

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ»

РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2015

РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2015

УДК 53(07)
ББК 22.34я7
С 780

Расчет плоской фермы: учебно-методическое пособие/сост.: В.Е. Головки, И.В. Ключкин, М. В. Максименко; СПбГТУРП. - СПб., 2015. - 36 с.

В учебно-методическом пособии кратко изложены теоретические положения статики, приведен пример расчета плоской фермы и даны методические указания по выполнению расчетно-графической работы. Пособие соответствует программе курса теоретической механики и рассчитано на студентов очной, вечерней и заочной форм обучения. Материал учебного пособия изложен так, что им можно пользоваться при изучении полного и краткого курсов.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям: 27.03.04 «Управление в технических системах»; 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»; 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»; 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»; 15.03.02. «Технологические машины и оборудование».

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров В.С. Куров;

д-р техн. наук, профессор Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров Г.А. Кондрашкова.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом в качестве учебно-методического пособия.

© Санкт-Петербургский
государственный технологический
университет растительных полимеров, 2015

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие определяет методику и особенности проведения индивидуальных расчетно-графических работ, выполняемых студентами при изучении раздела «Статика» курса теоретической механики, а именно, расчет плоской фермы.

Расчетно-графическая работа на тему "Расчет плоской фермы" является итоговой по статике плоской системы сил, в которой студенту необходимо использовать основные положения статики. В их числе приведение системы сил к простейшему виду, определение опорных реакций, расчет усилий в стержнях, проверка положения равновесия. Плоская ферма, как частный случай пространственной конструкции, является достаточно распространенной в технике, и поэтому данная работа может иметь практическое значение.

1. СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ К РАБОТЕ

Задание на работу студент получает от преподавателя в виде шифра. По сборнику заданий с помощью полученного шифра студент определяет схему фермы, ее геометрические размеры и силы, действующие на нее. При этом предполагается, что ферма с невесомыми стержнями расположена в вертикальной плоскости, все внешние усилия приложены в узлах фермы, пластина однородная. Пара сил приложена к пластине и лежит в ее плоскости.

В ходе выполнения данной работы надо:

1. Аналитически привести заданную систему сил к простейшему виду.
2. Аналитически определить реакции опор, а для вариантов ферм 31-60 следует также определить реакцию промежуточного шарнира. При этом обе опоры считая неподвижными цилиндрическими шарнирами.
3. Аналитически определить усилия в стержнях фермы методом вырезания узлов.
4. Графически определить усилия в стержнях методом вырезания узлов.
5. Аналитически определить усилия в стержнях методом сквозных сечений (способом Риттера).
6. Аналитически проверить равновесие пластины.
7. Вычертить ферму, в которой растянутые стержни показать красным цветом, сжатые - зеленым, нулевые - синим.

В качестве дополнительного задания студентам может быть предложено:

1. Графически привести систему сил к простейшему виду
2. Графически определить реакции опор.
3. Графически проверить равновесие пластинки.

Исходными величинами для каждого задания служат:

1. Схема фермы и её геометрические размеры;
2. Величины, направления и точки приложения внешних сил;
3. Положение подвижного и неподвижного цилиндрических шарниров, а также параметр подвижного шарнира;
4. Вес единицы площади пластины.

В качестве иллюстрации выполнения задания приведем пример расчета плоской фермы, показанной на рис. 1.

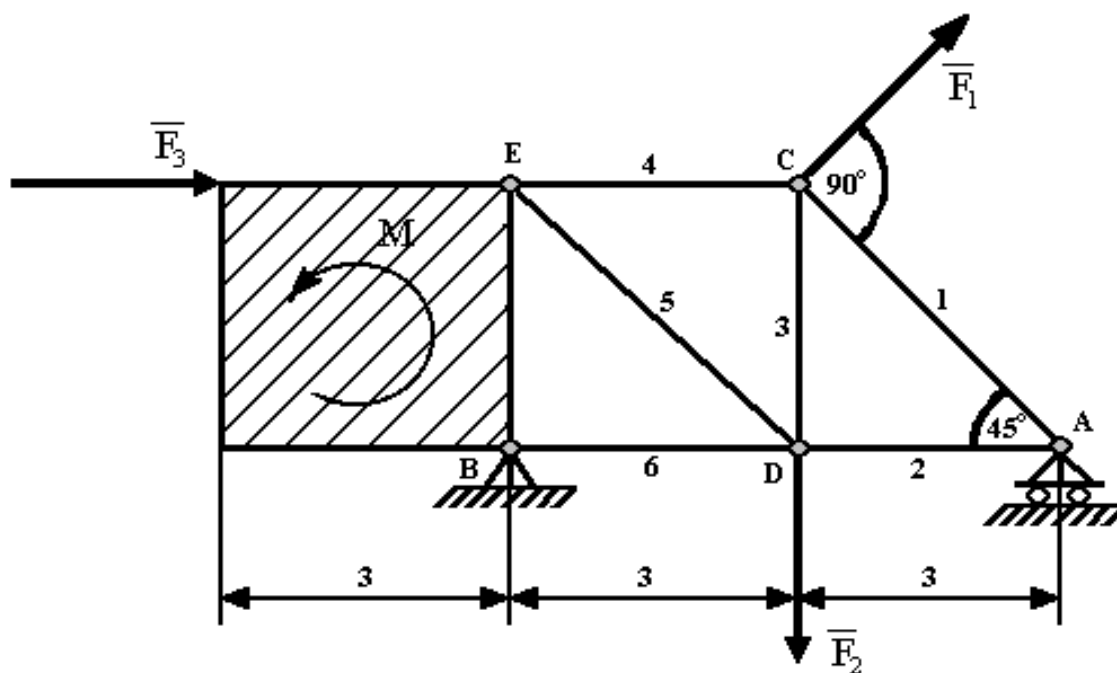


Рис. 1.

Даны следующие величины внешних сил:

$$F_1=1 \text{ кН}, F_2=2\text{кН}, F_3=3\text{кН};$$

$$M=10 \text{ кНм}$$

и вес единицы площади однородной пластины $q=0.1\text{кН/м}^2$.

Определим вес пластины

$$Q=q \times S,$$

где S - площадь пластины, имеющей в данном случае квадратную форму.

$$Q=0.1 \times 3^2=0.9 \text{ кН}.$$

Q - сила приложена в геометрическом центре пластины, т.е. в точке пересечения диагоналей квадрата.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

В качестве центра приведения выберем точку В, которую примем за начало координат ВХУ (рис. 2).

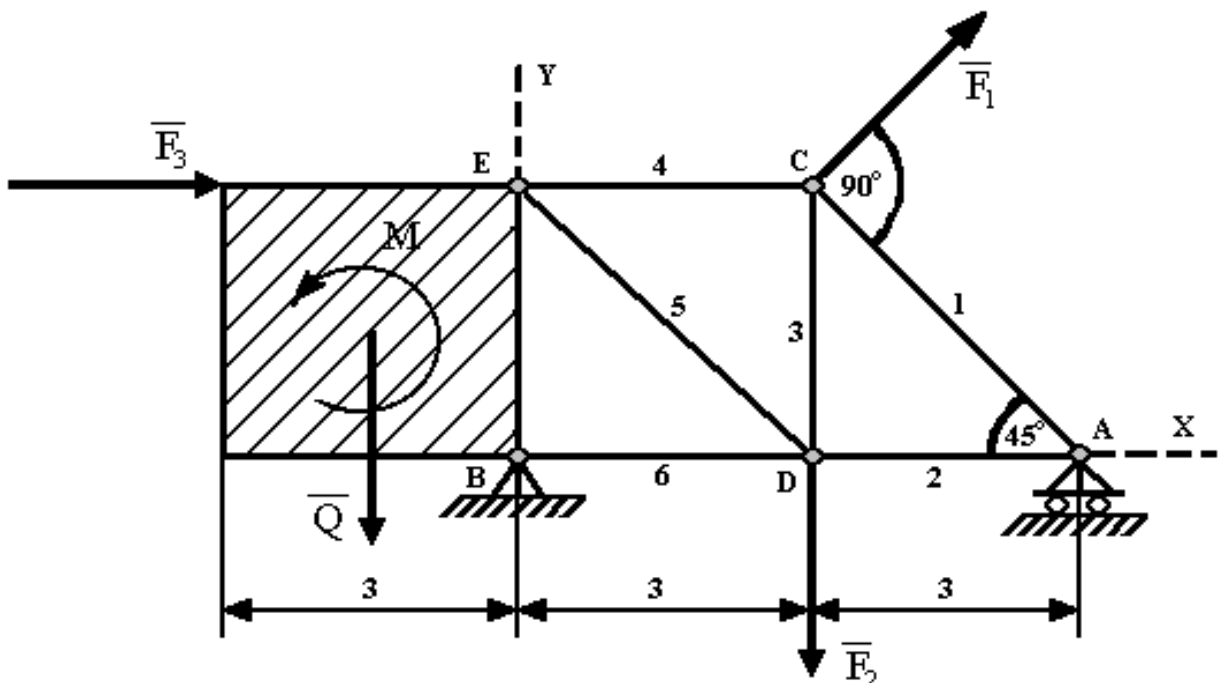


Рис. 2

Определим проекции главного вектора $\vec{R}_{\text{гл}}$ на оси координат:

$$R_{\text{гл}x} = \sum X_k = F_1 \times \cos 45^\circ + F_3 = 1 \times \cos 45^\circ + 3 = 3.71 \text{ kH}$$

$$R_{\text{гл}y} = \sum Y_k = F_1 \times \cos 45^\circ - F_2 - Q = 1 \times \cos 45^\circ - 2 - 0.9 = -2.19 \text{ kH} \quad (1)$$

Абсолютная величина главного вектора

$$\begin{aligned} R_{\text{гл}} &= \sqrt{R_{\text{гл}x}^2 + R_{\text{гл}y}^2} = \sqrt{3.71^2 + (-2.19)^2} = \\ &= 4.308 \approx 4.31 \text{ kH} \end{aligned}$$

Определим направляющие косинусы:

$$\cos (\vec{R}_{\text{гл}} \wedge \vec{i}) = \frac{R_{\text{гл} x}}{R_{\text{гл}}} = \frac{3,71}{4,31} = 0,861 ;$$

$$\cos (\vec{R}_{\text{гл}} \wedge \vec{j}) = \frac{R_{\text{гл} y}}{R_{\text{гл}}} = \frac{-2,19}{4,31} = -0,508 .$$

По направляющим косинусам определяем, что главный вектор образует с положительным направлением оси V_x угол $30,5^\circ$. Определим главный момент, заметив при этом, что линия действия силы F_1 проходит через точку B и, следовательно, сила F_1 относительно точки B момента не дает.

$$M_{\text{гл}} = \sum M_B(F_K) = -F_3 \times 3 - F_2 \times 3 + M + Q \times 1,5 = -2 \times 3 - 3 \times 3 + 10 + 0,9 \times 1,5 = 3,65 \text{ кНм} \quad (2)$$

