

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ
ПОЛИМЕРОВ»

Теоретическая механика

Часть 3

Динамика точки

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Санкт-Петербург
2014

Теоретическая механика

Часть 3

Динамика точки

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**Санкт-Петербург
2014**

УДК 531 (075)

ББК 22.3я7

Т 338

Теоретическая механика. Ч.3. Динамика точки: учебное пособие / М.В.Максименко, В.Е.Головко, И.В.Клюшкин; СПбГТУРП.—СПб., 2014.—69с.

В учебном пособии рассматривается часть курса теоретической механики— «Динамика точки». Пособие соответствует программе курса теоретической механики и рассчитано на студентов очной, вечерней и заочной форм обучения. В пособии рассмотрены цели и задачи теоретической механики, дана сводка основных понятий. Материал учебного пособия изложен так, что им можно пользоваться при изучении полного и краткого курсов.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям: 27.03.04 «Управление в технических системах»; 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»; 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»; 15.03.02. «Технологические машины и оборудование».

Рецензенты:

Заслуженный работник высшей школы РФ, д-р техн. наук, профессор кафедры системного анализа Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета) В.А. Холоднов; канд. техн. наук, доцент кафедры прочности материалов и конструкций Санкт-Петербургского государственного университета путей сообщения Б.М. Аллахвердов.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия.

© Санкт-Петербургский государственный
технологический университет
растительных полимеров

Учебное издание

Мария Владимировна Максименко
Виктор Евгеньевич Головки
Иван Владимирович Ключкин

Теоретическая механика

Часть 3

Динамика точки

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор и корректор В.А.Басова
Техн. редактор Л.Я.Титова

Темплан 2014, поз.56

Подп. к печати	Формат	60x84/16.	Бумага тип. №1.
Печать офсетная.	Объём 4,25 печ.л.;	4,25	уч.-изд.л.
Тираж 100 экз.	Изд. № 56.	Цена “С”.	Заказ

Ризограф Санкт-Петербургского государственного
технологического университета растительных полимеров,
198095, ул. Ивана Черных, 4.

Введение

Динамика – это раздел теоретической механики, в котором изучается связь между движением материальных тел и силами, действующими на них. В отличие от кинематики, где движение материальных тел рассматривалось только с геометрической точки зрения, то есть независимо от причин, вызывающих или изменяющих это движение, в динамике движение тела (в общем случае - движение механической системы) рассматривается в совокупности с действующими на это тело (на эту систему) силами.

В курсе изложения теоретической механики раздел «Динамика» может быть разделен на две большие части: динамика материальной точки и динамика системы. В первой части изучается движение *материальной точки*, а именно, такого тела, что различием в движении отдельных точек этого тела можно пренебречь.

Основанием теоретической механики являются аксиомы (или законы) Ньютона. Эти аксиомы представляют собой постулаты, справедливость которых подтверждается многовековыми наблюдениями и опытом человечества.

Ньютон сформулировал законы механического движения по отношению к абсолютному (неподвижному) пространству. Системы координат, неподвижные относительно этого пространства или движущиеся относительно него поступательно, равномерно и прямолинейно, называют *инерциальными системами отсчета*.

Отметим, что в теоретической механике считается, что инерциальные системы отсчета эквивалентны во всех отношениях. Таким образом, все уравнения и законы механики не зависят от конкретного выбора инерциальной системы отсчета. В этом состоит важнейший принцип механики — *принцип относительности Галилея*.

1. Законы (аксиомы) Ньютона. Основные понятия

Законы (аксиомы), которые лежат в основе классической динамики, Исаак Ньютон сформулировал и изложил в своём труде «Математические начала натуральной философии» в 1687 году. Все дальнейшие выводы динамики получены логическим путем с использованием методов математического анализа из этих основных законов (аксиом).

1-й закон Ньютона (аксиома инерции)

Если на материальную точку не действуют силы, то она находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно.

Обозначим через $\vec{F}$ главный вектор всех сил, действующих на точку, $\vec{v}$ – вектор скорости точки. Таким образом, первый закон Ньютона можно выразить так:

$$\text{если } \vec{F} = 0, \text{ то } \vec{v} = \text{const}.$$

Если скорость $\vec{v} = 0$, то этот случай соответствует состоянию покоя, в случае $\vec{v} \neq 0$ точка движется равномерно (с постоянной скоростью).

Сила выражает механическое воздействие на материальную точку, оказываемое на нее со стороны других тел. Материальная точка, поставленная в условия аксиомы инерции, – это точка, *изолированная* от воздействия на нее других тел. Очевидно, что понятие изолированной материальной точки является идеализированным.

Инерцией (инертностью) называется свойство материальной точки сохранять свою скорость (как по величине, так и по направлению), в частном случае, сохранять состояние покоя (скорость равна нулю). Это свойство было указано Галилеем.

Итак, первый закон Ньютона определяет свойство инерции материальной точки. С другой стороны, верно и обратное утверждение: если точка движется неравномерно и прямолинейно, то на нее действует сила $\vec{F} \neq 0$.

2-й закон Ньютона (основная аксиома динамики)

Если $\vec{a}$ – ускорение, а m – это масса материальной точки в инерциальной системе отсчета, то сила, действующая на эту материальную точку, по модулю равна произведению массы на ускорение, а по направлению совпадает с направлением ускорения, или:

$$|\vec{F}| = ma. \quad (1)$$

Это векторное уравнение устанавливает соотношение между тремя величинами – силой, массой и ускорением. В то же время оно является основным уравнением динамики и дает способ определения модуля и направления силы.

Масса m – скалярная положительная величина - является основной динамической характеристикой материальной точки и остается постоянной во все время движения (согласно воззрениям классической механики). За единицу массы в Международной системе единиц принимается масса эталона, который хранится в Париже. Единица массы называется *килограмм* (кг).

Из уравнения (1) видно, что модуль силы пропорционален массе точки, то есть, чтобы сообщить точке данное ускорение, нужно приложить тем большую силу, чем больше ее масса. За единицу силы принимается такая сила, которую надо приложить к материальной точке массой 1 кг, чтобы вызвать ее ускорение в инерциальной системе отсчета, равное 1 м/с². Эта единица силы называется *Ньютоном* (Н).

Второй закон Ньютона можно сформулировать иначе, введя понятие количества движения. *Количеством движения* материальной точки называется вектор $\vec{q}$, величина которого равна произведению массы точки на ее скорость, то есть $\vec{q} = m\vec{v}$, а направление совпадает с направлением вектора скорости.

Как известно из кинематики, ускорение точки может быть найдено как производная от скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} ;$$

и, учитывая, что масса материальной точки – величина постоянная, уравнение (1) может быть представлено в следующем виде:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt},$$

то есть сила, приложенная к материальной точке, равна производной от количества движения этой точки по времени.

3-й закон Ньютона (аксиома взаимодействия материальных точек)

Если одна точка действует на другую, то и вторая точка действует на первую, причем силы, с которыми действуют друг на друга эти материальные точки, равны по модулю и направлены по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

Отметим, что ускорения, которые сообщают друг другу две точки A и B , по модулю пропорциональны массам этих точек и направлены по прямой AB в противоположные стороны:

$$\frac{\vec{a}}{\vec{a}'} = \frac{\vec{m}'}{\vec{m}}.$$

Закон сложения сил (аксиома независимости действия сил)

Если на материальную точку действуют одновременно несколько сил, то ускорение этой точки равно геометрической сумме тех ускорений, которые получает эта точка при действии каждой из этих сил в отдельности.

Действительно, опыт показывает, что сила взаимодействия двух материальных точек не может быть изменена возможными действиями на них других материальных точек, если положение, скорость и физическое состояние (электрическое, магнитное и т. д.) этих точек остаются неизменными. Иными словами, когда точки P_i ($i = 1, \dots, k$) действуют на одну и ту же точку P с силами $\vec{F}_i$, то ускорения $\vec{a}_i$, которые они вызвали бы у нее, действуя каждая отдельно, складываются. В этом состоит аксиома независимости действия сил.

Пусть m – масса точки P . Тогда, согласно уравнению (1), $\vec{a}_i = \frac{1}{m} \vec{F}_i$. В соответствии с аксиомой независимости сил, ускорение $\vec{a}$ точки P вычисляется по формуле:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_k = \frac{1}{m} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_k),$$

откуда видно, что ускорение $\vec{a}$ точки P таково, каким оно было бы, если бы к ней было приложено не k отдельных сил, а одна сила $\vec{F}$, равная сумме сил $\vec{F}_i$:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_k.$$

Это и есть закон сложения сил. Он является эквивалентной формулировкой аксиомы независимости действия сил. Упомянутая сила $\vec{F}$, действие которой заменяет действие всех сил $\vec{F}_i$, называется равнодействующей сил $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_k$, приложенных к точке P .

Отметим, что силы, действующие на точку, можно разделить на две группы: активные силы (их можно условно назвать заданными силами) и реакции связей (пассивные силы). Активные силы заранее известны и сохраняются в случае, если связи мгновенно исчезнут. Пассивные силы заранее не известны и зависят не только от материальных приспособлений, которые реализуют связи, а также от активных сил и движения материальной точки.

Замечание. В разделе «Кинематика» было отмечено, что всякое механическое движение мы можем наблюдать и изучать только по отношению к выбранной системе отсчета, связанной с каким-нибудь материальным телом. Значит, в действительности мы не можем установить абсолютно неподвижную систему отсчета. Отсюда возникает довольно важный вопрос: В какой системе отсчета применимы к механическому движению законы Ньютона? Итак, желая воспользоваться законами классической механики, мы должны прежде всего установить такую систему отсчета, которую можно было бы считать инерциальной, т. е. в которой применимы, по крайней мере, с достаточной степенью точности, законы Ньютона.

Как показывают наблюдения и опыт, в большинстве задач динамики, относящихся к технической практике, за такую систему отсчета можно принять систему осей, связанных с Землей. В тех же случаях, когда

приходится учитывать суточное вращение Земли, за инерциальную систему отсчета принимают геоцентрическую систему координат, начало которой находится в центре Земли, а оси направлены к трем выбранным «неподвижным» звездам. В астрономии пользуются гелиоцентрической системой координат, начало которой совпадает с центром Солнца, а оси направлены к трем выбранным «неподвижным» звездам. Современное состояние наших знаний показывает, что гелиоцентрическая система отсчета с весьма большой степенью точности является инерциальной системой.

2. Дифференциальные уравнения движения точки

Пусть материальная точка $M(x, y, z)$ массой m движется по криволинейной траектории с ускорением $\vec{a}$ под действием некоторой переменной силы $\vec{F}$. Проекции этой силы на оси инерциальной системы отсчета обозначим через X, Y, Z . Тогда на основании 2-го закона Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (2)$$

Спроецируем векторное равенство (2) на координатные оси, получим:

$$X = ma_x, Y = ma_y, Z = ma_z. \quad (3)$$

Как известно из кинематики, проекции ускорения на координатные оси выражаются так:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Подставляя последние выражения в уравнение (3), получим:

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, Y = m \frac{d^2y}{dt^2}, Z = m \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (4)$$

Таким образом, получили систему трех дифференциальных уравнений второго порядка, выражающих в координатной форме основную аксиому динамики.

Уравнения (4) в динамике точки являются основными и называются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки*.

Замечание: в случае, когда на материальную точку действует не одна сила, а система сил, то под X, Y, Z следует понимать проекции главного вектора этой системы сил

3. Две основные задачи динамики точки

(частный случай: прямолинейное движение точки)

В динамике точки рассматривается движение материальной точки в связи с силами, приложенными к ней, и ставится целью решение *двух основных задач динамики точки*:

- 1) по заданным силам найти движение точки;
- 2) по заданному движению найти силы, приложенные к точке.

Используя дифференциальные уравнения (4), которые были получены в предыдущем пункте, можно решить обе основные задачи динамики точки.

Первая (прямая) задача динамики точки

Дано: движение точки, масса точки - m .

