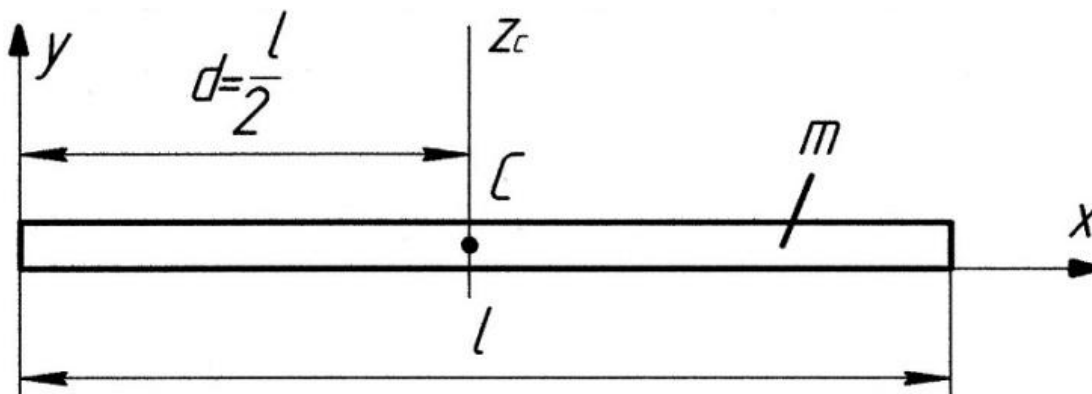


Рис. 3 б

$$J_z = J_{zc} + md^2$$

откуда  $J_{zc} = J_z - md^2$ .

Момент инерции относительно оси, проходящей через конец уравнения (6а),

$$J_z = \frac{ml^3}{3}$$

Подставляя это значение, получим:

$$J_{zc} = J_z - md^2 = \frac{ml^3}{3} - m \frac{l^2}{4} = \frac{ml^2}{12} .$$

$$J_{zc} = \frac{ml^2}{12} \quad (6 б)$$

### 3.2. Тонкое однородное кольцо

Определим момент инерции тонкого однородного кольца радиуса  $R$  и массы  $m$  относительно центральной оси  $Z$ , перпендикулярной к плоскости кольца (рис.4).

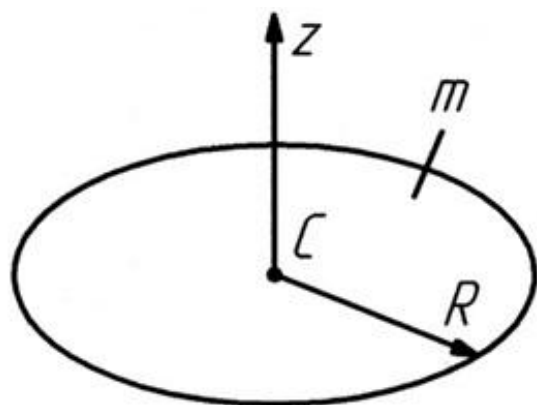


Рис. 4

В данном случае все точки кольца находятся от оси  $Z$  на расстоянии  $r=R$  поэтому по формуле (6) найдем:

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i R^2 =$$

$$= R^2 \sum_{i=1}^n m_i = mR^2 .$$

Следовательно,

$$J_z = mR^2 . \quad (7)$$

Очевидно, такой же результат получится при вычислении момента инерции тонкостенного цилиндра массой  $m$  с радиусом  $R$  относительно центральной оси. Момент инерции тонкого однородного кольца (тонкостенного цилиндра) относительно его центральной оси равен произведению массы кольца (цилиндра) на квадрат его радиуса.

При приближенном вычислении моментов инерции полых цилиндрических тел с тонким ободом (например, маховиков) пренебрегают

толщиной обода и считают всю массу тела равномерно распределенной по его внешней боковой поверхности, т.е. момент инерции таких тел вычисляют по формуле (7) как для кольца.

### 3.3. Круглая однородная пластина

Вычислим момент инерции круглой однородной пластины радиусом  $R$  и массой  $m$  относительно центральной оси перпендикулярной ее плоскости.

Разобьем пластину на множество элементарных колец и рассмотрим одно из них радиусом  $r$  и толщиной  $dr$  (рис. 5).

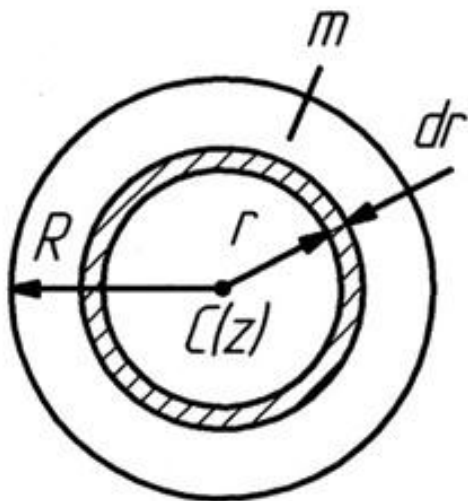


Рис. 5

Площадь элементарного кольца

$$ds = 2\pi r dr.$$

Масса этого кольца

$$dm = \rho ds = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2m}{R^2} r dr,$$

где  $\rho = \frac{2m}{R^2}$  – масса единицы пластины.

По формуле (7) найдем:

$$J_z = \int_{(V)} r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{2m}{R^2} r dr = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}.$$

Следовательно,

$$J_z = \frac{1}{2} mR^2. \quad (8)$$

Такая же формула получится и для момента инерции однородного круглого цилиндра.

Момент инерции круглой однородной пластины (круглого однородного цилиндра) относительно центральной оси равен половине произведения массы пластины (цилиндра) на квадрат ее радиуса.

Формулы для вычисления моментов инерции однородных тел различной геометрической формы приводятся в технических справочниках.

Для тел неоднородных или тел сложной формы моменты инерции вычисляются экспериментально.

#### 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси под действием внешних сил  $\vec{P}_1^E, \vec{P}_2^E, \dots, \vec{P}_n^E$  (рис. 6).

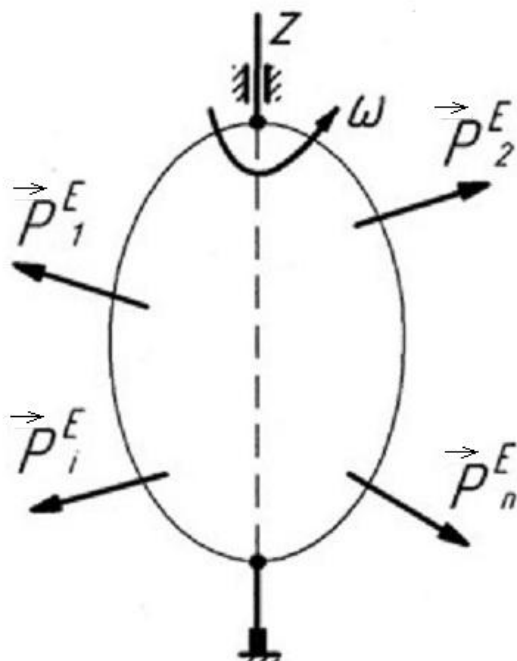


Рис. 6

Z - Ось вращения. Применим к вращающемуся телу теорему о моменте количества движения относительно оси вращения Z.

$$\frac{dL_Z^*}{dt} = M_Z^E. \quad (9)$$

Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения

$$L_Z^* = J_Z \omega,$$

где:  $J_Z$  — момент инерции относительно оси вращения;  $\omega$  - угловая скорость тела.

Главный момент внешних сил  $M_Z^E$  определяется алгебраической суммой всех внешних сил системы

относительно оси вращения Z:

$$M_Z^E = \sum_{i=1}^n M_{iZ}^E.$$

Тогда уравнение (9) принимает вид:

$$\frac{d}{dt}(J_Z \omega) = \sum_{i=1}^n M_{iZ}^E.$$

Так как  $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$  - угловое ускорение тела, можно это уравнение представить в виде:

$$J_z \varepsilon = \sum_{i=1}^n M_{iz}^E . \quad (11)$$

Угловая скорость тела определяется производной от угла поворота по времени, поэтому уравнение (10) можно представить в виде:

$$J_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum_{i=1}^n M_{iz}^E . \quad (12)$$

Применяя на практике уравнения (10), (11), (12), удобно левую часть всегда считать положительной. Тогда знаки моментов внешних сил, входящих в правую часть, зависят от того, способствует или препятствует момент данной силы вращению тела в определенном направлении или нет.

Моменты сил, способствующие вращению, считаются положительными, а препятствующие - отрицательными.

Дифференциальное уравнение вращения можно также получить из уравнения поступательного движения, заменяя характеристики поступательного движения на их аналоги во вращательном движении.