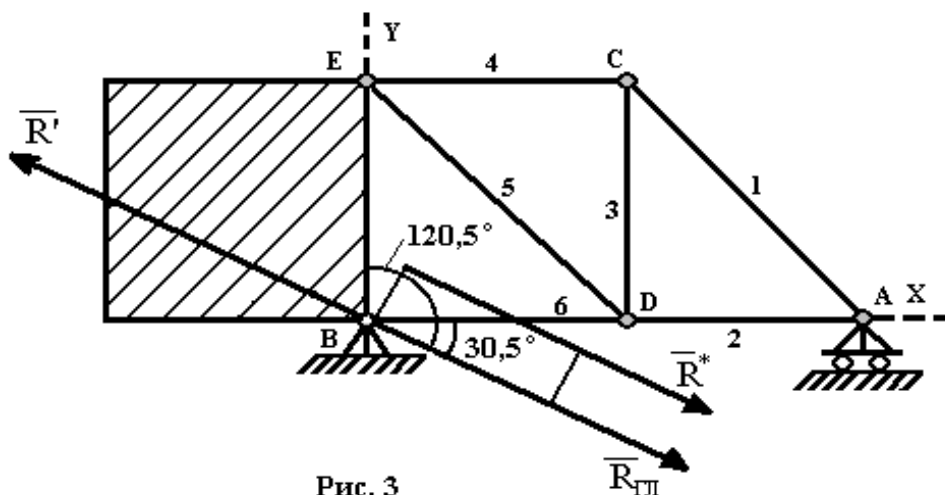
Как известно, при приведении плоской системы сил к простейшему виду возможны четыре случая:

1. $R_{\text{гл}} = 0$ и $M_{\text{гл}} = 0$ - система сил находится в равновесии.
2. $R_{\text{гл}} \neq 0$ и $M_{\text{гл}} = 0$ - система сил приводится к равнодействующей, приложенной в центре приведения.
3. $R_{\text{гл}} = 0$ и $M_{\text{гл}} \neq 0$ - система сил приводится к паре сил, момент которой не зависит от центра приведения.
4. $R_{\text{гл}} \neq 0$ и $M_{\text{гл}} \neq 0$ - система сил приводится к равнодействующей, линия действия которой не проходит через центр приведения.

Определим расстояние d от центра приведения B до линии действия равнодействующей по формуле:

$$d = \frac{|M_{\text{гл}}|}{R_{\text{гл}}} = \frac{3,65}{4,31} = 0,85 \text{ м} .$$

Проиллюстрируем приведение системы сил к простейшему виду графически (рис. 3).



3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ

Составим расчетную схему (рис. 4), на которой покажем реакции опор. Реакция подвижного цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ направлена перпендикулярно поверхности, по которой перемещаются катки, а реакцию неподвижного цилиндрического шарнира разложим на две, перпендикулярные составляющие X_B и Y_B , параллельные осям $\vec{B}_X$ и $\vec{B}_Y$. Составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X_K &= 0; & F_1 \cdot \cos 45^\circ + F_3 + X_B &= 0; \\ \sum Y_K &= 0; & F_1 \cdot \cos 45^\circ - F_2 - Q + Y_B + R_A &= 0; \\ \sum M_B(F_K) &= 0; & -F_2 \cdot 3 - F_3 \cdot 3 + M + Q \cdot 1.5 + R_A \cdot 6 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

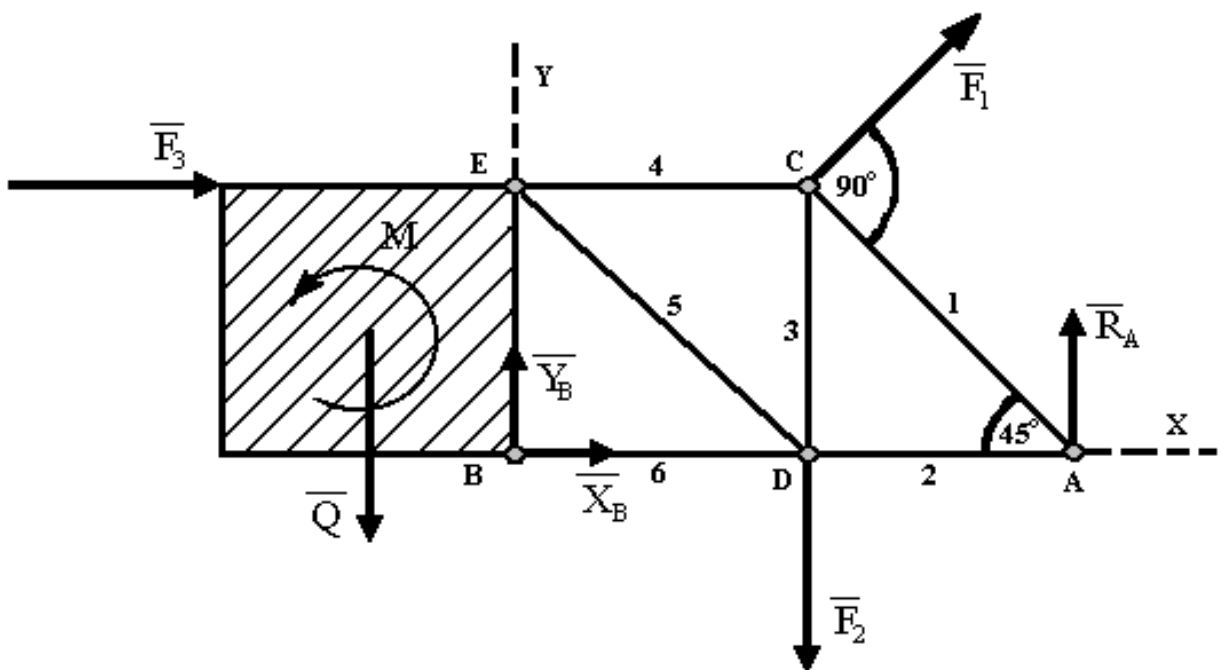


Рис. 4

Внимательный читатель, возможно, обратил внимание на то, что уравнения (3) с учетом уравнений (1) и (2) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{ГЛX} + X_B &= 0 ; \\ R_{ГЛ} + Y_B + R_{ГЛ} &= 0 ; \\ M_{ГЛ} + R_{ГЛ} \cdot 6 &= 0 . \end{aligned}$$

Этим можно пользоваться при определении опорных реакций. Но при этом уравнение моментов системы (3) надо составлять относительно центра приведения системы.

Решая уравнения (3), находим:

$$\begin{aligned} X_B &= -3,71 \text{ (кН)}; \\ Y_B &= 1,58 \text{ (кН)}; \\ R_A &= 0,61 \text{ (кН)}. \end{aligned}$$

Знак «минус» говорит о том, что действительное направление силы X_B противоположно показанному на расчетной схеме (рис. 4).

Таким образом, зная составляющие реакции шарнира В, можно определить ее величину:

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{(-3,71)^2 + 1,58^2} = 4,03 \text{ кН} .$$

Перед переходом к следующим пунктам работы рекомендуется убедиться в правильности произведенного расчета. Для этого следует произвести проверку, которая заключается в составлении уравнения моментов относительно произвольной точки фермы.

$$\begin{aligned} \sum M_A(\vec{F}_K) &= -F_1 \frac{3}{\cos 45^\circ} + F_2 \times 3 - F_3 \times 3 + Q \times 7,5 + M - Y_B \times 6 = \\ &= -1 \times 3 \times \sqrt{2} + 2 \times 3 - 3 \times 3 + 0,9 \times 7,5 + 10 - 1,58 \times 6 \approx 0 \end{aligned}$$

Так как сумма моментов равна нулю, расчет произведен верно.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМЫ МЕТОДОМ ВЫРЕЗАНИЯ УЗЛОВ

Данный метод заключается в последовательном вырезании узлов фермы и рассмотрении их равновесия.

Его можно реализовать аналитически и графически. Аналитический метод более точный. Напомним, что вырезать узлы фермы следует таким образом, чтобы число неизвестных усилий в стержнях вырезанного узла не превышало двух. Таким образом, первый вырезанный узел не должен содержать более двух стержней.

Усилия в отдельных стержнях загруженной фермы могут оказаться равными нулю. Такие стержни принято называть нулевыми. Напомним леммы, пользуясь которыми можно определить нулевые стержни плоской фермы, не производя ее расчета.

Лемма 1. Если в незагруженном узле плоской фермы сходятся два стержня, то усилия в этих стержнях равны нулю.

Лемма 2. Если в незагруженном узле плоской фермы сходятся три стержня, из которых два расположены на одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю. Усилия в первых двух стержнях равны между собой.

Лемма 3. Если в узле плоской фермы сходятся два стержня и к узлу приложена внешняя сила, линия действия которой совпадает с осью одного из стержней, то усилие в этом стержне равно по модулю приложенной силе, а усилие в другом стержне равно нулю.

Анализ данной фермы (рис. 4) показывает, что при ее расчете воспользоваться леммами не удастся. Поэтому нулевых стержней она, вероятно, не содержит.

Аналитический способ

Вырежем узел А, в котором сходятся два стержня. Изобразим расчетную схему, предполагая все стержни растянутыми, направим усилия в стержнях $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ от точки А внутрь стержней (рис. 5).

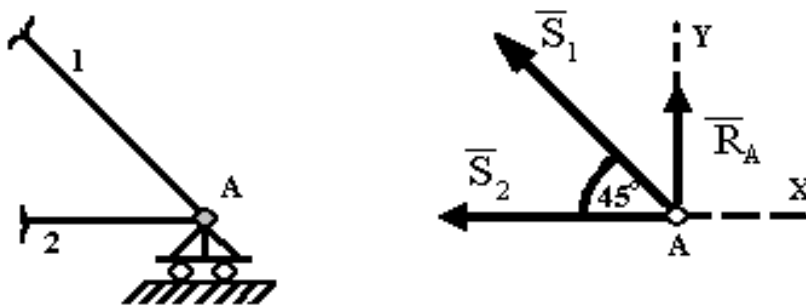


Рис. 5

Составим для узла уравнения равновесия:

$$\sum X_K = 0; -S_2 - S_1 \times \cos 45^\circ = 0 ;$$

$$\sum Y_K = 0; R_A + S_1 \times \cos 45^\circ = 0 ,$$

откуда

$$S_1 = -\frac{R_A}{\cos 45^\circ} = -\frac{0.61}{\cos 45^\circ} = -0.86 \text{ кН} ;$$

$$S_2 = -S_1 \times \cos 45^\circ = -\left(-\frac{R_A}{\cos 45^\circ}\right) \times \cos 45^\circ = R_A = 0.61 \text{ кН} .$$

Если усилие в стержне положительно, то стержень, как и предполагалось, растянут, если отрицательно - то сжат. Таким образом, стержень 1 сжат, стержень 2 растянут.

Следующий узел, который можно вырезать, узел С. В этом узле (рис. 6) сходятся три стержня (1, 3, 4), но усилие в стержне 1 уже определено. Изобразим расчетную схему.