Найти: силу, действующую на точку в каждый момент.

Решение: пусть движение точки задано тремя кинематическими уравнениями:

$$x(t), y(t), z(t), \quad (5)$$

которые представляют собой координаты точки как известные функции времени. Тогда для того, чтобы найти неизвестную силу $\vec{F}$, действующую на точку, необходимо подставить заданную массу точки m и уравнения движения (5) в уравнения (4). Получим:

$$X = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}, Y = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, Z = m \frac{d^2 z(t)}{dt^2}.$$

Определив три проекции искомой силы $\vec{F}$, будем знать ее модуль и направление в каждый момент времени.

Таким образом, первая (прямая) задача динамики точки решается путем дифференцирования дважды уравнений движения точки (5) и подстановки этих производных и массы точки m в уравнения (4), из которых находится неизвестная сила, действующая на точку в каждый момент.

Пример 3.1. Движение материальной точки весом 2 кг выражается уравнениями $x = 3\cos(2\pi t)$ м, $y = 4\sin(\pi t)$ м, где t выражено в секундах.

Определить: проекции силы, действующей на точку, в зависимости от ее координат.

Решение: Из данных кинематических уравнений движения точки находим:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -12\pi^2 \cos(2\pi t) = -4\pi^2 x(t), \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} &= -4\pi^2 \sin(\pi t) = -\pi^2 y(t).\end{aligned}$$

Чтобы найти проекции искомой силы, умножим полученные уравнения на массу точки:

$$\begin{aligned}X &= 2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -8\pi^2 x(t), \\ Y &= 2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -2\pi^2 y(t).\end{aligned}$$

Ответ: $X = -8\pi^2 x(t), Y = -2\pi^2 y(t).$

Вторая (обратная) задача

Дано: сила $\vec{F}$, действующая на точку, масса точки m .

Найти: движение точки.

Решение: Чтобы найти движение точки, а именно, выразить ее координаты как функции времени, необходимо проинтегрировать дифференциальные уравнения движения точки (4), считая X, Y, Z неизвестными функциями времени.

Заметим, что при интегрировании системы (4) в общем случае, получим 6 произвольных постоянных. Таким образом, чтобы полностью

определить движение точки под действием заданной силы $\vec{F}$, надо задать начальные условия движения – начальное положение точки (3 координаты) и начальную скорость точки (3 проекции вектора скорости на оси координат). В случае плоского движения, произвольных постоянных будет только 4, как и начальных условий (2 координаты начального положения и 2 проекции вектора скорости на оси координат).

Частный случай. Прямолинейное движение точки

Пусть материальная точка движется по прямолинейной траектории под действием силы $\vec{F}$. Примем эту прямую за ось Ox , тогда координаты y и z точки будут постоянно равны нулю. Таким образом, уравнения (4) примут вид

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, Y = 0, Z = 0.$$

Очевидно, что направление действующей силы $\vec{F}$ совпадает с направлением траектории, то есть $F = \pm X$, знак «плюс» соответствует случаю, когда действующая сила направлена в положительную сторону оси Ox , знак «минус» – в отрицательную. Получили, что в случае прямолинейного движения материальной точки из трех дифференциальных уравнений движения (4) осталось только одно:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X.$$

Рассмотрим различные случаи определения прямолинейного движения точки, когда известна действующая сила, то есть решим вторую задачу динамики.

1). Действующая сила является постоянной.

Пример 3.2: Тяжелое тело спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом 30° к горизонту (рис. 1). В начальный момент его скорость равнялась 2 м/сек.

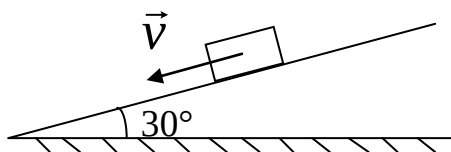


Рис. 1

Найти: за какое время тело пройдет путь 9,6 м.

Решение: Примем начальное положение точки за начало координат, ось Ox направим вдоль поверхности в сторону движения точки так, чтобы вектор скорости лежал на оси, а ось Oy – перпендикулярно к оси Ox вверх.

На точку действуют сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и реакция опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно к плоскости движения (рис. 2).

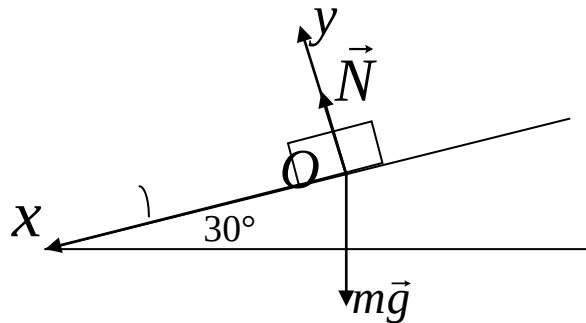


Рис. 2

При указанном выборе оси Ox имеем:

$$X = mg \cos 60^\circ, Y = N - mg \cos 30^\circ, Z = 0.$$

Кроме того, в начальный момент при $t = 0$ имеем:

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

$$v_{0x} = 2, v_{0y} = v_{0z} = 0.$$

Составляя дифференциальные уравнения движения точки, получим:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = mg \cos 60^\circ, m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = N - mg \sin 60^\circ, m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = 0.$$

Сокращаем первое уравнение на m , получим:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = g \cos 60^\circ;$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 9,8 \cdot 0,5;$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 4,9.$$

Интегрируя первое уравнение, находим:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 4,9t + C_1. \quad (6)$$

Заменяя $\frac{dx(t)}{dt}$ через v_x , получаем закон изменения проекции на ось Ox вектора скорости:

$$v_x = 4,9t + C_1.$$

Остается найти постоянную C_1 . Для этого подставляем известное значение проекции на ось Ox вектора скорости в начальный момент времени, т.е. при $t = 0$:

$$2 = 4,9 \cdot 0 + C_1;$$

$$2 = C_1.$$

Подставляем в (6) найденное значение C_1 :

$$\frac{dx(t)}{dt} = 4,9t + 2.$$

Интегрируем еще раз, получим:

$$x(t) = 4,9 \frac{t^2}{2} + 2t + C_2.$$

Аналогично находим постоянную C_2 , используя начальные данные:

$$0 = 4,9 \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 + C_2;$$
$$0 = C_2.$$

Тогда закон изменения движения точки вдоль оси Ox примет вид:

$$x(t) = 2,45t^2 + 2t. \quad (7)$$

Рассмотрим второе и третье из дифференциальных уравнений движения точки. Так как координаты точки вдоль осей Oy и Oz не изменяются в процессе движения, а начальное положение совпадает с началом координат, то во все время движения

$$y(t) = 0, z(t) = 0,$$

а значит, что:

$$N = mg \cos 30^\circ, v_y = v_z = 0.$$

Чтобы найти, за какое время тело пройдет путь 9,6 м, подставим эту величину в уравнение (7):

$$9,6 = 2,45t^2 + 2t;$$
$$2,45t^2 + 2t - 9,6 = 0;$$
$$t_1 = 1,61;$$
$$t_2 = -2,43.$$

Очевидно, что отрицательное значение t не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: Тело пройдет путь, равный 9,6 м, за 1,61 с.

2). Действующая сила является переменной и зависит только от времени.

Пример 3.3. Материальная точка массой m движется из состояния покоя под действием силы $X = Q \sin(kt)$.

Найти: закон движения точки.

Решение. Дифференциальное уравнение движения точки имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = Q \sin(kt), \text{ или } mdv = Q \sin(kt) dt.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от 0 до v и от 0 до t , получим:

$$mv = -\frac{Q}{k} [\cos(kt) - 1], \text{ или } v = -\frac{Q}{mk} [\cos(kt) - 1].$$

Заменяя v через $\frac{dx}{dt}$, имеем:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{Q}{mk} [\cos(kt) - 1],$$

откуда

$$dx = \frac{Q}{mk} dt - \cos(kt) dt.$$

Принимая начальное положение точки за начало отсчета и интегрируя это уравнение в пределах от 0 до x и от 0 до t , находим закон движения точки под действием заданной периодической силы:

$$x = \frac{Q}{mk} t - \frac{Q}{k^2 m} \sin(kt).$$

Это уравнение показывает, что в данном случае движение точки можно рассматривать как результат сложения двух движений:

1. Равномерного движения

$$x = \frac{Q}{mk} t,$$

2. Гармонического колебания

$$x = -\frac{Q}{k^2 m} \sin(kt).$$

Ответ: $x = \frac{Q}{mk} t - \frac{Q}{k^2 m} \sin(kt).$

Последние три частных случая требуют достаточно громоздких математических вычислений при решении дифференциального уравнения движения точки и не будут подробно рассматриваться в данном учебном пособии.

3). Действующая сила является переменной и зависит только от положения точки (координаты x).

4). Действующая сила является переменной и зависит только от скорости точки.

5). Общий случай – переменная сила $\vec{F}$ (может зависеть от времени, координаты, скорости точки).

4. Теорема об изменении количества движения

Эта теорема устанавливает связь между количеством движения материальной точки и импульсом силы, действующей на точку. Как было указано в п.1, *количеством движения материальной точки* называется *векторная* величина, равная произведению скорости этой точки на ее массу, то есть величина $m\vec{v}$.

Определим размерность этой величины:

$$\begin{aligned} [\text{количество движения}] &= \text{масса} \times \text{скорость} = (\text{сила/ускорение}) \times \text{скорость} = \\ &= \text{сила} \times (\text{время}^2/\text{длина}) \times (\text{длина/время}) = \text{сила} \times \text{время}. \end{aligned}$$

Таким образом, количество движения в технической системе единиц измеряется в *килограммо-секундах* [кг сек].

Запишем проекции количества движения на оси координат:

$$mv_x = m \frac{dx}{dt}, mv_y = m \frac{dy}{dt}, mv_z = m \frac{dz}{dt}.$$

Элементарным импульсом силы называется векторная величина, равная произведению силы на бесконечно малый промежуток времени, в течение которого действует эта сила, т. е. вектор $\vec{F} dt$, имеющий, очевидно,

то же направление, что и сила $\vec{F}$. Чтобы найти импульс силы за конечный промежуток времени t , нужно разделить этот промежуток на весьма большое число n очень малых интервалов dt_i , составить геометрическую сумму элементарных импульсов, соответствующих каждому из этих интервалов, и затем перейти к пределу, предполагая, что $n \rightarrow \infty$ и $dt_i \rightarrow 0$. Если обозначим импульс силы за время t через $\vec{S}$, то получим:

$$\vec{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i dt_i = \int_0^t \vec{F} dt. \quad (8)$$

Таким образом, импульс силы за конечный промежуток времени выражается определенным векторным интегралом. Так как импульс есть произведение силы на время, то его численное значение выражается, очевидно, в килограммо-секундах (кг сек).

Проекции вектора $\vec{S}$ на координатные оси на основании равенства (8) выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_i dt_i = \int_0^t X dt, \\ S_y &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Y_i dt_i = \int_0^t Y dt, \\ S_z &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Z_i dt_i = \int_0^t Z dt. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь X, Y, Z обозначают проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси.

Возьмем теперь основное уравнение динамики

$$m\vec{a} = \vec{F}, \text{ или } m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \text{ или } \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

Отсюда получаем:

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt.$$

Таким образом: *дифференциал количества движения материальной точки равен элементарному импульсу действующей на эту точку силы.* Интегрируя это уравнение в пределах от 0 до t и обозначая начальную и конечную скорости точки через $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$, получим:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^t \vec{F} dt$$

или

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S}. \quad (10)$$

Равенство (10) выражает теорему о количестве движения: *изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно импульсу действующей на эту точку силы за то же время.*

Если известны количества движения материальной точки $m\vec{v}$ и $m\vec{v}_0$, то легко построить вектор $\vec{S}$, как указано на рис. 3.