## 5. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ РАБОТА И РАБОТА СИЛЫ НА КОНЕЧНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ

Энергия, являясь общей количественной мерой различных форм движения материи, может переходить из одного вида в другой. Например, потенциальная энергия поднятой плотиной воды на гидроэлектростанции переходит в кинетическую энергию вращающихся турбин, которая в свою очередь превращается в электрическую энергию, по проводам передается на большие расстояния, чтобы опять перейти в кинетическую энергию станков, в тепловую энергию электропечей, в световую, в звуковую и другие виды энергии. Это изменение энергии, изменение формы движения, рассматриваемое с количественной стороны, называется работой.

Поскольку количественная сторона движения оценивается модулем скорости, то понятие работы можно определить так:

Работой силы на некотором перемещении ее точки приложения называется скалярная величина, характеризующая то действие силы, которое приводит к изменению модуля скорости движущейся точки.

Элементарная работа - это работа силы на бесконечно малом перемещении  $d\vec{r}$ . При этом вектор силы при движении по элементу  $d\vec{r}$  не изменяет ни модуля, ни направления в пространстве:  $P = \text{const}$

Тогда работа силы будет представляться скалярным произведением  $P \cdot a$  и называться *элементарной работой* и обозначаться  $\delta A$ ,

$$\delta A = \vec{P} \cdot d\vec{r} = P_x dx + P_y dy + P_z dz . \quad (1)$$

Обозначение  $\delta A$  вместо  $dA$  обусловлено тем, что выражение в общем случае не представляет полного дифференциала некоторой функции, так как сила в общем случае зависит не только от положения точки, но и от скорости точки по времени, т.е.  $P = (r, v, t)$ , и выражение (1) не может являться полным дифференциалом в случае действия такой силы.

Выражение (1) представлено в эквивалентной форме.

$$\delta A = P \cdot ds \cdot \cos(\vec{P}, \vec{\tau}) = P_\tau \cdot ds . \quad (2)$$

Так как  $\| d\vec{r} \| = ds$ , а предельным положением секущей  $d\vec{r}$  является касательная ( $\tau$ ) (рис.6).  $P_\tau$  в выражении (2) представляет собой проекцию вектора силы на направление касательной. Если сила  $P$  является *переменной*, т.е. ее модуль и направление непрерывно изменяются от точки к точке, а точка приложения движется по некоторой произвольной кривой (рис.7), то работа такой силы определяется криволинейным интегралом первого или второго рода по кривой  $M_1 M_2$ :

$$A = \int_{\vec{M_1M_2}} P \cdot ds \cdot \cos(\vec{P}, \vec{\tau}) = \int_{\vec{M_1M_2}} P \cdot ds \quad (3)$$

$$A = \int_{\vec{M_1M_2}} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{M_1M_2}} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) \quad (4)$$

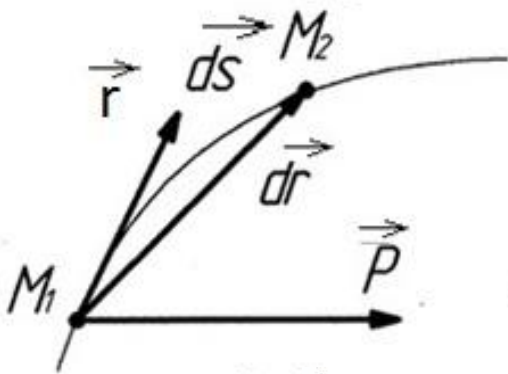


Рис. 6

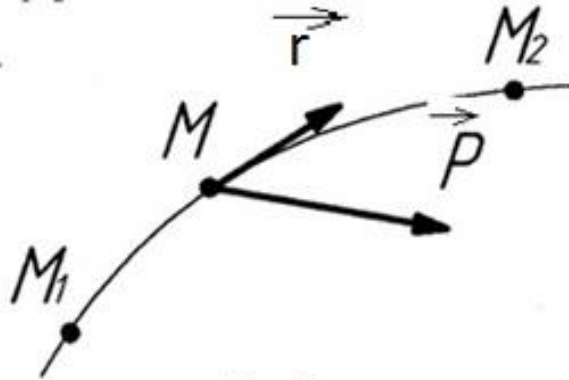


Рис. 7

Единицы измерения работы:

- в системе СИ:  $[A] = [P] \cdot [l] = 1 \text{ Нм} = 1 \text{ Дж}$ .

- в системе МкГсС:  $[A] = [P] \cdot [l] = 1 \text{ кГм}$ .

Соотношение между единицами измерения:

$1 \text{ кГм} = 9,81 \text{ Дж}$ .

Рассмотрим работу постоянной силы при прямолинейном движении точки ее приложения (рис.8).

Работа определяется выражением:

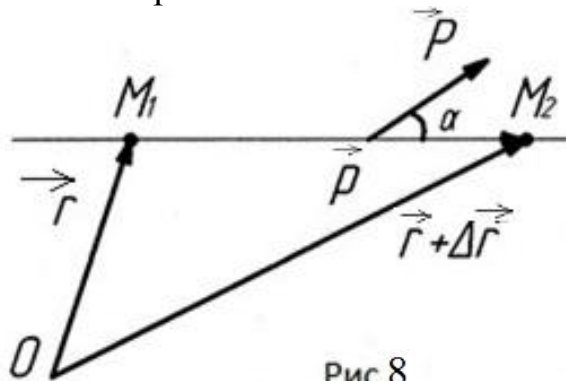


Рис 8

Это выражение можно представить в виде скалярного произведения вектора силы на вектор перемещения:

$$A = \vec{P} \cdot \vec{M_1M_2} = \vec{P} \cdot \vec{p} = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r}, \quad (5)$$

где  $\vec{p} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \Delta \vec{r}$  - вектор перемещения точки приложения силы.

Работа силы является скалярной величиной, ее знак зависит от знака косинуса угла между направлениями вектора силы и вектора перемещения.

Если  $\cos \alpha > 0$ ;  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , то  $A > 0$ .

Если  $\cos \alpha < 0$ ;  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ , то  $A < 0$ .

Если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ;  $\cos \alpha = 0$ ;  $A = 0$ .

Т.е. если сила перпендикулярна направлению перемещения, то ее работа равна нулю (рис.9).

Выражением (5) представлена работа силы на конечном перемещении.

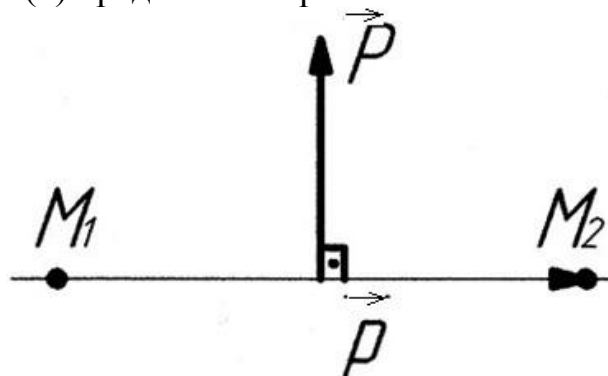


Рис. 9

## 6. РАБОТА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И СИЛЫ УПРУГОСТИ

### 6.1. Работа силы тяжести

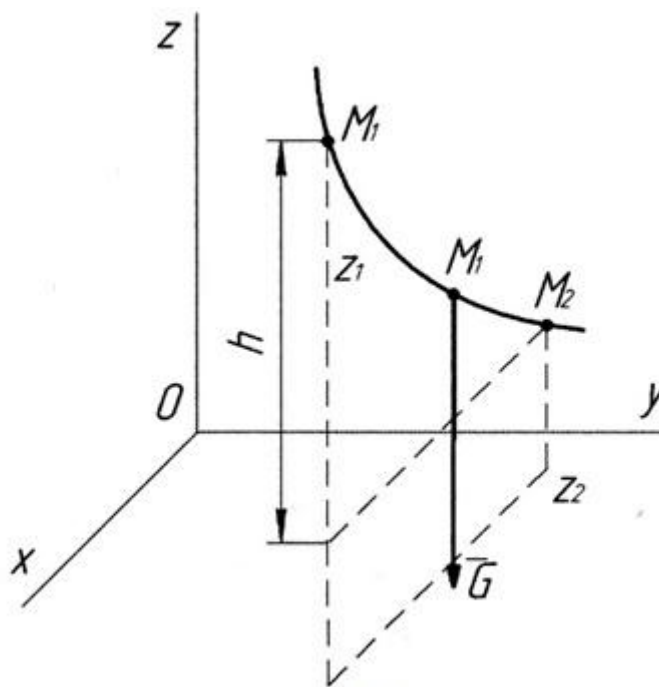


Рис. 10

Пусть материальная точка  $M$  под действием силы тяжести  $G$  (рис.10) перемещается из положения  $M_1$  в положение  $M_2$ , Проекции силы тяжести  $G$  на оси координат будут равны:

$$G_x = G_y = 0 ; G_z = -G$$

Подставляя эти значения проекций в формуле (5), получим:

$$A = \int_{\overline{M_1 M_2}} (G_x dx + G_y dy + G_z dz) = -G \int_{z_1}^{z_2} dz = -G(Z_2 - Z_1) = \\ = G(Z_1 - Z_2)$$

Если точка  $M_1$  выше  $M_2$ , то  $Z_1 - Z_2 = h$ .