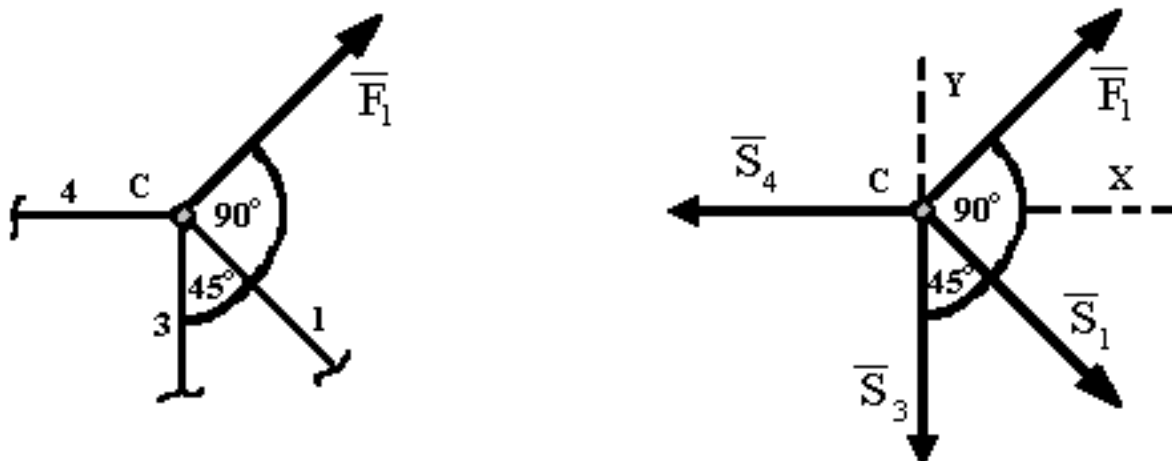


Рис. 6

$$\sum X_K = 0; F_1 \times \cos 45^\circ + S_1 \times \cos 45^\circ - S_4 = 0 ;$$

$$\sum Y_K = 0; F_1 \times \cos 45^\circ - S_1 \times \cos 45^\circ - S_3 = 0 ,$$

откуда

$$S_4 = F_1 \times \cos 45^\circ + S_1 \times \cos 45^\circ = (1 - 0.86) \times \cos 45^\circ ;$$

$$S_4 = 0.10 \text{ кН} ;$$

$$S_3 = F_1 \times \cos 45^\circ - S_1 \times \cos 45^\circ = [1 - (-0.86)] \times \cos 45^\circ ;$$

$$S_3 = 1.32 \text{ кН} .$$

Заметим, что знак усилия стержня 1, полученный при вырезании узла А, сохраняется.

Стержни 3 и 4 также растянуты.

И, наконец, узел D (рис. 7).

$$\sum X_K = 0; S_2 - S_6 - S_5 \times \cos 45^\circ = 0 ;$$

$$\sum Y_K = 0; S_3 - F_2 + S_5 \times \cos 45^\circ = 0 .$$

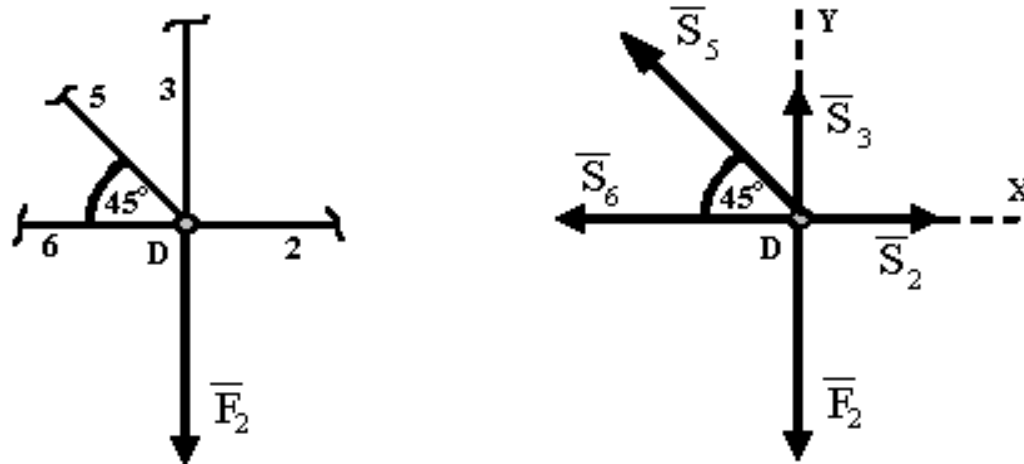


Рис. 7

Находим:

$$S_5 = \frac{F_2 - S_3}{\cos 45^\circ} = \frac{2 - 1.32}{\cos 45^\circ} = 0.96 \text{ кН} ;$$

$$\begin{aligned} S_6 &= S_2 - S_5 \times \cos 45^\circ = S_2 - \frac{F_2 - S_3}{\cos 45^\circ} \times \cos 45^\circ = \\ &= S_2 - F_2 + S_3 = 0.61 - 2 + 1.32 = -0.07 \text{ кН} . \end{aligned}$$

Стержень 5 растянут, стержень 6 сжат.

Анализируя произведенный расчет, можно отметить положительные и отрицательные свойства, присущие методу вырезания узлов.

В качестве положительного можно отметить простоту данного способа.

Отрицательным в этом способе является:

1. Строго определенный порядок вырезания узлов и, следовательно, определенная последовательность вычисления усилий в стержнях и вытекающая из этого зависимость усилия в рассчитываемом стержне от ранее рассчитанных. При этом ошибка, сделанная при расчете первого стержня, приводит к неправильному расчету всех последующих стержней. Кроме этого, возможно также накопление погрешности при округлении,
2. Невозможность рассчитать любой произвольно взятый стержень.

Графический способ

Все графические построения этого пункта задания выполняются в масштабе.

Выберем масштаб сил $K_F = 0,05 \text{ кН/мм}$. Обратим внимание, что в отличие от безразмерного масштаба длин, масштаб сил имеет размерность.

Порядок вырезания узлов при аналитическом и графическом методах одинаков. Вырежем узел А (рис. 8).

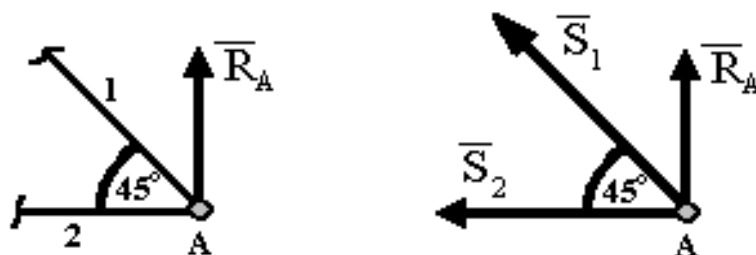


Рис. 8

Направления $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ на расчетной схеме покажем, предполагая, что стержни 1 и 2 растянуты.

Построим для узла А замкнутый силовой многоугольник. Для этого изобразим в масштабе известную реакцию $\vec{R}_A$, соответствующую отрезку ab .

$$ab = \frac{R_A}{K_F} = \frac{0.61}{0.05} = 12.2 \text{ мм}.$$

Затем из конца отрезка (точка **b**) проведем прямую, параллельную $\vec{S}_2$, а из начала (точка **a**) - прямую, параллельную $\vec{S}_1$. Точка пересечения этих прямых (точка **c**) будет являться концом $\vec{S}_2$ и началом $\vec{S}_1$ (рис. 9).

Отрезок bc будет соответствовать силе $\vec{S}_2$, ca - силе $\vec{S}_1$. Измерив эти отрезки и умножив их на масштаб, получим величины сил.

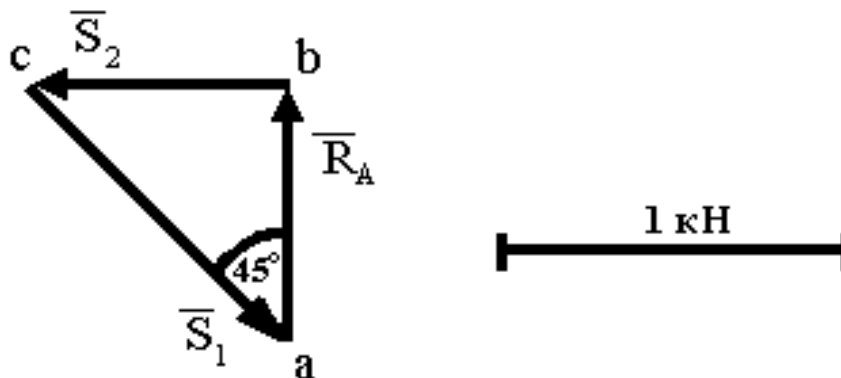


Рис. 9

$$S_1 = k_F(ac) = 0.05 \cdot 18 \quad S_1 = 0.9 \text{ кН}$$

$$S_2 = k_F(bc) = 0.05 \cdot 12 \quad S_2 = 0.6 \text{ кН}$$

Поскольку направления сил S_2 на расчетной схеме (см. рис. 8) и на силовом треугольнике (см. рис. 9) совпадают - стержень 2 растянут. А у силы S_1 эти направления противоположны, следовательно, стержень 1 - сжат.

Окончательно

$$S_1 = -0.9 \text{ (кН)} ;$$

$$S_2 = 0.6 \text{ (кН)} .$$

Вырежем узел С. Сделаем расчетную схему (рис. 10), на которой усилие стержня 1 покажем с учетом его истинного направления, а стержни 3 и 4 будем считать растянутыми.

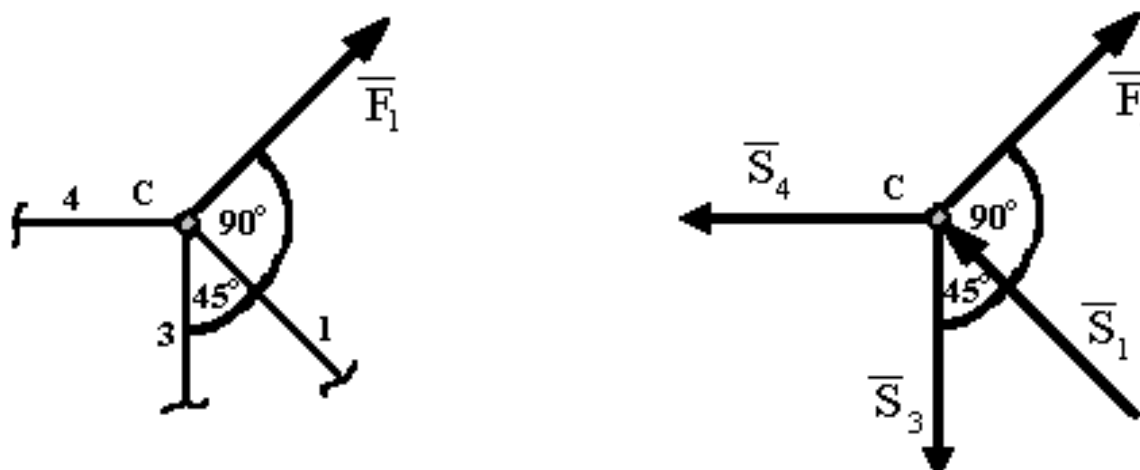


Рис. 10

При построении силового многоугольника проведем в масштабе силу $\vec{F}_1$, на ее конце - силу $\vec{S}_1$. Затем из конца силы $\vec{S}_1$, проведем прямую, параллельную $\vec{S}_1$, а из начала - $\vec{F}_1$ параллельную $\vec{S}_3$. Точка пересечения этих прямых будет началом силы $\vec{S}_4$ и концом $\vec{S}_3$ (рис. 11).