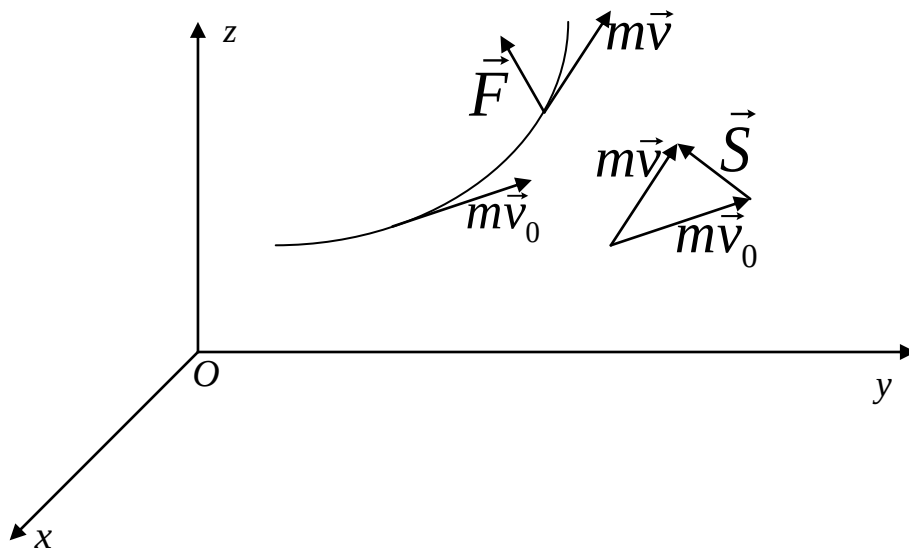


Рис. 3

Наоборот, если известен импульс $\vec{S}$ и начальная скорость точки $\vec{v}_0$, то из равенства (10) находим скорость $\vec{v}$, а именно:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{1}{m} \vec{S}.$$

Спроецируем левую и правую части векторного равенства (10) на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= S_x = \int_0^t X dt, \\ mv_y - mv_{0y} &= S_y = \int_0^t Y dt, \\ mv_z - mv_{0z} &= S_z = \int_0^t Z dt, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

т. е. *изменение проекции количества движения на какую-нибудь ось равно проекции импульса действующей силы на ту же ось.*

Если проекции силы X, Y, Z являются известными функциями времени t , то, выполняя интегрирование в уравнениях (11), найдем проекции скорости v_x, v_y и v_z и, следовательно, сможем определить модуль и направление скорости точки для любого момента t .

Следствие 1. Пусть $X = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= 0, \\ v_x &= v_{0x} = \text{const}, \end{aligned}$$

т. е. *если проекция действующей силы на данную ось во все время движения равна нулю, то проекция скорости движущейся точки на эту ось остается постоянной.*

Следствие 2. Пусть $X = \text{const}$. Тогда $\int_0^t X dt = Xt$ и, следовательно,

$$mv_x - mv_{0x} = Xt.$$

Следствие 3. Пусть $\vec{F} = \text{const}$. Тогда $\vec{S} = \int_0^t \vec{F} dt = \vec{F}t$ и, следовательно,

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{F}t.$$

Из теоремы о количестве движения следует, что эффект действия силы, выражающийся в изменении количества движения материальной точки, измеряется импульсом этой силы.

5. Теорема об изменении момента количества движения

Пусть точка M массой m движется по некоторой кривой под действием силы $\vec{F}$. Построим вектор $\vec{m}_O$, изображающий момент силы $\vec{F}$ относительно начала координат O .

Из статики известно, что этот вектор направлен перпендикулярно к плоскости треугольника, который получим, соединив начало и конец вектора $\vec{F}$ с точкой O , и по модулю равен удвоенной площади этого треугольника. Проекции m_{Ox}, m_{Oy}, m_{Oz} этого вектора на координатные оси равны моментам силы $\vec{F}$ относительно этих осей.

Момент силы $\vec{F}$ относительно точки O можно представить в виде векторного произведения радиуса-вектора $\vec{r}$ точки M на силу $\vec{F}$, т. е.

$$\vec{m}_O = \vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (12)$$

Аналогично мы можем построить вектор $\vec{l}_O$, изображающий момент количества движения $m\vec{v}$ относительно точки O . Этот вектор перпендикулярен плоскости треугольника, который получим, соединяя начало и конец вектора $m\vec{v}$ с точкой O , а по модулю равен удвоенной площади этого треугольника, причем, смотря с конца вектора $\vec{l}_O$ на этот треугольник, мы должны видеть вектор $m\vec{v}$ направленным против часовой стрелки относительно точки O .

Момент количества движения относительно точки O мы можем представить так же, как и момент силы, в виде векторного произведения радиуса-вектора $\vec{r}$ на вектор $m\vec{v}$:

$$\vec{l}_O = \vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (13)$$

Между моментом количества движения $m\vec{v}$ относительно данной точки O и моментом относительно какой-нибудь оси, проходящей через эту точку, существует такая же зависимость, как и между теми же моментами силы $\vec{F}$. Поэтому проекции вектора $\vec{l}_O$ на координатные оси равны моментам количества движения относительно этих осей:

$$l_{Ox} = m_x(m\vec{v}), l_{Oy} = m_y(m\vec{v}), l_{Oz} = m_z(m\vec{v}).$$

В статике были получены следующие формулы для моментов силы относительно координатных осей:

$$\begin{aligned} m_{Ox} &= m_x(\vec{F}) = yZ - zY, \\ m_{Oy} &= m_y(\vec{F}) = zX - xZ, \\ m_{Oz} &= m_z(\vec{F}) = xY - yX. \end{aligned}$$

Здесь X, Y, Z обозначают проекции силы $\vec{F}$ на оси, а x, y, z — координаты точки приложения этой силы, т. е. в данном случае координаты движущейся точки.

Очевидно, что моменты количества движения относительно координатных осей мы можем вычислить по этим же формулам, но только проекции X, Y, Z вектора $\vec{F}$ нужно заменить проекциями вектора $m\vec{v}$ на те же оси. Получим:

$$\left. \begin{aligned} m_x(m\vec{v}) &= y \cdot mv_z - z \cdot mv_y = m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right), \\ m_y(m\vec{v}) &= z \cdot mv_x - x \cdot mv_z = m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right), \\ m_z(m\vec{v}) &= x \cdot mv_y - y \cdot mv_x = m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right). \end{aligned} \right\}$$

Теорема, доказательство которой мы приведем ниже, выражает зависимость между векторами $\vec{m}_O(m\vec{v})$ и $\vec{m}_O(\vec{F})$.

Дифференцируя по t векторное равенство (13), получим:

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{m}_O(m\vec{v}) = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt} m\vec{v},$$

но

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \frac{d}{dt} m\vec{v} = \vec{F},$$

а потому

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}.$$

Но так как векторы $\vec{v}$ и $m\vec{v}$ коллинеарные, более того, направлены по одной прямой, то $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$ и, следовательно,

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

На основании равенства (12) получили:

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{m}_O(\vec{F}), \quad (14)$$

или производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-нибудь неподвижного центра О равна моменту действующей на эту точку силы относительно того же центра.

Переписав векторное равенство (14) в виде:

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{m}_O,$$

спроецируем это равенство на координатные оси; так как проекция производной от данного вектора на какую-нибудь ось равна производной от проекции этого вектора на ту же ось, то получим:

$$\frac{dl_{Ox}}{dt} = m_{Ox}, \frac{dl_{Oy}}{dt} = m_{Oy}, \frac{dl_{Oz}}{dt} = m_{Oz},$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} m_x(m\vec{v}) &= m_x(\vec{F}), \\ \frac{d}{dt} m_y(m\vec{v}) &= m_y(\vec{F}), \\ \frac{d}{dt} m_z(m\vec{v}) &= m_z(\vec{F}). \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения выражают теорему о моменте количества движения в координатной форме: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какой-нибудь неподвижной оси равна моменту действующей на эту точку силы относительно той же оси.*

Следствие 1. Пусть момент действующей на материальную точку силы относительно оси Oz во все время движения остается равным нулю, т. е. сила и ось лежат в одной плоскости, а $m_z(\vec{F}) = 0$. Тогда получим:

$$\frac{d}{dt} m_z(m\vec{v}) = 0,$$

откуда следует, что $m_z(m\vec{v}) = \text{const}$, т. е. *если момент действующей силы относительно какой-либо неподвижной оси все время движения равен нулю, то момент количества движения материальной точки относительно этой оси остается постоянным.*

Следствие 2. Пусть линия действия $\vec{F}$ силы все время проходит через одну и ту же неподвижную точку O . В этом случае сила называется центральной, а точка O называется центром этой силы. Тогда $\vec{m}_O(\vec{F}) = 0$ и, следовательно, на основании теоремы имеем:

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{m}_O(m\vec{v}) = 0,$$

а потому

$$\vec{l}_O = \vec{m}_O(m\vec{v}) = \text{const},$$

т. е. *в случае центральной силы момент количества движения материальной точки относительно центра этой силы остается постоянным.* Отсюда также следует, что под действием центральной силы точка описывает всегда плоскую траекторию, плоскость которой проходит через центр этой силы.

Пример 5.1. Планета в своем движении вокруг Солнца описывает эллипс, в одном из фокусов которого S находится Солнце. Пусть скорость планеты, когда она находится в ближайшей к Солнцу вершине B эллипса, равна v_1 .

Найти: скорость v_2 планеты в противоположной вершине эллипса A .

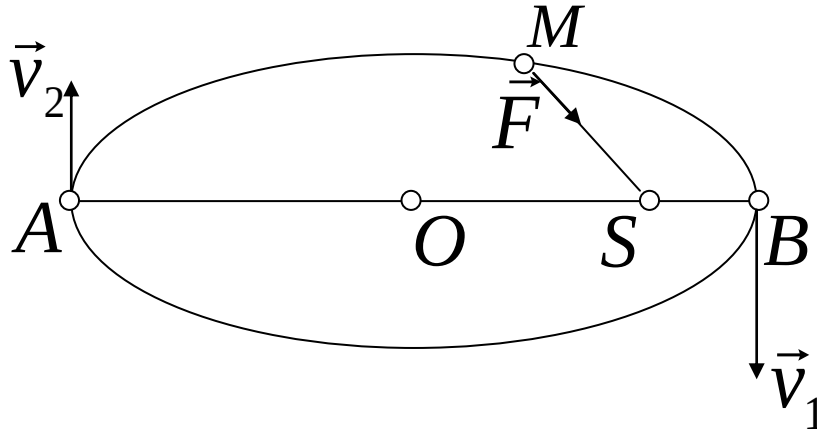


Рис. 4

Решение: Обозначая большую полуось и эксцентриситет эллипса соответственно через a и e , принимая во внимание, что фокусное расстояние $OS = ae$, получим для модулей моментов количества движения планеты относительно фокуса S следующие выражения:

$$\begin{aligned} |m_S(m\vec{v}_1)| &= mv_1 \cdot SB = mv_1(a - ae), \\ |m_S(m\vec{v}_2)| &= mv_2 \cdot SA = mv_2(a + ae). \end{aligned}$$

Так как действующая на планету сила $\vec{F}$ притяжения Солнцем является центральной силой, направленной к центру Солнца, то момент количества движения планеты относительно S остается постоянным, и значения его в точках B и A равны между собой. Следовательно,

$$mv_1 a(1 - e) = mv_2 a(1 + e),$$

откуда находим:

$$v_2 = \frac{1-e}{1+e} v_1.$$

Ответ: $v_2 = \frac{1-e}{1+e} v_1.$

6. Работа

Первые две рассмотренные теоремы относятся к понятию количества движения материальной точки. Следующая теорема динамики точки связана с понятием кинетической энергии. *Кинетической энергией материальной точки* называется скалярная величина, равная по величине половине произведения массы движущейся точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Определим размерность этой величины:

$$\begin{aligned} \left[\frac{mv^2}{2} \right] &= [\text{масса} \times \text{скорость}^2] = \left[\frac{\text{сила} \times \text{время}^2}{\text{длина}} \times \frac{\text{длина}^2}{\text{время}^2} \right] = \\ &= [\text{сила} \times \text{длина}]. \end{aligned}$$

Кинетическая энергия в технической системе единиц измеряется в килограммометрах (кгм).

