

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ»

М.В. Максименко, В.Е. Головкин, И.В. Ключкин

СТАТИКА

ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
НА ПЕРСОНАЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРАХ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2015

М.В. Максименко, В.Е. Головкин, И.В. Ключкин

СТАТИКА

**ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
НА ПЕРСОНАЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРАХ**

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2015

УДК 53(07)
ББК 22.34я7
С 780

Статика. Выполнение расчетно-графических работ по теоретической механике на персональных компьютерах: учебно-методическое пособие/сост.: М.В. Максименко, В.Е. Головкин, И.В. Ключкин; СПбГТУРП. - СПб., 2015. - 32 с.

В учебном пособии рассматривается часть курса теоретической механики – «Статика». Пособие соответствует программе курса теоретической механики и рассчитано на студентов очной, вечерней и заочной форм обучения. Материал учебного пособия изложен так, что им можно пользоваться при изучении полного и краткого курсов. Настоящее учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям: 27.03.04 «Управление в технических системах»; 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»; 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»; 15.03.02. «Технологические машины и оборудование».

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров В.С. Куров;

д-р техн. наук, профессор Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров Г.А. Кондрашкова.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом в качестве учебно-методического пособия.

© Санкт-Петербургский
государственный технологический
университет растительных полимеров, 2015

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие определяет методику и особенности проведения индивидуальных расчетно-графических работ, выполняемых студентом с использованием ЭВМ при изучении раздела «Статика» курса теоретической механики, а именно, в среде контролирующе-обучающего комплекса «VECTOR», разработанного на кафедре основ конструирования машин в Санкт-Петербургском государственном технологическом университете растительных полимеров.

Для выполнения заданий необходимо иметь конспект лекций (учебник), содержащий теоретические основы статики.

1. Индивидуальная работа № 1

Определение реакций опор и усилий в стержнях плоской фермы

Для закрепления знаний по теме «Система сходящихся сил» студенту выдается индивидуальное задание, аналогичное приведенному на рис. 1.

Задача: На узел C данной фермы (рис. 1) с узлами A, B, C, D, E, L, K действует вертикально направленная сила $P = 15H$. Даны размеры фермы: $a = 1m, b = \sqrt{3}m$.

Определить:

1. Усилия в стержнях.
2. Реакции в опорах $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$.

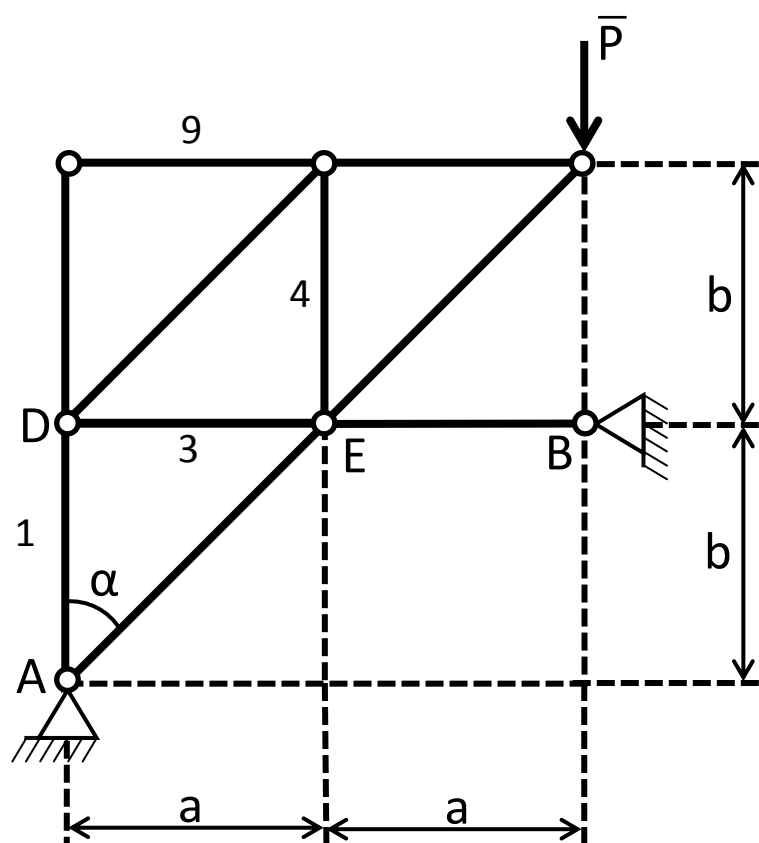


Рис.1

План решения:

1. Определить реакции опор аналитическим способом, используя теорему о трех непараллельных силах:
 - а) Показать на рисунке внешнюю силу, приложенную к заданному узлу фермы, а также реакции связей.
 - б) Построить замкнутый силовой треугольник со сторонами $\bar{P}$, $\bar{R}_A$, $\bar{R}_B$.
 - с) Аналитическим способом вычислить неизвестные реакции опор.
2. Определить те стержни, усилия в которых равны нулю.
3. Методом вырезания узлов определить усилия в ненулевых стержнях фермы.
4. Выполнить проверку.

Решение:

1. Определим реакции опор.

а) Покажем на рисунке внешнюю силу $\bar{P}$, приложенную к узлу C фермы, а также реакции опор (рис. 2). Опора B – стрелневая, значит, ее линия действия известна и совпадает с направлением стрелня 6. Опора A – шарнирная, направление ее реакции неизвестно.

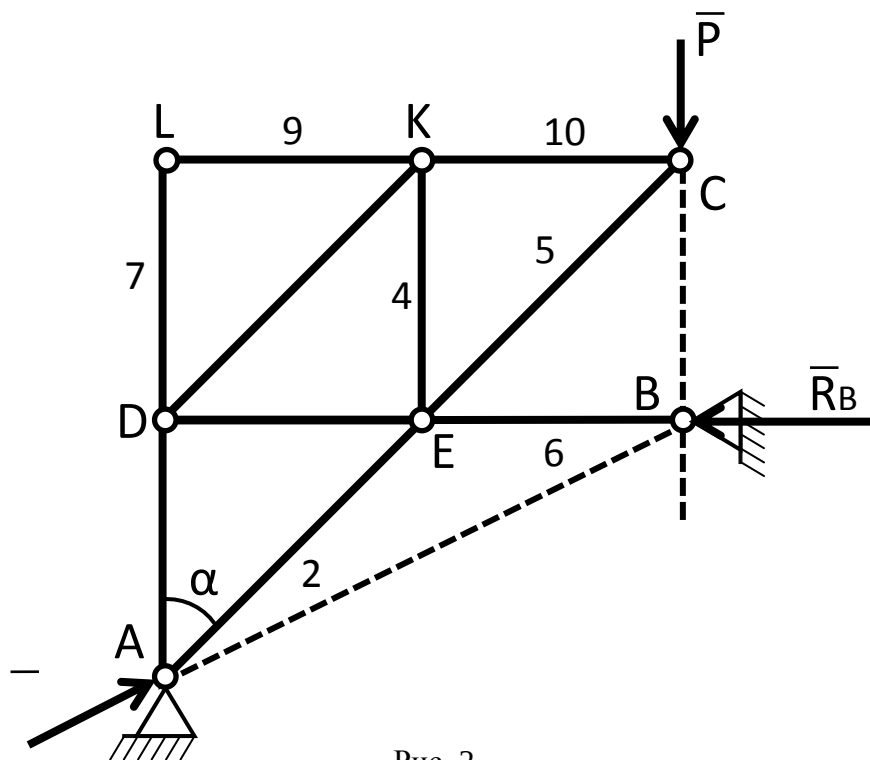


Рис. 2

б) Проведем линии действия силы $\bar{P}$ и реакции $\bar{R}_B$. Из точки A проведем прямую через точку пересечения силы $\bar{P}$ и реакции $\bar{R}_B$. Получим замкнутый прямоугольный треугольник со сторонами $\bar{P}$, $\bar{R}_A$, $\bar{R}_B$ (рис. 3). Стороны этого силового треугольника определяют модули и направление реакций $\bar{R}_A$, $\bar{R}_B$ в опорах фермы.

