

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ- ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИЙ И ЭНЕРГЕТИКИ

В.Е. Головкин, И.В. Ключкин

СТАТИКА

Учебное пособие
для самостоятельной работы студентов

Санкт-Петербург
2016

В.Е. Головки, И.В. Ключкин

СТАТИКА

Учебное пособие
для самостоятельной работы студентов

Санкт-Петербург
2016

УДК 53(07)
ББК 22.34я7
С 780

Головко В.Е., Ключкин И.В. Статика: учебное пособие для самостоятельной работы студентов; ВШТЭ СПбГУПТД-СПб., 2016.- 56 с.

В издании рассматривается часть курса теоретической механики – «Статика». Пособие соответствует программе курса теоретической механики и рассчитано для самостоятельной работы студентов очной, вечерней и заочной форм обучения. Материал пособия изложен так, что им можно пользоваться при изучении полного и краткого курсов. Настоящее учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям: 27.03.04 «Управление в технических системах»; 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»; 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»; 15.03.02. «Технологические машины и оборудование».

Рецензенты:

Заслуженный работник высшей школы РФ, д-р техн. наук, профессор кафедры системного анализа Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета) В. А. Холоднов;

д-р техн. наук, профессор Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна Г.А. Кондрашкова.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом в качестве учебно-методического пособия.

© Высшая школа технологии и энергетики
Санкт-Петербургского государственного
университета промышленных технологий
и дизайна, 2016

Учебное издание

*Виктор Евгеньевич Головки,
Иван Владимирович Ключикин*

СТАТИКА

Учебное пособие
для самостоятельной работы студентов

Редактор и корректор В.А.Басова Темплан 2016 г., поз. 5
Техн.редактор Л.Я.Титова

Подп. к печати 27.09. 2016 Формат 60х84/16. Бумага тип. №1.
Печать офсетная. Объем 3,5 печ.л.; 3,5 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.
Изд. № 5. Цена "С" Заказ

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД, 198095,
Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

1. ПРИВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

1.1. Приведение силы к заданному центру

Т е о р е м а . Силу можно переносить параллельно ей самой в любую точку твердого тела, добавляя при этом пару сил, векторный момент которых равен векторному моменту переносимой силы относительно новой точки приложения силы. Пусть, например, в точке А твердого тела приложена сила $\vec{F}$ (Рис. 1А).

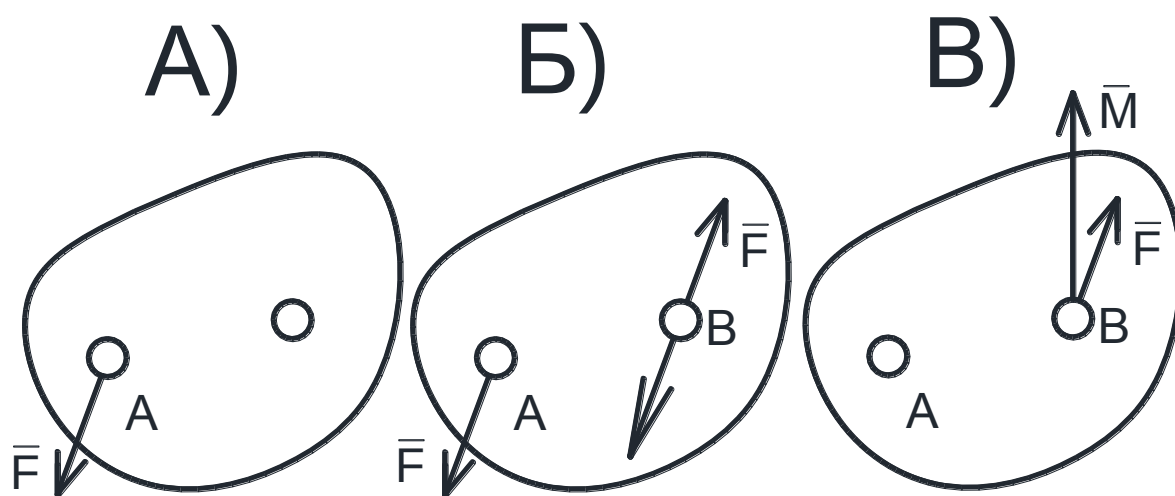


Рис. 1

Чтобы перенести ее параллельно ей самой в произвольную точку В тела, приложим в этой точке две взаимно уравновешенные силы $\vec{F}^I$ и $\vec{F}^{II}$. Линия действия этих сил параллельна линии действия силы $\vec{F}$, а по величине $\vec{F}^I = \vec{F}^{II} = \vec{F}$ (Рис. 1Б). Система сил $\vec{F}$, $\vec{F}^I$, $\vec{F}^{II}$ эквивалентна исходной силе $\vec{F}$. Замечая далее, что силы $\vec{F}$ и $\vec{F}^{II}$ образуют пару сил, векторный момент которой обозначим через $\vec{M}$ и приложим в точке В (Рис. 1В), приходим к требуемому результату. Значение момента пары сил равно моменту переносимой силы относительно точки переноса $M = M_B(\vec{F})$.

Процесс замены силы $\vec{F}$ силой $\vec{F}^I$ и парой сил с моментом $\vec{M}$ называется приведением силы $\vec{F}$ к заданному центру.

1.2. Приведение произвольной системы сил к силе и паре сил

Теорема Пуансо (основная теорема статики).

Любую произвольную систему сил, действующую на твердое тело, можно привести к силе и паре сил. Если, например, твердому телу приложена произвольная система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, то, выбирая за центр приведения произвольную точку O , приведем каждую силу к этому центру. В результате получим, что в точке тела приложена пространственная сходящаяся система сил $\vec{F}_1^I, \vec{F}_2^I, \dots, \vec{F}_n^I$ и система пар сил с векторными моментами $\vec{M}_1^I, \vec{M}_2^I, \dots, \vec{M}_n^I$. Систему сил $\vec{F}_1^I, \vec{F}_2^I, \dots, \vec{F}_n^I$ можно заменить их геометрической суммой – равнодействующей

$$\vec{R} = \vec{F}_1^I + \vec{F}_2^I + \dots + \vec{F}_n^I = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^I.$$

Для заданной системы сил $\vec{F}_1^I, \vec{F}_2^I, \dots, \vec{F}_n^I$ сила $\vec{R} = \vec{F}_{\text{гл}}$ является только ее векторной суммой или главным вектором.

Итак, главным вектором системы сил называют вектор, равный геометрической сумме этих сил:

$$\vec{F}_{\text{гл}} = \vec{F}_1^I + \vec{F}_2^I + \dots + \vec{F}_n^I = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^I. \quad (1)$$

Изображается он вектором, замыкающим силовой многоугольник, построенный на данных силах. Систему присоединенных пар сил $\vec{M}_1^I, \vec{M}_2^I, \dots, \vec{M}_n^I$ можно заменить одной парой с векторным моментом

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_1^I + \vec{M}_2^I + \dots + \vec{M}_n^I = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_i). \quad (2)$$

Вектор $\vec{M}_0$, являющийся векторной суммой векторных моментов всех сил системы относительно точки O тела, называется главным моментом системы сил относительно точки O .

Главный момент системы сил зависит от выбора центра приведения и изображается вектором, замыкающим векторный многоугольник, образованный при сложении векторных моментов сил системы.

Процесс замены системы сил главным вектором и главным моментом называется приведением системы сил к заданному центру.

Основную теорему статики можно сформулировать теперь так: любую систему сил, действующих на твердое тело, можно привести к силе, равной главному вектору системы сил и паре сил, векторный момент которой равен главному моменту системы сил относительно точки, выбранной за центр приведения.

Отметим некоторые свойства главного вектора и главного момента системы сил:

1. Согласно определению главный вектор системы сил не зависит от центра приведения, т.е. его величина и направление не меняются при переносе точки приложения.

2. Главный момент системы сил относительно некоторого центра O_I равен главному моменту этой системы относительно другого центра O , сложенному геометрически с моментом относительно первого центра O_I главного вектора системы сил, приложенного в центре O :

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_0 + \vec{M}_1(\vec{F}_{\text{гл}}). \quad (3)$$

Доказательство этого положения становится очевидным, если воспользоваться правилом приведения силы к заданному центру.