Количество движения и кинетическая энергия являются основными мерами механического движения.

Прежде чем переходить к выводу теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки, рассмотрим понятие работы силы.

Пусть модуль силы $\vec{F}$ – величина переменная. В этом случае для вычисления работы на пути s разобьем этот путь на большое число n очень малых участков $ds_1, ds_2, \dots, ds_n$. Значения модуля силы $\vec{F}$ в начале каждого из этих участков обозначим соответственно через $F_1, F_2, \dots, F_n$. Так как участок ds_i очень мал, то величину F_i на этом участке приближенно можно считать

постоянной (с тем большей точностью, чем меньше ds_i). Поэтому *элементарная работа* на пути ds_i будет равна

$$F_i ds_i \text{ или } -F_i ds_i.$$

(Работа считается положительной, если направление силы $\vec{F}$ совпадает с направлением движения точки. Если же сила направлена в сторону, противоположную движению точки, то работа считается отрицательной.)

Взяв сумму этих элементарных работ и переходя затем к пределу при $ds_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, получим работу переменной силы на конечном пути s . В пределе сумма этих элементарных работ выразится определенным интегралом. Если обозначим работу через A , получим:

$$A = \lim \sum_{i=1}^n F_i ds_i = \int_0^s F ds,$$

или

$$A = - \int_0^s F ds.$$

Для того чтобы вычислить этот интеграл, модуль силы $\vec{F}$ нужно выразить как функцию переменного s . В качестве примера вычисления работы переменной силы решим следующую задачу.

Размерность работы выражается так:

$$[A] = [\text{сила} \times \text{длина}],$$

а потому работа, как и кинетическая энергия, в технической системе единиц измеряется, очевидно, в килограммометрах (кгм).

Частный случай. Если точка приложения постоянной силы $\vec{F}$ движется по прямой, совпадающей с линией действия силы, то работа этой силы равна произведению ее модуля F на длину пути s , пройденного точкой приложения силы, взятому с определенным знаком («плюс» или «минус»):

$$A = \pm Fs.$$

Пример 6.1. Если материальная точка весом $P=5$ кг падает по вертикали с высоты $h=4$ м, то работа силы $\vec{P}$ на этом пути равна $A=Ph=5 \cdot 4=20$ кгм.

Пример 6.2. Если точка весом P движется прямолинейно по негладкой горизонтальной плоскости, то работа силы трения на пути s выразится так:

$$A = -fPs,$$

где f – коэффициент трения.

Рассмотрим, как вычисляется работа в случае криволинейного движения точки. Пусть точка приложения M силы $\vec{F}$, переменной как по величине, так и по направлению, описывает криволинейную траекторию. Требуется определить работу этой силы на пути $M_0M_1=s$. Разобьем весь этот путь на большое число весьма малых участков; пусть один из таких элементарных участков есть $MM'=ds$. Разложим силу $\vec{F}$ на две составляющие $\vec{F}_\tau$ и $\vec{F}_n$, направленные соответственно по касательной и нормали к траектории в точке M .

Тогда элементарная работа силы $\vec{F}$ на пути ds выражается произведением $F_\tau ds$, взятым, так же как и в случае прямолинейного движения, со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, совпадает ли направление силы $\vec{F}$ с направлением скорости $\vec{v}$ точки приложения этой силы или эта сила направлена в сторону, противоположную скорости $\vec{v}$. Если под F_v будем понимать проекцию силы $\vec{F}$ на направление скорости $\vec{v}$, то, обозначая угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{v}$ через φ , получим:

$$F_v = F \cos \varphi = |\vec{F}_\tau|,$$

или

$$F_v = F \cos \varphi = -|\vec{F}_\tau|$$

в зависимости от знака $\cos \varphi$. Элементарная работа в обоих случаях будет равна

$$\vec{F}_v d\vec{s} = F \cos \varphi ds.$$

Если угол φ острый, то элементарная работа положительна. Если же этот угол тупой (в этом случае касательная сила $\vec{F}_\tau$ направлена, очевидно, противоположно скорости $\vec{v}$), то эта работа отрицательна.

Взяв сумму элементарных работ и переходя к пределу в предположении, что число n участков, на которые была разбита дуга M_0M_1 , неограниченно возрастает, а длина каждого участка ds_i стремится к нулю, получим работу силы $\vec{F}$ на конечном пути от M_0 до M_1 :

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_{\tau i} ds_i = \int_0^s F_v ds, \quad (15)$$

или

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_i \cos \varphi_i ds_i = \int_0^s F \cos \varphi ds. \quad (16)$$

Таким образом, работа силы на конечном пути выражается криволинейным интегралом, взятым вдоль соответствующей дуги траектории, которую описывает точка приложения силы. Если сила во все время движения перпендикулярна направлению скорости движения ее точки приложения, то работа этой силы равна нулю, так как в этом случае $\varphi = 90^\circ$ и $\cos \varphi = 0$.

Пример 6.3. При движении материальной точки по горизонтальной плоскости работа силы тяжести, действующей на эту точку, равна нулю.

Выражение работы (16) можно представить еще в другом виде. Из кинематики известно, что элементарный путь ds , пройденный движущейся точкой за время dt , равен vdt , а потому

$$F \cos \varphi ds = Fv \cos \varphi dt;$$

следовательно, выполняя интегрирование по переменному t , получим:

$$A = \int_0^t Fv \cos \varphi dt.$$

Этой формулой для вычисления работы можно пользоваться и в том случае, когда скорость движения точки приложения силы, а также модуль и направление силы известны для любого момента t (т. е. определены как функции от t). Выражение $Fv\cos\varphi dt$, стоящее под интегралом, представляет собой элементарную работу силы $\vec{F}$ за время dt .

Произведение $Fv\cos\varphi$ есть скалярное произведение силы $\vec{F}$ и скорости $\vec{v}$, а потому

$$Fv\cos\varphi dt = \vec{F} \cdot \vec{v} dt.$$

Если обозначим радиус-вектор точки M через $\vec{r}$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$), то по известной из кинематики формуле

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

отсюда

$$d\vec{r} = \vec{v} dt$$

и, следовательно,

$$Fv\cos\varphi dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (17)$$

т. е. *элементарная работа равна скалярному произведению силы на дифференциал радиуса-вектора точки приложения этой силы.*

Если разложим векторы $\vec{F}$ и $\vec{r}$ по координатным осям, то получим:

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где X, Y, Z обозначают проекции силы $\vec{F}$ на эти оси, а x, y, z — координаты точки M . Из второго равенства следует, что

$$d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz.$$

Подставляя выражения для $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ в равенство (17) и принимая во внимание, что

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0,$$

получим аналитическое выражение элементарной работы:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = Xdx + Ydy + Zdz. \quad (18)$$

Здесь dx, dy, dz представляют собой дифференциалы координат точки приложения силы, т. е.

$$dx = v_x dt, dy = v_y dt, dz = v_z dt.$$

Полученным аналитическим выражением (18) для элементарной работы часто пользуются при вычислении работы силы на криволинейном пути.

Докажем теперь теорему о работе равнодействующей силы.

Пусть к материальной точке M приложены две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, равнодействующая которых равна $\vec{R}$. Обозначим работу сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{R}$ на пути s соответственно через A_1, A_2 и A .

Проецируя векторное равенство

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

на направление скорости точки M , получим:

$$R_v = F_{1v} + F_{2v}.$$

Умножая обе части этого равенства на элемент пути ds и интегрируя в пределах от 0 до s (вдоль траектории точки M), получим:

$$\int_0^s R_v ds = \int_0^s F_{1v} ds + \int_0^s F_{2v} ds$$

или, на основании равенства (15),

$$A = A_1 + A_2.$$

Таким образом, приходим к теореме: *работа равнодействующей на некотором пути равна сумме работ составляющих сил на том же пути.*

Пример 6.4. Пусть материальная точка M весом $\vec{P}$ переместилась по некоторой криволинейной траектории из положения $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положение $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Найти: работу силы тяжести.

Решение. Проекция силы $\vec{P}$ на координатные оси

$$X = 0, Y = 0, Z = -P$$

(ось Oz направлена по вертикали вверх). Следовательно, элементарная работа этой силы

$$Xdx + Ydy + Zdz = -Pdz,$$

а работа на конечном пути M_1M_2

$$A = - \int_{z_1}^{z_2} Pdz = P(z_1 - z_2).$$

Полагая $z_1 - z_2 = h$, получим:

$$A = Ph.$$

Ответ: работа силы тяжести, действующей на материальную точку, не зависит ни от длины пути, ни от вида траектории этой точки и равна произведению веса этой точки на разность ее высот в начальном и конечном положениях, причем эти высоты могут отсчитываться от произвольно выбранной горизонтальной плоскости.

7. Теорема об изменении кинетической энергии

Пусть материальная точка M массы m движется под действием силы $\vec{F}$ по некоторой криволинейной траектории. Напишем основное уравнение динамики точки, выражающее второй закон Ньютона: $\vec{F} = m\vec{a}$; проецируя это векторное равенство на направление скорости $\vec{v}$, получим:

$$ma_v = F_v.$$

Как известно из кинематики,

$$a_v = \frac{dv}{dt},$$

следовательно,

$$m \frac{dv}{dt} = F_v = F \cos \varphi,$$

где φ есть угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{v}$. Умножая обе части этого равенства на vdt , получим:

$$mvdt = Fv \cos \varphi dt,$$

или

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Fv \cos \varphi dt. \quad (19)$$

Правая часть этого равенства представляет собой элементарную работу силы $\vec{F}$; следовательно, *дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе силы, действующей на эту точку*. Этот результат выражает теорему о кинетической энергии в дифференциальной форме.

Интегрируя уравнение (19) в соответствующих пределах, получим:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A. \quad (20)$$

Равенство (20) выражает теорему о кинетической энергии в конечной форме: *изменение кинетической энергии движущейся материальной точки равно работе приложенной к ней силы на пройденном этой точкой пути.*

Стоит отметить, если на движущуюся материальную точку действуют несколько сил, то в уравнении (20) под A нужно понимать работу равнодействующей, равную сумме работ этих сил на данном пути.

Рассмотрим примеры применения данной теоремы.

Пример 7.1. Вагонетка массы m движется по прямой горизонтальной колее. Коэффициент трения равен f . Начальная скорость вагонетки равна v_0 .

Найти: длину пути s , который пройдет вагонетка до остановки.

Решение. Так как конечная скорость вагонетки $v = 0$, то уравнение (20) принимает вид:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = A.$$

На вагонетку действуют: сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, сила реакции опоры $\vec{N} = -m\vec{g}$, направленная перпендикулярно поверхности движения, а также сила трения, направленная противоположно ее скорости, равная $\vec{F}_{\text{тр}} = fmg\vec{e}$. Работа силы тяжести и реакции опоры равны нулю, не нулевой является только работа силы трения:

$$A = -fmg s.$$

Подставляя это значение в предыдущее уравнение, получим:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -fmg s,$$

откуда

$$s = \frac{v_0^2}{2fg}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{v_0^2}{2fg}.$$

Пример 7.2. Шарик весом $\vec{P}$ подвешен к нижнему концу вертикальной винтовой пружины. Верхний конец A пружины закреплен неподвижно.

Найти: наибольшее расстояние, на которое опускается шарик, если в начальный момент его скорость равна нулю и пружина не растянута.