Если точка  $M_1$  ниже  $M_2$ , то  $Z_1 - Z_2 = -h$ ,

где  $h$  - величина вертикального перемещения точки  $M$ .

Таким образом, окончательно

$$A = \pm G \cdot h . \quad (6)$$

Работа силы тяжести равна взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения. Работа положительна, если начальное положение точки выше конечного (точка опускается), и отрицательна, если начальное положение точки ниже конечного (точка поднимается). Работа силы тяжести не зависит от длины пути и вида траектории точки ее приложения.

## 6.2. Работа силы упругости

Пусть груз, прикрепленный к свободному концу пружины, перемещается по горизонтальной плоскости из положения  $M_1(x_1)$  в положение  $M_2(x_2)$ . Примем точку  $O$ , соответствующую положению груза при ненапряженной пружине, за начало координат и найдем работу упругой силы на этом перемещении груза.

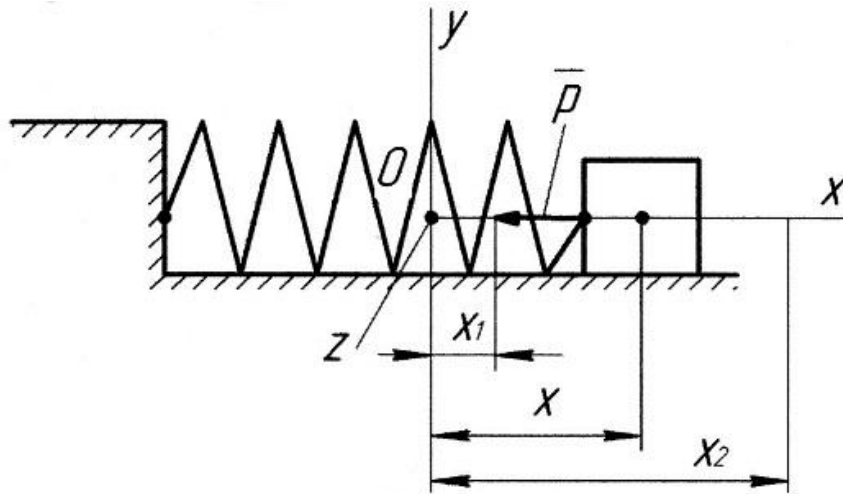


Рис. 10

При растяжении пружины в ней возникает сила упругости, направленная к точке О и пропорциональная удлинению пружины, т.е.

$$P = cx,$$

где С - коэффициент жесткости пружины, т.е. сила необходимая для растяжения или сжатия пружины на 1 см.

Проекции силы упругости на оси координат будут равны:

$$P_x = -P = -Cx, P_y = P_z = 0$$

Подставляя эти значения проекций в формулу (5) работы, получим:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = -C \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dx = -\frac{C}{2} (x_2^2 - x_1^2) = \frac{C}{2} (x_1^2 - x_2^2).$$

В полученном выражении  $x_1$  представляет собой начальное удлинение пружины  $\Delta l_{\text{нач}}$ , а  $x_2$  - конечное удлинение пружины  $\Delta l_{\text{кон}}$ . Следовательно, окончательно получим:

$$A = \frac{C}{2} ((\Delta l_{\text{нач}})^2 - (\Delta l_{\text{кон}})^2). \quad (7)$$

Работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начальной и конечной деформации пружины. Работа силы упругости положительна, если  $|\Delta l_{\text{нач}}| > |\Delta l_{\text{кон}}|$  (конец пружины приближается к равновесному положению), и отрицательна, если  $|\Delta l_{\text{нач}}| < |\Delta l_{\text{кон}}|$ .

(конец пружины удаляется от равновесного положения).

Формула (7) применяется для вычисления работы сил упругости во всех случаях, когда силы пропорциональны деформации.

Если начальное удлинение пружины  $X_1=0$ , а конечное удлинение  $X_2=h$ , то работа силы упругости определяется выражением:

$$A = \pm \frac{Ch^2}{2} .$$

## 7. РАБОТА И МОЩНОСТЬ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ТВЕРДОМУ ТЕЛУ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Пусть за промежуток времени  $\Delta t$  сила  $\vec{P}$  совершает работу  $A$ . Тогда средняя мощность силы за этот промежуток времени определяется выражением:

$$N_{\text{ср}} = \frac{A}{\Delta t} . \quad (8)$$

Мощностью силы в данный момент времени (мгновенной мощностью) называется отношение элементарной работы к элементарному интервалу времени  $dt$ :

$$N = \frac{\delta A}{dt} . \quad (9)$$

Подставляя в (9) значение  $\delta A$  (1), получим:

$$N = \frac{\vec{P} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{P} \cdot \vec{v} = P_x v_x + P_y v_y + P_z v_z . \quad (10)$$

Таким образом, мгновенная мощность силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости. Единицы измерения мощности:

В системе СИ :  $[N] = \frac{[A]}{[t]} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 1 \text{ Вт} .$

В системе МкГсС :  $[N] = 1 \frac{\text{кГм}}{\text{с}} .$

Очевидно,  $1 \frac{\text{кГм}}{\text{с}} = 9,81 \text{ Вт} .$

Существует внесистемная единица - лошадиная сила (ЛС)

$$1 \text{ л. с} = \frac{75 \text{ кГм}}{\text{с}} = 736 \text{ Вт} .$$

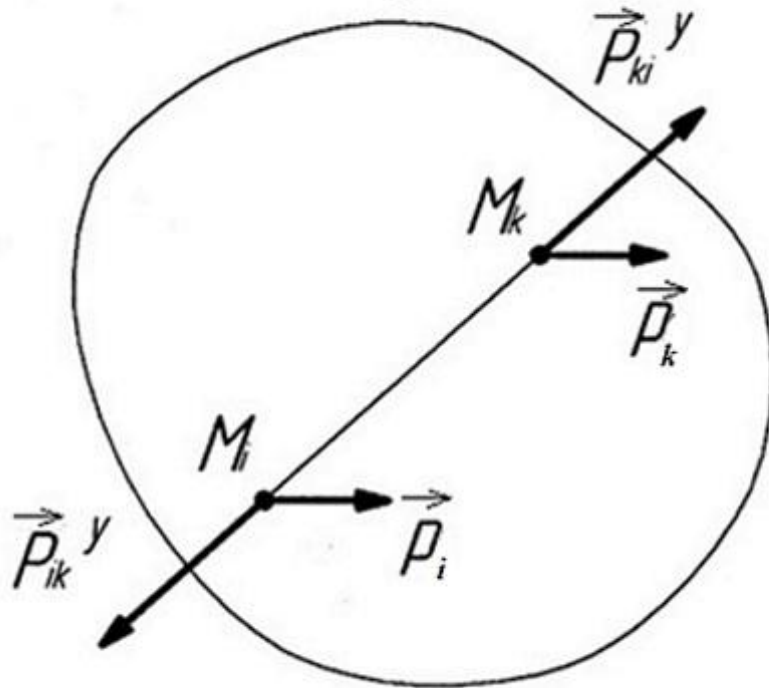


Рис.11

Как известно, силы действующие на твердое тело подразделяются на внешние и внутренние. Работа внутренних сил при поступательном движении, очевидно, равна нулю. Рассмотрим две взаимодействующие между собой точки тела  $M_i$  и  $M_k$  (рис.11), к которым приложены внутренние силы

взаимодействия  $\vec{P}_{ik}^I$  и  $\vec{P}_{ki}^I$ . Согласно принципу равенства действия и противодействия  $\vec{P}_{ik}^I = -\vec{P}_{ki}^I$ . При поступательном движении отрезок  $M_i M_k$  перемещается параллельно самому себе и не изменяет своей длины, как расстояние между точками абсолютно твердого тела.

Следовательно, векторы перемещения точек  $M_i$  и  $M_k$  (рис.11), геометрически равны:  $\vec{r}_i = \vec{r}_k = \vec{r}$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum A_{ik}^I &= \sum_{i,k=1}^n (\vec{P}_{ik}^I \cdot \vec{p} + \vec{P}_{ki}^I \cdot \vec{p}) = \\ &= \sum_{i,k=1}^n (\vec{P}_{ik}^I + \vec{P}_{ki}^I) \cdot \vec{p} = \sum_{i,k=1}^n (0) \cdot \vec{p} = 0 .\end{aligned}\quad (11)$$

Определим теперь сумму работ всех внешних сил. Пусть к точкам  $M_j$  тела приложены внешние силы  $\vec{P}_i^E$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) (рис.12).