3. Скалярное произведение главного момента на главный вектор есть величина постоянная, не зависящая от выбора центра приведения:

$$\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{F}_{\text{гл}} = \vec{M}_0 \cdot \vec{F}_{\text{гл}}$$

Последнее соотношение может быть получено в результате умножения обеих частей равенства (3) скалярно на $\vec{F}_{\text{гл}}$. Одновременно следует учесть, что $\vec{M}_1(\vec{F}_{\text{гл}})$ перпендикулярно $\vec{F}_{\text{гл}}$ и, следовательно, скалярное произведение векторов $\vec{M}_1(\vec{F}_{\text{гл}})$ и $\vec{F}_{\text{гл}}$ равно нулю. Таким образом, при перемене

центра приведения не изменяются главный вектор и скалярное произведение главного вектора на главный момент. Следовательно, эти величины инвариантны (не изменяются) относительно выбора центра приведения.

Первым статическим инвариантом является значение главного вектора $\vec{F}_{\text{гл}}$:

$$I_1 = \vec{F}_{\text{гл}}$$

Вторым статическим инвариантом называется скалярное произведение главного вектора на главный момент:

$$I_2 = \vec{F}_{\text{гл}} \cdot \vec{M}_0$$

1.3. Различные случаи приведения системы сил. Динама

Выше было показано, что произвольная система сил, как угодно расположенных в пространстве, может быть приведена в общем случае к главному вектору системы $\vec{F}_{\text{гл}}$, приложенному в центре приведения О и к главному моменту $\vec{M}_0$ сил системы относительно того же центра.

Рассмотрим частные случаи возможного упрощения заданной системы сил :

1. $\vec{F}_{\text{гл}} \neq 0$, $\vec{M}_0 = 0$. Данная система сил приводится к одной равнодействующей силе, линия действия которой проходит через центр приведения О.

2. $\vec{F}_{\text{гл}} = 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$. Данная система сил приводится к одной равнодействующей паре сил. Главный момент не зависит от центра приведения и является свободным вектором.

3. $\vec{F}_{\text{гл}} \neq 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$, но второй статический инвариант $I_2 = 0$, т.е. $\vec{M}_0$ перпендикулярно $\vec{F}_{\text{гл}}$. Данная система сил может быть приведена к равнодействующей силе $\vec{R} = \vec{F}_{\text{гл}}$. Действительно, выбирая плечо пары $\vec{M}_0$ равным $h = M_0 / F_{\text{гл}}$, получим, что силы $\vec{R}$ и $\vec{R}'$, составляющие пару, будут равны по величине $F_{\text{гл}}$. Располагая силы пары так, чтобы одна из них $-\vec{R}'$ была приложена в точке О и

направлена противоположно $\vec{F}_{\text{гл}}$, сведем систему трех сил $\vec{F}_{\text{гл}}$, $\vec{R}$, $\vec{R}'$ к одной равнодействующей силе $\vec{R}$, линия действия которой проходит через точку O_1 (Рис.2).

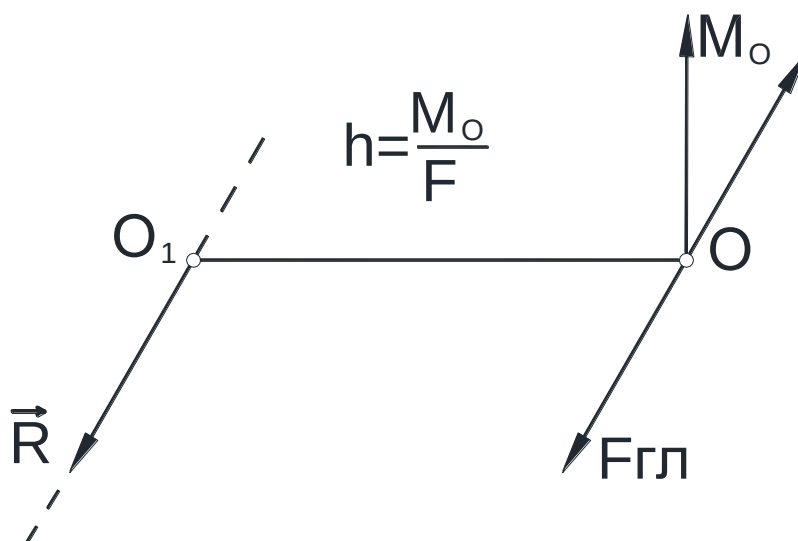


Рис. 2

Рассмотренный случай перпендикулярности главного момента и главного вектора имеет место при приведении к простейшему виду плоской системы сил, так как при этом главный вектор и равнодействующая пара сил будут лежать в одной плоскости, а векторный момент пары сил будет перпендикулярен главному вектору. Следовательно, если главный вектор не равен нулю, то плоская система сил приведет к одной равнодействующей.

Примерами систем сил, приводимых к одной равнодействующей, являются также система сходящихся сил и любая пространственная система параллельных сил.

4. $F_{\text{гл}} \neq 0$, $M_0 \neq 0$, второй статический инвариант $I_2 \neq 0$, т.е. главный момент $\vec{M}_0$ не перпендикулярен главному вектору $\vec{F}_{\text{гл}}$. Данная система сил может быть приведена к главному моменту и главному вектору, расположенным по одной прямой. В самом деле, разложим момент $\vec{M}_0$ на две составляющие: $\vec{M}_0^{(1)}$, направленную вдоль главного вектора, и $\vec{M}_0^{(2)}$ ему перпендикулярную (Рис. 3А). Очевидно, что $\vec{M}_0 = \vec{M}_0^{(1)} + \vec{M}_0^{(2)}$ и

плоскость действия пары $\vec{M}_0^{(1)}$ перпендикулярна к $\vec{F}_{\text{гл}}$, а плоскость действия пары $\vec{M}_0^{(2)}$ содержит. Совокупность пары сил, момент которой $\vec{M}_0^{(2)}$ и силы $\vec{F}_{\text{гл}}$ образует плоскую систему сил, которая может быть сведена к одной силе $\vec{R}_1 = \vec{F}_{\text{гл}}$. Для разыскания линии действия силы $\vec{R}_1$ следует отложить перпендикулярно плоскости векторов $\vec{M}_0$ и $\vec{F}_{\text{гл}}$ отрезок OO_1 длиной $h = \frac{M_0^{(2)}}{F_{\text{гл}}}$ в такую

сторону, чтобы вращение вектора R_1 при наблюдении с конца вектора $M_0^{(2)}$ представлялось происходящим против часовой стрелки (Рис. 3Б).

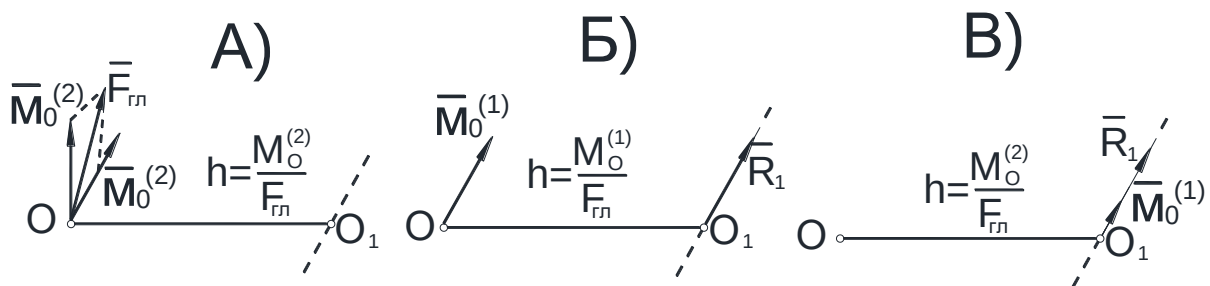


Рис. 3

Отметим, что скалярное произведение

$$|\vec{M}_0 \cdot \vec{F}_{\text{гл}}| = |M_0 \cdot F_{\text{гл}} \cdot \cos(\vec{M}_0, \vec{F}_{\text{гл}})| = \vec{M}_0^{(1)} \cdot F_{\text{гл}}$$

Поэтому

$$\vec{M}_0^{(1)} = \frac{|\vec{M}_0 \cdot \vec{F}_{\text{гл}}|}{F_{\text{гл}}} \quad (4)$$

Так как $F_{\text{гл}}$ и $\vec{M}_0 \cdot \vec{F}_{\text{гл}}$ являются статическими инвариантами, то величина $\vec{M}_0^{(1)}$ не зависит от выбора центра приведения. Следовательно, момент пары сил, представляющий собой проекции главного момента $\vec{M}_0$ на направление главного вектора $F_{\text{гл}}$, является свободным вектором и за точку его приложения можно принять любую точку на линии действия силы $\vec{R}_1$ (Рис. 3В).