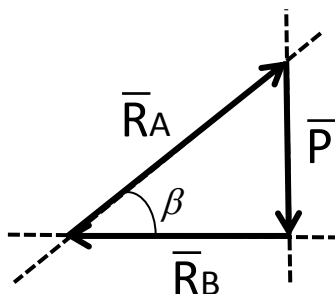


Рис. 3

Силовой треугольник подобен треугольнику ADB . Найдем косинус и синус угла β , который составляет сторона $\bar{R}_A$ со стороной $\bar{R}_B$ из силового прямоугольного треугольника (он же – угол между сторонами BD и AB в треугольнике ADB):

$$\cos \beta = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{\sqrt{AD^2 + BD^2}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = 0,756;$$

$$\sin \beta = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{\sqrt{AD^2 + BD^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 0,655.$$

Таким образом, получили, что в силовом треугольнике известны катет $\bar{P}$ и угол β . Можем найти другие стороны:

$$R_A = \frac{P}{\cos \beta} = \frac{15}{0,655} = 22,9H;$$

$$R_B = \sqrt{R_A^2 - P^2} = \sqrt{22,9^2 - 15^2} = 17,3H.$$

2.Находим нулевые стержни. Предполагаем, что все стержни растянуты, то есть усилия в них будут направлены от узлов внутрь стержней. Обозначим их $\bar{S}_i$ и $\bar{S}'_i$, где $i=1,...,10$ – номер узла. Причем для любого номера i выполняется тождество: $\bar{S}_i = -\bar{S}'_i$, но $S_i = S'_i$. В ненагруженном узле L сходятся два стержня (7-й и 9-й), усилия в которых будут равны нулю:

$$S_7 = S_9 = 0.$$

Для остальных узлов не выполняются условия лемм о нулевых стержнях.

3. Расчет усилий в ненулевых стержнях выполняем методом вырезания узлов. Выбираем узлы по порядку так, чтобы каждый раз количество неизвестных не превышало двух (рис. 4).

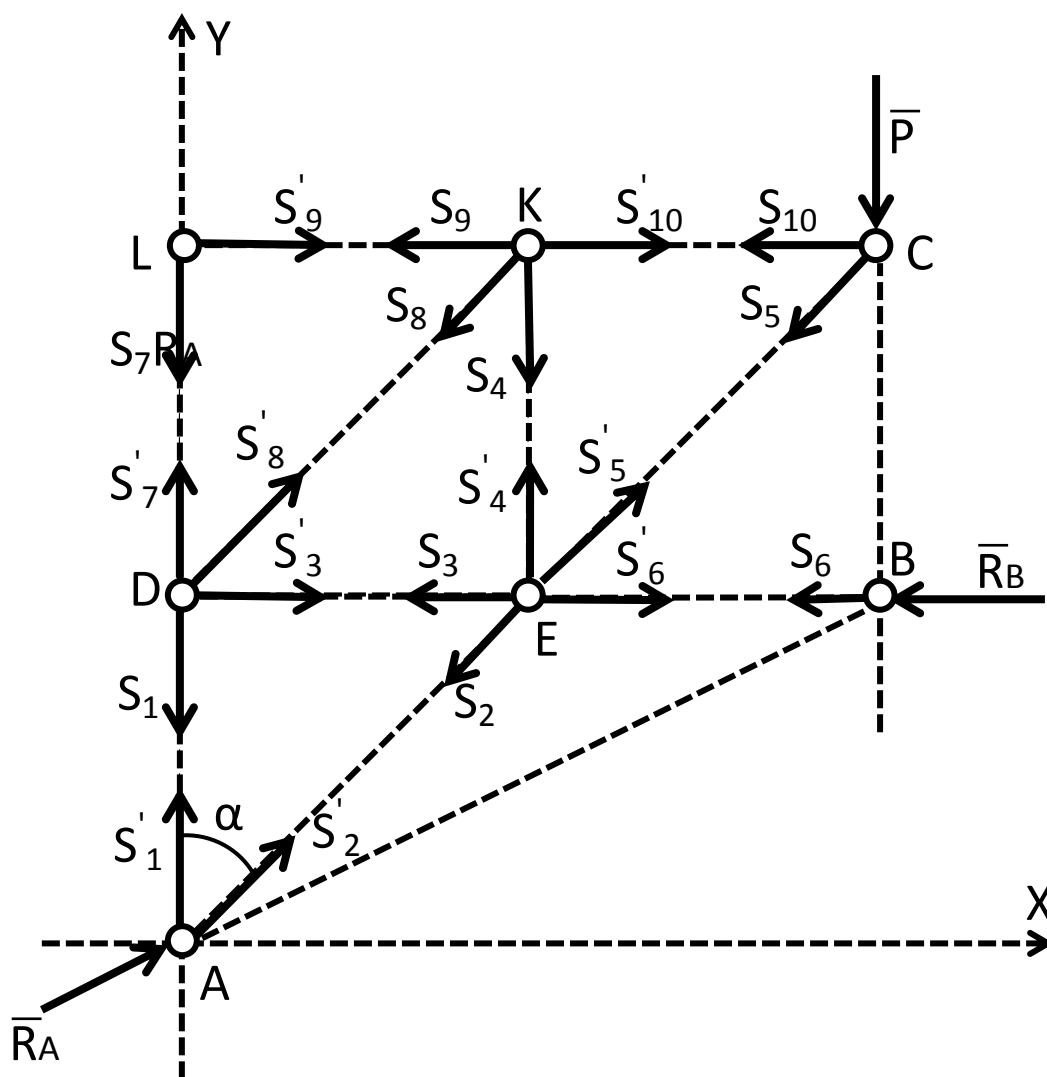


Рис. 4

Начнем с узла C, составим два уравнения равновесия всех сил и реакций связей, приложенных к нему:

$$\sum X_k = 0;$$

$$\sum Y_k = 0;$$

или

$$-S_{10} - S_5 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = 0;$$

$$-P - S_5 \cdot \cos \alpha = 0.$$

Из второго уравнения находим усилие в стержне 5:

$$S_5 = -\frac{P}{\cos \alpha} = -\frac{15}{0,866} = -17,32H.$$

А усилие в стержне 10 найдем из первого уравнения:

$$S_{10} = -S_5 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = 17,32 \cdot \frac{1}{2} = 8,66H.$$

Отрицательные значения усилий указывают на то, что стержни являются не растянутыми, а сжатыми и действительное направление реакции в них – к узлам.