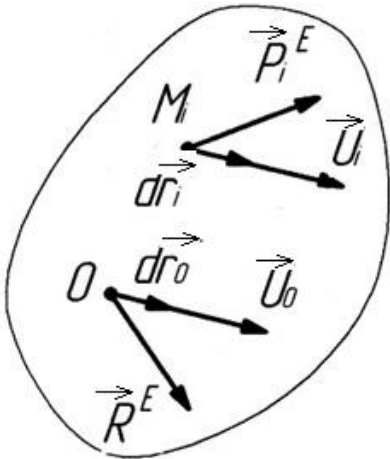


Рис.12

Примем за полюс точку  $O$ . Скорости всех точек тела при поступательном движении геометрически равны, т.е.

$$\vec{U}_i = \vec{U}_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt},$$

откуда вытекает геометрическое равенство векторов элементарных перемещений:

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_0 . \quad (12)$$

Определяем элементарную работу всех внешних сил:

$$\delta A^E = \sum_{i=1}^n \delta A_i^E = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i^E \cdot d\vec{r}_0 = \left( \sum_{i=1}^n \vec{P}_i^E \right) \cdot d\vec{r}_0 = \vec{R}^E \cdot d\vec{r}_0 \quad (13)$$

где:  $\vec{R}^E = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i^E$  — главный вектор внешних сил .

Работа внешних сил на конечном перемещении тела из положения (I) в положение (II)

$$A^E = \int_I^{II} \vec{R}^E \cdot d\vec{r}_0 \quad (14)$$

Мощность внешних сил:

$$N^E = \frac{\delta A^E}{dt} = \frac{\vec{R}^E \cdot d\vec{r}_0}{dt} = \vec{R}^E \cdot \vec{v}_0 \quad (15)$$

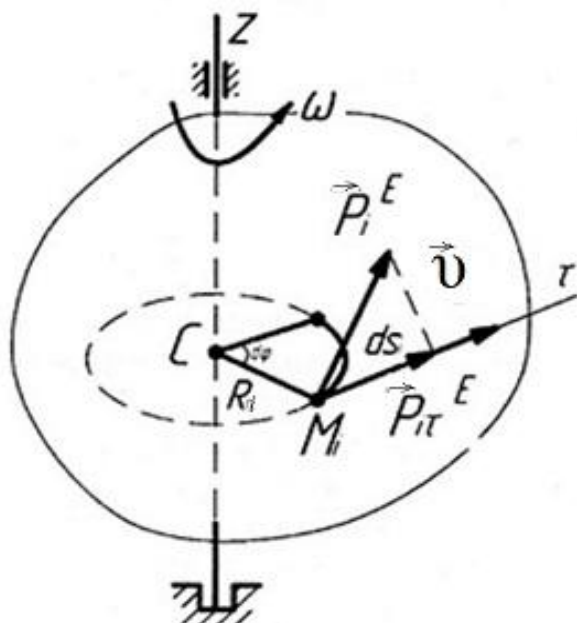


Рис.13

Элементарная работа  
приложенной к телу силы  $\vec{P}_i^E$

$$\delta A_i^E = P_{i\tau}^E \cdot ds_i = P_{i\tau}^E \cdot R_i \cdot d\varphi$$

где:  $ds_i = R_i$  -элементарное  
перемещение точки  $M_i$   
приложения силы  $\vec{P}_i^E$ ;  
 $d\varphi$ - элементарный угол  
поворота тела;  
 $R_i$ -расстояние точки  $M_i$  от оси  
вращения тела.

Учитывая, что  $P_{i\tau}^E \cdot R_i = M_z(\vec{P}_i^E) = M_{iz}^E$ -момент силы  $\vec{P}_i^E$ ,

Окончательно получим:

$$\delta A_i^E = M_{iz}^E \cdot d\varphi \quad (16)$$

Таким образом, работа и мощность внешних сил при поступательном движении твердого тела равна работе и мощности их главного вектора. Рассмотрим вращающееся тело. Пусть в некоторой точке  $M$  тела, вращающегося вокруг неподвижной оси  $Z$ , приложена внешняя сила  $P^E$ . Точка  $M$  приложения силы описывает при движении тела окружность радиуса  $CM = R$  (рис.13).

Элементарная работа внешней силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению момента этой силы относительно оси вращения на элементарный угол поворота тела.

Формула (16) справедлива и при действии на тело нескольких внешних сил. В этом случае вращений момент равен оси вращения, т.е.:

$$M_Z^E = \sum M_{iz}^E .$$

Работа силы  $\vec{P}_i^E$  на конечном угле поворота тела от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$  определяется равенством:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_Z^E \cdot d\varphi \quad (17)$$

Для вычисления работы по формуле (17) необходимо учитывать зависимость вращающего момента от угла поворота тела, т.е.  $M_Z^E = f(\varphi)$ . Если вращающий момент не изменяется во время движения тела, т.е.  $M_Z^E = \text{const}$ , то:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_Z^E \cdot d\varphi = M_Z^E (\varphi_2 - \varphi_1) .$$

Следовательно,  $A = M_Z^E (\varphi_2 - \varphi_1) .$  (18)

Обозначим угол поворота тела  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ,

тогда  $A = M_Z^E \cdot \varphi .$  (19)

Знак работы момента определяется следующим образом:

Если момент способствует вращению тела в заданном направлении, то работа положительна, если препятствует вращению, то работа отрицательна (рис.14).

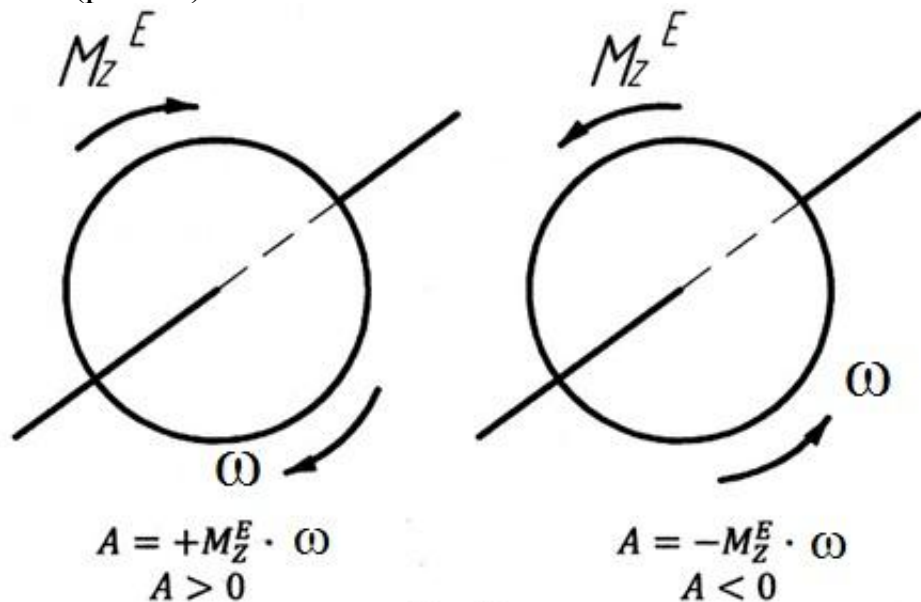


Рис.14

Мощность силы при вращательном движении тела

$$N = \frac{\delta A}{dt} = M_Z^E \frac{d\varphi}{dt} = M_Z^E \cdot \omega .$$

Следовательно,

$$N = M_Z^E \cdot \omega .$$
 (20)

Мощность внешних сил, приложенных к твердому телу при вращательном движении, равна произведению вращающего момента на угловую скорость тела.

Из формулы (20) следует, что при постоянной мощности вращающий момент будет тем больше, чем меньше угловая скорость тела.

## **8. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{1}{2} m v^2. \quad (21)$$

Кинетической энергией механической системы называется скалярная величина, равная сумме кинетических энергий всех точек системы, т.е.:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2. \quad (22)$$

*Кинетическая энергия есть мера механического движения, которая отражает способность механического движения превращаться в другую форму движения материи (в форму потенциальной энергии, теплоты, электричества и т.д.).*

*Кинетическая энергия является величиной скалярной и всегда положительной, поэтому она, не зависит от направления движения точки или системы.*

Размерность кинетической энергии соответствует размерности работы, т.е. в технической системе - кГм, а в системе "СИ" - Дж.

Очень часто механическая система представляет твердое тело или совокупность твердых тел. Поэтому нужно уметь определять кинетическую энергию твердого тела при различных видах его движения.

Найдем формулы для вычисления кинетической энергии при важнейших видах движения твердого тела.

### **8.1. Поступательное движение тела**

*При поступательном движении тела скорости всех его точек в каждый момент времени геометрически равны скорости центра масс тела. В этом случае для любой точки тела формула (22) дает:*

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c$$

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \cdot v_c^2 = \frac{v_c^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i = \frac{m v_c^2}{2} .$$

Следовательно, кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости его центра масс.

Таким образом, кинетическая энергия тела при поступательном движении вычисляется как кинетическая энергия материальной точки имеющей массу этого тела.