Итак, совокупность главного вектора $\vec{F}_{\text{гл}}$ и главного момента $\vec{M}_0$ в точке 0 сведена к силе $\vec{R}_1$ с линией действия, проходящей через точку O_1 , и паре с моментом $\vec{M}_0^{(1)}$, расположенным по линии действия $\vec{R}_1$.

Совокупность силы и пары сил, плоскость которой перпендикулярна к линии действия силы, называется силовым винтом, или динамическим винтом, или динамой.

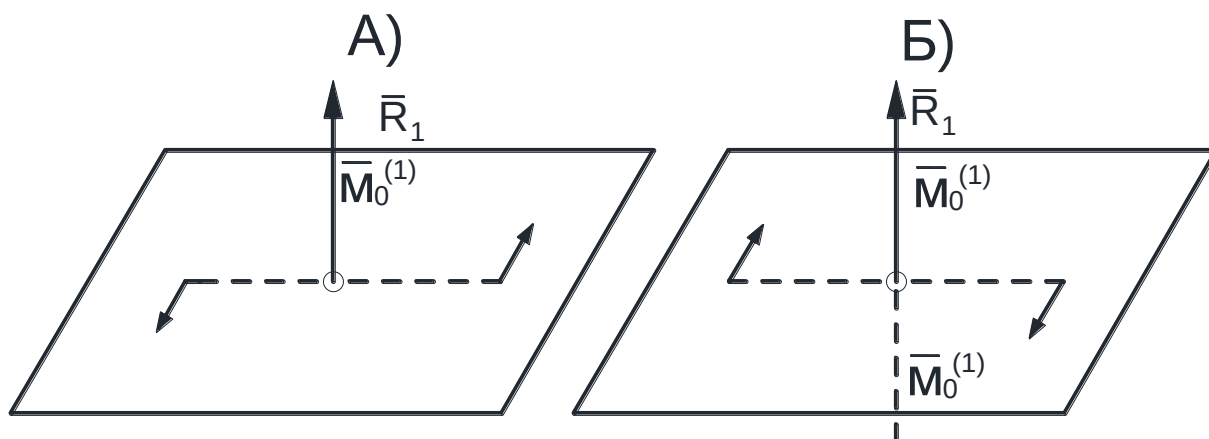


Рис. 4

На (Рис. 4А) дано изображение динамы в случае векторов $\vec{R}_1$ и $\vec{M}_0^{(1)}$ одинакового направления, а на (Рис.4Б) - в случае векторов $\vec{R}_1$ и $\vec{M}_0^{(1)}$ противоположного направления. Таким образом, произвольная пространственная система сил, главный вектор которой не равен нулю и не перпендикулярен к главному моменту, может быть приведена к динаме. Линию действия силы $\vec{R}_1$, входящей в динаму, называют центральной осью системы сил. Положение центральной оси в пространстве не зависит от выбора центра приведения 0. Центральную ось называют также осью минимальных моментов, поскольку главный момент относительно точки на этой оси всегда получается меньшим, чем относительно любой другой точки. Действительно, при выборе центра приведения в точке О, не лежащей на центральной оси, главный момент складывается из главного момента $\vec{M}_0^{(1)}$ относительно точки на центральной оси и дополнительного момента $\vec{M}_0^{(2)}$,

убывающего до нулевого значения при приближении точки 0 к центральной оси.

5. $\vec{F}_{\text{гл}} = 0$, $\vec{M}_0 = 0$. Силы данной системы взаимноуравновешиваются.

1.4. Аналитические выражения элементов динами

Пусть в прямоугольной системе координат O_{xyz} силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ заданы аналитически, т.е. известны проекции этих сил на координатные оси и координаты точек приложения сил:

$$F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}; x_i, y_i, z_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Покажем, как в этом случае могут быть найдены элементы динами: сила и пара, а также положение центральной оси в пространстве. В соответствии с формулой (1) главный вектор по величине и направлению определяется по следующим формулам:

$$F_{\text{гл}x} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, F_{\text{гл}y} = \sum_{i=1}^n F_{iy}, F_{\text{гл}z} = \sum_{i=1}^n F_{iz}, \quad (5)$$

Аналитическое выражение главного вектора (первого статического инварианта):

$$I_1 = F_{\text{гл}} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz}\right)^2}, \quad (6)$$

Главный момент относительно начала, координат 0 на основании формул (2) и (5) части 1 определяется из следующих соотношений:

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_{ix} = \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}), \quad (7)$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_{iy} = \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}),$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n m_{iz} = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}).$$

Определим второй статический инвариант - скалярное произведение главного момента и главного вектора:

$$I_2 = \vec{M}_0 \cdot \vec{F}_{\text{гл}} = M_x F_{\text{гл}x} + M_y F_{\text{гл}y} + M_z F_{\text{гл}z}$$

Выражение

$$\rho = \frac{1}{F_{\text{гл}}^2} \vec{M}_0 \cdot \vec{F}_{\text{гл}} = \frac{M_x F_{\text{гл}x} + M_y F_{\text{гл}y} + M_z F_{\text{гл}z}}{F_{\text{гл}x}^2 + F_{\text{гл}y}^2 + F_{\text{гл}z}^2}$$

называют параметром динами.

Сила динами по величине равна главному вектору. Зная параметр динами и силу, можно, используя соотношение (4), определить момент ее пары сил:

$$M_0^{(1)} = \rho \cdot F_{\text{гл}}.$$

Остается найти уравнение центральной оси. Учитывая, что центральная ось представляет собой геометрическое место точек O_1 , для которых составляющая главного момента $M_0^{(1)}$ параллельна главному вектору, и вспоминая, что признаком коллинеарности (параллельности) векторов является пропорциональность их соответствующих координат, можно записать следующее условие параллельности векторов $\vec{M}_0^{(1)}$ и $\vec{F}_{\text{гл}}$:

$$\frac{M_x^{(1)}}{F_{\text{гл}x}} = \frac{M_y^{(1)}}{F_{\text{гл}y}} = \frac{M_z^{(1)}}{F_{\text{гл}z}}, \quad (8)$$

Причем $M_x^{(1)}, M_y^{(1)}, M_z^{(1)}$ есть проекции вектора на оси координат. Замечая далее, что

$$\vec{M}_o^{(1)} = \vec{M}_o - \vec{M}_o^{(2)}, (9)$$

($\vec{M}_o^{(2)}$ - момент относительно точки 0 силы $\vec{R}_1 = \vec{F}_{\text{гл}}$, действующей вдоль центральной оси), запишем аналитические выражения момента $M_o^{(2)}$ относительно координатных осей с помощью формул (5) части 1 в виде

$$M_x^{(2)} = yR_z - zR_y, (10)$$

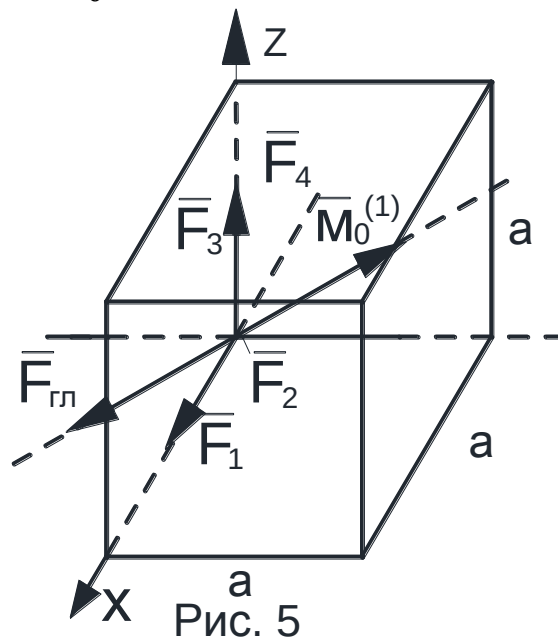
$$M_y^{(2)} = zR_z - xR_z,$$

$$M_z^{(2)} = xR_y - yR_x.$$

Здесь x, y, z - координаты текущей точки O_1 на центральной оси, когда за начало координат принят центр приведения. С учетом выражений (9) и (10) уравнения центральной оси (8) окончательно записываются в форме

$$\frac{M_x - yF_{\text{гл}z} + zF_{\text{гл}y}}{F_{\text{гл}x}} = \frac{M_y - zF_{\text{гл}x} + xF_{\text{гл}z}}{F_{\text{гл}y}} = \frac{M_z - xF_{\text{гл}y} + yF_{\text{гл}x}}{F_{\text{гл}z}}. \quad (11)$$