Переходим к следующему узлу. Рассмотрим узел K . В нем сходятся четыре стржня (под номерами 4, 8, 9, 10), в двух из которых усилия уже известны (стержни 9 и 10). Аналогично составляем два уравнения равновесия для узла K :

$$-S_9 - S_8 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + S'_{10} = 0;$$

$$-S_8 \cdot \cos \alpha - S_4 = 0.$$

отсюда определяем:

$$S_8 = \frac{-S_9 + S'_{10}}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{0 + 8,66}{0,5} = 17,32H;$$

$$S_4 = -S_8 \cdot \cos \alpha = -17,32 \cdot 0,866 = -15H.$$

Далее рассматриваем узел D , где сходятся четыре стржня (под номерами 1, 3, 7, 8), в двух из которых усилия уже известны (стержни 7 и 8). Уравнения равновесия для узла D :

$$S'_3 + S'_8 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = 0;$$

$$S'_7 - S_1 + S'_8 \cdot \cos \alpha = 0.$$

Усилия в стержнях под номерами 1 и 3 будут равны:

$$S'_3 = -S'_8 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = -17,32 \cdot 0,5 = -8,66H;$$

$$S_1 = S'_7 + S'_8 \cdot \cos \alpha = 0 + 17,32 \cdot 0,866 = 15H.$$

Переходим к узлу E . В нем сходятся четыре стержня, в двух из которых осталось найти усилие – стержни под номерами 2 и 6. Составим два уравнения равновесия для этого узла:

$$-S_3 - S_2 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + S'_5 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + S'_6 = 0;$$

$$S'_4 + S'_5 \cdot \cos \alpha - S_2 \cdot \cos \alpha = 0.$$

Искомые величины находятся из последних двух уравнений:

$$S_2 = \frac{S'_4 + S'_5 \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-15 - 17,32 \cdot 0,866}{0,866} = -34,64 H;$$

$$\begin{aligned} S'_6 &= S_3 + S_2 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - S'_5 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = \\ &= -8,66 - 34,64 \cdot 0,5 + 17,32 \cdot 0,5 = -17,32 H. \end{aligned}$$

4. *Проверка.* Составим уравнения равновесия сил, приложенных к узлам *A* и *B*, с учетом найденных ранее величин реакций опор в этих точках.

Узел *A*:

$$R_A \cdot \cos \beta + S'_2 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = 0;$$

$$R_A \cdot \sin \beta + S'_1 + S'_2 \cdot \cos \alpha = 0 ,$$

или

$$22,9 \cdot 0,756 - 34,64 \cdot 0,5 = -0,01;$$

$$22,9 \cdot 0,655 + 15 - 34,64 \cdot 0,866 = 0,001 ,$$

Узел *B*:

$$-S_6 - R_B = 0$$

или

$$-(-17,32) - 17,3 = 0,02.$$

Очевидно, что вычисления выполнены верно, проверка сошлась, а значит, вписываем ответы в бланк на экране.

Замечание: описанный способ выполнения проверки может быть использован для нахождения неизвестных реакций опор.

Бланк ответов:

1. Реакции в опорах конструкции	
Реакция в опоре A :	$R_A = 22,9$
Реакция в опоре B :	$R_B = 17,3$
2. Усилия в стержнях (по модулю)	
Стержень №1 = 15	Стержень №6 = – 17,32
Стержень №2 = – 34,64	Стержень №7 = 0
Стержень №3 = – 8,66	Стержень №8 = 17,32
Стержень №4 = – 15	Стержень №9 = 0
Стержень №5 = – 17,32	Стержень №10 = 8,66

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют связью? В чём заключается сущность принципа освобождаемости от связей?
2. Перечислите основные типы опор, для которых линии действия реакций известны?
3. Как направлена реакция опорного шарнира, если твёрдое тело соединено с опорой при помощи стержня, имеющего на концах шарниры?
4. Как определяется направление равнодействующей системы сходящихся сил при построении силового многоугольника?
5. Каковы условия и уравнения равновесия системы сходящихся сил, расположенных в пространстве и в плоскости?
6. Как формулируется план решения задач статики на равновесие сил?
7. При каком условии три непараллельные силы, приложенные к твёрдому телу, уравновешиваются?
8. Каково условие равновесия трёх параллельных сил, приложенных к твёрдому телу?
9. Возможно ли равновесие трёх сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости?
10. В чём заключается сущность способа вырезания узлов?
11. Как формулируются леммы о нулевых стержнях?
12. На основании каких соображений без вычислений можно определить усилия в стержнях пространственных ферм, в которых при заданной нагрузке усилия равны нулю?

2. Индивидуальная работа № 2

Определение реакции опор твердого тела (плоская система сил)

Задача: На балку A, B, C, D, E, K (рис. 5) действуют: распределенная нагрузка с плотностью $q = 15 \text{ Н/м}$, изгибающий момент $M = 50 \text{ Нм}$ и сосредоточенная сила $F = 10 \text{ Н}$, приложенная в точке E под углом $\alpha = 30^\circ$. Размеры балки: $AB = 2 \text{ м}$, $BC = DE = 1 \text{ м}$, $CD = 0,75 \text{ м}$, $EK = 2,5 \text{ м}$.

Определить:

1. Силу, эквивалентную распределенной нагрузке.
2. Реакции в опорах балки и их составляющие.

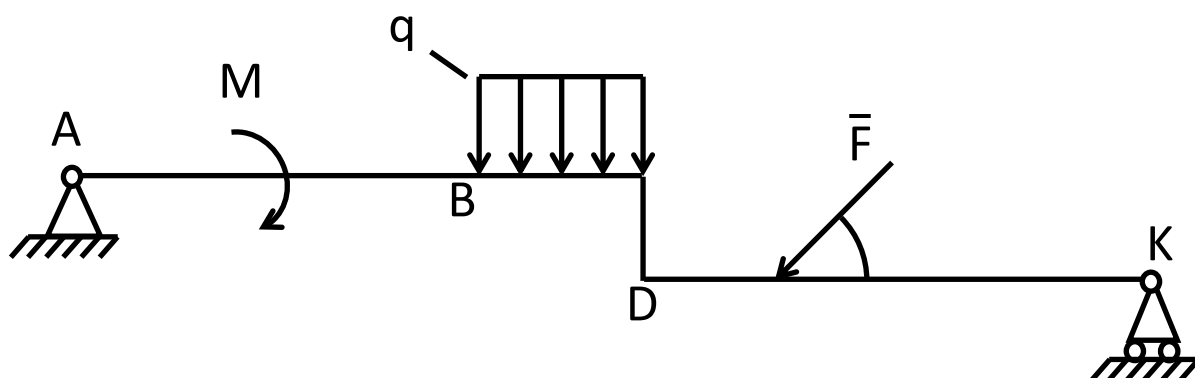


Рис. 5

План решения:

1. Рассмотреть уравновешивающуюся систему сил, приложенных к балке. Заменить распределенную нагрузку силой, эквивалентной данной нагрузке.
2. Отбросить связи, заменив их реакциями (или их составляющими - в случае, если направление связи неизвестно).
3. Ввести систему координат на плоскости.

4. Записать уравнения равновесия плоской системы сил в проекциях на оси координат.
5. Из уравнений равновесия определить искомые реакции опор.
6. Выполнить проверку, вычислив момент всех активных сил и реакций связей, действующих на балку, относительно какой-либо точки этой балки.

Решение:

1. *Рассмотрим систему сил, приложенных к балке.* Заменим нагрузку, распределенную по длине, сосредоточенной силой $\bar{Q}$, равной по величине произведению плотности нагрузки на длину участка, на котором она действует:

$$Q = q \cdot BC = 15 \cdot 1 = 15H,$$

сила $\bar{Q}$ будет приложена в центре тяжести эпюры этой нагрузки, то есть в середине отрезка BC , в точке L .

2. *Рассмотрим связи в точках A и K .* В точке A – шарнирно-неподвижная опора, направление реакции которой неизвестно, поэтому сначала определим ее составляющие $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$. В точке K – шарнирно-подвижная опора, ее реакция направлена перпендикулярно к плоскости, на которой стоят катки. Обозначим ее $\bar{R}_K$. Отбрасываем связи, заменив их действие реакциями (рис. 6).