Решение: Пусть в начальный момент шарик находится в точке O . Промежуточное положение шарика обозначим через M , а самое нижнее его положение, соответствующее максимальному удлинению пружины, обозначим через B . Если удлинение пружины обозначим через λ , а ее максимальное удлинение через λ_m , то $OM = \lambda$, $OB = \lambda_m$. На шарик действуют две силы: вес $\vec{P}$ и реакция пружины $\vec{F}$, направленная вверх. Согласно закону Гука

$$F = c\lambda,$$

где c — постоянный для данной пружины коэффициент пропорциональности (так называемая жесткость пружины).

Так как скорость шарика в точках O и B равна нулю, то из теоремы о кинетической энергии следует, что работа сил $\vec{P}$ и $\vec{F}$ на пути OB равна нулю. Эта работа, очевидно, может быть выражена так:

$$A = P\lambda_m - \int_0^{\lambda_m} Fds = P\lambda_m - \int_0^{\lambda_m} c\lambda d\lambda = P\lambda_m - \frac{1}{2}c\lambda_m^2.$$

Следовательно

$$P\lambda_m - \frac{1}{2}c\lambda_m^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda_m = \frac{2P}{c}.$$

Замечание. В положении равновесия шарика силы $\vec{P}$ и $\vec{F}$ равны по модулю; если обозначим соответствующее этому положению *статическое удлинение* пружины через $\lambda_{ст}$, то

$$c \cdot \lambda_{\text{ст}} = P,$$

откуда

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{P}{c}$$

и, следовательно,

$$\lambda_m = 2 \lambda_{\text{ст}}.$$

Ответ: $\frac{2P}{c}.$

Пример 7.3. Материальная точка (пуля) брошена в пустоте из точки O наклонно к горизонту с начальной скоростью v_0 .

Найти: скорость этой точки в тот момент, когда она поднимется на высоту h .

Решение. При движении в пустоте на материальную точку действует только сила тяжести, равная $\vec{P} = m\vec{g}$. Работа этой силы при поднятии точки на высоту h , как мы уже знаем, равна $-Ph$, следовательно,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgh.$$

Откуда искомая скорость

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

Ответ: $\sqrt{v_0^2 - 2gh}.$

8. Принцип Даламбера для материальной точки

Пусть M есть движущаяся *несвободная материальная точка*, то есть такая точка, движение которой ограничено некоторыми наперед заданными условиями, $\vec{F}$ — заданная действующая на нее сила и $\vec{N}$ — реакция связи. Сложив силы $\vec{F}$ и $\vec{N}$, получим равнодействующую силу $\vec{R}$. Согласно основному закону динамики сила $\vec{R}$ направлена вдоль ускорения $\vec{a}$ точки M и по модулю равна ma , где m — масса точки M .

Представим теперь, что мы приложили в данный момент к точке M еще одну силу, имеющую тот же модуль, что и сила $\vec{R}$ и направленную противоположно ускорению $\vec{a}$. Эта сила, равная по модулю произведению массы точки на модуль ее ускорения и направленная противоположно ускорению, называется *силой инерции* и определяется равенством:

$$\vec{F}^{\text{ин}} = -m\vec{a}. \quad (21)$$

Очевидно, что силы $\vec{R}$ и $\vec{F}^{\text{ин}}$, как равные по модулю и противоположно направленные, уравниваются; но так как $\vec{R}$ — равнодействующая сил $\vec{F}$ и $\vec{N}$, то три силы $\vec{F}^{\text{ин}}$, $\vec{F}$ и $\vec{N}$ также взаимно уравниваются, что может быть записано следующим образом:

$$\vec{F}^{\text{ин}} + \vec{F} + \vec{N} = 0.$$

Таким образом, приходим к выводу: *при движении материальной точки в каждый данный момент заданная сила $\vec{F}$, реакция связи $\vec{N}$ и сила инерции $\vec{F}^{\text{ин}}$ взаимно уравниваются.* В этом и состоит принцип Даламбера для материальной точки.

Проецируя векторное равенство (21) на координатные оси, получим проекции силы инерции на эти оси:

$$\left. \begin{aligned} F_x^{\text{ин}} &= -ma_x = -m \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ F_y^{\text{ин}} &= -ma_y = -m \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ F_z^{\text{ин}} &= -ma_z = -m \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \right\}$$

Аналогично, проецируя равенство (21) на естественные оси, получим проекции силы инерции на касательную, главную нормаль и бинормаль траектории:

$$F_{\tau}^{\text{ин}} = -ma_{\tau} = -m \frac{dv}{dt}, F_n^{\text{ин}} = -ma_n = -\frac{mv^2}{\rho}, F_b^{\text{ин}} = -ma_b = 0.$$

Составляющие силы инерции $F_{\tau}^{\text{ин}}$ и $F_n^{\text{ин}}$, направленные по касательной и главной нормали соответственно, называются *касательной (или тангенциальной) и нормальной силами инерции*. Эти силы направлены противоположно соответствующим ускорениям a_{τ} и a_n . Нормальная сила инерции иначе называется центробежной силой.

В общем случае, согласно закону равенства действия и противодействия, сила инерции является «противодействием» по отношению к силе $\vec{R}$, следовательно, *в действительности сила инерции приложена не к самой движущейся точке M , а к тому телу, в результате взаимодействия с которым эта точка получает данное ускорение.*

Пример 8.1. Рабочий толкает вагон массой m и сообщает ему ускорение $\vec{a}$; к вагону в этом случае будет приложена сила $\vec{F} = m\vec{a}$, направленная в сторону движения вагона. В то же время рабочий испытывает инерционное сопротивление вагона, равное по модулю ma , но направленное в противоположную сторону - это и есть сила инерции вагона, приложенная в действительности не к самому вагону, а к руке рабочего.

Вводя при решении задач динамики силу инерции, мы, согласно принципу Даламбера, получаем уравновешенную систему сил, а потому можем пользоваться уравнениями статики. Этот метод, называемый методом кинетостатики, часто оказывается весьма удобным при решении динамических задач, в особенности при определении динамических реакций связей.

Пример 8.2. Материальная точка M массы m движется прямолинейно под действием силы тяжести по негладкой плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Коэффициент трения равен f .

Найти: ускорение точки приложенной к телу (рис. 5).

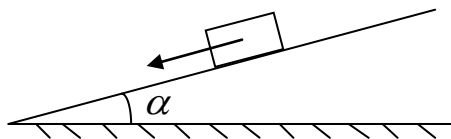


Рис. 5

Решение. Если приложим к точке М силу инерции, направленную противоположно ускорению $\vec{a}$, то, согласно принципу Даламбера, получим уравновешенную систему следующих сил: веса $\vec{P}$, силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, нормальной реакции плоскости $\vec{N}$ и силы инерции $\vec{F}^{\text{ин}}$. При этом

$$P = mg, F_{\text{тр}} = fN, F^{\text{ин}} = ma.$$

Направим оси координат так, как показано на рис. 6.

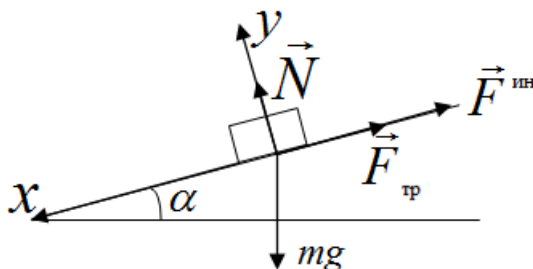


Рис. 6

Напишем два уравнения равновесия. Проецируя все указанные силы на координатные оси, получим:

$$\begin{aligned} 1) & mg \sin \alpha - fN - ma = 0, \\ 2) & N - mg \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения находим:

$$N = mg \cos \alpha.$$

Подставляя это значение в первое уравнение, находим из него

$$a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Ответ: $g(\sin \alpha - f \cos \alpha).$

Пример 8.3. Тележка M массы m скатывается без начальной скорости с высоты h по гладким рельсам и описывает окружность радиуса r в вертикальной плоскости («мертвую петлю»).

Найти: высоту h , при которой возможно такое движение тележки.

Решение. Когда тележка находится в верхней точке C окружности, то в этой точке, согласно принципу Даламбера, уравниваются нормальная сила инерции $\vec{F}^{\text{ин}}$, направленная по вертикали вверх, вес тележки $\vec{P}$ и нормальная реакция рельсов $\vec{N}$, направленные по вертикали вниз; следовательно,

$$F_n^{\text{ин}} - P - N = 0,$$

откуда

$$N = F_n^{\text{ин}} - P,$$

причем

$$F_n^{\text{ин}} = \frac{mv^2}{r}.$$

Для определения скорости тележки $\vec{v}$ в точке C применим теорему об изменении кинетической энергии; учитывая, что начальная скорость тележки $v_0 = 0$, пренебрегая трением и определяя работу силы тяжести $\vec{P}$ на пути ABC , получим:

$$\frac{mv^2}{2} = P(h - 2r),$$

следовательно,

$$N = \frac{mv^2}{r} - P = \frac{2P}{r}(h - 2r) - P = P\left(\frac{2h}{r} - 5\right).$$

Для того чтобы тележка прошла всю окружность, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $N \geq 0$, следовательно, должно быть:

$$2h \geq 5r \text{ или } h \geq 2,5r.$$

Ответ: $h \geq 2,5r$.

9. Колебательное движение материальной точки

Пусть точка M массы m движется прямолинейно под действием силы притяжения $\vec{F}$ к неподвижному центру O . Предположим, что модуль силы $\vec{F}$ пропорционален расстоянию точки M от центра O , т. е. $F = c \cdot OM$, где c — постоянный коэффициент пропорциональности. Требуется найти закон движения точки M .

Примем прямолинейную траекторию точки M за ось Ox , начало координат возьмем в неподвижной точке O , абсциссу точки M обозначим через x , а проекцию силы $\vec{F}$ на ось Ox обозначим через X . Тогда:

$$X = -cx.$$

Дифференциальное уравнение движения точки M :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx.$$

Разделив это уравнение на m и введя обозначение $k^2 = \frac{c}{m}$, приведем его к виду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

Последнее равенство представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и без свободного члена.

Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений, общий интеграл этого уравнения выражается так:

$$x = a \sin(kt + \alpha), \quad (22)$$

где a и α имеют произвольные постоянные значения. Это есть *уравнение гармонического колебания*. Следовательно, в случае *прямолинейного движения под действием притягивающей силы, пропорциональной расстоянию от центра притяжения, материальная точка совершает гармоническое колебание*.

Величина a — наибольшее отклонение точки M от центра O — называется *амплитудой* колебания, аргумент $(kt + \alpha)$ называется *фазой* колебания, а величина α — *начальной фазой* колебания (значение фазы в начальный момент).

График гармонического колебания представляет собой, очевидно, синусоиду.

Скорость точки при гармоническом колебании определяется по формуле

$$v = \frac{dx}{dt} = ak \cos(kt + \alpha).$$

Знак производной $\frac{dx}{dt}$ определяет, в каком направлении (в положительном или в отрицательном) по оси Ox в данный момент движется точка M .

Амплитуда a и начальная фаза α колебания определяются по начальным условиям движения. Пусть в начальный момент (при $t=0$) абсцисса точки M равна x_0 , а ее скорость равна v_0 . Полагая $t=0$ в предыдущих формулах для x и v , получим:

$$x_0 = a \sin \alpha \text{ и } v_0 = ak \cos \alpha.$$

Отсюда находим:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \text{ и } \operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{v_0}.$$

Найдем теперь полный период колебания T — промежуток времени, по истечении которого точка возвращается в данное положение с той же самой скоростью. Так как период синуса и косинуса равен 2π , то по истечении времени T фаза колебания возрастает на 2π ; следовательно, получим:

$$k(t + T) + \alpha - (kt + \alpha) = 2\pi,$$

откуда находим:

$$T = \frac{2\pi}{k},$$

или, подставляя вместо k его значение,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Так как в эту формулу не входят ни x_0 , ни v_0 , то *период колебания не зависит от начальных условий движения.*

Из предыдущей формулы имеем: $k = \frac{T}{2\pi}$; отсюда следует, что величина k определяет число полных колебаний, которые совершает точка в течение 2π секунд. Величина k называется *круговой частотой колебания*.