В уравнениях (11) аналитические выражения проекций M_x, M_y, M_z главного момента $\vec{M}_0$ вычисляются по формулам (7).



Пример 1. Пусть по ребрам куба длиной α силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ действуют так, как это указано на (Рис. 5). Будем предполагать, что все

силы равны по модулю величине F . Привести данную систему сил к простейшему виду.

Решение. Выбираем за центр приведения вершину куба O и строим в этой точке прямоугольную систему координат O_{xyz} .

Находим проекции на оси координат главного вектора $\vec{F}_{\text{гл}}$ и главного момента $\vec{M}_0$:

$$F_{\text{гл}x} = F_1 = F, M_x = -F_4 a = Fa,$$

$$F_{\text{гл}y} = -F_2 = -F, M_y = F_4 a = Fa,$$

$$F_{\text{гл}z} = F_3 - F_4 = 0, M_z = 0,$$

Величины главного вектора и главного момента:

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F_{\text{гл}x}^2 + F_{\text{гл}y}^2 + F_{\text{гл}z}^2} = \sqrt{2}F,$$

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = a\sqrt{2}F.$$

Найдем теперь второй статический инвариант:

$$I_2 = \vec{M}_0 \cdot \vec{F}_{\text{гл}} = M_x F_{\text{гл}x} + M_y F_{\text{гл}y} + M_z F_{\text{гл}z} = -2aF^2.$$

Так как $\vec{F}_{\text{гл}} \neq 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$, $\vec{M}_0 \cdot \vec{F}_{\text{гл}} \neq 0$, то главный вектор не перпендикулярен к главному моменту, и система сил приводится к динаме. Сила динамы $R_1 = \sqrt{2}F$, момент пары сил динамы вычисляется по формуле (4):

$$M_0^{(1)} = \frac{|\vec{M}_0 \cdot \vec{F}_{\text{гл}}|}{F_{\text{гл}}} = a\sqrt{2}F.$$

Замечая, что $M_0^{(1)} = M_0$, заключаем, что момент $\vec{M}_0 = \vec{M}_0^{(1)}$ и точка O лежит на центральной оси. Значение $M_0^{(1)} = a\sqrt{2}F$ является минимальным. Кроме того, отрицательность скалярного произведения $\vec{M}_0 \cdot \vec{F}_{\text{гл}}$ указывает, что вектор момента $\vec{M}_0^{(1)}$ направлен в сторону, противоположную $\vec{F}_{\text{гл}}$.

Составляем теперь уравнения центральной оси. Для данной

системы сил они имеют вид:

$$\frac{-aF - zF}{F} = \frac{aF - zF}{-F} = \frac{xF + yF}{0}.$$

После очевидных преобразований получаем: $z=0$.

Отсюда следует, что центральная ось лежит в плоскости O_{xyz} и совпадает с прямой, пересекающей ось z и выражающейся уравнением $u=-x$. Направление силы динами на центральной оси определяется проекциями главного вектора. Направление вектора момента пары противоположно направлению вектора силы.

2. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ

2.1. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Если система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, действующих на твердое тело, такова, что ее главный вектор и главный момент обращаются в ноль:

$$\vec{F}_{\text{гл}} = 0, \vec{M}_0 = 0, (12)$$

то под действием такой системы сил свободное твердое тело остается в равновесии. Справедливо и обратное утверждение: если равновесие имеет место, то должны выполняться условия (12), это необходимые и достаточные условия равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием системы сил, произвольным образом расположенных в пространстве.

В проекциях на оси прямоугольной системы координат O_{xyz} условия (12) записываются так:

$$F_{\text{гл}x} = 0, F_{\text{гл}y} = 0, F_{\text{гл}z} = 0, (13)$$

$$M_x = 0, M_y = 0, M_z = 0.$$

С учетом формул (5) и (7) эти шесть условий через силы системы принимают следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^n m_{ix} (\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_{iy} (\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_{iz} (\vec{F}_i) = 0,$$

Условия (14) представляют собой шесть уравнений равновесия твердого тела, которые выражают следующее положение: при равновесии твердого тела под действием пространственной системы сил алгебраические суммы проекций приложенных сил на оси координат и алгебраические суммы моментов приложенных сил *относительно осей* координат обращаются в ноль.

Отметим, что условия обращения в ноль главного вектора и главного момента вовсе не обязательно формулировать аналитически в форме уравнений (14). Чтобы обратить в ноль некоторый вектор, достаточно обратить в ноль его проекции на три любые, не обязательно взаимно перпендикулярные , направления, не лежащие в одной плоскости. Это допускает широкий произвол в выборе осей проекций и моментов, пользуясь которыми можно максимально упростить вид уравнений статики в каждой частной задаче. Оси следует выбирать так, чтобы система шести уравнений распадалась на несколько систем, в каждую из которых входила бы часть неизвестных.

2.2. Частные случаи равновесия системы сил

В отдельных случаях некоторые из шести уравнений (14) могут выполняться тождественно, при этом число уравнений уменьшается. Приведем важнейшие из этих случаев:

1).Сходящаяся пространственная система сил. Принимая точку, в которой пересекаются линии действия сил, за центр моментов, получаем, что последние три уравнения (14) удовлетворяются тождественно. В соответствии с изложенным в разд. 6 части I число уравнений равновесия сокращается до трех, и они принимают вид (2) части 1.

2).Пространственная система параллельных сил. Направляя ось z параллельно линиям действия сил, приходим к тому, что первые два и последнее уравнение системы (14) выполняются тождественно. В качестве уравнений равновесия пространственной системы сил параллельно оси z служат три уравнения:

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \sum_{i=1}^n m_{iz}(\vec{F}_i) = 0, \sum_{i=1}^n m_{iy}(\vec{F}_i) = 0.$$

3).Плоская произвольная система сил. Располагая ось z перпендикулярно к плоскости действия сил, будем иметь только три уравнения равновесия, так как тождественно обратятся в ноль сумма проекций всех сил на ось z и сумма моментов приложенных сил относительно осей O_x и O_y . В последнем случае линии действия сил пересекают ось моментов или параллельны ей.

Уравнение моментов относительно оси z можно рассматривать как уравнение моментов относительно точки O в плоскости действия сил.

Итак, для плоской системы сил число уравнений равновесия равно трем, и они имеют следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \sum_{i=1}^n m_{io}(\vec{F}_i) = 0. \quad (15)$$

Приведенная форма уравнений равновесия плоской системы сил - два уравнения проекций и одно уравнение моментов - не является единственной. Уравнения равновесия могут быть записаны также в форме двух уравнений моментов относительно произвольных точек A и B, взятых в плоскости действия сил, и одного уравнения проекций на любую ось O_x , не перпендикулярную к прямой AB:

$$\sum_{i=1}^n m_{ia} (\vec{F}_i) = 0, \sum_{i=1}^n m_{ib} (\vec{F}_i) = 0, \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad (16)$$

или в форме трех уравнений моментов относительно точек А, В и С, не расположенных на одной прямой:

$$\sum_{i=1}^n m_{ia} (\vec{F}_i) = 0, \sum_{i=1}^n m_{ib} (\vec{F}_i) = 0, \sum_{i=1}^n m_{ic} (\vec{F}_i) = 0. \quad (17)$$

4). Сходящаяся плоская система сил. Выбирая за центр моментов точку, в которой сходятся силы, получим два уравнения равновесия в форме (2') части I.