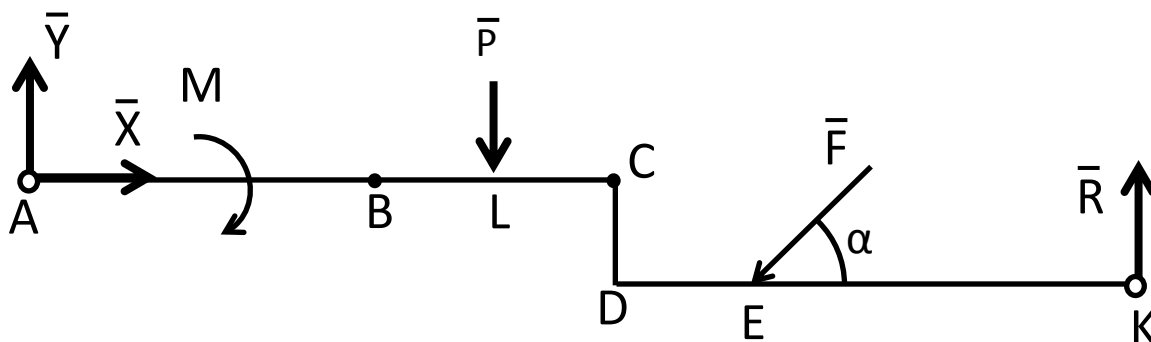


Рис. 6

3. *Введем систему координат XAY , ось X направим горизонтально, ось Y – вертикально вверх.*

4. Запишем три уравнения равновесия для данной плоской системы сил:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ \sum M_{iA} &= 0. ;\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}X_A - F \cos \alpha &= 0; \\ Y_A - Q - F \sin \alpha + R_K &= 0; \\ -M - Q \cdot AL - F \cos \alpha \cdot CD - F \sin \alpha \cdot (AC + DE) + R_K \cdot (AC + DK) &= 0.\end{aligned}$$

5. Из представленных выше уравнений найдем неизвестные величины. Подставляя известные числовые значения, из первого уравнения найдем неизвестную составляющую реакции $\bar{X}_A$:

$$X_A = F \cos \alpha, X_A = 10 \cdot 0,866 = 8,66H;$$

Из третьего уравнения находим реакцию $\bar{R}_K$:

$$\begin{aligned}R_K &= \frac{M + Q \cdot AL + F \cos \alpha \cdot CD + F \sin \alpha \cdot (AC + DE)}{AC + DK}; \\ R_K &= \frac{50 + 15 \cdot 2,5 + 10 \cdot 0,866 \cdot 0,75 + 10 \cdot 0,5 \cdot 4}{6,5} = 17,54H.\end{aligned}$$

Последнюю неизвестную составляющую реакции $\bar{Y}_A$ находим из второго уравнения:

$$Y_A = Q + F \sin \alpha - R_K;$$

$$Y_A = 15 + 10 \cdot 0,5 - 17,54 = 2,46H.$$

6. *Выполним проверку*, вычислив момент всех активных сил и реакций связей относительно точки E :

$$\sum M_{iE} = 0;$$

$$-X_A \cdot CD - Y_A \cdot (AC + DE) - M + Q \cdot (LC + DE) + R_K \cdot EK =$$

$$= -8,66 \cdot 0,75 - 2,46 \cdot 4 - 50 + 15 \cdot 1,5 + 17,54 \cdot 2,5 = 0,015 \approx 0.$$

Момент всех активных сил и реакций связей относительно точки E равен нулю, то есть балка находится в равновесии, вычисления выполнены верно.

Найденные величины записываются в бланк ответов.

Бланк ответов:

1) *Вспомогательные параметры:*

- а) Сила Q , эквивалентная распределенной нагрузке $q: 15H$.
- б) Расстояние от линии действия силы Q до точки $C: 0,5m$.

2) *Составляющие реакций в опорах:*

$$X_A = 8,66H; \quad X_K = 0H;$$

$$Y_A = 2,46H; \quad Y_K = 17,54H.$$

3) *Реакции в опорах балки:*

$$\text{Реакция в опоре } A: \quad R_A = 9H.$$

$$\text{Реакция в опоре } K: \quad R_K = 17,54H.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какая система сил называется парой сил?
2. Почему пара сил не имеет равнодействующей?
3. Чем характеризуется действие пары сил на твёрдое тело?
4. Как направлен вектор момента пары сил?
5. Как определяются моменты пар сил, лежащих в одной плоскости?
6. Каковы условия эквивалентности пар сил на плоскости и в пространстве?
7. Какие преобразования пары сил не изменяют её действия на твёрдое тело?
8. Почему момент пары сил является свободным вектором?
9. Чему равен момент пары сил, эквивалентной системе пар сил, расположенных в пересекающихся плоскостях?
10. Чему равен момент пары сил, эквивалентной системе пар сил, расположенных в пространстве и в плоскости?
11. Каковы условия равновесия системы пар сил, расположенных в пространстве и в плоскости?
12. Чем можно уравновесить заданную пару сил?
13. Как направлены реакции опор балки, нагруженной парой сил и лежащей на двух опорах, из которых одна – шарнирно-неподвижная, а другая – на катках?
14. Какой третьей парой сил можно уравновесить две пары сил, лежащие в пересекающихся плоскостях?
15. Что называется моментом силы относительно точки?
16. Как направлен вектор момента силы относительно точки и как определяется его модуль?
17. Как определяется на плоскости момент силы относительно точки?
18. Изменяется ли момент силы относительно данной точки при переносе силы вдоль линии её действия?
19. В каком случае момент силы относительно данной точки равен нулю?
20. Определите геометрическое место точек пространства, относительно которых моменты данной силы:
 - а) геометрически равны;
 - б) равны по модулю.

3. Индивидуальная работа № 3

Определение реакции опор твердого тела

(пространственная система сил)

Задача: Прямоугольный параллелепипед (рис. 7) прикреплен к вертикальному стержню и удерживается в этом положении цилиндрическим шарниром B и подшипником A . В вершинах параллелепипеда приложено шесть сил, а также на него действует пара сил с вращающим моментом M , таким, что его моменты относительно осей равны: $M_z = M_{вр}, M_x = M_y = 0$

Даны величины сил:

$$F_1 = 35H, F_2 = 18H,$$

$$F_3 = 41H, F_4 = 10H,$$

$$F_5 = 11H, F_6 = 23H.$$

Размеры параллелепипеда:

$$X = 0,2м, Y = 0,45м, Z = 0,7м,$$

$$Z_1 = 0,3м, Z_2 = 0,9м.$$

Определить:

1. Величину вращающего момента.
2. Величины реакций связей в точках A и B .