## 8.2. Вращательное движение тела

Скорость любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется выражением  $v_i = \omega * r_i$  ,

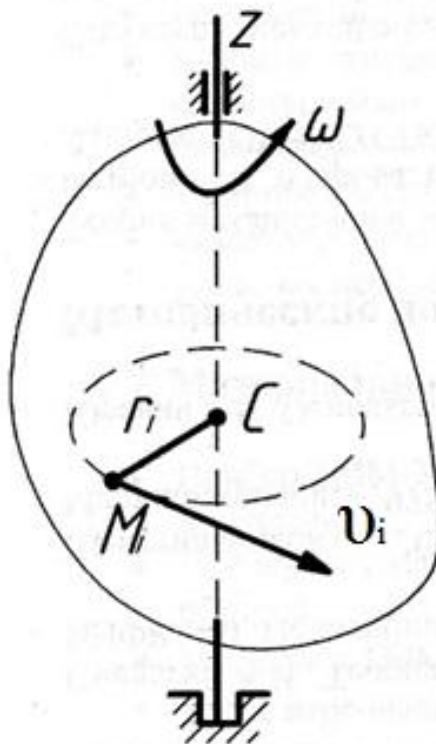


Рис. 15

где:  $\omega$  - угловая скорость тела;

$r_i$  - расстояние точки до оси вращения

(рис.15)

Тогда из формулы (22) получим:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \\ = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} I_z ,$$

где:  $\sum m_i r_i^2 = I_z$  - момент инерции тела относительно оси вращения.

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2 . \quad (23)$$

Кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.

Сравнивая формулы (22) и (23), можно заметить, что при вращательном движении тела его момент инерции играет такую же роль, как его масса при поступательном движении, а угловая скорость вращения играет роль скорости при поступательном движении.

### 8.3 .Плоское движение тела

Поскольку плоское движение представляет совокупность поступательного и вращательного движения вокруг полюса, принимая за полюс центр масс тела, получим кинетическую энергию тела в плоском движении.

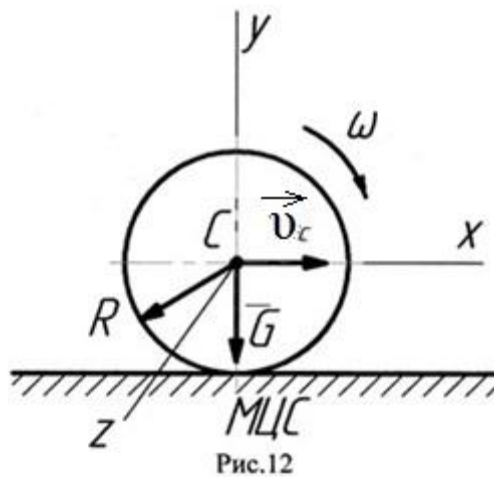
$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_{cz} \omega^2 , \quad (24)$$

где  $v_c$  - скорость центра масс тела;

$I_{cz}$ - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс;

$\omega$  - угловая скорость.

Так, например, кинетическая энергия сплошного однородного диска, катящегося без скольжения по прямолинейному пути, определяется (рис.16).



$v_c$  - скорость центра масс диска;

$G$  - вес диска.

Так мгновенный центр скоростей находится в точке У соприкосновения диска с плоскостью, его угловая скорость:

$$\omega = \frac{v_c}{R} ,$$

где  $R$  - радиус диска.

Момент инерции сплошного однородного диска

$$I_{cz} = \frac{mR^2}{2} = \frac{GR^2}{2g} .$$

Кинетическая энергия в плоском движении (24) определяется:

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{I_{cz} \omega^2}{2} = \frac{G \cdot v_c^2}{2g} + \frac{GR^2 \cdot v_c^2}{2g \cdot 2R^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{G \cdot v_c^2}{g} .$$

## 9. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Основное уравнение динамики для движущейся точки имеет вид:

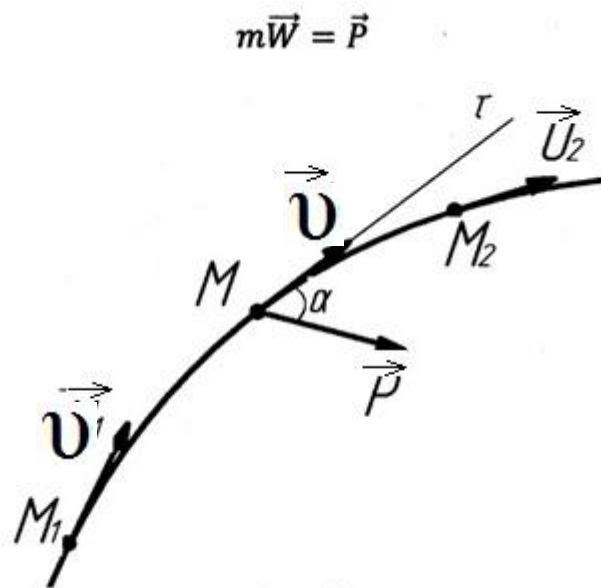


Рис.17

Спроектируем это векторное равенство на направление касательной к траектории точки:

$$m a_r = P \cdot \cos \alpha .$$

Как известно из кинематики, касательное ускорение  $a_r = \frac{dv}{dt}$ ,

$$m \frac{dv}{dt} = P \cdot \cos \alpha . \quad (a)$$

Введем промежуточную переменную S. Выразим  $\frac{dv}{dt} = \frac{v}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$  и подставим это значение в (a)

$$m \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = P \cdot \cos \alpha .$$

Так как  $\frac{ds}{dt} = v$ , последнее выражение принимает вид:

$$m v \cdot \frac{dv}{ds} = v \cdot \cos \alpha ; m v \cdot dv = P \cdot ds \cdot \cos \alpha ,$$

$$d \left( \frac{m v^2}{2} \right) = \delta A . \quad (25)$$

$\delta A$  - элементарная работа равнодействующей.

Выражение (25) представляет теорему об изменении кинетической энергии точки в *дифференциальной форме*.

В любой момент движения точки дифференциал ее кинетической энергии равен элементарной работе равнодействующей сил, приложенных в точке.

Чтобы получить эту теорему в конечной (*интегральной*) форме, необходимо проинтегрировать уравнение (25) по времени.

$$\int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_I^{II} \delta A ,$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A , \quad (26)$$

$A = \sum_{i=1}^n A_i$  работа равнодействующей сил, приложенных к точке, на конечном перемещении.

Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором перемещении равно работе равнодействующей сил, приложенных к точке, на том же перемещении. Силы, приложенные к механической системе,

подразделяются на внешние  $\vec{P}_i^E$  и внутренние  $\vec{P}_i^I$ , (рис.18).

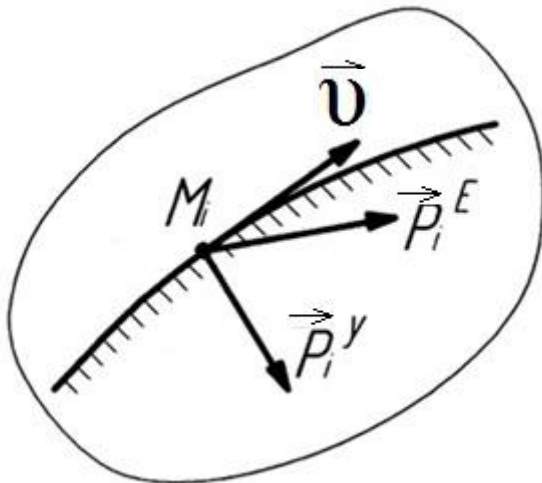


Рис.18

Обозначим:

$\vec{P}_i^E$  -равнодействующая внешних сил, приложенных к точке  $M_j$  механической системы;

$\vec{P}_i^I$  — равнодействующая внутренних сил.

Уравнение (27) для точки  $M_j$  механической системы принимает вид:

Сложив «n» подобных равенств по всем точкам механической системы, получим:

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot v_{2i}^2}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot v_{1i}^2}{2} = \sum_{i=1}^n A_i^E + \sum_{i=1}^n A_i^I . \quad (27)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot U_{2i}^2}{2} = T_1 \quad - \text{кинетическая энергия конечного положения системы;}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot U_{1i}^2}{2} = T_2 \quad - \text{кинетическая энергия начального положения системы;}$$

$$\sum_{i=1}^n A_i^E = A^E \quad - \text{работа внешних сил системы;}$$

$$\sum_{i=1}^n A_i^I = A^I \quad - \text{работа внутренних сил системы;}$$

Уравнение (27) принимает вид:

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^n A_i^E + \sum_{i=1}^n A_i^I . \quad (28)$$

Уравнение (28) выражает *теорему об изменении кинетической энергии механической системы* в интегральной форме.

Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, приложенных к точкам системы, на том же перемещении.

Если в качестве механической системы рассматривается абсолютно твердое тело, то сумма работ внутренних сил равна нулю.

$$\sum_{i=1}^n A_i^I = A_i^I = 0 .$$

Уравнение (28) в этом случае принимает вид:

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^n A_i^E . \quad (29)$$

Изменение кинетической энергии абсолютно твердого тела на некотором перемещении равно сумме работ внешних сил на этом же перемещении.