5). Плоская система параллельных сил. Число уравнений равновесия также сводится к двум. Действительно, выбирая ось O_y перпендикулярно общему направлению сил, получаем, что второе уравнение системы (15) обращается в тождество, и условия равновесия сводятся к одному уравнению проекций на ось O_x , параллельную силам, и уравнению моментов:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \sum_{i=1}^n m_{io} (\vec{F}_i) = 0.$$

Уравнения равновесия плоской системы параллельных сил могут быть записаны и в такой форме:

$$\sum_{i=1}^n m_{ia} (\vec{F}_i) = 0, \sum_{i=1}^n m_{ib} (\vec{F}_i) = 0,$$

причем прямая АВ не должна быть параллельной силам.

2.3. Статически определимые и неопределимые задачи

Необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела, находящегося под действием произвольной системы сил, сводятся к равенству нулю алгебраических сумм проекций на оси координат всех приложенных сил и алгебраических сумм моментов

приложенных сил относительно осей координат, Сточки зрения статического расчета различные конструкции можно подразделить на статически определимые и статически неопределимые ; первые могут быть рассчитаны методами статики твердого тела, т.е. может быть решена задача по определению величин неизвестных реакций или приложенных сил путем составления уравнений равновесия твердого тела. Задачи такого рода называются статически определимыми. В случае статически неопределимой конструкции число неизвестных превышает число уравнений статики, которые можно составить для нее; методов статики уже недостаточно для определения неизвестных усилий, и нужно принимать в расчет обусловленные внешними нагрузками изменения формы тела. Задачи такого рода называются статически неопределимыми.

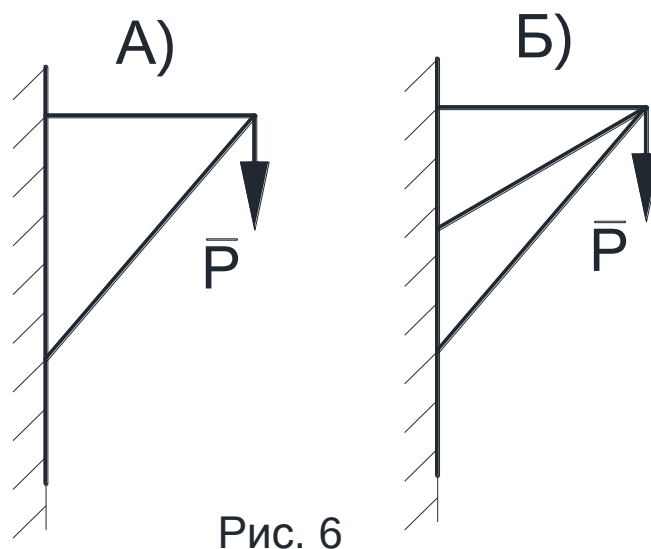


Рис. 6

Пример 2. На Рис. 6А показан обычный кронштейн, состоящий из двух шарнирно-соединенных стержней. Усилия в стержнях легко определяются из условий равновесия узла А. Если конструкцию кронштейна усложнить, добавив еще один стержень (Рис. 6Б), то усилия в стержнях нельзя будет определить прежним способом: для узла А может быть по-прежнему составлено только два

уравнения равновесия сходящейся плоской системы сил, а число неизвестных равно трем.

В таких случаях говорят, что система один раз статически неопределима. Усложняя конструкцию дальше и вводя новые стержни, можно получить два раза статически неопределимую систему, три раза и т.д. Можно сказать, что *одн* раз статически неопределимой системой понимается такая система, в которой число реакций связи превышает число независимых уравнений статики на *единиц*.

2.4. О решении задач на равновесие

При решении задач в первую очередь следует отчетливо установить, равновесие какого твердого тела рассматривается. Чтобы применить к этому телу уравнения равновесия, необходимо учесть все действующие на него силы, т.е. заданные нагрузки и реакции опорных закреплений. Составляющие по осям неизвестных реакций рекомендуется выбирать по положительным направлениям соответствующих осей. Если в результате решения какая-либо из искомых проекций сил окажется отрицательной, то это будет означать, что соответствующая составляющая силы в действительности направлена в отрицательную сторону.

В тех случаях, когда истинное направление реакции не вызывает сомнения, следует, не считаясь с принятым направлением оси, направлять реакцию в ту сторону, куда она в самом деле действует.

Для плоской системы сил при выборе точки, относительно которой составляется уравнение моментов - центра моментов - следует учитывать, что решение уравнений равновесия будет тем проще, чем меньшее число неизвестных будет входить в каждое из этих уравнений. Поэтому центр моментов следует брать в точках пересечения линий действия неизвестных сил. Так как момент силы, линия действия которой проходит через центр моментов, равен нулю, то эти неизвестные силы не войдут в составляемое уравнение моментов.

В случае пространственной системы сил оси координат следует

выбирать так, чтобы уравнения статики имели наиболее простой вид. В задачах, где система сил допускает различные формы уравнений равновесия, для достижения наибольшей простоты решения существенное значение имеет сам выбор формы уравнений статики. Наиболее простым будет то решение, в котором неизвестные разделяются, т.е. каждое неизвестное определяется отдельно из одного уравнения. Для плоской системы сил это часто можно достигнуть составляя уравнения статики в форме трех уравнений моментов (17) и выбирая надлежащим образом центры моментов.

Рассмотрим примеры равновесия тел под действием плоской системы сил.

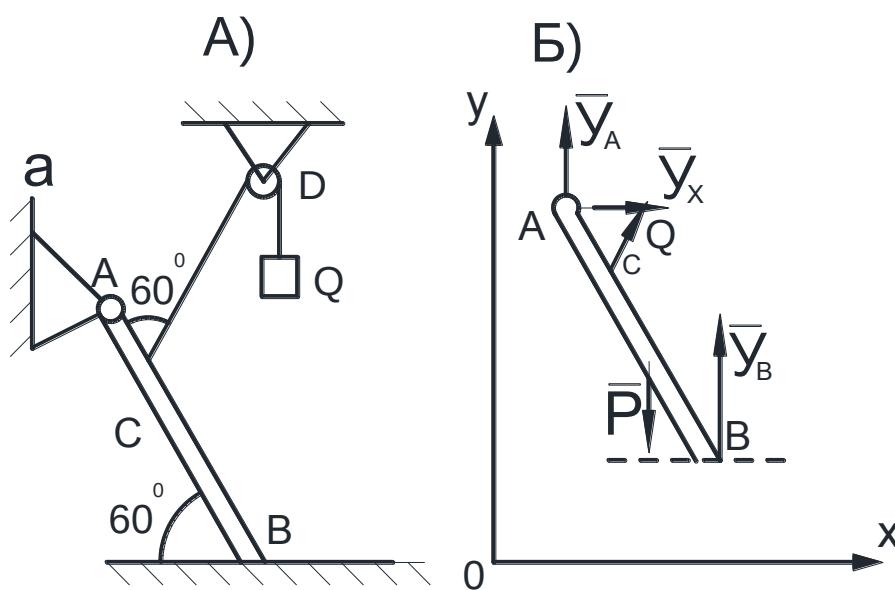


Рис. 7

Пример 3. Однородная балка AB весом $P = 1200$ Н концом A закреплена при помощи неподвижного цилиндрического шарнира, а концом B опирается на гладкую горизонтальную плоскость, с которой составляет угол 60° . В точке C к балке прикреплена веревка, перекинутая через блок D и несущая на свободном конце груз весом $Q=346$ Н. Определить реакции опор A и B , если угол между веревкой и осью балки равен 60° , $AC=AB/3$ (Рис. 7А).