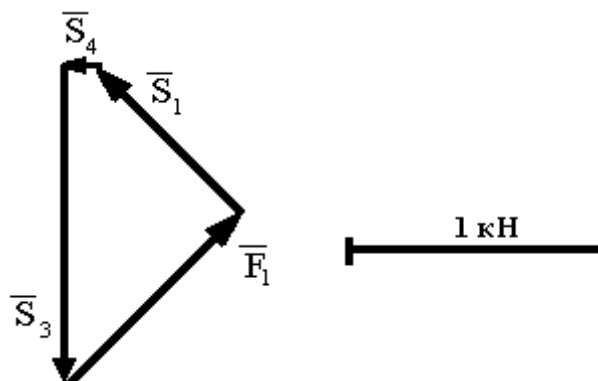


Рис. 11

Измерив отрезки, соответствующие силам $\vec{S}_3$ и $\vec{S}_4$ с учетом масштаба, получим:

$$S_3 = 1.33 \text{ кН};$$

$$S_4 = 0.08 \text{ кН}.$$

Стержни 3 и 4 растянуты.

Вырежем узел D. Сделаем расчетную схему (рис. 12). Стержни 2 и 3 по расчету получились растянутыми, стержни 5 и 6 предполагаем растянутыми. Потому усилия в стержнях 2, 3, 5 и 6 направляем от узла внутрь соответствующих стержней.

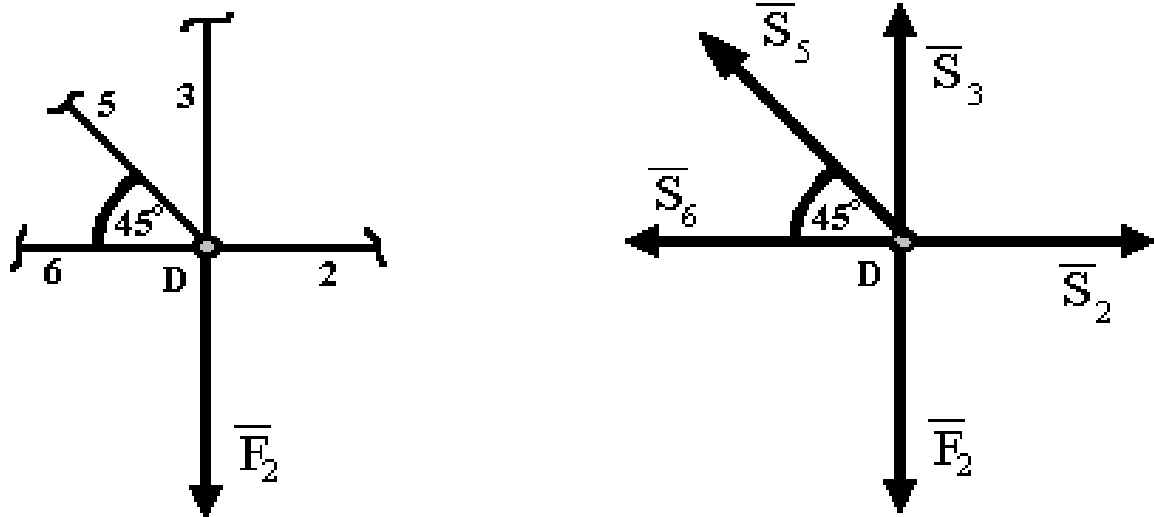


Рис. 12

Построение силового многоугольника ведем следующим образом: к силе $\vec{F}_2$ прибавляем $\vec{S}_2$, а к ней $\vec{S}_3$, из конца которой проводим направление силы $\vec{S}_5$, а из начала $\vec{F}_2$ - направляем $\vec{S}_6$ (рис. 13 а).

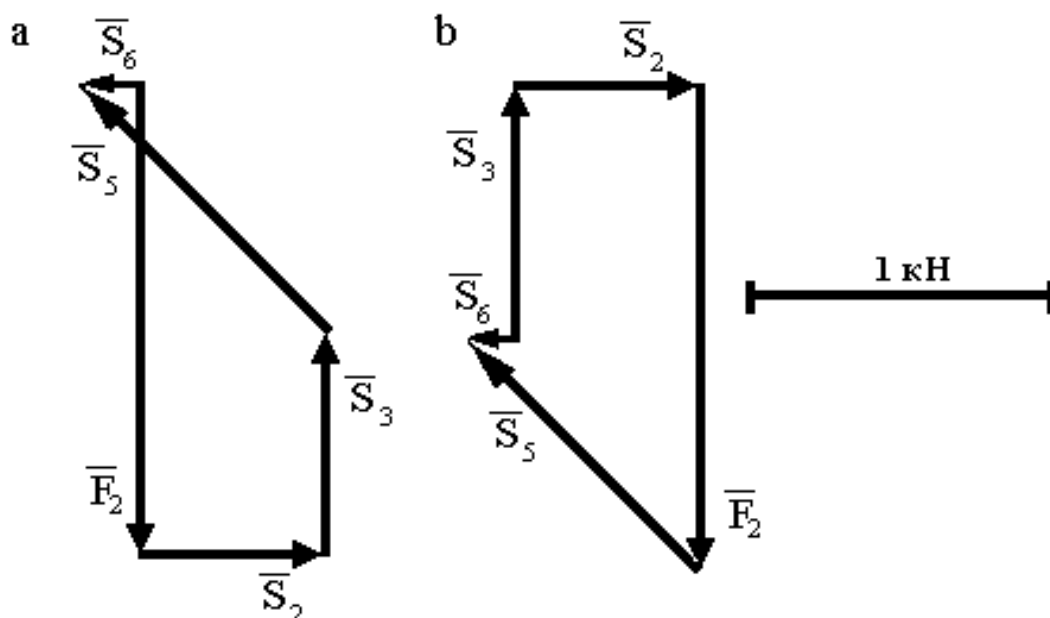


Рис. 13

Измерив отрезки, соответствующие силам $\vec{S}_5$ и $\vec{S}_6$, получаем:

$$S_5 = 0,075 \text{ кН};$$

$$S_6 = 0,95 \text{ кН}.$$

Стержень 6 сжат, стержень 5 растянут.

На рис. 13 б покажем, что получится при перемене порядка сложения векторов: к силе $\vec{S}_3$ прибавим $\vec{S}_2$, а затем $\vec{F}_2$. Из начала $\vec{S}_3$ проведем направление силы $\vec{S}_6$, а из конца $\vec{F}_2$ - направление $\vec{S}_5$. Очевидно, что при изменении внешнего вида силового многоугольника результат не изменится.

5. РАСЧЕТ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМЫ СПОСОБОМ СКВОЗНЫХ СЕЧЕНИЙ (СПОСОБ РИТТЕРА)

По этому способу ферма рассекается на две части и рассматривается равновесие одной из частей. При этом к рассматриваемой части фермы, кроме действующих на нее активных сил и реакций связей, прикладываются усилия в рассеченных стержнях. Все они предполагаются растянутыми. При этом число рассеченных стержней, усилия в которых неизвестны, не должно превышать трех.

Как правило составляются уравнения моментов относительно точек Риттера - точек пересечения линий действия усилий в рассеченных стержнях.

Сделаем сечение I-I, как показано на рис. 14, которое рассекает стержни 4, 5, 6, и рассмотрим равновесие правой части.

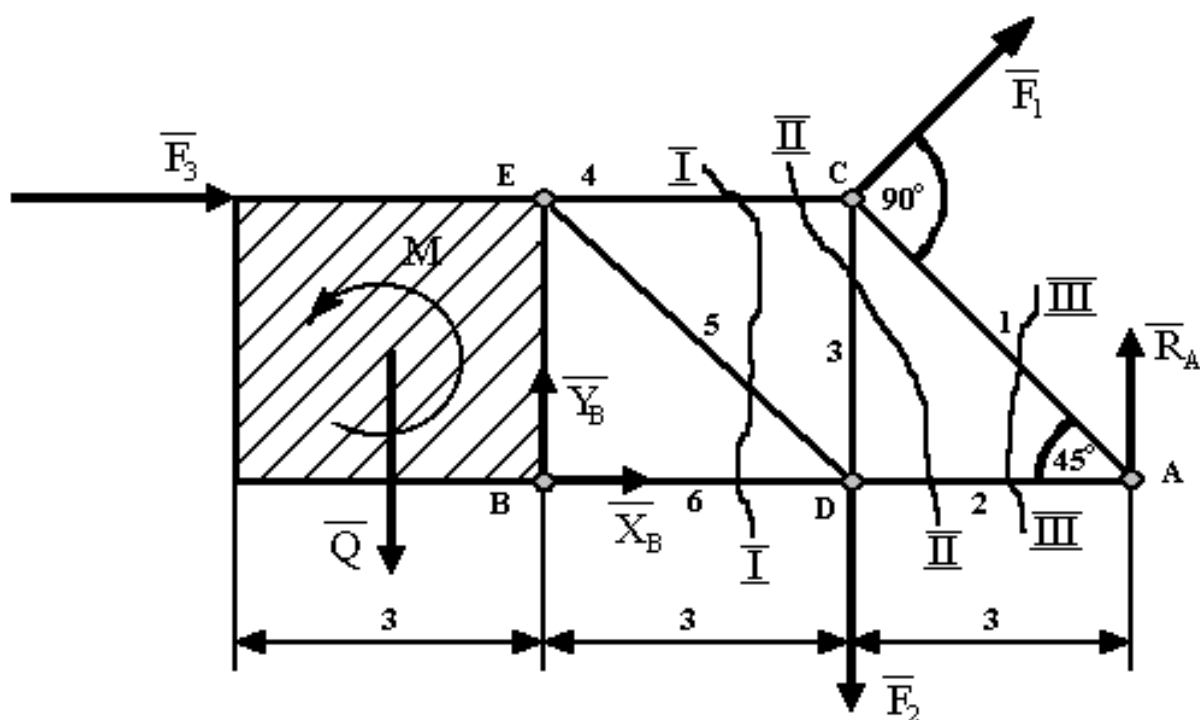


Рис. 14

Точками Риттера для этого сечения являются узлы фермы D и E. Составим относительно этих точек уравнения моментов:

$$\sum M_D(\vec{F}_K) = 0; R_A \times 3 + S_4 \times 3 - F_1 \times 3 \times \cos 45^\circ = 0 ;$$

$$\sum M_E(\vec{F}_K) = 0; R_A \times 6 - F_2 \times 3 - S_6 \times 3 + F_1 \times 3 \times \cos 45^\circ = 0.$$

Составим расчетную схему (рис. 15).