При решении технических задач механические системы, как правило, рассматриваются как системы абсолютно твердых тел, и в этих случаях теорема применяется в форме (29).

В дифференциальной форме принимает вид:

$$dT = \sum_{i=1}^n \delta A_i^E + \sum_{i=1}^n \delta A_i^I \quad (30)$$

- для произвольной механической системы;

$$dT = \sum_{i=1}^n \delta A_i^E \quad (31)$$

-для системы абсолютно твердых тел;

В уравнениях (30) и (31):

$dT$  – дифференциал кинетической энергии системы;

$\sum \delta A_i^E = \delta A^E$  – сумма элементарных работ внешних сил;

$\sum \delta A_i^I = \delta A^I$  – сумма элементарных работ внутренних сил.

## 10 . СИЛА ИНЕРЦИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Если свободная материальная точка  $M$  массой  $m$  движется с ускорением  $a$  по некоторой траектории, значит, на нее действует какое-то тело  $A$  с силой  $P$ . Эта сила выражает действие тела  $A$  на точку  $M$  и определяется вторым законом динамики (рис.19):

$$\vec{P} = m\vec{a} .$$

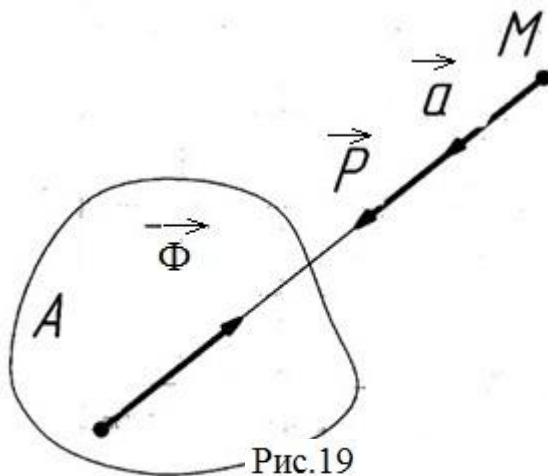


Рис.19

Рис. 15

Согласно третьему закону динамики со стороны точки на тело действует сила противодействия

$$\vec{\phi} = -\vec{P} = -m\vec{a}$$

Сила противодействия (реакция) движущейся с ускорением материальной точки телу, сообщившему ей это ускорение, называется силой инерции точки  $M$  и обозначается  $\phi$ .

Следовательно,

$$\vec{\phi} = -m\vec{a} \quad (32)$$

Сила инерции свободной материальной точки по модулю равна произведению массы точки на модуль ее ускорения, направлена в сторону, противоположную ускорению, и приложена к телу, сообщающему точке данное ускорение.

В случае несвободной точки ее сила инерции приложена к связи, наложенной на данную точку (рис.20). Поэтому можно сказать, что динамической называется реакция связей, вызванная действием сил инерции.

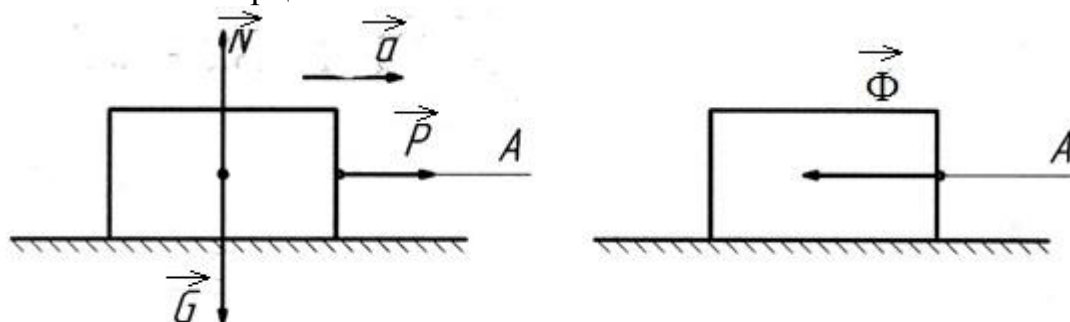


Рис. 20

Если телу сообщают ускорение  $a$  при помощи нити  $A$ , действующей на тело с силой  $F = ma$ , то сила инерции  $\phi = -ma$  приложена к нити  $A$ . Эту силу ощущает человек, который тянет нить.

Следовательно, сила инерции точки является реальной силой, представляющей собой противодействие точки изменению ее скорости. При криволинейном движении точки ее силу инерции разделяют на две составляющие, направленные по касательной к траектории и по главной нормали (рис. 21). Первая составляющая называется касательной силой инерции и обозначается  $\phi_\tau$ , а вторая - нормальной силой инерции и обозначается  $\phi_n$ .

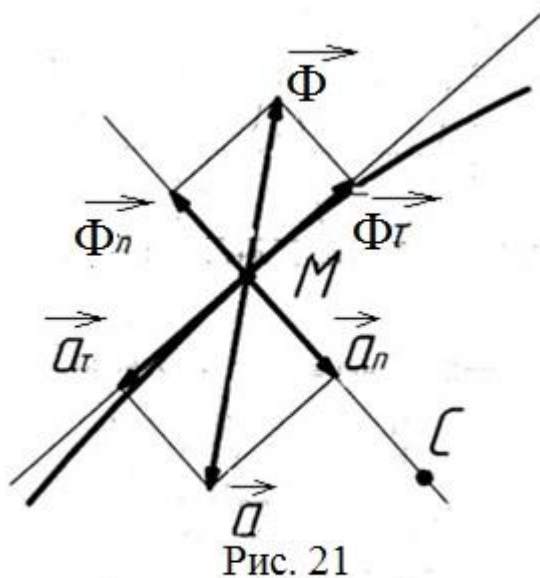


Рис. 21

Касательная и нормальная силы инерции определяются формулами:

$$\begin{aligned}\vec{\phi}_\tau &= -m\vec{a}_\tau, \\ \vec{\phi}_n &= -m\vec{a}_n.\end{aligned}\quad (33)$$

Из кинематики известно, что

$$a_\tau = \frac{dU}{dt} \text{ и } a_n = \frac{U^2}{\rho}.$$

Пользуясь выражениями для модулей касательной и нормальной сил инерции, получим:

$$\phi_\tau = m \left| \frac{dU}{dt} \right|, \phi_n = \frac{mU^2}{\rho}. \quad (34)$$

Если точка  $M$  принадлежит телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, то модули ее вращательного и центростремительного ускорений вычисляются по формулам:

$$a_\varepsilon = |\varepsilon| \cdot R, a_\omega = \omega^2 \cdot R,$$

где:  $\omega$  и  $\varepsilon$  - алгебраические значения угловой скорости и углового ускорения тела ;

$R$  - расстояние от точки до оси вращения.

Тогда модули касательной и нормальной сил инерции, называемых в этом случае вращательной и центробежной силами инерции, определяются по формулам:

$$\phi_\varepsilon = mR \cdot |\varepsilon|, \phi_\omega = mR \cdot \omega^2. \quad (35)$$

Сила инерции является одним из важнейших понятий динамики. Действие сил инерции учитывается при решении многих технических задач и, в частности, при определении реакций связей движущейся несвободной механической системы.

## 11. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ (Метод кинетостатики)

Принципом Даламбера называют общий метод, при помощи которого уравнения динамики придается форма уравнений статики. Этот метод предложен в 1716 г. Русским ученым *Германом* и получил название петербургского принципа. В 1737 г. *Эйлер* обобщил этот принцип и применил его для изучения колебаний гибких тел. В 1743 г. Французский ученый Даламбер расширил применение петербургского принципа на случай сложных систем, состоящих из большого числа связанных между собой тел. Рассмотрим несвободную материальную точку (рис.22).

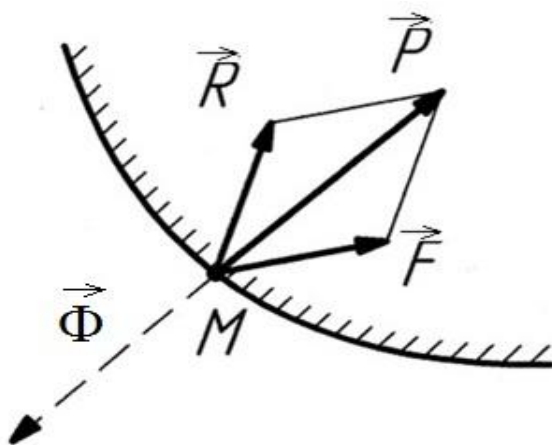


Рис. 22

Пусть  $F$ - равнодействующая задаваемых (активных) сил, приложенных к точке.

$P$  - равнодействующая всех сил, приложенных к точке.

$R$ - равнодействующая реакций связей точки.

Согласно основному уравнению динамики точки:

$ma = P$  или подставляя ,  $P$  получим:  
 $ma = F + R.$

Переносим все члены уравнения в левую часть, получим:

$$\vec{F} + \vec{R} - m\vec{a} = 0 .$$

Как известно, сила инерции точки  $\vec{\phi} = -m\vec{a}$  .