Решение. Объектом равновесия является балка АВ. К середине балки приложена задаваемая сила $\vec{P}$, в точке А - реакция цилиндрического шарнира, в точке В - вертикальная реакция гладкой поверхности, в точке С - реакция веревки $\vec{T}$. Выбирая направление осей X и Y так, как это показано на Рис.7Б, обозначим составляющие реакций шарнира по осям через $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, а реакцию в точке В – через $\vec{Y}_B$ (Рис. 7Б).

Задача является статически определенной; число неизвестных реакций связи равно трем и соответствует числу уравнений статики для плоской произвольной системы сил.

При составлении уравнений проекций сил на оси замечаем, что сила $\vec{T}$ образует с положительным направлением оси O_x угол 60° , а оси O_y - 30° ; уравнение моментов составляем относительно точки А, так как в этой точке сходится наибольшее число неизвестных реакций - две. Таким образом, имеем:

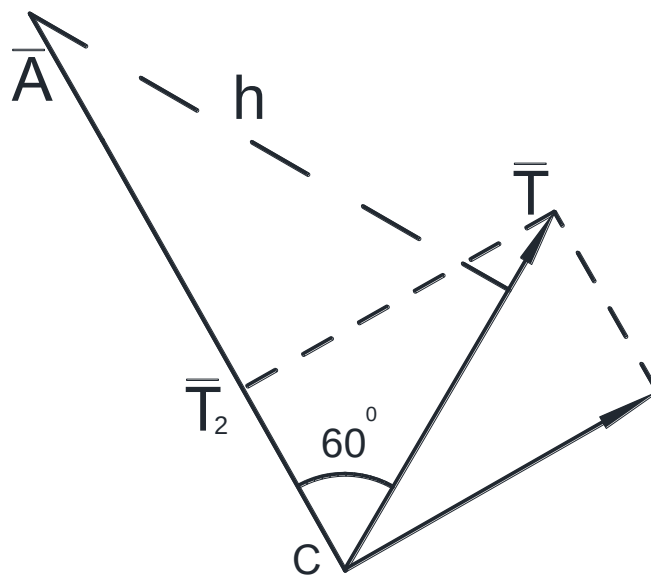


Рис. 8

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad X_A + T \cos 60^\circ;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, Y_A + T \cos 30^\circ - P + Y_B = 0; \sum_{i=1}^n m_{ia}(\vec{F}_i) = 0,$$

$$T \cdot AC \cdot \cos 30^\circ - P \frac{AB}{2} \cos 60^\circ + Y_b \cdot AB \cos 60^\circ = 0.$$

В последнем уравнении при вычислении моментов сил $\vec{P}$ и $\vec{Y}_b$ плечи сил - кратчайшие расстояния до линий их действия определялись весьма просто. При вычислении момента силы $\vec{T}$ относительно точки А удобным является следующий прием. Раскладываем силу $\vec{T}$ на две составляющие: $\vec{T}_1$, перпендикулярную к оси балки и равную по величине $T \cos 30^\circ$ и T_2 , направленную по оси балки и равную по величине $T \cos 60^\circ$ (Рис. 8). По теореме Вариньона сумма моментов относительно центра А сил $\vec{T}$ и $\vec{T}_2$ равна моменту относительно этого центра равнодействующей силы $\vec{T}$. Линия действия силы $\vec{T}_2$ проходит через точку А, поэтому ее момент равен нулю. Плечом силы $\vec{T}_1$ является расстояние АС, и ее момент будет равен $T \cos 30^\circ AC$. По величине $T=Q$. Силы $\vec{T}$ и $\vec{Y}_b$ стремятся повернуть чертеж вокруг точки А против часовой стрелки, поэтому их моменты положительные; момент силы $\vec{P}$ является отрицательным, так как она стремится повернуть чертеж по часовой стрелке.

Из уравнения моментов находим:

$$Y_b = \frac{P}{2} - 2 \frac{AC}{AB} \cos 30^\circ \cdot Q = \frac{1200}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 346 = 400 \text{ Н}.$$

Затем из уравнений, данных выше, получим:

$$X_A = -Q \cos 60^\circ = -173 \text{ Н},$$

$$Y_A = -Q \cos 30^\circ + P - Y_B = -346 \frac{\sqrt{3}}{2} + 1200 - 400 = 500 \text{ Н}.$$

Отрицательный знак реакции $\vec{X}_A$ указывает, что эта реакция имеет направление, противоположное предполагаемому.

Отметим, что для данной задачи наиболее простой вид имеют рассмотренные уравнения равновесия. В этом нетрудно убедиться путем непосредственного составления уравнений статики в любой

иной форме или при другой ориентации осей.

Пример 4. Определить реакции заделанного в стенку конца балки, изображенной на Рис. 9А и находящейся под действием сосредоточенной силы $P=100$ Н и пары сил $M=300$ Н·м

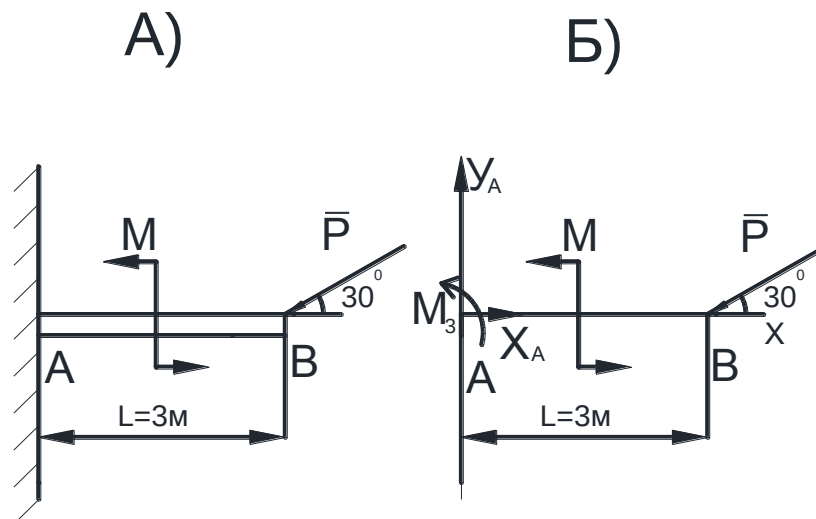


Рис. 9

Решение. Прежде всего укажем, что балки такого рода называются консолями. Заделка является такой связью, которая, в отличие от цилиндрического шарнира, не позволяет сечению в точке А балки поворачиваться, и поэтому, кроме двух взаимно перпендикулярных неизвестных составляющих реакций $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, в этой точке следует приложить еще пару сил с неизвестным заранее моментом: M_3 (Рис.9Б).

Итак, объектом равновесия является балка АВ, на которую действуют задаваемая сила $\vec{P}$ и пара сил M , и три неизвестные реакции заделки: силы $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и момент M_3 . Задача является статически определенной. Составляем уравнения равновесия балки в виде двух уравнений проекций на оси x, y и уравнения моментов относительно точки А:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad X_A - P \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, Y_A - P \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_i(\vec{F}_i) = 0, M - P \cos 60^\circ \cdot l + M_3 = 0.$$

Следует обратить внимание на то, что последнее уравнение составлялось с учетом независимости пар M и M_3 от точки их приложения, и учитывалось только направление их вращения. Из уравнений находим:

$$X_A = P \cos 30^\circ = 100 \frac{\sqrt{3}}{2} = 86,6 \text{ Н};$$

$$Y_A = P \cos 60^\circ = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50 \text{ Н};$$

$$M_3 = -M + P \cos 60^\circ \cdot l = -300 - 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot l = -150 \text{ Нм}.$$

Если бы к консольной балке была приложена не плоская, а пространственная система сил, то к точке А было бы приложено два неизвестных по величине и направлению вектора: главный вектор сил реакций связи $\vec{F}_{гЛА}$ и главный момент этих сил $\vec{M}_A$. Составляющие векторов $\vec{F}_{гЛА}$ и $\vec{M}_A$ по трем взаимноперпендикулярным направлениям определялись бы из шести уравнений равновесия (14).

Рассмотрим примеры решения задач на равновесие твердого тела под действием пространственной системы сил.

Пример 5. Однородная горизонтальная прямоугольная пластина ABCD весит 400 Н. Точки А и Е находятся на одной вертикали. Найти реакции цилиндрического шарнира А и сферического шарнира В и натяжение веревки CE (Рис. 10А).