Уравнение гармонического колебания (22) можно представить в другом виде. Пользуясь формулой из тригонометрии для синуса суммы двух аргументов, получим:

$$x = a \sin(kt) \cdot \cos \alpha + a \cos(kt) \cdot \sin \alpha.$$

Полагая здесь $A = a \cos \alpha$, $B = a \sin \alpha$, получим:

$$x = A \sin(kt) + B \cos(kt).$$

Но выше мы уже отметили, что $x_0 = a \sin \alpha$ и $v_0 = ak \cos \alpha$, следовательно,

$$A = \frac{v_0}{k} \text{ и } B = x_0,$$

а потому уравнение гармонического колебания может быть записано в виде:

$$x = x_0 \cos(kt) + \frac{v_0}{k} \sin(kt).$$

Если $v_0 = 0$, то

$$x = x_0 \cos(kt).$$

Пример 9.1. Груз M весом P подвешен к вертикальной пружине, закрепленной в точке A , которая в естественном состоянии имеет длину $AB = l_0$.

Найти: характер движения и период колебаний груза.

Решение. Примем положение равновесия груза, т. е. то положение, в котором вес груза уравнивается реакцией пружины, за начало координат O . Ось Ox направим по вертикали вверх. Статическое удлинение пружины BO , соответствующее положению равновесия груза, обозначим через $\lambda_{\text{ст}}$. Удлинение пружины BM , соответствующее положению M груза, обозначим через λ . Тогда, получим:

$$\lambda = \lambda_{\text{ст}} - x.$$

Согласно закону Гука сила упругости (реакция) пружины $\vec{F}$ пропорциональна ее удлинению, то есть $F = c\lambda$, где c — коэффициент пропорциональности (жесткость пружины).

Так как в положении равновесия модуль силы $\vec{F}$ равен весу P , то

$$P = c\lambda_{\text{ст}}.$$

Отсюда

$$c = \frac{P}{\lambda_{\text{ст}}}.$$

Зная из опыта $\lambda_{\text{ст}}$, можно найти по этой формуле коэффициент c . И наоборот, зная жесткость c пружины, находим статическое удлинение пружины:

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{P}{c}.$$

Дифференциальное уравнение движения груза будет иметь следующий вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F - P$$

или

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = c\lambda - P.$$

Заменяя здесь λ через $\lambda_{\text{ст}} - x$, получим:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = c\lambda_{\text{ст}} - cx - P$$

или, так как $c\lambda_{\text{ст}} - P = 0$,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx.$$

Это есть дифференциальное уравнение гармонического колебания, которое мы рассмотрели выше. Следовательно, груз, подвешенный на пружине, совершает гармоническое колебание около положения равновесия.

Период колебания находится по формуле:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Если подставим сюда значения

$$m = \frac{P}{g} \text{ и } c = \frac{P}{\lambda_{\text{ст}}},$$

то получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{\text{ст}}}{g}}.$$

Ответ: груз совершает гармоническое колебание около положения равновесия с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{\text{ст}}}{g}}.$$

10. Затухающие колебания

Пусть материальная точка M движется прямолинейно по оси Ox в сопротивляющейся среде к неподвижному центру O под действием силы притяжения $\vec{F}$, пропорциональной расстоянию точки от этого центра O , который примем за начало координат. Силу сопротивления среды $\vec{R}$ будем предполагать пропорциональной скорости точки; так как эта сила направлена всегда противоположно скорости, то

$$\vec{R} = -\mu \vec{v},$$

где μ — постоянный коэффициент пропорциональности. Следовательно, проекция этой силы на ось Ox будет равна

$$R_x = -\mu v_x = -\mu \frac{dx}{dt}.$$

Проекция силы $\vec{F}$ на ось Ox , равна $-cx$.

Поэтому дифференциальное уравнение движения точки M будет иметь следующий вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt}.$$

Разделив обе части уравнения на m и введя обозначения $\frac{c}{m} = k^2$ и $\frac{\mu}{m} = 2n$, приведем это уравнение к виду:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0. \quad (23)$$

Для интегрирования этого уравнения применим способ замены переменного, полагая $x = ye^{-nt}$, где y — новая переменная. Дифференцируя по t это равенство дважды, получим:

$$\frac{dx}{dt} = e^{-nt} \left(\frac{dy}{dt} - ny \right)$$

и

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = e^{-nt} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} + n^2 y \right).$$

Подставляя значения функции x и ее производных в дифференциальное уравнение (23) и сокращая его на общий множитель e^{-nt} , получим:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} + n^2 y + 2n \frac{dy}{dt} - 2n^2 y + k^2 y = 0,$$

или

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (k^2 - n^2)y = 0.$$

Допустим, что $k > n$, полагая тогда $k^2 - n^2 = k_1^2$, приведем предыдущее уравнение к виду:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k_1^2 y = 0.$$

Это есть дифференциальное уравнение гармонического колебания, рассмотренное в предыдущем пункте; интегрируя это уравнение, получаем

$$y = a \sin(k_1 t + \alpha)$$

и, следовательно,

$$x = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (24)$$

Это уравнение отличается от уравнения гармонического колебания множителем e^{-nt} ; поэтому движение точки представляет собой колебания около центра O , но размахи этих колебаний не сохраняют теперь постоянного значения: они уменьшаются с течением времени. Поэтому эти колебания называются *затухающими*. Если продифференцируем уравнение (24) по t , то получим закон изменения скорости точки при затухающих колебаниях:

$$v = \frac{dx}{dt} = ae^{-nt} [k_1 \cos(k_1 t + \alpha) - n \sin(k_1 t + \alpha)]. \quad (25)$$

Постоянные a и α определяются по заданным начальным значениям абсциссы x_0 и скорости v_0 . Полагая $t = 0$ в формулах (24) и (25), получим:

$$x_0 = a \sin \alpha \text{ и } v_0 = a(k_1 \cos \alpha - n \sin \alpha) = ak_1 \cos \alpha - nx_0,$$

или

$$a \sin \alpha = x_0 \text{ и } a \cos \alpha = \frac{v_0 + nx_0}{k_1}. \quad (26)$$

Отсюда находим:

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k_1^2}} = \frac{1}{k_1} \sqrt{k_1^2 x_0^2 + (v_0 + nx_0)^2}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{k_1 x_0}{v_0 + nx_0}. \end{aligned} \right\}$$

Для более точного выяснения характера рассматриваемого движения точки M найдем, при каких значениях t скорость точки будет обращаться в ноль и, следовательно, точка будет достигать максимального отклонения от центра колебаний O .

Приравнивая нулю скорость v , из уравнения (25) получим:

$$k_1 \cos(k_1 t + \alpha) - n \sin(k_1 t + \alpha) = 0, \text{ или } \operatorname{tg}(k_1 t + \alpha) = \frac{k_1}{n};$$

отсюда находим:

$$t = \frac{1}{k_1} \left(\operatorname{arctg} \frac{k_1}{n} - \alpha \right).$$

Но так как арктангенс является многозначной функцией, последовательные значения которой при данном значении аргумента отличаются друг от друга на π , то последовательные значения t , определяемые последним равенством, будут отличаться друг от друга на $\frac{\pi}{k_1}$.

Обозначая эти последовательные моменты через $t_1, t_2, t_3, \dots$ будем иметь:

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{k_1}, t_3 = t_2 + \frac{\pi}{k_1} = t_1 + \frac{2\pi}{k_1},$$

$$t_4 = t_3 + \frac{\pi}{k_1} = t_1 + \frac{3\pi}{k_1}, \dots$$

Таким образом, через одинаковые промежутки времени, равные $\frac{\pi}{k_1}$, скорость точки, проходя через ноль, меняет знак, т. е. изменяется направление движения точки. Найдем значения абсциссы движущейся точки в эти последовательные моменты. Полагая в уравнении движения (24) последовательно $t = t_1, t = t_2, \dots$ получим:

$$x_1 = ae^{-nt_1} \sin(k_1 t_1 + \alpha), x_2 = ae^{-nt_2} \sin(k_1 t_2 + \alpha), \dots$$

Заменяя $t_2 = t_1 + \frac{\pi}{k_1}$, получим:

$$\begin{aligned} x_2 &= ae^{-nt_1 - \frac{n\pi}{k_1}} \sin(k_1 t_1 + \alpha + \pi) = \\ &= -ae^{-nt_1} \sin(k_1 t_1 + \alpha) e^{-\frac{n\pi}{k_1}} = -e^{-\frac{n\pi}{k_1}} x_1. \end{aligned}$$

Точно так же найдем, что

$$x_3 = -e^{-\frac{n\pi}{k_1}} x_2 \text{ и т.д.}$$

Можно заметить, во-первых, что в моменты $t_1, t_2, t_3, \dots$ точка находится по разные стороны от центра O (так как знаки $x_1, x_2, x_3, \dots$ чередуются) и, во-вторых, что абсолютные значения ее отклонений от центра O в эти моменты убывают по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $-e^{-\frac{n\pi}{k_1}}$.

Промежуток времени

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$$

называется *периодом затухающих колебаний*. Так как

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} < k,$$

то

$$\frac{2\pi}{k_1} > \frac{2\pi}{k};$$

следовательно, период затухающих колебаний больше, чем период гармонического колебания, совершаемого точкой под действием той же силы $\vec{F}$ при отсутствии сопротивления.

Отвлеченное число

$$e^{-\frac{n\pi}{k_1}} = e^{-\frac{nT}{2}}$$

называется *декрементом затухающих колебаний*; натуральный логарифм декремента (величина $-\frac{nT}{2}$), называется *логарифмическим декрементом*.

Уравнение (24) затухающих колебаний можно представить в другом виде:

$$x = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) = -e^{-nt} [a \sin(k_1 t) \cdot \cos \alpha + a \cos(k_1 t) \cdot \sin \alpha],$$

Подставляя значения из (26) в предыдущее уравнение, получим:

$$x = -e^{-nt} \left[x_0 \cos(k_1 t) + \frac{v_0 + nx_0}{k_1} \sin(k_1 t) \right]. \quad (27)$$

Пример 10.1. Материальная точка, масса которой равна единице, движется прямолинейно под действием силы притяжения к неподвижному центру O , пропорциональной расстоянию точки от этого центра, причем коэффициент пропорциональности равен 25. Сила сопротивления окружающей среды пропорциональна скорости точки, причем коэффициент пропорциональности равен 6. В начальный момент расстояние точки от центра O равно 8 метров и скорость ее равна нулю.

Найти: закон движения точки.

Решение. Из условий задачи имеем: $m = 1, c = 25, \mu = 6$, следовательно,

$$k^2 = \frac{c}{m} = 25 \text{ и } 2n = \frac{\mu}{m} = 6,$$

отсюда

$$k = 5, n = 3,$$

и потому

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = 4.$$

Кроме того, $x_0 = 8, v_0 = 0$. Подставляя эти числовые значения в уравнение (27), получим искомый закон движения точки:

$$x = 2e^{-3t} (4\cos 4t + 3\sin 4t).$$

Замечание. Период этих затухающих колебаний равен $\frac{2\pi}{k_1} = \frac{\pi}{2}$ секунд, а декремент равен $e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx \frac{1}{10,54}$. Таким образом, через каждые $\frac{\pi}{4}$ секунд амплитуда колебаний уменьшается приблизительно в 10,5 раз. Колебания, как видим, затухают весьма быстро.

Ответ: $x = 2e^{-3t} (4\cos 4t + 3\sin 4t).$

Мы рассмотрели тот случай движения материальной точки, когда $k > n$. Не останавливаясь подробно на разборе тех случаев, когда $k < n$ или $k = n$, заметим только, что в обоих этих случаях движение точки не имеет уже характера колебательного движения, т.е. является *апериодическим*.