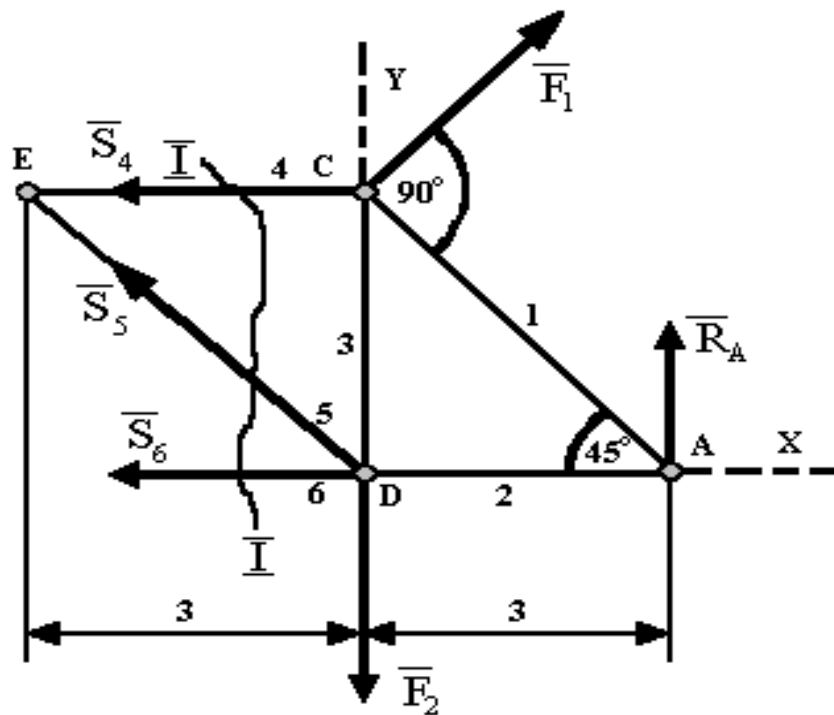


Рис. 15

Находим:

$$S_4 = -R_A + F_1 \cos 45^\circ = -0.61 + 1 \cdot \cos 45^\circ ;$$

$$S_4 = 0.10 \text{ кН};$$

$$S_6 = 2R_A - F_2 + F_1 \cos 45^\circ = 2 \cdot 0.61 - 2 + 1 \cdot \cos 45^\circ ;$$

$$S_6 = -0.07 \text{ кН} .$$

Для данного сечения существуют только две точки Риттера. Для определения $\vec{S}_5$ составим уравнение проекций сил на ось Dy, так как на нее не проектируются силы $\vec{S}_4$ и $\vec{S}_6$.

$$\sum Y_K = 0; F \times_1 \cos 45^\circ + S_5 \times \cos 45^\circ + R_A - F_2 = 0 ;$$

$$S_5 = -F_1 + \frac{F_2 - R_A}{\cos 45^\circ} = -1 + \frac{2 - 0.61}{\cos 45^\circ} ;$$

$$S_5 = 0.96 \text{ кН} .$$

Рассечем ферму сечением II-II (см. рис. 14) и рассмотрим равновесие правой части, для которой составим расчетную схему (рис. 16).

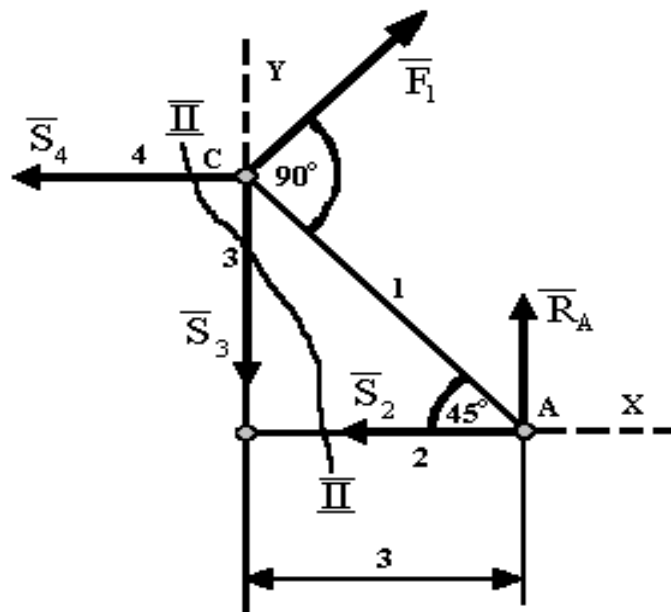


Рис. 16

Для определения $\vec{S}_2$ и $\vec{S}_3$ ($\vec{S}_4$ уже известно) составим уравнения равновесия:

$$\sum M_C (\vec{F}_K) = 0; R_A \times 3 - S_2 \times 3 = 0 ;$$

$$S_2 = R_A = 0.61 \text{ кН} ;$$

$$\sum Y_K = 0; F_1 \times \cos 45^\circ - S_3 + R_A = 0 ;$$

$$S_3 = R_A + F_1 \times \cos 45^\circ = 0.61 + 1 \times \cos 45^\circ = 0.61 + 1 \times \cos 45^\circ ;$$

$$S_3 = 1.32 \text{ кН} .$$

Для определения усилия в стержне 1 вделаем сечение III-III (см. рис. 14), для которого изобразим расчетную схему (рис. 17) и составим уравнение проекций сил на ось Ay.

$$\sum Y_K = 0; R_A + S_1 \times \cos 45^\circ = 0 ;$$

$$S_1 = - \frac{R_A}{\cos 45^\circ} = - \frac{0.61}{\cos 45^\circ} ;$$

$$S_1 = -0.86 \text{ кН} .$$

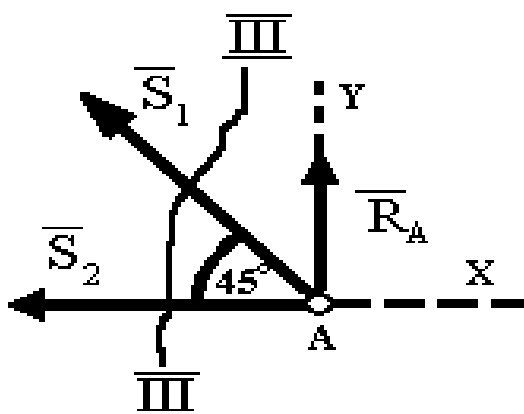


Рис. 17

Отметим, что расчет для сечения III-III полностью повторяет расчет для узла A по способу вырезания узлов.

При выполнении расчета фермы по способу сквозных сечений усилие в каждом стержне определяется только в зависимости от активных сил и реакций связей и совершенно не зависит от усилий в других стержнях. Этим данный способ выгодно отличается от способа вырезания узлов. Кроме того, по способу Риттера можно определить усилие в любом произвольно взятом стержне.

Полученные результаты сведем в таблицу.

Таблица

Способ вычисления	Усилия в стержнях (кН)					
Вырезание узлов (аналитический)						
Вырезание узлов (графический)						
Вырезание сквозных сечений						

6. ПРОВЕРКА РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИНЫ

Для проверки правильности произведенного расчета проверим равновесие пластины. Изобразим на расчетной схеме (рис. 18) пластину с приложенными к ней силами.

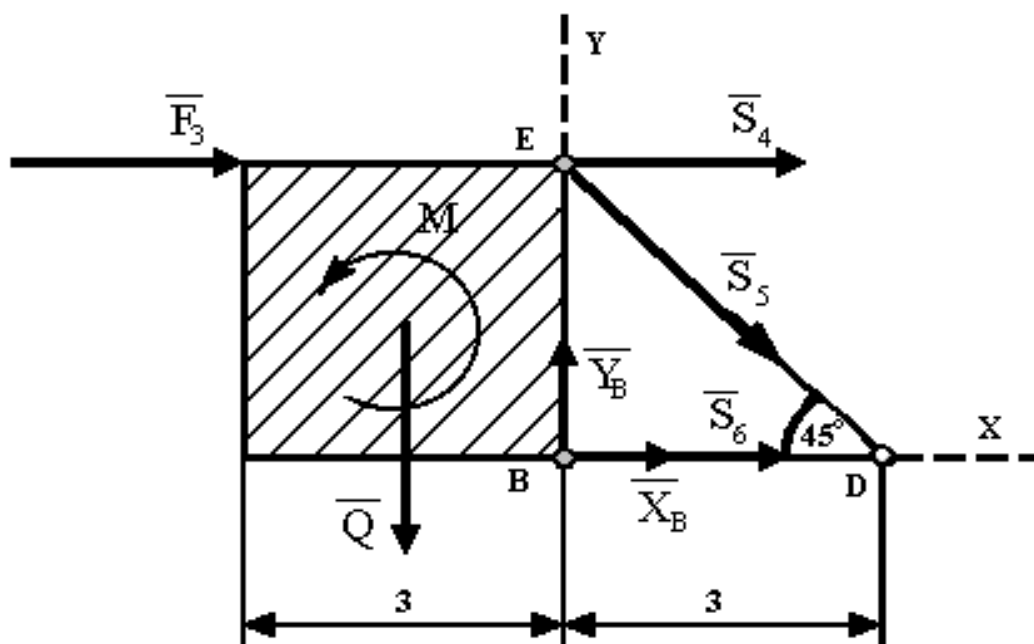


Рис.18

Составим уравнение проекций всех сил на оси координат и уравнение моментов относительно произвольного центра:

$$\begin{aligned} \sum X_K &= S_4 + S_5 \times \cos 45^\circ + S_6 + F_3 + X_B = \\ &= 0.10 + 0.96 \times \cos 45^\circ + (-0.07) + F_3 + (-3.71) = -0.001 \approx 0 ; \\ \sum Y_K &= Y_B - S_5 \times \cos 45^\circ - Q = 1.58 - 0.96 \times \cos 45^\circ - 0.9 = 0.001 \approx 0 ; \\ \sum M_E(F_K) &= +X_B \times 3 + S_6 \times 3 + Q \times 1.5 + M = (-3.71) \times 3 + (-0.07) \times 3 + \\ &+ 0.9 \times 1.5 + 10 = 0.01 \approx 0 . \end{aligned}$$

Уравнения проекций и моментов с достаточно большой точностью равняются нулю, т. е. являются уравнениями равновесия. Следовательно, пластина находится в равновесии, а определение усилий в стержнях произведено правильно.

7. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

Заменяем пару сил с моментом M , приложенную к пластинке, двумя вертикальными силами $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$. Силу $\vec{F}'$ приложим к центру пластины, а $\vec{F}''$ - к шарниру D. При этом плечо пары h будет равно 4.5 м. Определим величины сил:

$$F' = F'' = \frac{M}{h} = \frac{10}{4.5} = 2.2 \text{ кН}.$$

Изобразим в масштабе ферму, к которой приложим все действующие на нее силы (рис. 19). Построим в масштабе многоугольник сил, действующих на ферму (рис. 20) и определим равнодействующую R^* в соответствии с уравнением:

$$\vec{Q} + \vec{F}' + \vec{F}'' + \vec{F}_3 + \vec{F}_2 + \vec{F}_1 = R^*.$$

Для упрощения дальнейших графических построений силы, действующие по одной прямой, следует писать в этом уравнении рядом. Это уменьшит число сторон в силовом многоугольнике, некоторые из которых будут представлять сумму (например $\vec{Q} + \vec{F}'$) или разность ($\vec{F}'' - \vec{F}_2$) сил.