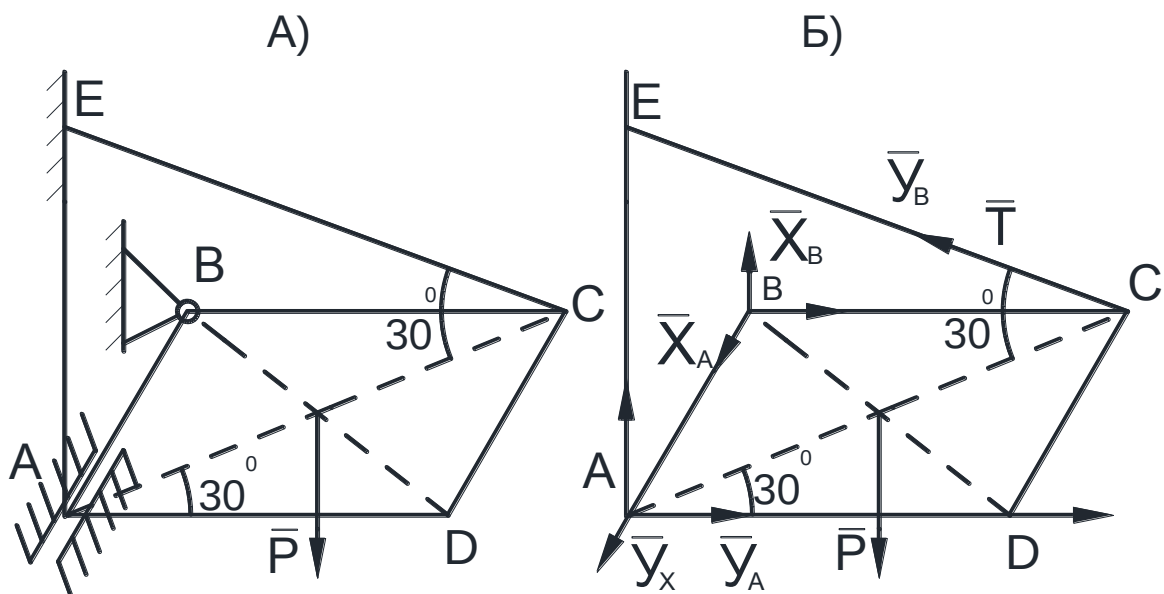


Рис. 10

Решение. Объектом равновесия является пластина ABCD. Выберем направление осей прямоугольной системы координат так, как это показано на Рис. 10. Действие цилиндрического шарнира A на пластину следует заменить двумя неизвестными взаимно перпендикулярными реакциями, расположенными в вертикальной плоскости zAy ; а действие сферического шарнира B - тремя взаимно перпендикулярными реакциями. Эти реакции - в стороны положительного направления осей. Реакция веревки $\vec{T}$ будет направлена по веревке и приложена в точке C пластины. Задаваемая сила веса $\vec{P}$ приложена в точке пересечения диагоналей AC и BD (Рис. 10Б).

Имеем шесть неизвестных величин: $\vec{Y}_a, \vec{Z}_a, \vec{X}_b, \vec{Y}_b, \vec{Z}_b, \vec{T}$, для определения которых надо составить шесть уравнений статики. Составим сначала три уравнения проекций на оси x, y, z :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, X_b + T \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, Y_a + Y_b - T \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, Z_a + Z_b - P + T \cos 60^\circ = 0,$$

Чтобы максимально упростить решение задачи, уравнения моментов составим относительно осей A_x, BC и A_z . Уравнение моментов относительно оси A_x , будет содержать лишь одну неизвестную $\vec{T}$ (все остальные реакции пересекают ось) и силу $\vec{P}$. При вычислении момента силы $\vec{T}$ проектируем ее на плоскость, перпендикулярную оси A_x (получаем вертикальную составляющую силы) и умножаем эту проекцию на ее плечо относительно точки В - расстояние BC ; сила P расположена в плоскости, перпендикулярной оси A_x , имеет соответствующее плечо в два раза меньше и стремится вращаться вокруг оси в противоположном направлении, следовательно:

$$\sum_{i=1}^n m_{iax} (\vec{F}_i) = 0, \quad T \cos 60^\circ \cdot BC - P \frac{BC}{2} = 0.$$

Уравнение моментов вокруг оси A_y содержало бы две неизвестные: $\vec{T}$ и $\vec{Z}_b$, а уравнение моментов вокруг параллельной оси BC - лишь одну неизвестную $\vec{Z}_A$ (все остальные реакции либо пересекаются с осью, либо параллельны ей). Составляем поэтому уравнение моментов относительно оси BC :

$$\sum_{i=1}^n m_{ibc} (\vec{F}_i) = 0, \quad Z_A \cdot AC - P \frac{AC}{2} = 0.$$

Наконец, уравнение моментов вокруг оси A_z :

$$\sum_{i=1}^n m_{iaz} (\vec{F}_i) = 0, \quad Y_b \cdot AB = 0,$$

откуда $Y_b=0$. Решая остальные уравнения, получим :
 $Y_A=300 \text{ Н}$, $Z_A=200 \text{ Н}$, $X_B=-173 \text{ Н}$, $Z_B=0$, $T=400 \text{ Н}$.

Сила натяжения веревки по величине равна T и направлена в противоположную сторону.

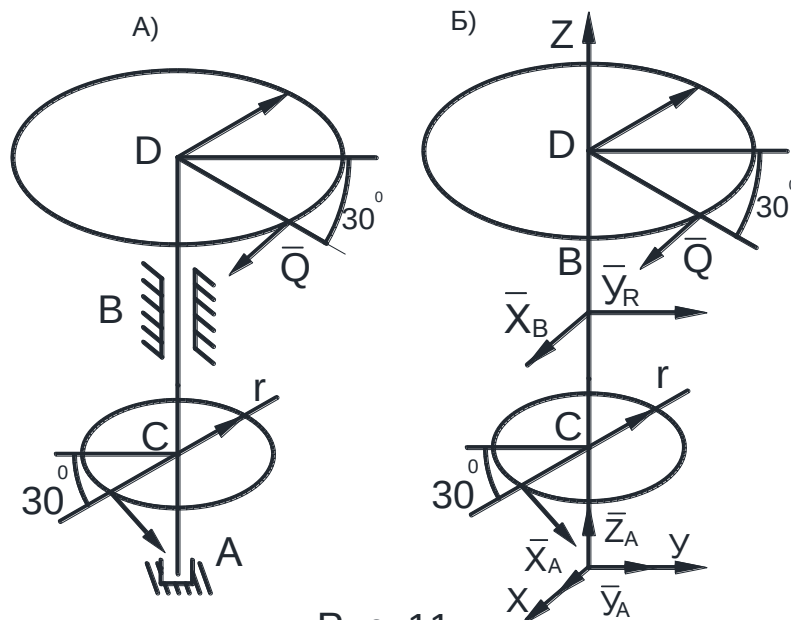


Рис. 11

Пример 6. На ворот весом $P=1000 \text{ Н}$ действуют силы $G=800 \text{ Н}$ и Q по касательным к соответствующим дискам. Определить реакции подпятника A и подшипника B , а также силу Q , если $AC=CB=BD$, $R=2r$ (Рис. 11А).

Решение. В качестве объекта равновесия рассматривается ворот АД, состоящий из вертикального вала с двумя жестко закрепленными дисками. Заданными силами являются сила веса $\vec{P}$, направленная по оси вала, и силы $\vec{G}$ и $\vec{Q}$.

Кроме них, на ворот действуют реакции подпятника A и подшипника B . Возьмем координатную систему xyz с началом в точке A . Направление осей показано на Рис. 11. В подпятнике на ворот действует реакция $\vec{R}_A$, которую раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$. Подшипник не препятствует смещению вала вдоль оси x , поэтому в точке B реакции подшипника раскладываем на две горизонтальные реакции $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$ (Рис. 11Б). Задача является статически определенной, т.е. шесть неизвестных $Q, X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B$, могут быть определены с помощью шести уравнений равновесия.