11. Вынужденные колебания

Пусть на материальную точку M , движущуюся по оси Ox , кроме силы $\vec{F}$, пропорциональной расстоянию x , и силы сопротивления среды $\vec{R}$, пропорциональной скорости $\vec{v}$, действует еще некоторая периодически изменяющаяся сила $\vec{F}'$. Допустим, что проекция силы $\vec{F}'$ на ось Ox изменяется со временем по закону синуса:

$$X' = H \sin pt,$$

где H — некоторое данное постоянное число. Силу $\vec{F}$, стремящуюся вернуть точку M в положение равновесия O , называют иногда *восстанавливающей силой*, а силу $\vec{F}'$ — *возмущающей силой*.

Дифференциальное уравнение движения точки M имеет в этом случае следующий вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt} + H \sin(pt). \quad (28)$$

Если разделим это уравнение на m , то, сохраняя обозначения предыдущего пункта и полагая еще $\frac{H}{m} = h$, приведем уравнение (28) к виду:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = h \sin(pt). \quad (29)$$

Это есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью, отличной от нуля. На основании теоремы из теории линейных дифференциальных уравнений, общее решение этого уравнения можно представить в виде:

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_2 — какое-либо частное решение данного уравнения, а x_1 — общее решение того же уравнения, но без правой части, т. е. уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0.$$

Решение этого последнего уравнения было уже рассмотрено выше; его общий интеграл имеет вид:

$$x_1 = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha),$$

где a и α — произвольные постоянные, а $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

Таким образом, интегрирование дифференциального уравнения (29) сводится к отысканию его частного решения x_2 .

Предположим, что

$$x_2 = b \sin(pt + \beta),$$

где b и β — некоторые постоянные величины, которые нужно подобрать таким образом, чтобы это значение x_2 тождественно удовлетворяло данному дифференциальному уравнению (29). Дифференцируем x_2 по t дважды, получим:

$$\frac{dx_2}{dt} = bp \cos(pt + \beta), \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -bp^2 \sin(pt + \beta).$$

Теперь подставляем эти значения производных, а также значение x_2 в данное дифференциальное уравнение (29):

$$-bp^2 \sin(pt + \beta) + 2nbp \cos(pt + \beta) + k^2 b \sin(pt + \beta) = h \sin(pt),$$

или, полагая для краткости $pt + \beta = \theta$,

$$-bp^2 \sin \theta + 2nbp \cos \theta + k^2 b \sin \theta = h \sin(\theta - \beta),$$

или

$$b(k^2 - p^2) \sin \theta + 2nbp \cos \theta = h \sin \theta \cos \beta - h \cos \theta \sin \beta.$$

Так как это равенство должно выполняться тождественно (то есть при всяком значении переменного θ), то коэффициенты при $\sin \theta$ и $\cos \theta$ в левой и правой частях должны быть равны:

$$h \cos \beta = b(k^2 - p^2), h \sin \beta = -2nbp.$$

Из этих уравнений находим:

$$b = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \operatorname{tg} \beta = -\frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (30)$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (29), задающее закон движения точки при наличии возмущающей силы, выражается так:

$$x = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) + b \sin(pt + \beta),$$

где b и β определяются по формулам (30).

Первый член правой части этого равенства представляет собой затухающие колебания, второй же член — гармонические колебания с частотой p и периодом $\frac{2\pi}{p}$, обусловленные действием возмущающей силы; эти колебания называются *вынужденными колебаниями*.

Постоянные a и α , как обычно, определяются по начальным условиям движения. График движения материальной точки в данном случае можно построить сложением графика затухающих колебаний, рассмотренных в предыдущем пункте, с графиком гармонических колебаний (синусоидой).

Так как размахи затухающих колебаний быстро стремятся к нулю, то на практике обычно приходится считаться главным образом с вынужденными колебаниями. Поэтому рассмотрим подробнее изменение амплитуды b вынужденных колебаний в зависимости от частоты p этих колебаний.

Разделив в формуле (30) для амплитуды b числитель и знаменатель на k^2 , перепишем ее в следующем виде:

$$b = \frac{\frac{h}{k^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4n^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}}.$$

Полагая здесь $p = 0$, получим $b = \frac{h}{k^2}$. Введем обозначения:

$$b_0 = \frac{h}{k^2}, \quad \nu = \frac{p}{k},$$

тогда предыдущая формула примет вид:

$$b = \frac{b_0}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + \frac{4n^2\nu^2}{k^2}}}.$$

Отсюда следует, что при заданном отношении $\frac{p}{k}$ амплитуда b является функцией переменного ν . Найдем, при каких значениях ν амплитуда b достигает минимального или максимального значения. Для этого обозначим подкоренную функцию через $f(\nu)$:

$$f(\nu) = (1-\nu^2)^2 + \frac{4n^2\nu^2}{k^2}.$$

Первая и вторая производные этой функции запишутся так:

$$f'(\nu) = 4\nu \left(\nu^2 - 1 + \frac{2n^2}{k^2} \right)$$

и

$$f''(\nu) = 4 \left(3\nu^2 - 1 + \frac{2n^2}{k^2} \right).$$

Приравняв нулю первую производную, получим уравнение

$$4\nu \left(\nu^2 - 1 + \frac{2n^2}{k^2} \right) = 0,$$

корни которого равны

$$\nu_1 = 0 \text{ и } \nu_2 = \sqrt{1 - \frac{2n^2}{k^2}}.$$

Если $\frac{2n^2}{k^2} < 1$, что обычно и имеет место, так как величина n значительно меньше k (это имеет место и в том случае, когда сопротивление среды, в которой движется материальная точка, невелико), то корень ν_2 имеет действительное значение.

Подставляя теперь значения ν_1 и ν_2 во вторую производную, получим:

$$f''(\nu_1) = 4 \left(\frac{2n^2}{k^2} - 1 \right) < 0$$

и

$$f''(\nu_2) = 8 \left(1 - \frac{2n^2}{k^2} \right) > 0.$$

Отсюда заключаем, что при $\nu = 0$, или, что то же, при $p = 0$, функция $f(\nu)$ достигает максимума, а амплитуда b минимума. При $\nu = \nu_2$, т. е. при $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$, функция $f(\nu)$ достигает минимума, а амплитуда b достигает максимального значения, равного

$$b_{\max} = \frac{b_0}{\sqrt{(1 - \nu_2^2)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \nu_2^2}} = \frac{b_0}{\frac{2n}{k} \sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}}.$$

Итак, когда частота p вынужденных колебаний изменяется в пределах от 0 до $\sqrt{k^2 - 2n^2}$, амплитуда этих колебаний возрастает от b_0 до максимального значения $b_{\max}$; при дальнейшем увеличении частоты p амплитуда вынужденных колебаний начинает убывать и при неограниченном возрастании p она стремится к нулю. График зависимости между b и ν (при $\frac{n}{k} = 0,25$).

Если дробь $\frac{n}{k}$ невелика, то в формуле

$$\nu_2 = \sqrt{1 - \frac{2n^2}{k^2}}$$

без существенной погрешности можно пренебречь квадратом этой дроби в сравнении с единицей и принять, что $\nu_2 = 1$. Следовательно, с достаточной точностью можно утверждать, что наибольшего значения амплитуда вынужденных колебаний достигает при $\nu_2 = 1$, или, что то же, при $p = k$, т.е. в том случае, когда частота вынужденных колебаний равна частоте свободных колебаний точки.

Этот случай совпадения частот вынужденных и свободных колебаний носит название *резонанса*. Явление резонанса характерно тем, что в этом случае амплитуда колебаний точки достигает значения, близкого к максимальному.

Пример 11.1. Груз M массы m подвешен на пружине с жесткостью c ; конец A пружины совершает вертикальные гармонические колебания по закону $A_0 A = H \sin(pt)$. Сила сопротивления движению пропорциональна скорости движения груза, причем коэффициент пропорциональности равен μ .

Найти: закон движения груза.

Решение. Примем неподвижную точку A_0 за начало координат, ось Ox направим по вертикали вниз. Дифференциальное уравнение движения груза в данном случае будет иметь вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - c\lambda - \mu \frac{dx}{dt},$$

где λ — удлинение пружины, а $c\lambda$ есть проекция на ось Ox реакции пружины.

Если обозначим естественную длину пружины через l_0 , то, как видно из чертежа,

$$\lambda = x - A_0 A - l_0 = x - H \sin(pt) - l_0.$$

Подставляя это значение λ в предыдущее уравнение, получим:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - cx + cH \sin(pt) + cl_0 - \mu \frac{dx}{dt}.$$

Чтобы упростить это уравнение, сделаем замену переменного, полагая $x = \varepsilon + x_1$, где ε — новая переменная, x_1 — некоторая постоянная величина. Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2},$$

и вместо предыдущего получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$m \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = mg - c\varepsilon - cx_1 + cH \sin(pt) + cl_0 - \mu \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Выберем x_1 таким образом, чтобы постоянные члены в правой части этого уравнения исчезли, т. е. положим:

$$mg - cx_1 + cl_0 = 0,$$

отсюда

$$x_1 = l_0 + \frac{mg}{c}.$$

Согласно сказанному в п. 9,

$$\frac{mg}{c} = \lambda_{\text{ст}},$$

то

$$x_1 = l_0 + \lambda_{\text{ст}}.$$

где $\lambda_{\text{ст}}$ — статическое удлинение пружины.

Заметим, что произведенная замена переменной равносильна переносу начала координат из точки A_0 в положение O , которое занимает груз при равновесии, если конец пружины закрепить в точке A_0 . После этой замены полученное дифференциальное уравнение не будет содержать постоянных членов, т. е. получим:

$$m \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + c\varepsilon + \mu \frac{d\varepsilon}{dt} = cH \sin(pt),$$

или

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + 2n \frac{d\varepsilon}{dt} + k^2 \varepsilon = h \sin(pt),$$

где

$$h = \frac{cH}{m}, 2n = \frac{\mu}{m}$$

и

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}}.$$

Мы получили то самое дифференциальное уравнение (29) вынужденных колебаний, которое было рассмотрено выше. Напомним, что общий интеграл этого уравнения выражается так:

$$\varepsilon = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) + b \sin(pt + \beta).$$

Так как множитель e^{-nt} быстро стремится к нулю, то через достаточно большой промежуток времени можно пренебречь членом, выражающим затухающие колебания; тогда получим:

$$\varepsilon = b \sin(pt + \beta),$$

т. е. груз будет совершать только вынужденные колебания около положения равновесия O . Амплитуда b и начальная фаза β этих колебаний определяются по формулам (30). Если в этих формулах разделить числитель и знаменатель на k^2 , то получим:

$$b = \frac{\frac{h}{k^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4n^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}} = \frac{H}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4n^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}},$$

$$\operatorname{tg} \beta = -2 \frac{\frac{n}{k}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} \cdot \frac{p}{k}.$$

Если p значительно меньше k (это соответствует тому случаю, когда точка A колеблется медленно), то дробь $\frac{p}{k}$ будет мала; точно так же будет мала и дробь $\frac{n}{k}$, так как n обычно значительно меньше k . Поэтому в этом случае получим:

$$b \approx H, \beta \approx 0$$

и, следовательно,

$$\varepsilon = H \sin(pt),$$

то есть колебания груза почти совпадают с колебаниями точки A .

С увеличением частоты p амплитуда b будет возрастать; при

$$p = k = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}}$$

наступает явление резонанса: амплитуда колебаний груза достигает максимального значения. В том случае, когда p значительно больше k (точка A совершает очень быстрые колебания), амплитуда $b \approx 0$, т. е. груз остается почти неподвижным. Последнее обстоятельство имеет важное значение при устройстве сейсмографов.

12. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки

Задача, которая будет рассматриваться в данном разделе, формулируется следующим образом: пусть система координатных осей $Ox_1y_1z_1$ (система отсчета) совершает известное нам движение относительно «неподвижной» системы отсчета $Oxyz$. Зная силы, действующие на данную материальную точку M , требуется найти движение этой точки относительно подвижной системы $Ox_1y_1z_1$, т. е. найти ее относительное движение. Для решения этой задачи нужно сначала составить *дифференциальные уравнения относительного движения* точки M ; проинтегрировав эти уравнения, найдем искомое движение.