Подставляя это значение в уравнение , получим

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\phi} = 0 . \quad (36)$$

Выражение (36) определяет *метод кинестатики (принцип Даламбера)* для материальной точки.

В любой момент движения материальной точки геометрическая сумма равнодействующей задаваемых сил, равнодействующей реакций связей и силы инерции точки равна нулю.

Этому уравнению в статике соответствует уравнение  $R = 0$ , что является условием равновесия сходящихся сил.

При решении задач векторному равенству (36) соответствует:

- на плоскости - два уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 .$$

- в пространстве – три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 .$$

Рассмотрим механическую систему, состоящую из «n» материальных точек. Выделим произвольную точку  $M$  этой системы (рис.23).

Уравнение (36) для точки  $M$  будет иметь вид:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\phi}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) .$$

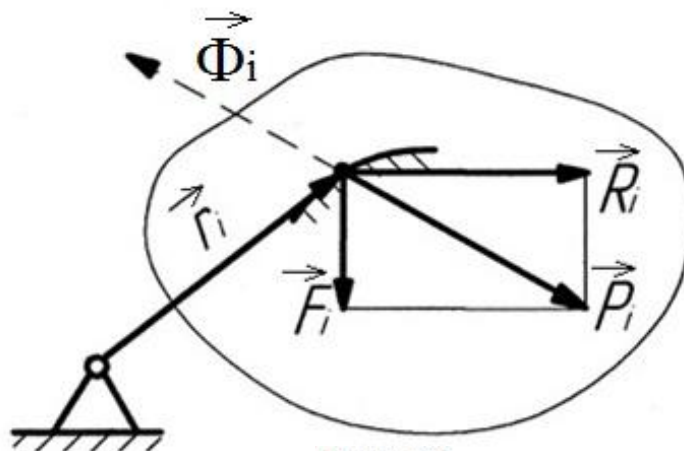


Рис. 23

Сложим подобные  $n$  равенства по всем точкам механической системы

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i + \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i = 0 .$$

В уравнении обозначим:

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{R}^F$  - главный вектор задаваемых сил;

$\sum_{i=1}^n \vec{R}_i = \vec{R}^R$  - главный вектор реакций связей;

$\sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i = \vec{R}^\phi$  - главный вектор сил инерции точек системы.

Уравнение принимает вид:

$$\vec{R}^F + \vec{R}^R + \vec{R}^\phi = 0 . \quad (37)$$

Проведем из неподвижного центра  $O$  радиусы - векторы  $r$  во все точки механической системы. Умножим в каждой точке радиус-вектор на равенство:

$$\begin{aligned} \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\phi}_i) &= 0, \quad \text{или} \\ \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \vec{R}_i + \vec{r}_i \times \vec{\phi}_i &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Сложим подобные  $n$  равенства по всем точкам механической системы:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{R}_i) + \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{\phi}_i) = 0 .$$

Обозначим :

$\sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{M}_0^F$  - главный момент задаваемых сил системы;

$\sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{R}_i) = \vec{M}_0^R$  - главный момент реакций связей;

$\sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{\phi}_i) = \vec{M}_0^\phi$  - главный момент сил инерции точек системы.

Уравнение принимает вид:

$$\vec{M}_0^F + \vec{M}_0^R + \vec{M}_0^\phi = 0 . \quad (38)$$

Совокупность уравнений (36) и (37) представляет собой принцип Даламбера (метод кинетостатики) для механической системы.

В любой момент движения механической системы геометрическая сумма главных векторов задаваемых сил, реакций связей и сил инерции точек, а также геометрическая сумма моментов этих сил относительно произвольной центра равны нулю.

Векторным равенствам (36) и (37) в статике соответствуют два векторных равенства:

$$\vec{R}^* = 0, \quad \vec{M}_0 = 0.$$

Это условие равновесия произвольной системы сил. Векторным равенствам (6) и (7) соответствуют:

на плоскости - три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_{i0} = 0;$$

в пространстве - шесть уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0. \\ \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0. \end{aligned}$$

Применяя принцип Даламбера, необходимо помнить, что фактически на точки системы действуют только активные силы и реакции связей.

Силы инерции лишь условно прикладываются к движущимся точкам. Поэтому получающееся при этом равновесие также является условным. Значение принципа Даламбера состоит в том, что он позволяет формально записать уравнения движения в виде уравнений равновесия. Это значительно упрощает решение целого ряда задач динамики.

## 12. ПРИВЕДЕНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ ТОЧЕК ТЕЛА К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

### 12.1. При поступательном движении тела

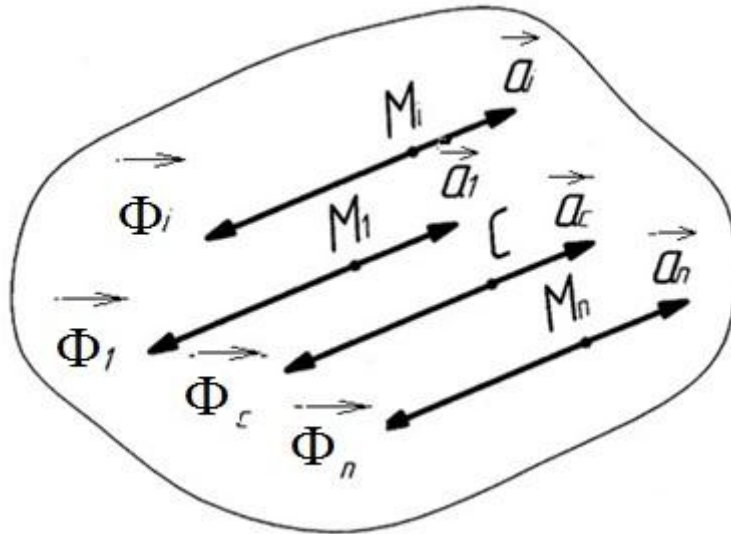


Рис. 24

Как известно из кинематики, при поступательном движении ускорения всех точек тела геометрически равны, и центр масс тела будет иметь такое же по величине и направлению ускорение, как и все его точки (рис. 24).

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \dots = \vec{a}_n = \vec{a}_c = \vec{a},$$

$\vec{a}$  - ускорение поступательного движения тела.

Главный вектор сил инерции определяется:

$$\vec{\phi} = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i = \sum_{i=1}^n (-m_i \vec{a}_i) = \sum_{i=1}^n (-m_i \vec{a}_c) = -\vec{a}_c \sum_{i=1}^n m_i = -m \vec{a}_c.$$

$$\vec{\phi} = -m \vec{a}_c. \quad (39)$$

Так, при поступательном движении ускорения всех точек тела геометрически равны и относительные ускорения точек относительно центра масс равны нулю, главный момент сил инерции равен нулю, т.е.

$\vec{\phi} = -m \vec{a}_c = 0$ , так как  $\vec{a}_c = 0$  поскольку центр масс тела не подвижен.

Для определения главного момента сил инерции тела разложим силу инерции каждой точки тела на вращательную и центробежную силу инерции.

Так как линии действия центробежных сил инерции проходят через ось Z вращения тела, то искомый момент сил инерции будет равен сумме моментов вращательных сил инерции относительно центра масс (рис.25), т.е.:

$$M_Z^\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i^{\text{вп}} \cdot r_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i \varepsilon r_i = \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = I_Z \varepsilon .$$

Здесь  $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = I_Z$  - момент инерции тела относительно оси вращения. Окончательно получаем:

$$M_Z^\phi = I_Z \varepsilon . \quad (40)$$

Направлен вектор  $\overrightarrow{M_Z^\phi}$  по оси вращения тела противоположно вектору углового ускорения.

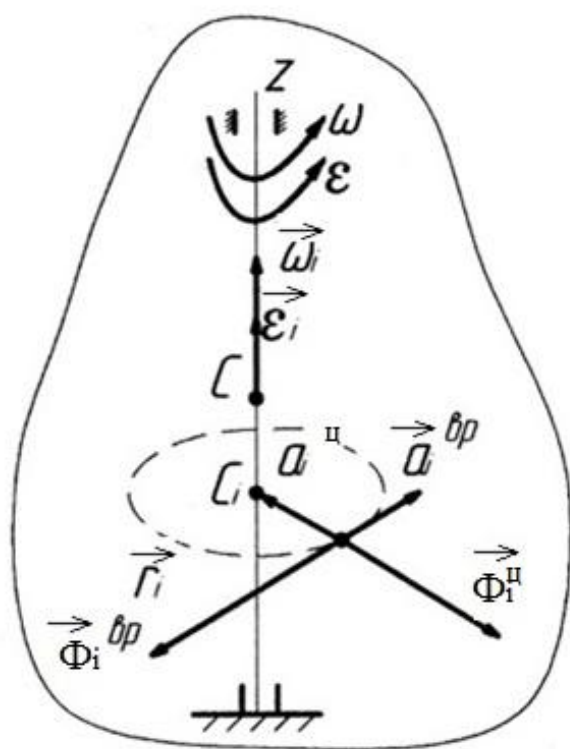


Рис. 25

Следовательно, при вращательном движении силы инерции точек тела приводятся к паре сил, лежащей в плоскости материальной симметрии тела, момент, который равен модулю произведению момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение тела, а направлен противоположно этому ускорению.