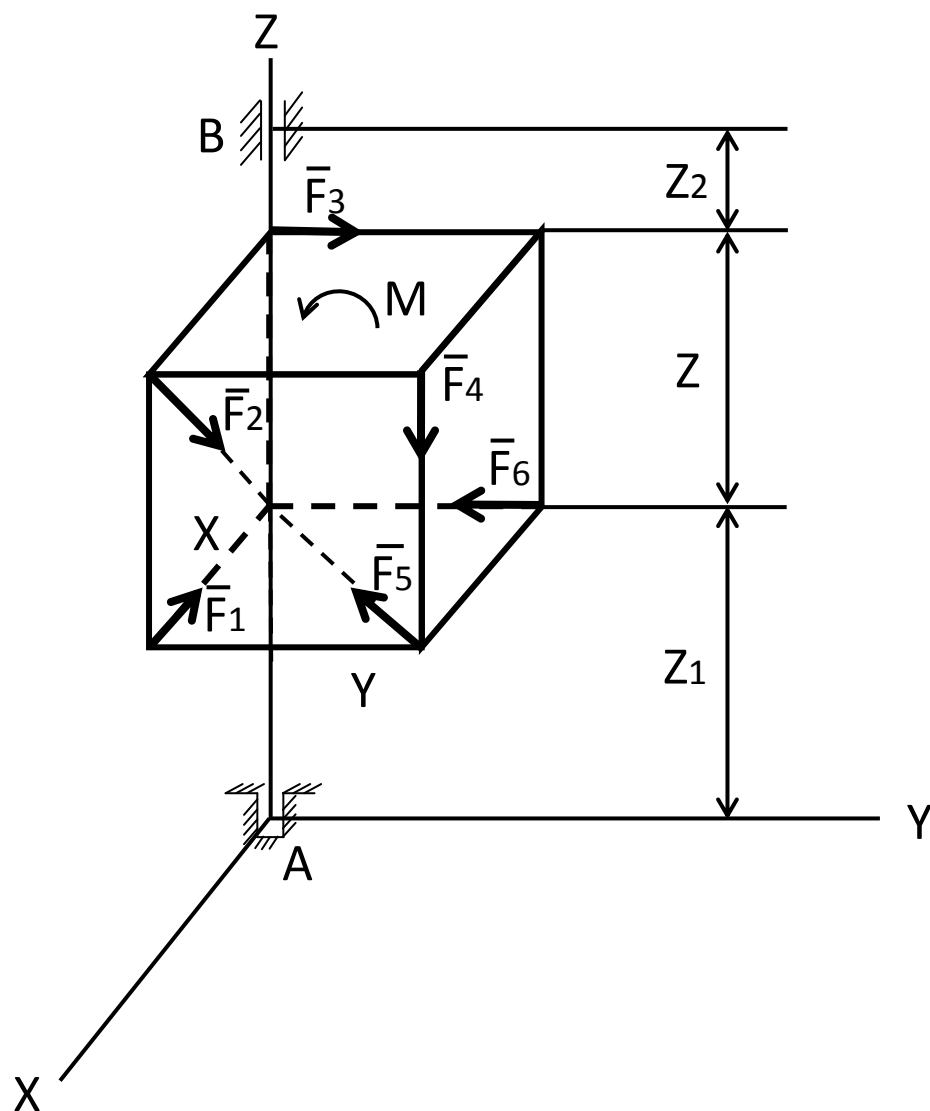


Рис. 7

План решения:

1. Рассмотреть равновесие сил и реакций связей, приложенных к параллелепипеду. Выделить искомые величины.
2. Составить шесть уравнений равновесия, из которых будут найдены все неизвестные.

Решение:

1. Рассмотрим равновесие сил, приложенных к данному параллелепипеду, заменим действие связей их реакциями (рис. 8). Получим пять неизвестных реакций связей (две в шарнире B : X_B, Y_B , три в подшипнике A : X_A, Y_A, Z_A), а также по условию задачи требуется найти момент пары сил M , который уравновесит параллелепiped. Таким образом, можно выделить шесть неизвестных величин, которые необходимо определить.

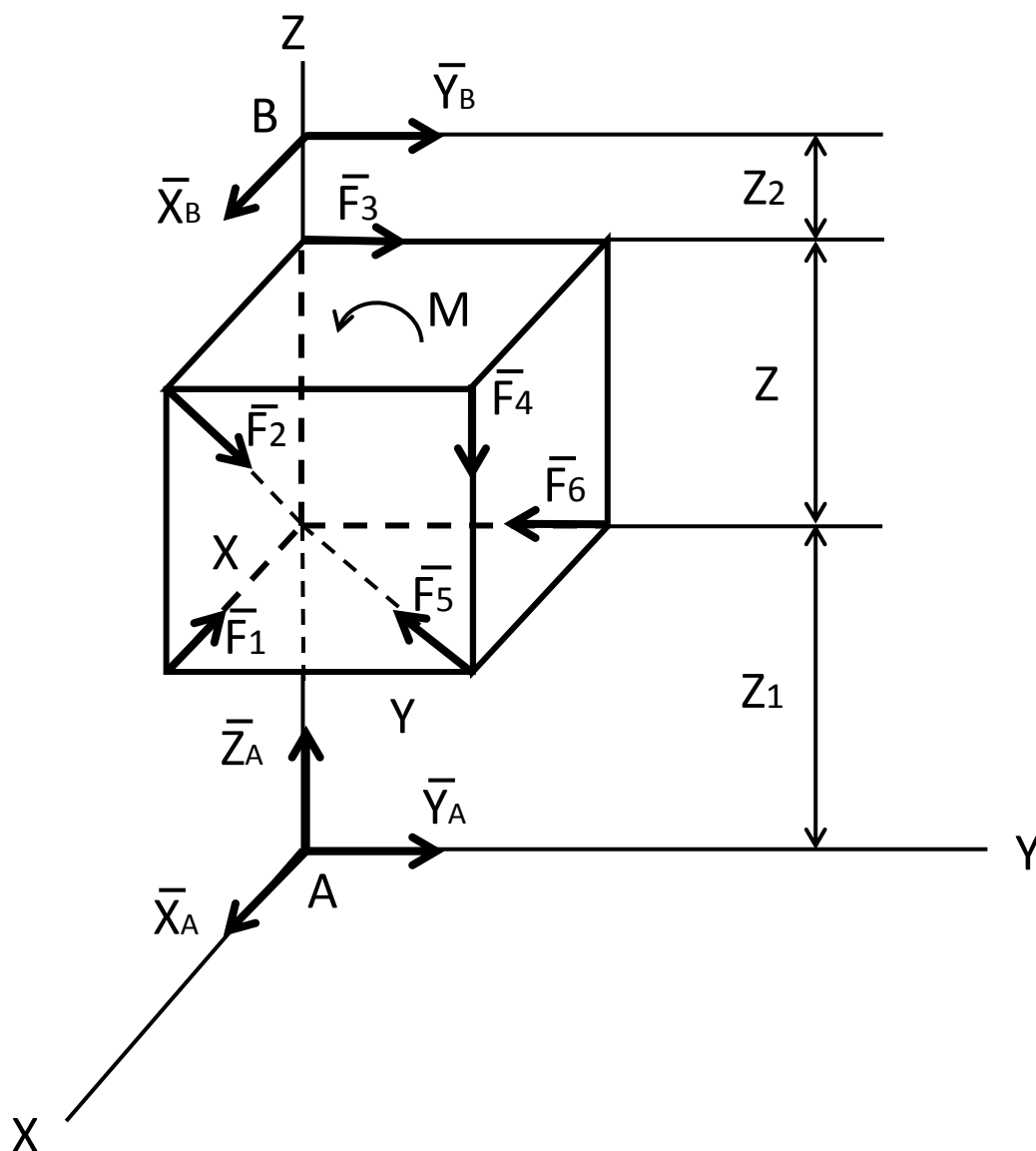


Рис. 8

Обозначим углы $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ между диагоналями и сторонами параллелепипеда (рис. 9):

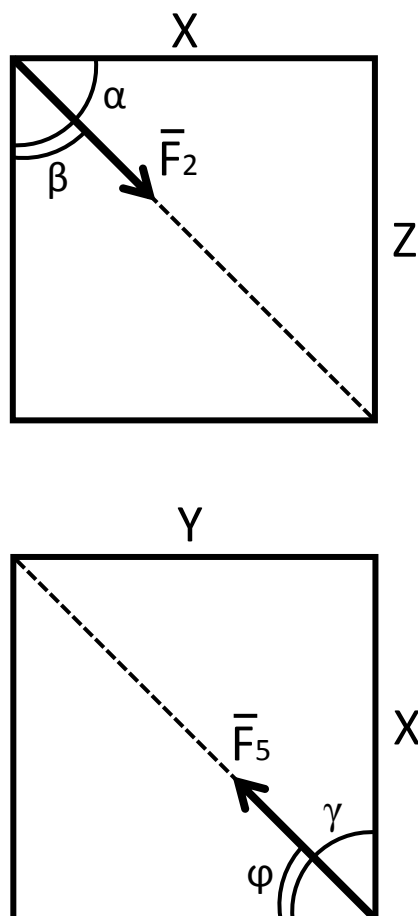


Рис. 9

Вычислим косинусы этих углов из соответствующих прямоугольных треугольников (отношение прилежащего катета к гипотенузе, которая находится по теореме Пифагора):