Согласно второму закону Ньютона, при движении материальной точки относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета имеем:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N},$$

где $\vec{a}$ обозначает *абсолютное ускорение* точки M , $\vec{F}$ — действующую на эту точку заданную силу и $\vec{N}$ — реакцию связей. Из кинематики известно, что

$$\vec{a} = \vec{a}^{\text{отн}} + \vec{a}^{\text{пер}} + \vec{a}^{\text{кор}},$$

где $\vec{a}^{\text{отн}}$, $\vec{a}^{\text{пер}}$, $\vec{a}^{\text{кор}}$ обозначают соответственно относительное, переносное и кориолисово ускорения точки M . Подставляя это значение $\vec{a}$ в предыдущее равенство, получим:

$$m\vec{a}^{\text{отн}} = \vec{F} + \vec{N} - m\vec{a}^{\text{пер}} - m\vec{a}^{\text{кор}},$$

Векторная величина $-m\vec{a}^{\text{пер}}$, равная по модулю произведению массы точки на модуль ее переносного ускорения и направленная противоположно переносному ускорению, называется *переносной силой инерции*; точно так же векторная величина $-m\vec{a}^{\text{кор}}$ называется *кориолисовой силой инерции*. Если введем обозначения $-m\vec{a}^{\text{пер}} = \vec{F}_{\text{пер}}^{\text{ин}}$, $-m\vec{a}^{\text{кор}} = \vec{F}_{\text{кор}}^{\text{ин}}$, то предыдущее уравнение примет следующий вид:

$$m\vec{a}^{\text{отн}} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{пер}}^{\text{ин}} + \vec{F}_{\text{кор}}^{\text{ин}}. \quad (31)$$

Уравнение (31) – дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки в векторной форме. Проецируя это уравнение на подвижные оси $Ox_1y_1z_1$ и принимая во внимание, что

$$a_{x_1}^{\text{отн}} = \frac{d^2 x_1}{dt^2}, a_{y_1}^{\text{отн}} = \frac{d^2 y_1}{dt^2}, a_{z_1}^{\text{отн}} = \frac{d^2 z_1}{dt^2},$$

получим дифференциальные уравнения относительного движения в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= X_1 + N_{x_1} + F_{\text{ин } x_1}^{\text{пер}} + F_{\text{ин } x_1}^{\text{кор}}, \\ m \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= Y_1 + N_{y_1} + F_{\text{ин } y_1}^{\text{пер}} + F_{\text{ин } y_1}^{\text{кор}}, \\ m \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= Z_1 + N_{z_1} + F_{\text{ин } z_1}^{\text{пер}} + F_{\text{ин } z_1}^{\text{кор}}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Таким образом, приходим к следующему выводу: дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки следует записывать в том же виде, как и уравнения ее движения относительно неподвижной системы отсчета, но только к действующим на точку заданной силе и реакции связей нужно присоединить еще переносную силу инерции и силу инерции Кориолиса.

Это же утверждение можно сформулировать иначе: относительно подвижных осей материальная точка движется так же, как если бы эти оси были неподвижны и если бы к этой точке, кроме действующих на нее сил, были приложены еще силы $\vec{F}_{\text{пер}}^{\text{ин}}$ и $\vec{F}_{\text{кор}}^{\text{ин}}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи относительного движения точки.

- 1) Подвижная система отсчета совершает поступательное движение.

В этом случае $-m\vec{a}^{\text{кор}} = 0$ и, следовательно, $\vec{F}_{\text{кор}}^{\text{ин}} = 0$, а потому будем иметь:

$$m\vec{a}^{\text{отн}} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{пер}}^{\text{ин}},$$

Соответственно упрощаются в этом случае и дифференциальные уравнения (32), в которых исчезают члены, выражающие проекции силы инерции Кориолиса на подвижные оси.

2) *Подвижная система отсчета движется поступательно, прямолинейно и равномерно.*

Тогда $\vec{a}^{\text{пер}} = \vec{a}^{\text{кор}} = 0$ и $\vec{F}_{\text{пер}}^{\text{ин}} = \vec{F}_{\text{кор}}^{\text{ин}} = 0$. В этом случае будем иметь:

$$m\vec{a}^{\text{отн}} = \vec{F} + \vec{N}.$$

Это уравнение показывает, что в системе отсчета, имеющей относительно неподвижной системы равномерное прямолинейное поступательное движение, второй закон Ньютона применим в той же самой форме, как и в неподвижной системе, то есть такая система отсчета является инерциальной.

Следовательно, что в системе отсчета, имеющей относительно неподвижной системы прямолинейное равномерное поступательное движение, все механические явления происходят совершенно так же, как и в неподвижной системе, и потому никакими наблюдениями над этими явлениями такого движения системы отсчета обнаружить нельзя. Так, например, наблюдатель, находящийся в трюме парохода, движущегося поступательно, прямолинейно и равномерно, не сможет установить, движется ли пароход или стоит на месте. Этот важный результат, указанный еще Галилеем, выражает собой принцип относительности классической механики.

3) *Точка под действием приложенных к ней сил находится в покое относительно движущейся системы осей $Ox_1y_1z_1$.*

В этом случае, очевидно, $v^{\text{отн}} = a^{\text{отн}} = 0$ и, следовательно, $-m\vec{a}^{\text{кор}} = 0$ и $\vec{F}_{\text{кор}}^{\text{ин}} = 0$.

Уравнение (31) принимает вид

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{пер}}^{\text{ин}} = 0,$$

т. е. в случае относительного равновесия материальной точки заданная сила, реакция связей и переносная сила инерции взаимно уравновешиваются. К этому заключению можно прийти и непосредственно из принципа Даламбера.

Пример 10.1. Вагон движется по прямому горизонтальному пути вправо с постоянным ускорением $\vec{a}$. Материальная точка M , двигавшаяся сначала вместе с вагоном, в некоторый момент начинает свободно падать.

Найти: траекторию точки относительно вагона.

Решение. Выберем систему подвижных осей $Ox_1y_1z_1$, связанных с вагоном (ось Oz_1 направлена вертикально вверх и проходит через начальное положение точки M_0). Обозначим высоту, с которой начинается падение материальной точки, через $z_{10} = h$. По условию задачи начальная относительная скорость точки равна нулю. Переносная сила инерции $\vec{F}_{\text{пер}}^{\text{ин}}$ равна по модулю ma и направлена горизонтально влево.

Так как переносное движение является поступательным, то сила инерции Кориолиса $\vec{F}_{\text{кор}}^{\text{ин}}$ равна нулю. Кроме того, точка M движется свободно, а это означает, что реакция связей $\vec{N}$ также равна нулю.

Дифференциальные уравнения относительного движения точки (32) будут иметь следующий вид:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -ma, m \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -mg,$$

или

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -a, \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -g.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем:

$$\frac{dx_1}{dt} = C_1, \frac{dy_1}{dt} = -at + C_2, \frac{dz_1}{dt} = -gt + C_3.$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 определяются из начальных условий. По условию задачи в начальный момент относительная скорость точки равна нулю, значит

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0,$$

а уравнения примут вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \frac{dy_1}{dt} = -at, \frac{dz_1}{dt} = -gt.$$

Интегрируя последние уравнения, находим:

$$x_1 = C_4, y_1 = -\frac{at^2}{2} + C_5, z_1 = -\frac{gt^2}{2} + C_6.$$

Принимая во внимание, что в начальный момент $x_{10} = y_{10} = 0, z_{10} = h$, находим, что

$$C_4 = C_5 = 0, C_6 = h.$$

А потому окончательно получаем:

$$x_1 = 0, y_1 = -\frac{at^2}{2}, z_1 = -\frac{gt^2}{2} + h.$$

Из первого уравнения следует, что относительная траектория точки лежит в вертикальной плоскости Oy_1z_1 .

Исключая t из второго и третьего уравнений, получаем уравнение траектории точки:

$$az_1 - gy_1 = ah, \text{ или } \frac{z_1}{h} - \frac{gy_1}{ah} = 1.$$

Ответ: траекторией точки является прямая линия, отсекающая на осях Oy_1 и Oz_1 отрезки, равные $-\frac{ah}{g}$ и h соответственно, которая задается уравнением $\frac{z_1}{h} - \frac{gy_1}{ah} = 1$.

Пример 10.2. В кабине лифта, опускающейся с постоянным ускорением $a < g$, подвешен простой (математический) маятник.

Найти: период малых колебаний маятника.

Решение. Чтобы найти относительное движение маятника, достаточно приложить к маятнику переносную силу инерции $\vec{F}_{\text{пер}}^{\text{ин}}$, направленную по вертикали вверх и равную по модулю ma , где m — масса маятника.

Маятник относительно лифта будет двигаться так же, как он двигался бы в том случае, если бы точка подвеса была неподвижна и если бы на него действовала вертикальная сила, равная по модулю $m(g - a)$ и направленная вниз (равнодействующая веса маятника $\vec{P}$ и силы инерции $\vec{F}_{\text{пер}}^{\text{ин}}$). Отсюда следует, что для того чтобы найти искомый период T колебаний маятника, достаточно в известной формуле для периода колебаний простого маятника

при неподвижной точке подвеса ускорение силы тяжести g заменить через $(g - a)$, а потому

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - a}},$$

где l обозначает длину нити маятника.

Если бы лифт поднимался с постоянным ускорением a , то переносная сила инерции $\vec{F}_{\text{пер}}^{\text{ин}}$ была бы направлена вниз, и в предыдущей формуле нужно было бы $-a$ изменить на $+a$.

При свободном падении лифта, т. е. при $a = g$, силы $\vec{P}$ и $\vec{F}_{\text{пер}}^{\text{ин}}$ будут уравниваться: маятник, отведенный от вертикали на любой угол, будет оставаться в относительном равновесии. Для наблюдателя, находящегося в кабине лифта, все окружающие тела в этом случае казались бы невесомыми (состояние невесомости).

Замечание. Дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки имеет тот же вид, что и дифференциальное уравнение движения точки относительно неподвижной системы отсчета. Различие между этими уравнениями состоит лишь в том, что в уравнение относительного движения, кроме заданных сил и реакций связей, входят еще переносная и кориолисова силы инерции. С другой стороны, все общие теоремы динамики точки являются следствием основного дифференциального уравнения динамики точки, выражающего второй закон Ньютона. Отсюда следует, что применяя эти теоремы к относительному движению, мы должны принять во внимание переносную и кориолисову силы инерции. В частности, при решении задач, относящихся к относительному движению точки, нередко приходится пользоваться теоремой о кинетической энергии. При составлении уравнения, выражающего эту теорему в относительном движении, необходимо принять во внимание работу переносной и кориолисовой сил инерции на относительном перемещении точки. Но так как ускорение Кориолиса всегда перпендикулярно к относительной скорости, следовательно, работа кориолисовой силы инерции в относительном движении равна нулю, и эта сила в уравнение теоремы о кинетической энергии не войдет.

Библиографический список

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - СПб.: Политехника, 2009.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 2009.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. – М.: ЧеРо, 1999.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 2011.
5. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Наука, 2009.
6. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 2010.
7. Воронков И. М. Курс теоретической механики. - М.: Наука, 1964.

Оглавление

Введение.....	3
1. Законы (аксиомы) Ньютона. Основные понятия	4
2. Дифференциальные уравнения движения точки	8
3. Две основные задачи динамики точки (частный случай: прямолинейное движение точки)	9
4. Теорема об изменении количества движения	16
5. Теорема об изменении момента количества движения.....	20
6. Работа	25
7. Теорема об изменении кинетической энергии	32
8. Принцип Даламбера для материальной точки	35
9. Колебательное движение материальной точки	40
10. Затухающие колебания	45
11. Вынужденные колебания	52
12. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки	61
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	67