Для определения линии действия равнодействующей R^* построим веревочный многоугольник. Для этого на рис. 20 сделаем следующие построения:

1. Выберем произвольно расположенный полюс O;
2. Соединим полюс O с вершинами многоугольника лучами O, Ob, Oc, Oe, Of.

Теперь приступим к построению веревочного многоугольника.

Для этого на рис. 19 выбираем произвольную точку на линии действия сил $\vec{Q}$ и $\vec{F}'$ (точка 1). Из этой точки проводим линию 1-2, параллельную лучу Ob (см. рис. 20), до пересечения с линией действия силы $\vec{F}_3$ (точка 2). Из точки 2 проводим прямую 2-3, параллельную лучу Oc, до пересечений с линией действия сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}''$. Затем из точки 3 проводим линию 3-4, параллельную Oe, до пересечения с линией действия силы $\vec{F}_1$. Далее из точки 1 проводим 1-5, параллельную Oa, а из точки 4 - линию 4-5, параллельную лучу Of. В результате пересечения этих лучей получим точку 5, через которую и проходит линия действия равнодействующей $\vec{R}^*$.

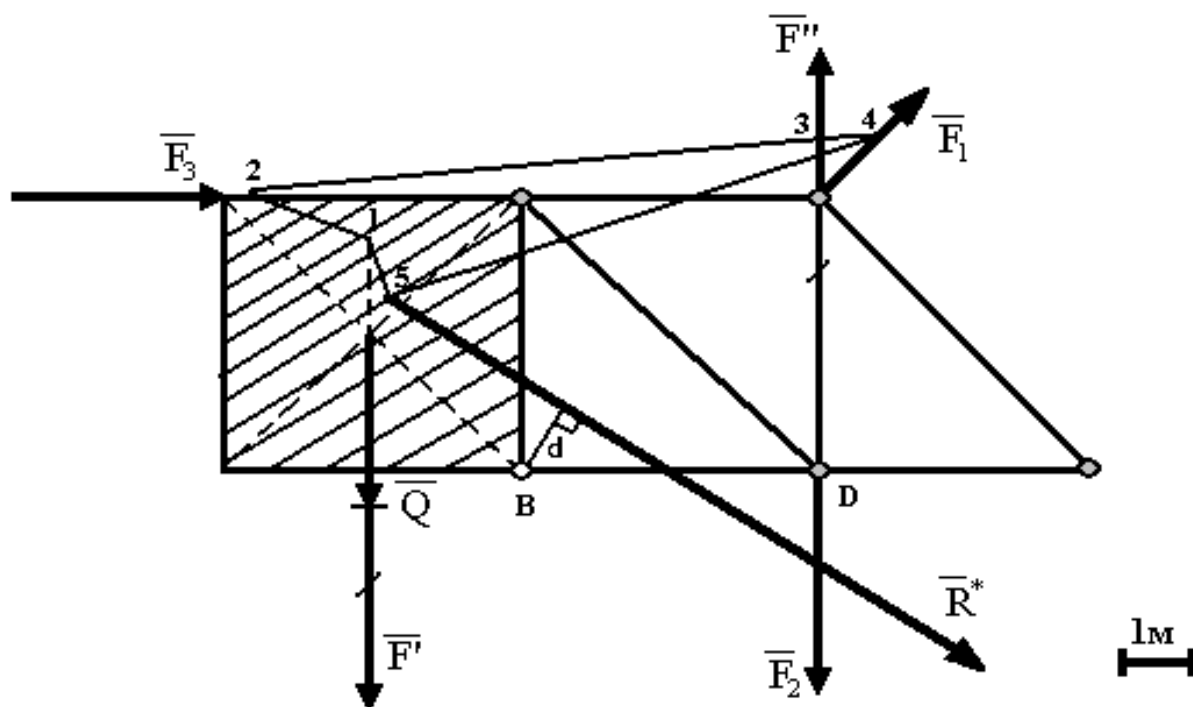


Рис. 19

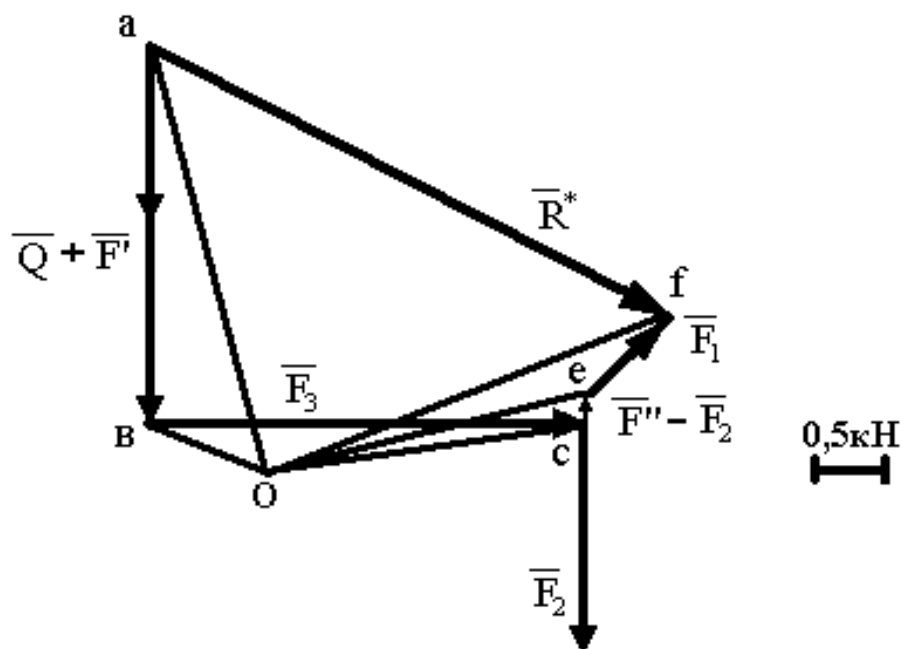


Рис. 20

Измерив, с учетом масштабов, расстояния от линии действия $\vec{R}^*$ до точки В и длину $\vec{R}^*$ на силовом многоугольнике, убедимся, что цифры с достаточной степенью точности совпадают с результатами, полученными аналитически.

$$R^* = 4,33 \text{ кН};$$

$$d = 0,88 \text{ м.}$$

8. ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР

Изобразим ферму и покажем все силы, действующие на нее (рис. 21). При этом пару сил с моментом M заменим силами $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, как это было сделано при графическом приведении системы сил к простейшему виду.

В соответствии с уравнением

$$\vec{Q} + \vec{F}' + \vec{F}'' + \vec{F}_3 + \vec{F}_2 + \vec{F}_1 + \vec{R}_A + \vec{R}_B = 0$$

построим силовой многоугольник. Поскольку силы R_A и R_B неизвестны, можно построить только его часть $abcef$ (рис. 22).

Выберем произвольно расположенный полюс O и проведем лучи Oa, Ob, Oc, Oe, Of .

Построение веревочного многоугольника начинаем с точки B - неподвижного цилиндрического шарнира.

Проводим линию $B-I$, параллельную лучу Oa , до пересечения с линией действия сил $\vec{Q}$ и $\vec{F}'$, затем $1-2$, параллельную Ob , до пересечения с линией действия силы $\vec{F}_3$ проводим линию $2-3$, параллельную Oc , до пересечения с линией действия $\vec{F}_2$ и $\vec{F}''$, далее $3-4$, параллельную лучу Oe , и, наконец, линию $4-5$, параллельную лучу Of , до пересечения с линией действия $\vec{R}_A$. Поскольку опора A - подвижный цилиндрический шарнир, линия действия его известна. Это прямая, перпендикулярная опорной поверхности шарнира, то есть в данном случае вертикальная прямая.

Замыкаем веревочный многоугольник линией $5-B$. После чего на силовом многоугольнике проводим луч $0-g$, параллельный линии $5-B$ до пересечения с вертикальной прямой $f-q$ (линией действия силы $\vec{R}_A$). Таким образом, мы получили вектор силы $\vec{R}_A$, и теперь можно замкнуть силовой многоугольник силой $\vec{R}_B$.

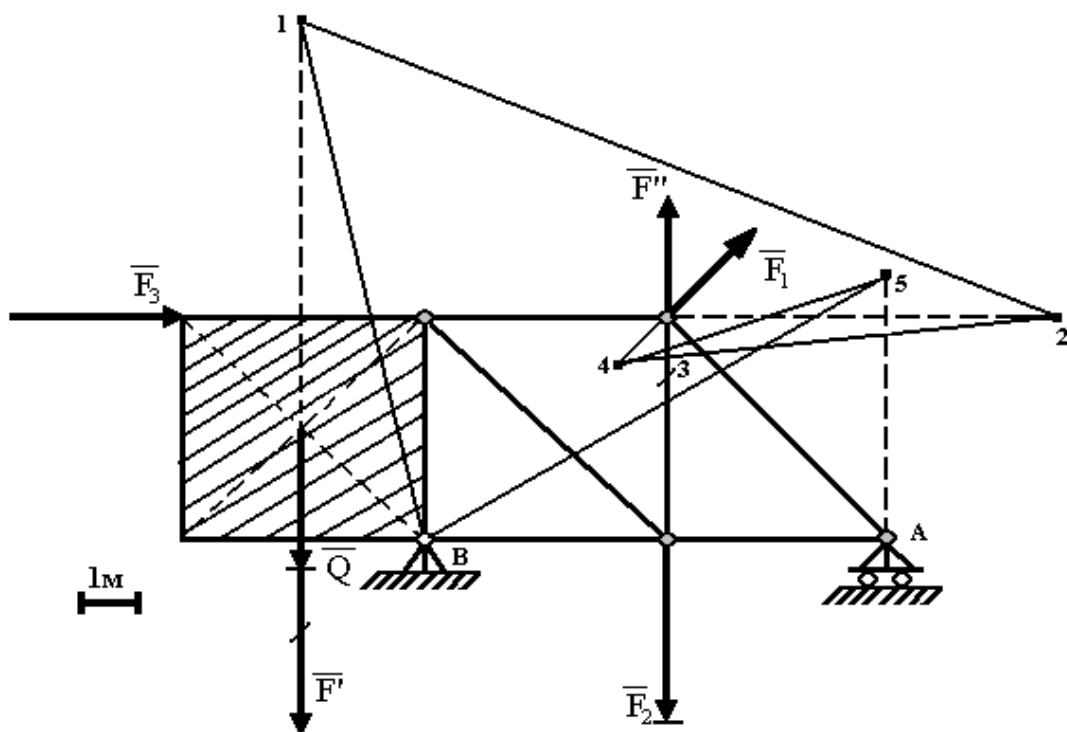


Рис. 21

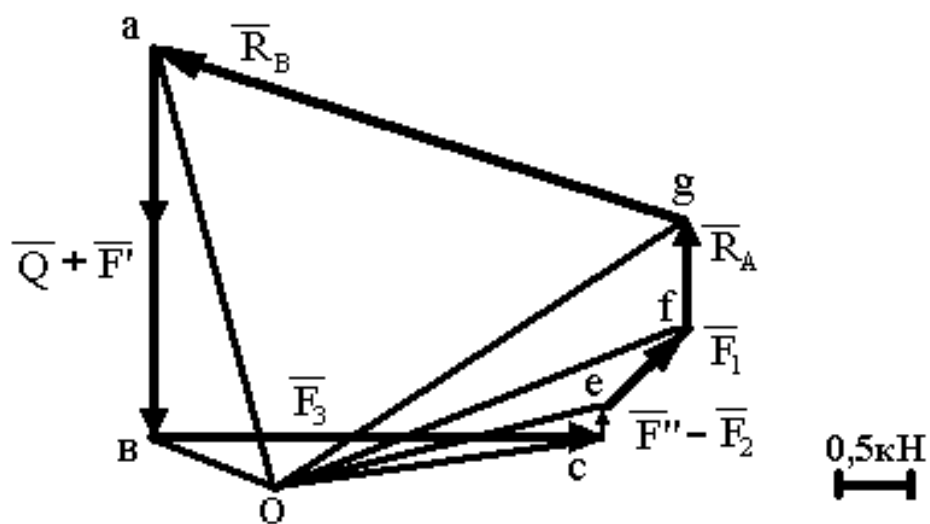


Рис. 22

Измеряем длину сил $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ и с учетом масштаба получаем

$$R_A = 0,61 \text{ кН};$$

$$R_B = 4,03 \text{ кН},$$

что весьма близко к результатам, полученным аналитическим способом.

9. ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИНЫ

Изобразим отдельно пластину со всеми силами, приложенными к ней (рис. 23), с учетом их истинного направления. Если реакции опор и усилия в стержнях проведены правильно, то силовой и веревочный многоугольники должны быть замкнутыми. Предварительно пару сил с моментом M заменим силами $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, а в качестве плеча выберем сторону пластинки BE . Определим величину сил

$$\vec{F}' = \vec{F}'' = \frac{M}{BE} = \frac{10}{3} = 3.33 \text{ кН}.$$

Перед построением силового многоугольника силы, направленные по одной прямой ($\vec{F}_3$, $\vec{F}''$ и $\vec{S}_4$, а также $\vec{X}_B$, $\vec{F}'$ и $\vec{S}_6$), сложим для сокращения графических построений. Построим силовой многоугольник (рис. 24), складывая силы, приложенные к пластине в таком порядке: $\vec{F}_3$, $\vec{F}''$, $\vec{S}_4$, $\vec{Q}$, $\vec{X}_B$, $\vec{F}'$, $\vec{S}_6$, $\vec{S}_5$ и $\vec{Y}_B$. Как видно из рис. 24, силовой многоугольник замкнут

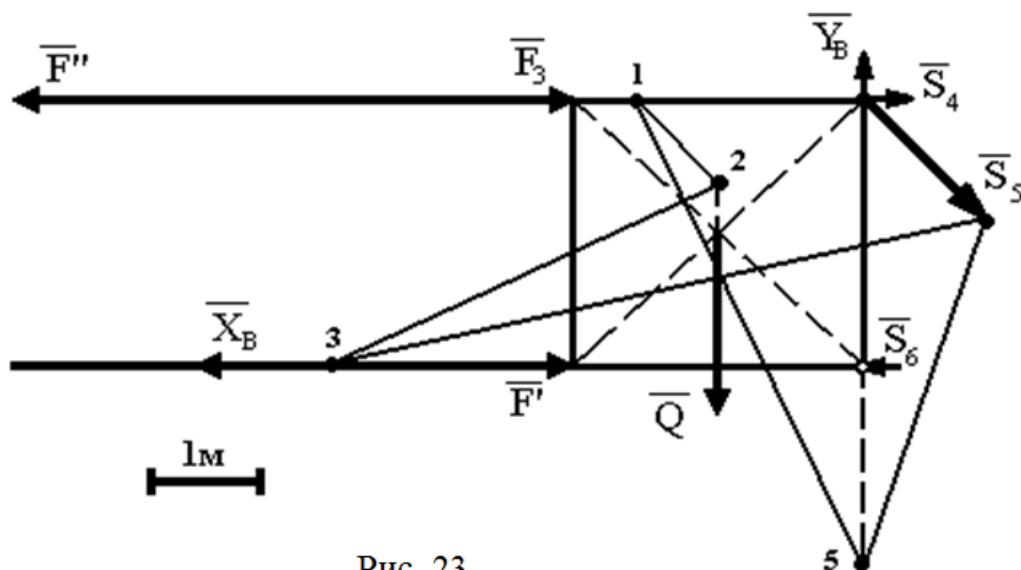


Рис. 23

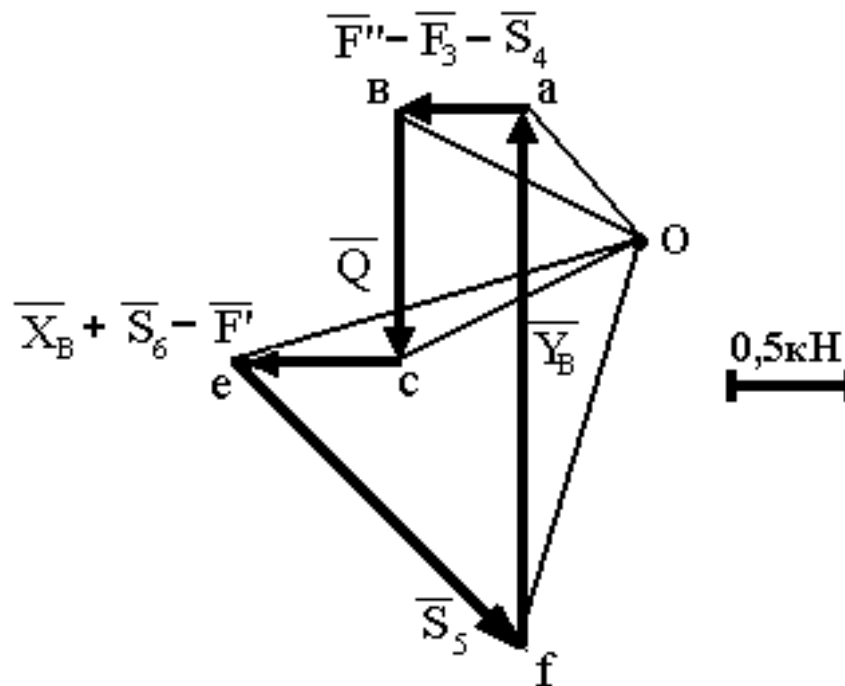


Рис. 24

Построение веревочного многоугольника начинаем с точки 1, произвольно расположенной на линии действия сил $\vec{F}_3$, $\vec{F}''$ и $\vec{S}_4$ (см. рис. 23). Проводим линию 1-2, параллельную лучу Ob, до пересечения с линией действия силы $\vec{Q}$. Далее - 2-3, параллельную лучу Oc, до пересечения с линией действия сил $\vec{X}_B$, $\vec{F}'$ и $\vec{S}_6$. Затем проводим линию 3-4, параллельную лучу Oe, до пересечения с линией действия силы $\vec{S}_5$. Далее - линию 4-5, параллельную лучу Of, до пересечения с линией действия силы $\vec{Y}_B$ и, наконец, из точки 5 проводим линию, параллельную лучу Oa. Если этот луч проходит через точку 1, то веревочный многоугольник замкнут и графически доказано, что пластина находится в равновесии.

10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ И РЕАКЦИИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ШАРНИРА СОСТАВНОЙ ФЕРМЫ

Составной фермой называется изменяемая конструкция, состоящая из П ферм, соединенных П-1 промежуточным шарниром.

Произведем определение опорных реакций А и В и реакции промежуточного шарнира С для составной фермы, изображенной на рис. 25.

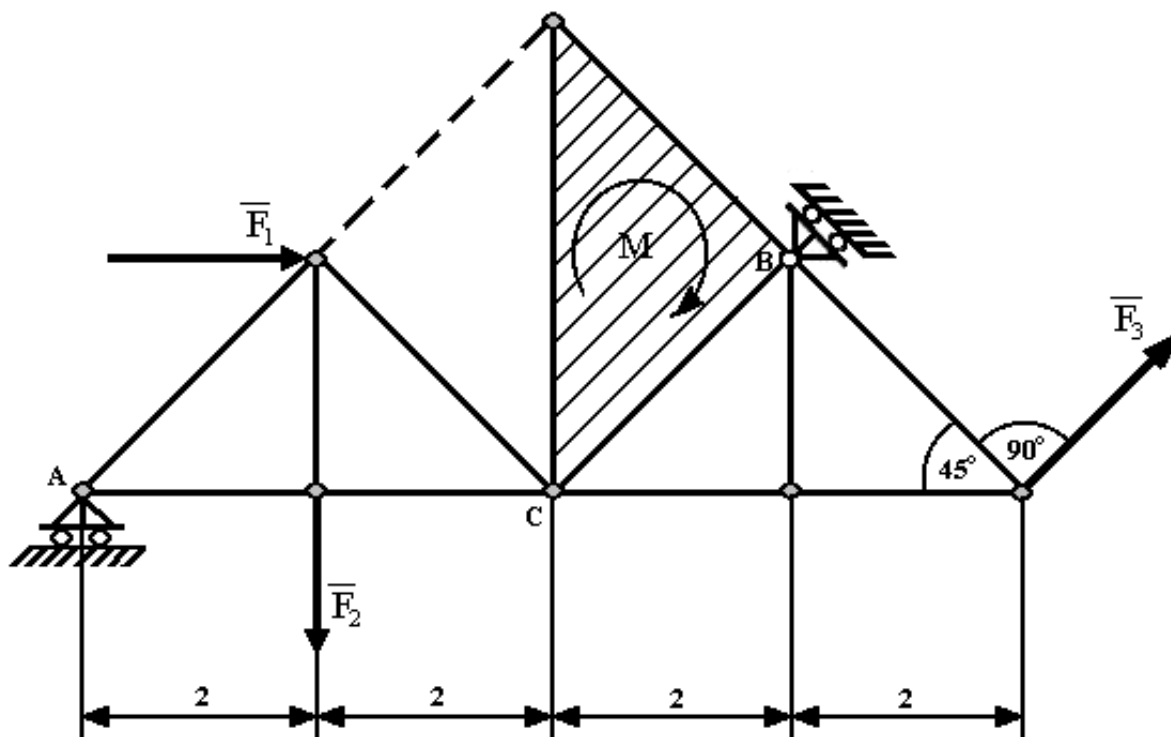


Рис. 25

Величины внешних сил:

$F_1=1$ кН, $F_2= 2$ кН. $F_3= 3$ кН, $M= 10$ кНм.

Вес единицы площади однородной пластины $q= 0, 1$ кН/м².