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{X}{\sqrt{X^2 + Z^2}} = \frac{0,2}{\sqrt{0,2^2 + 0,7^2}} = 0,275; \\ \cos \beta &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Z^2}} = \frac{0,7}{\sqrt{0,2^2 + 0,7^2}} = 0,962; \\ \cos \gamma &= \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{0,2}{\sqrt{0,2^2 + 0,45^2}} = 0,407; \\ \cos \varphi &= \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{0,45}{\sqrt{0,2^2 + 0,45^2}} = 0,915\end{aligned}$$

2. Составим уравнения равновесия для данной пространственной системы сил.

а) Уравнения проекций активных сил и реакций связей на оси координат:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ \sum Z_i &= 0;\end{aligned}$$

или

$$X_A + X_B - F_1 \cos \alpha - F_5 \cos \gamma = 0; \quad (1)$$

$$Y_A + Y_B + F_3 - F_5 \cos \varphi - F_6 = 0; \quad (2)$$

$$Z_A - F_2 \cos \beta - F_4 = 0. \quad (3)$$

б) Уравнения моментов активных сил и реакций связей относительно осей координат:

$$\begin{aligned}\sum M_{iX} &= 0; \\ \sum M_{iY} &= 0; \\ \sum M_{iZ} &= 0;\end{aligned}$$

или

$$-F_3 \cdot (Z + Z_1) - F_4 \cdot Y + F_5 \cdot \cos \varphi \cdot Z_1 + F_6 \cdot Z_1 - Y_B \cdot (Z_1 + Z + Z_2) = 0; \quad (4)$$

$$\begin{aligned}-F_1 \cdot Z_1 - F_2 \cdot \cos \alpha \cdot (Z_1 + Z) + F_2 \cdot \cos \beta \cdot X + \\ + F_4 \cdot X - F_5 \cdot \cos \gamma \cdot Z_1 + X_B \cdot (Z_1 + Z + Z_2) = 0;\end{aligned} \quad (5)$$

$$M_{\text{вр}} = 0. \quad (6)$$

После того как уравнения равновесия пространственной системы сил записаны, определяем искомые величины. Очевидно, что в уравнение (3) входит всего одна неизвестная - Z_A , которую можно вычислить:

$$Z_A = F_2 \cos \beta + F_4 = 18 \cdot 0,962 + 10 = 9,62H.$$

Из уравнения (4) находим составляющую реакции Y_B :

$$\begin{aligned} Y_B &= \frac{-F_3 \cdot (Z + Z_1) - F_4 \cdot Y + F_5 \cdot \cos \varphi \cdot Z_1 + F_6 \cdot Z_1}{Z_1 + Z + Z_2} = \\ &= \frac{-41 \cdot (0,7 + 0,3) - 10 \cdot 0,45 + 11 \cdot 0,915 \cdot 0,3 + 23 \cdot 0,3}{0,3 + 0,7 + 0,9} = -18,727H. \end{aligned}$$

А из уравнения (5) – составляющую X_B :

$$\begin{aligned} X_B &= \frac{F_1 \cdot Z_1 + F_2 \cdot \cos \alpha \cdot (Z_1 + Z) - F_2 \cdot \cos \beta \cdot X - F_4 \cdot X + F_5 \cdot \cos \gamma \cdot Z_1}{Z_1 + Z + Z_2} = \\ &= \frac{35 \cdot 0,3 + 18 \cdot 0,275 \cdot (0,3 + 0,7) - 18 \cdot 0,962 \cdot 0,2 - 10 \cdot 0,2 + 11 \cdot 0,407 \cdot 0,3}{0,3 + 0,7 + 0,9} = \\ &= 5,963H. \end{aligned}$$

Далее из уравнений (1) и (2) получаем X_A и Y_A :

$$X_A = -X_B + F_1 \cdot \cos \alpha + F_5 \cdot \cos \gamma = -5,963 + 35 \cdot 0,275 + 11 \cdot 0,407 = 8,139H;$$

$$Y_A = -Y_B - F_3 + F_5 \cdot \cos \varphi + F_6 = 18,727 - 41 + 11 \cdot 0,915 + 23 = 10,792H.$$

Найдем модуль реакций в опорах:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{8,139^2 + 10,792^2 + 9,62^2} = 16,59H;$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{5,963^2 + (-18,727)^2} = 19,65H.$$

Бланк ответов:

Реакции в подшипнике A: Реакции в шарнире B:

X_A	8,139
Y_A	10,792
Z_A	9,62
R_A	16,59

X_B	5,963
Y_B	-18,727
Z_B	0
R_B	19,65

Вопросы для самоконтроля

1. Зависит ли главный вектор и главный момент заданной системы сил от выбора центра приведения?
2. Каковы возможные случаи приведения сил, расположенных произвольно на плоскости?
3. К какому простейшему виду можно привести систему сил, если известно, что главный момент этих сил относительно различных точек на плоскости имеет различную величину?
4. К какому простейшему виду можно привести систему сил, если известно, что главный момент этих сил относительно различных точек на плоскости имеет постоянное значение, не равное нулю?
5. К какому простейшему виду можно привести систему сил, если известно, что главный момент этих сил относительно различных точек на плоскости равен нулю?
6. Как определить модуль и направление главного вектора системы параллельных сил на плоскости?

7. При каком условии сила, равная главному вектору плоской системы сил, является равнодействующей этой системы?
8. Каковы условия равновесия плоской системы параллельных сил?
9. Какие задачи статики называют статически определимыми и какие – статически неопределимыми?
10. Каковы возможные случаи приведения произвольно расположенных и параллельных сил в пространстве?
11. К какому простейшему виду можно привести систему сил, если известно, что главный момент этих сил относительно различных точек пространства имеет одно и то же значение, не равное нулю?
12. К какому простейшему виду можно привести систему сил, если известно, что главный момент этих сил относительно различных точек пространства равен нулю?
13. К какому простейшему виду можно привести систему сил, если известно, что главный момент этих сил относительно различных точек пространства имеет различные значения и перпендикулярен к главному вектору?
14. К какому простейшему виду можно привести систему сил, если известно, что главный момент этих сил относительно различных точек пространства имеет различные значения и не перпендикулярен к главному вектору?
15. Каковы условия и уравнения равновесия пространственной системы сходящихся, параллельных и произвольно расположенных сил и чем они отличаются от условий и уравнений равновесия такого же вида сил на плоскости?
16. Каковы геометрическое и аналитическое условия приведения пространственной системы сил к равнодействующей?
17. Сформулируйте теорему о моменте равнодействующей пространственной системы сил относительно точки и оси.
18. Составьте уравнение линии действия равнодействующей.
19. Какую прямую в пространстве называют центральной осью системы сил?
20. Выведите уравнение центральной оси системы сил.
21. Покажите, что две скрещивающиеся силы можно привести к силовому винту.
22. По какой формуле вычисляют наименьший главный момент заданной системы сил?
23. Какова зависимость главного момента системы сил в пространстве от расстояния от центра приведения до центральной оси этой системы?
24. Относительно каких точек пространства главные моменты заданной системы сил имеют один и тот же модуль и составляют с главным моментом один и тот же угол?
25. Относительно каких точек пространства главные моменты системы сил геометрически равны между собой?