## 12.2. Плоское движение тела

Рассмотрим движение тела имеющего плоскость материальной симметрии, при котором все точки тела движутся параллельно этой плоскости (рис.26).

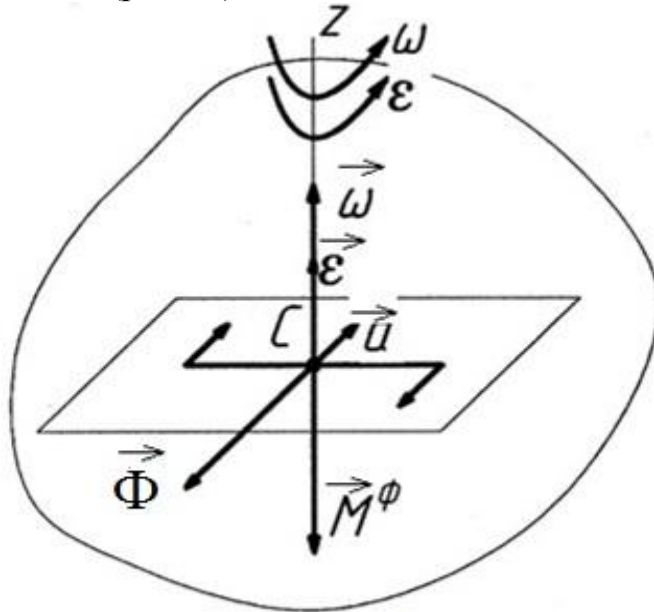


Рис. 26

Такое движение тела можно разложить на поступательное вместе с центром масс  $C$  тела и вращательное вокруг подвижной оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярной к плоскости симметрии.

Силы инерции при поступательном движении тела приводятся к равнодействующей, а при вращательном - к паре сил.

Таким образом получаем:

При плоском движении силы инерции точек тела приводятся к равнодействующей силе, приложенной в центре масс и равной главному вектору сил инерции, и к паре сил, лежащей в плоскости симметрии, величина момента которой определяется формулой (10).

Следовательно,

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_C, \quad \vec{M\Phi} = -\vec{I}_Z \cdot \vec{\epsilon}. \quad (41)$$

## 13. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА ДАЛАМБЕРА

*Пример 1.* Самолет, пикируя отвесно, достиг скорости  $U = 1000$  км/ч после чего летчик стал выводить самолет из пике, описывая дугу окружности радиусом  $R = 600$  м, в вертикальной плоскости. Вес летчика  $G = 80$  кГ. С какой наибольшей силой летчик прижмется к сидению?

*Решение:*

1) На летчика, находящегося в самолете, действуют: сила тяжести  $G$  и реакция сидения  $N$ . Наибольшая реакция будет в момент прохождения самолетом нижнего положения  $M$  дуги окружности.

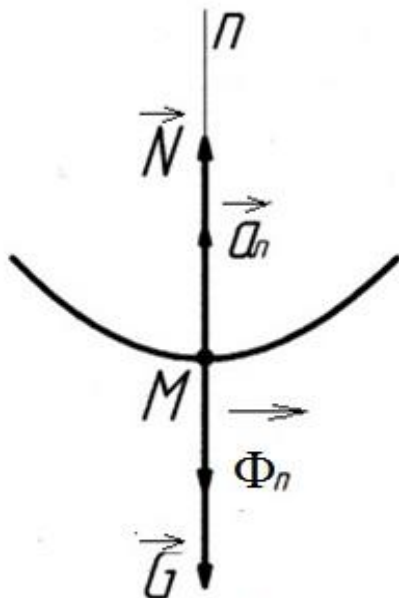


Рис. 27

2) Приложим нормальную силу инерции и составим уравнение равновесия точки в проекции на главную нормаль

$$\sum_{i=1}^n P_{in} = N - G - \phi_n = 0. \quad (42)$$

3) Находим силу, с которой летчик прижимается к сиденью.

Из уравнения (42) получаем:

$$N = G + \phi_n = G + \frac{GU^2}{gR} =$$

$$80 + \frac{80 \cdot 1000^2}{9.81 \cdot 3.6^2 \cdot 600} = 80 + 1050 =$$

$$= 1130 \text{ кГ}.$$

Сила, с которой летчик прижимается к сиденью, численно равна реакции и направлена в противоположную ей сторону.

*Пример 2.* Груз  $G_1 = 80$  кГ поднимается при помощи лебедки весом  $G_2 = 200$  кГ с постоянным ускорением  $a = 1$  м/с<sup>2</sup>. Лебедка установлена на балке  $AB$ , заделанной одним концом в стену, а к ее барабану приложен вращающий момент  $M = 124$  кГм. Определить реакции заделки, если: расстояние от оси барабана лебедки до стены  $l = 1.2$  м, радиус барабана  $R = 0.2$  м, момент инерции барабана относительно оси вращения  $I_z = 2$  кГ\*см<sup>2</sup>. Весом балки пренебречь.

*Решение:*

1) Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза, лебедки и балки. На систему действуют активные силы: вес груза  $S$ , вес лебедки  $G_2$ , и реакции заделки:  $X_A, Y_A, M_A$ .

2) Прикладываем к телам системы их силы инерции.

Сила инерции груза, движущегося поступательно с ускорением  $a$ , выражается вектором:

$$\vec{\phi} = -m\vec{a} = -\frac{\vec{G}_1}{g}\vec{a}.$$

3) Составляем уравнения равновесия системы.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = X_A = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = Y_A - G_1 - G_2 - \dots = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = -M_A - G_1(l - R) + \phi(l - R) + G_2l + M - M^\phi = 0$$

4) Находим реакции заделки.

Из уравнения (1):  $X_A = 0$

Из уравнения (2):  $Y_A = G_1 + G_2 + \phi = G_1 + G_2 + \frac{G_1}{g}a =$

$$= 80 + 200 + \frac{80}{9.81} \cdot 1 = 288 \text{ кГ.}$$

Из уравнения (3):  $M_A = G_1(l - R) + \phi(l - R) + G_2l + M - M^\phi =$

$$= G_1(l - R) \left(1 + \frac{a}{g}\right) + G_2l + M - l_z \frac{a}{R} =$$

$$= 80(1.2 - 0.2) \left(1 + \frac{1}{9.81}\right) + 200 \cdot 1.2 + 12 - 2 \cdot \frac{1}{0.2} = 442 \text{ кГм.}$$

Следовательно,

$$X_A = 0, Y_A = 288 \text{ кГ, } M_A = 442 \text{ кГм}$$

## **Библиографический список**

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - СПб.: Политехника, 2009.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 2009.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. – М.: ЧеРо, 1999.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 2011.
5. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.- М.: Наука, 2009.
6. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 2010.

# Оглавление

|                                                                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение.....                                                                                                 | 3  |
| 1. Момент инерции твердого тела относительно оси.<br>Радиус инерции.....                                      | 3  |
| 2. Теорема о моментах инерции тела относительно параллельных<br>осей (теорема Штейнера).....                  | 5  |
| 3. Моменты инерции простейших однородных тел.....                                                             | 6  |
| 4. Дифференциальное уравнение вращательного движения.....                                                     | 10 |
| 5. Элементарная работа и работа силы на конечном перемещении .....                                            | 12 |
| 6. Работа силы тяжести и силы упругости.....                                                                  | 14 |
| 7. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу при<br>поступательном и вращательном движении.....      | 17 |
| 8. Кинетическая энергия материальной точки и механической<br>системы. Кинетическая энергия твердого тела..... | 22 |
| 9. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы<br>и материальной точки .....               | 25 |
| 10. Сила энергии материальной точки.....                                                                      | 28 |
| 11. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы<br>(метод кинетостатики) .....            | 30 |
| 12. Приведение сил инерции точек тела к простейшему виду.....                                                 | 34 |
| 13. Примеры применения принципа Даламбера.....                                                                | 36 |
| Библиографический список.....                                                                                 | 39 |

*Учебное издание*

Мария Владимировна Максименко  
Виктор Евгеньевич Головкин  
Иван Владимирович Ключкин  
Сергей Вячеславович Сеньюшкин

# **Теоретическая механика**

## **Часть 4**

## **Динамика системы**

### **УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

Редактор и корректор В.А.Басова  
Техн. редактор Л.Я.Титова

Темплан 2014, поз.51

---

Подп. к печати 18.11.2014.      Формат 60х84/16.      Бумага тип. №1.  
Печать офсетная. Объём 2,5 печ.л.;      2,5 уч.-изд.л.  
Тираж 100 экз.      Изд. № 51.      Цена “С”.      Заказ

Ризограф      Санкт-Петербургского      государственного  
технологического университета растительных полимеров, 198095,  
ул. Ивана Черных, 4.