Определим вес пластины, приложенной в ее геометрическом центре (точке пересечения медиан):

$$Q= q \times S,$$

где S - площадь пластины.

$$S = \left(2 \times \sqrt{2}^2 \right) = 8 \text{ м}^2.$$

Тогда вес пластины:

$$Q = 0.1 \times 8 = 0.8 \text{ кН.}$$

При составлении уравнений равновесия для всей конструкции следует учесть, что реакции неподвижных цилиндрических шарниров А и В раскладываются на две составляющие каждая. Таким образом, будет получена система из трех уравнений с четырьмя неизвестными. Поэтому при определении опорных реакций можно рассмотреть равновесие всей фермы и затем одной из ее частей, а можно рассмотреть и равновесие каждой из частей в отдельности.

Рассмотрим равновесие правой и левой частей фермы. Изобразим расчетную схему для левой части (рис. 26) и составим уравнения равновесия.

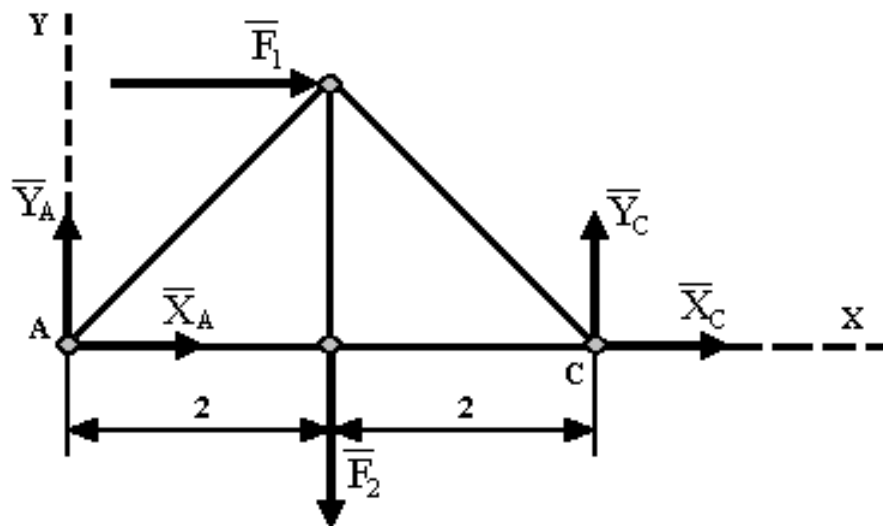


Рис. 26

$$\begin{aligned} \sum X_K &= 0; X_A + X_C + F_1 = 0 \\ \sum Y_K &= 0; Y_A + Y_C - F_2 = 0 \\ \sum M_A(\vec{F}_K) &= 0; -F_1 \times 2 - F_2 \times 2 + Y_C \times 4 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Составим уравнения равновесия для правой части фермы. При составлении расчетной схемы (рис. 27) необходимо учесть, что действия правой части на левую и левой части на правую равны, но противоположно направлены:

$$\vec{X}_C = -\vec{X}'_C \text{ и } \vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C;$$

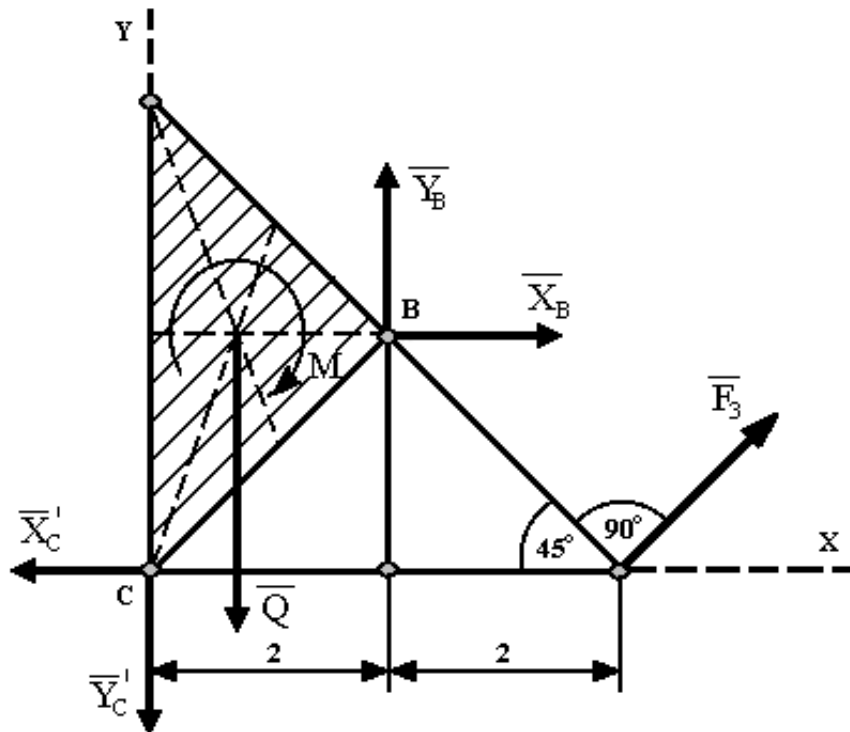


Рис. 27

$$\begin{aligned}
 \sum X_K = 0; X_B - X'_C + F_3 \times \cos 45^\circ &= 0 ; \\
 \sum Y_K = 0; Y_B - Y'_C + F_3 \times \cos 45^\circ - Q &= 0 ; \\
 \sum M_C(\vec{F}_K) = 0; Y_B \times 2 - X_B \times 2 + F_3 \times 4 \times \cos 45^\circ - M - Q \times \frac{1}{3} \times 2 &= 0 .
 \end{aligned} \tag{5}$$

Подставим в уравнения 4 и 5 известные величины и получим систему из шести уравнений с шестью неизвестными:

$$X_A + X_C + 1 = 0 ;$$

$$Y_A + Y_C - 2 = 0 ;$$

$$-1 \times 2 - 2 \times 2 + Y_C \times 4 = 0 ;$$

$$X_B - X'_C + 3 \times \cos 45^\circ = 0 ;$$

$$Y_B - Y'_C + 3 \times \cos 45^\circ - 0.8 = 0 ;$$

$$Y_B \times 2 - X_B \times 2 + 3 \times 4 \times \cos 45^\circ - 10 - 0.8 \times \frac{2}{3} = 0 .$$

Решая эту систему, получим:

$$X_A = -2.27 \text{ кН};$$

$$Y_A = 0.5 \text{ кН};$$

$$X_B = -0.85 \text{ кН};$$

$$Y_B = 0.18 \text{ кН};$$

$$X_C = 1.27 \text{ кН};$$

$$Y_C = 1.5 \text{ кН}.$$

После определения неизвестных целесообразно провести проверку, чтобы убедиться в правильности полученных результатов.

11. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТЫ

Работа оформляется в соответствии с нормами ЕСКД на листе чертежной бумаги формата А1. Все расчеты выполняются в системе СИ и приводятся в расчетно-пояснительной записке. В штампе и на обложке необходимо указать тему работы, шифр задания, номер группы, фамилию студента, выполнившего работу, и преподавателя, ее принявшего. Допускается выполнение расчетно-графической работы на диаграммной ("миллиметровой") бумаге вместо чертежной. Работу также можно выполнять на листах бумаги формата А4. В этом случае графическая часть работы и расчетно-пояснительная записка сшиваются вместе. Все графические построения следует выполнять карандашом с помощью чертежных инструментов.

12. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называют связью? В чем заключается сущность принципа освобождаемости от связей?
2. Перечислите основные типы опор, для которых линии действия реакций известны.
3. Как определяется направление равнодействующей системы сходящихся сил при построении силового многоугольника?
4. Каковы условия и уравнения равновесия системы сходящихся сил, расположенных в плоскости?
5. При каком условии три непараллельные силы, приложенные к твердому телу, уравниваются?
6. В чем заключается сущность способа вырезания узлов?
7. Как формулируются леммы о нулевых стержнях?
8. На основании каких соображений можно без вычислений определить усилия в стержнях плоской фермы?
9. В каком порядке вырезаются узлы при расчете фермы по способу вырезания узлов?
10. Можно ли при расчете фермы по способу вырезания узлов определить усилие только в одном произвольно взятом стержне?
11. Зависят ли главный вектор и главный момент заданной системы сил от выбора центра приведения?
12. Каковы возможные случаи приведения сил, расположенных произвольно на плоскости?
13. К какому простейшему виду можно привести систему сил, если известно, что главный момент этих сил относительно разных точек на плоскости:
 - а) имеет различную величину;
 - б) имеет постоянное значение, не равное нулю;
 - в) равен нулю.
14. Как определяется модуль и направление главного вектора системы параллельных сил на плоскости?
15. При каком условии сила, равная главному вектору плоской системы сил, является равнодействующей этой системы?
16. Каковы условия и уравнения равновесия плоской системы параллельных сил на плоскости?
17. В чем заключается сущность способа сквозных сечений (способ Риттера)?
18. Как определять положение точек Риттера?
19. Можно ли при расчете фермы по способу сквозных сечений определить усилие только в одном произвольно взятом стержне?
20. В чем заключаются преимущества и недостатки определения

усилий в стержнях фермы по способу вырезания узлов?

21. В чем заключаются преимущества и недостатки способа Риттера?

22. Как определяется внутреннее усилие стержня (растяжение или сжатие) при аналитических способах расчета фермы?

23. Как определяется внутреннее усилие стержня (растяжение или сжатие) при графическом методе расчета?

24. Каковы аналитические и графические условия равновесия сходящейся системы сил?

25. Чем отличаются друг от друга замкнутый и незамкнутый силовой многоугольник?

26. Каковы аналитические и графические условия равновесия плоской произвольной системы сил?

27. Как графически определяется равнодействующая плоской системы сходящихся сил?

28. Как графически определяется равнодействующая произвольной системы сил, расположенной на плоскости?

29. В каком случае веревочный многоугольник является замкнутым?

Библиографический список

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. -СПб.: Политехника, 2009.Ч.1,Ч.2.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. - СПб.:Лань, 2009.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. – М: ЧеРо, 1999.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 2011.
5. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 2010.Ч.1,Ч.2.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. - СПб.: Лань, 1998.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. А.А. Яблонского.- СПб.: Лань, 2001.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ К РАБОТЕ.....	3
2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ.....	5
3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ.....	7
4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМЫ МЕТОДОМ ВЫРЕЗАНИЯ УЗЛОВ.....	9
5. РАСЧЕТ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМЫ СПОСОБОМ СКВОЗНЫХ СЕЧЕНИЙ (СПОСОБ РИТТЕРА).....	17
6. ПРОВЕРКА РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИНЫ.....	21
7. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ.....	22
8. ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР.....	24
9. ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИНЫ.....	26
10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ И РЕАКЦИИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ШАРНИРА СОСТАВНОЙ ФЕРМЫ.....	28
11. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТЫ.....	31
12. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	32
Библиографический список.....	35

Учебное издание

Виктор Евгеньевич Головки
Иван Владимирович Ключкин
Маргарита Владимировна Максименко

РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор В.А.Басова
Техн.редактор Л.Я.Титова

Темплан 2015 г., поз.

Подп. к печати 01.10.2015 Формат 60х84/16. Бумага тип. №1.
Печать офсетная. Объем 2,25 печ. л.; 2,25 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.
Изд. № 67. Цена "С" Заказ

Ризограф Санкт-Петербургского государственного технологического
университета растительных полимеров,
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4