4. Индивидуальная работа № 4

Приведение пространственной системы сил к простейшему виду

Задача: Дана система сил, размеры параллелепипеда (рис. 10):

$$F_1 = 10H, \quad F_2 = 8H;$$

$$F_3 = 4H, \quad F_4 = 11H;$$

$$F_5 = 1H, \quad F_6 = 9H;$$

$$a=0,3м, \quad b=0,4м, \quad c=0,85м$$

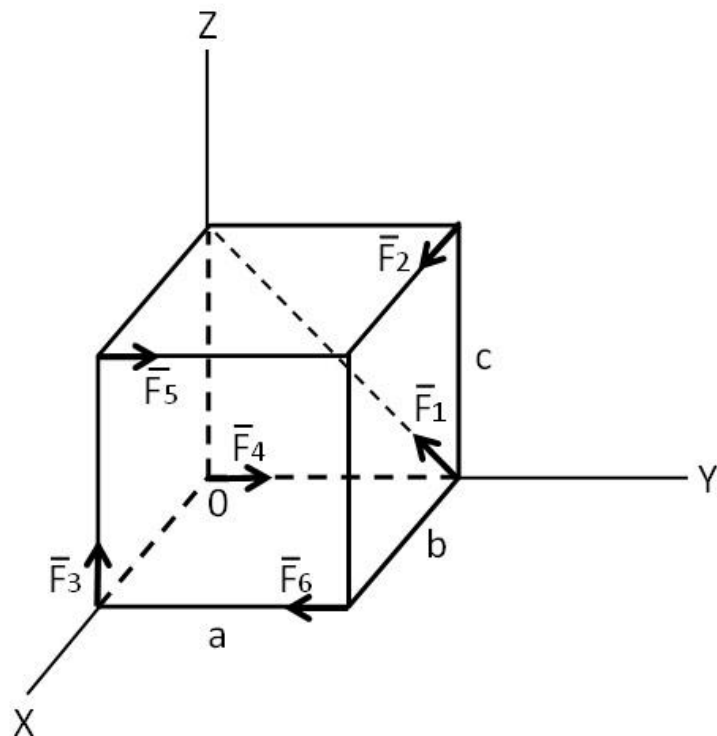


Рис. 10

Определить:

1. Главный вектор системы сил (модуль и направляющие косинусы).
2. Главный момент системы сил.
3. Минимальный главный момент.
4. Параметр динамического винта.

5. Координаты точек пересечения центральной винтовой оси динами с координатными плоскостями.

Замечание. План решения не приводится, так как его пункты полностью совпадают с порядком определения неизвестных.

Решение:

1. Найдем главный вектор данной системы сил (рис. 11). Для этого спроецируем данные силы $\vec{F}_i (i=1, \dots, 6)$ на оси координат. Обозначим вершины куба буквами O, A, B, C, D, E, K , углы α, β .

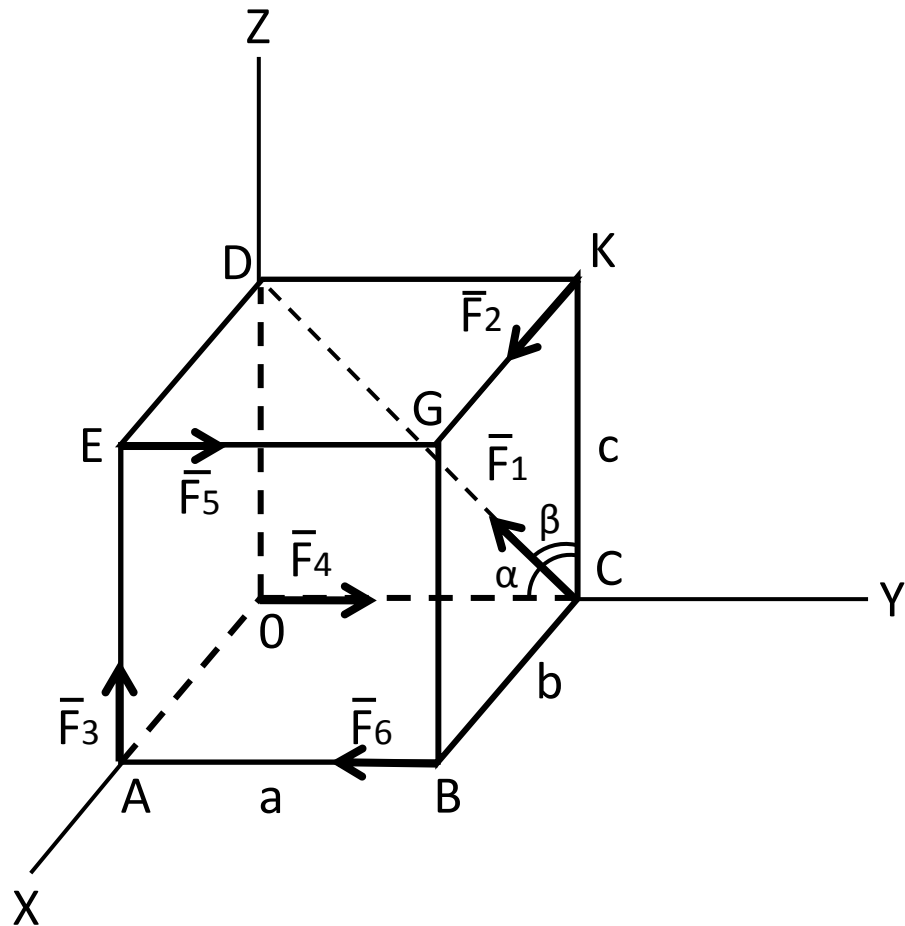


Рис. 11

Так как

$$CD = \sqrt{CO^2 + OD^2} = \sqrt{0,3^2 + 0,4^2} = 0,5 \text{ м},$$

то

$$\cos \alpha = \frac{CO}{CD} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6;$$

$$\cos \beta = \frac{CK}{CD} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8.$$

Запишем проекции главного вектора системы сил на оси координат:

$$F_x^{\text{гл}} = F_2 = 8H.$$

$$F_y^{\text{гл}} = -F_1 \cos \alpha + F_4 + F_5 - F_6 = -10 \cdot 0,6 + 11 + 1 - 9 = -3H,$$

$$F_z^{\text{гл}} = -F_1 \cos \beta + F_3 = 10 \cdot 0,8 + 4 = 12H,$$

Найдем модуль главного вектора:

$$F^{\text{гл}} = \sqrt{(F_x^{\text{гл}})^2 + (F_y^{\text{гл}})^2 + (F_z^{\text{гл}})^2} = \sqrt{8^2 + (-3)^2 + 12^2} = 14,731H.$$

Чтобы определить направление главного вектора системы сил, найдем направляющие косинусы:

$$\cos(\bar{F}^{\text{гл}}, \bar{i}) = \frac{F_x^{\text{гл}}}{F^{\text{гл}}} = \frac{8}{14,731} = 0,543;$$

$$\cos(\bar{F}^{\text{гл}}, \bar{j}) = \frac{F_y^{\text{гл}}}{F^{\text{гл}}} = \frac{-3}{14,731} = -0,204;$$

$$\cos(\bar{F}^{\text{гл}}, \bar{k}) = \frac{F_z^{\text{гл}}}{F^{\text{гл}}} = \frac{12}{14,731} = 0,815.$$

2. Найдем главный момент заданной системы сил относительно центра O .

Вычислим главные моменты относительно координатных осей:

$$M_x = F_1 \cdot a \cos \beta - F_5 \cdot c = 10 \cdot 0,3 \cdot 0,8 - 1 \cdot 0,85 = 1,55 \text{ Нм};$$

$$M_y = F_2 \cdot c - F_3 \cdot b = 8 \cdot 0,85 - 4 \cdot 0,4 = 5,2 \text{ Нм};$$

$$M_z = -F_2 \cdot a + F_5 \cdot b - F_6 \cdot b = -8 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,4 - 9 \cdot 0,4 = -5,6 \text{ Нм}.$$

Тогда главный момент системы относительно точки O :

$$M_o = \sqrt{(M_x)^2 + (M_y)^2 + (M_z)^2} = \sqrt{1,55^2 + 5,2^2 + (-5,6)^2} = 7,8 \text{ Нм}.$$

Для определения направления вектора главного момента, найдем направляющие косинусы:

$$\cos(\bar{M}_o, \bar{i}) = \frac{M_x}{M_o} = \frac{1,55}{7,8} = 0,199;$$

$$\cos(\bar{M}_o, \bar{j}) = \frac{M_y}{M_o} = \frac{5,2}{7,8} = 0,667;$$

$$\cos(\bar{M}_o, \bar{k}) = \frac{M_z}{M_o} = \frac{-5,6}{7,8} = -0,718.$$

Вычислим косинус угла между главным вектором системы и главным моментом:

$$\begin{aligned} \cos(\bar{F}^{\text{гл}}, \bar{M}_o) &= \frac{\bar{F}^{\text{гл}} \cdot \bar{M}_o}{|\bar{F}^{\text{гл}}| \cdot |\bar{M}_o|} = \frac{F_x^{\text{гл}} \cdot M_x + F_y^{\text{гл}} \cdot M_y + F_z^{\text{гл}} \cdot M_z}{|\bar{F}^{\text{гл}}| \cdot |\bar{M}_o|} = \\ &= \frac{8 \cdot 1,55 + (-3) \cdot 5,2 + 12 \cdot (-5,6)}{14,731 \cdot 7,8} = -0,613. \end{aligned}$$

3. Вычислим минимальный главный момент заданной системы сил по формуле:

$$M_{\min} = \frac{F_X^{\Gamma\Gamma} M_X + F_Y^{\Gamma\Gamma} M_Y + F_Z^{\Gamma\Gamma} M_Z}{F^{\Gamma\Gamma}} =$$

$$= \frac{8 \cdot 1,55 - 3 \cdot 5,2 + 12 \cdot (-5,6)}{14,731} = -4,78 \text{ Нм.}$$

4. Получили, что $\bar{F}^{\Gamma\Gamma} \neq 0, M^{\Gamma\Gamma} \neq 0$. Таким образом, заданная система сил приводится к динаме (силовому винту). Запишем уравнение центральной оси:

$$\frac{M_X - (yF_Z^{\Gamma\Gamma} - zF_Y^{\Gamma\Gamma})}{F_X^{\Gamma\Gamma}} = \frac{M_Y - (zF_X^{\Gamma\Gamma} - xF_Z^{\Gamma\Gamma})}{F_Y^{\Gamma\Gamma}} = \frac{M_Z - (xF_Y^{\Gamma\Gamma} - yF_X^{\Gamma\Gamma})}{F_Z^{\Gamma\Gamma}} = \frac{M_{\min}}{F^{\Gamma\Gamma}}.$$

Подставим в это уравнение числовые значения известных величин, получим:

$$\frac{M_X - (yF_Z^{\Gamma\Gamma} - zF_Y^{\Gamma\Gamma})}{F_X^{\Gamma\Gamma}} = \frac{M_{\min}}{F^{\Gamma\Gamma}}, \frac{1,55 - (12y + 3z)}{8} = \frac{-4,78}{14,731},$$

$$z + 4y = 1,38; \quad (7)$$

$$\frac{M_Y - (zF_X^{\Gamma\Gamma} - xF_Z^{\Gamma\Gamma})}{F_Y^{\Gamma\Gamma}} = \frac{M_{\min}}{F^{\Gamma\Gamma}}, \frac{5,2 - (8z - 12x)}{-3} = \frac{-4,78}{14,731},$$

$$z - 1,5x = 0,53. \quad (8)$$

5. Координаты точек пересечения центральной винтовой осидинамы с координатными плоскостями определяем из уравнений (7) и (8), а полученные результаты удобно представить в виде таблицы:

Точка	x	y	z
A	0	0,21	0,53
B	0,57	0	1,38
C	-0,35	0,35	0

Бланк ответов:

гл

Проекции главного вектора на оси координат $F_x^{\text{гл}} = 8H;$ $F_y^{\text{гл}} = -3H;$ $F_z^{\text{гл}} = 12H.$	Проекции главного момента на оси координат $M_x = 1,55Hм;$ $M_y = 5,2Hм;$ $M_z = -5,6Hм.$
Модуль главного вектора $F^{\text{гл}} = 14,731H.$	Модуль главного момента относительно центра O $M_O = 7,8Hм.$
Направляющие косинусы главного вектора $OX = 0,543;$ $OY = -0,204;$ $OZ = 0,815.$	Направляющие косинусы главного момента $OX = 0,199;$ $OY = 0,667;$ $OZ = -0,718.$
Косинус угла между $\vec{F}^{\text{гл}}$ и $\vec{M}_O$ $-0,613.$	Параметр динамического винта $-0,324.$
Координаты точек пересечения центральной винтовой оси динамы	
А) с фронтальной плоскостью	$y = 0,21; z = 0,53;$
Б) с профильной плоскостью	$x = 0,57; z = 1,38;$
В) с горизонтальной плоскостью	$y = 0,35; x = -0,35.$

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется числовое значение и знак силы относительно оси?
2. При каких условиях момент силы относительно оси равен нулю?
3. При каком направлении силы, приложенной к заданной точке, её момент относительно данной оси наибольший?
4. Какая зависимость существует между моментом силы относительно точки и моментом той же силы относительно оси, проходящей через эту точку?
5. При каких условиях модуль момента силы относительно точки равен моменту той же силы относительно оси, проходящей эту точку?
6. Каковы аналитические выражения моментов силы, относительно координатных осей?
7. Чему равны главные моменты системы сил, произвольно расположенных в пространстве, относительно точки и относительно оси, проходящей через эту точку? Какова зависимость между ними?
8. Чему равен главный момент системы сил, лежащих в одной плоскости, относительно любой точки этой плоскости?
9. Чему равен главный момент сил, составляющих пару, относительно любой точки в пространстве?

Библиографический список

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - СПб.: Политехника, 2009. Ч.1,2.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 2011.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 2010. Ч.1, 2.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. Индивидуальная работа № 1.....	3
2. Индивидуальная работа № 2.....	12
3. Индивидуальная работа № 3.....	17
4. Индивидуальная работа № 4.....	25
Библиографический список.....	32

Учебное издание

Маргарита Владимировна Максименко
Виктор Евгеньевич Головки
Иван Владимирович Ключкин

СТАТИКА

ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ НА ПЕРСОНАЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРАХ В

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор В.А.Басова
Техн.редактор Л.Я.Титова

Темплан 2015 г., поз. 7

Подп. к печати 05.02.2015.	Формат 60x84/16.	Бумага тип. №1.
Печать офсетная. Объем 2,0 печ. л.; 2,0 уч.-изд.л.		Тираж 100 экз.
Изд. № 7. Цена "С"	Заказ	

Ризограф Санкт-Петербургского государственного технологического
университета растительных полимеров,
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4