Составим их:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad X_A + X_B + G \cos 60^\circ + Q \cos 30^\circ = 0 ;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad Y_A + Y_B + G \cos 30^\circ - Q \cos 60^\circ = 0 ;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \quad Z_A - P = 0 ;$$

$$\sum_{i=1}^n m_{ix}(\vec{F}_i) = 0, \quad -G \cos 30^\circ \cdot AC - Y_B \cdot AB + Q \cos 60^\circ \cdot AD = 0 ;$$

$$\sum_{i=1}^n m_{iy}(\vec{F}_i) = 0, \quad G \cos 60^\circ \cdot AC + X_B \cdot AB + Q \cos 30^\circ \cdot AD = 0 ;$$

$$\sum_{i=1}^n m_{iz}(\vec{F}_i) = 0, \quad G \cdot r - Q \cdot R = 0 .$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$Q = \frac{G}{2} = 400 \text{ Н} , \quad X_A = -\frac{G}{4} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -26,6 \text{ Н} ;$$

$$Y_A = -\frac{G}{8} (6\sqrt{3} - 5) = -539 \text{ Н}, \quad Z_A = P = 1000 \text{ Н} ;$$

$$X_B = -\frac{G}{4} \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = -720 \text{ Н}, \quad Y_B = \frac{G}{8} (2\sqrt{3} - 3) = 46,4 \text{ Н} .$$

3. РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ ТВЕРДЫХ СОЧЛЕНЕННЫХ ТЕЛ

При рассмотрении задач статики встречаются случаи, когда конструкция состоит из нескольких взаимодействующих между собой тел. Тела могут быть соединены между собой при помощи шарниров, соприкасаться друг с другом, соединяться невесомыми стержнями, гибкими связями. Такую систему тел называют системой сочлененных тел. Такие конструкции, на первый взгляд, являются статически неопределимыми; число неизвестных опорных реакций превышает число уравнений равновесия. При внимательном рассмотрении, однако, оказывается, что данную конструкцию можно расчленить на такую систему твердых тел, для которой суммарное число неизвестных реакций (включающее исходные реакции и силы взаимодействия расчлененных тел друг на друга) совпадает с общим числом уравнений равновесия для этих тел, т.е. рассмотрение равновесия отдельных частей конструкции увеличивает число уравнений до числа получившихся неизвестных. Такую конструкцию следует считать статически определимой.

Силы, действующие на систему сочлененных тел, разделяют на внешние и внутренние. Внешними называют силы, с которыми на тела рассматриваемой системы тел действуют тела, не входящие в эту систему. Внутренними называют силы взаимодействия между телами рассматриваемой системы.

Связи, которые накладывают сочленяющиеся тела друг на друга, должны быть таковы, чтобы отвечающих им реакций было, по крайней мере, на единицу меньше, чем дополнительных уравнений статики. Если система сил, действующих на конструкцию, плоская, то такой связью, например, может быть цилиндрический шарнир. Действительно, шарнир разрешает поворот сочленяющихся тел относительно друг друга. Поэтому при расчленении тел в точке расположения шарнира к каждому из них необходимо приложить по две взаимно перпендикулярных реакции, заменяющих действие тел друг на друга (внутренние силы). В силу равенства действия и противодействия реакции одного тела равны по величине и противоположны по

направлению реакциям другого тела. В результате расчленения можно дополнительно составить три уравнения равновесия для одного из отделившихся тел. Рассмотрим пример определения реакций связей составной конструкции, нагруженной плоской системой сил.

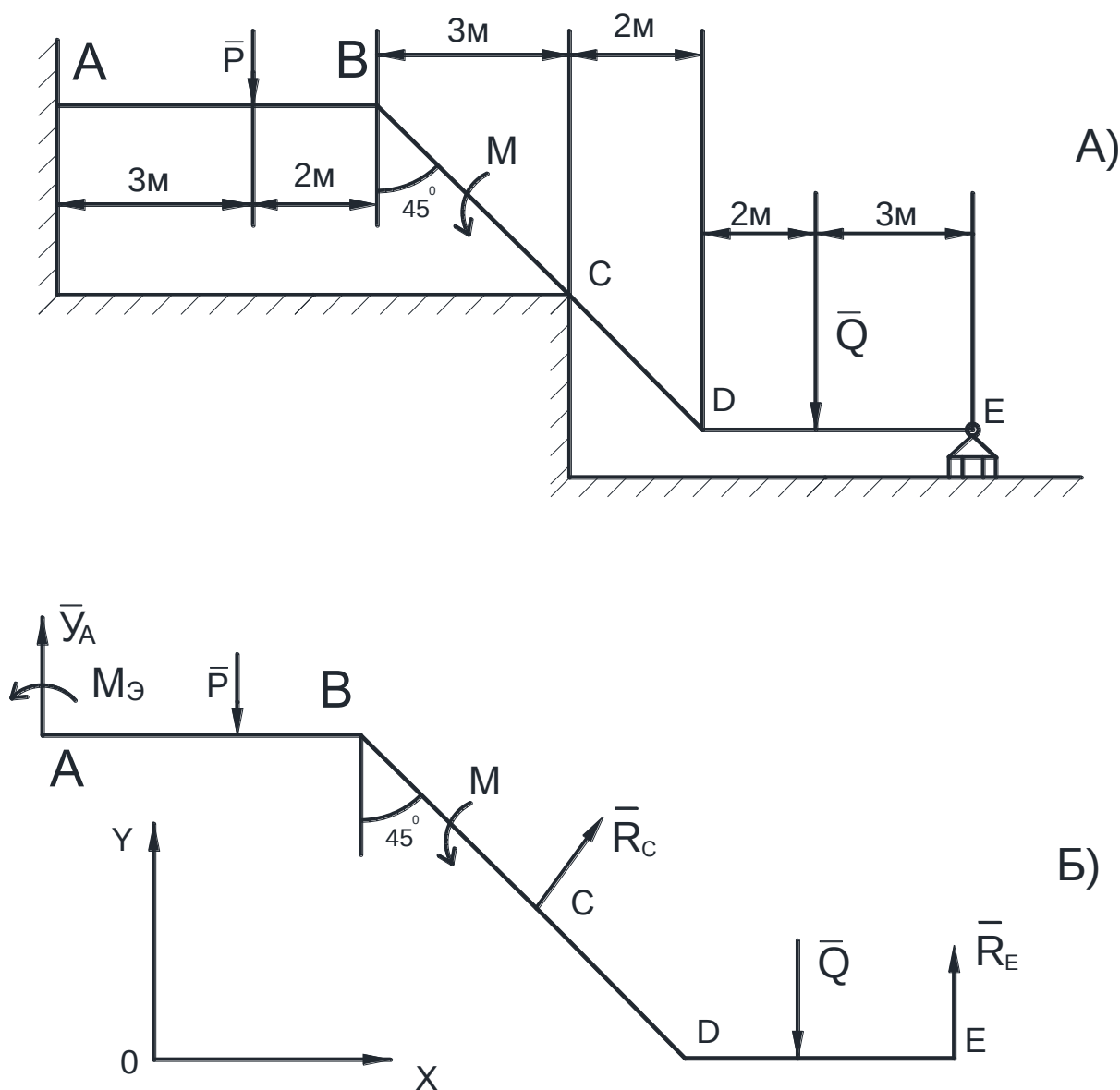


Рис. 12

Пример 7. Требуется определить опорные реакции конструкции, которая составлена из трех балок, соединенных шарнирно (Рис. 12А), если $P = 1$ кН, $Q = 10$ кН, $M = 18$ кН.

Решение. В заделке А будут приложены три реакции: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A, M_A$; в точке С - $\vec{R}_C$, перпендикулярная балке ВД; в точке Е -

реакция $\vec{R}_E$, перпендикулярная опорной плоскости (Рис. 12Б). Если за объект равновесия принять всю конструкцию, то задача покажется дважды статически неопределенной. Наличие двух сочленяющих шарниров показывает, что, рассматривая равновесие каждой балки отдельно, можно определить все пять неизвестных, т.е. задача является статически определенной. Сначала за объект равновесия принимаем балку ДЕ, поскольку к ней, кроме задаваемой силы $\vec{Q}$, будут приложены только три неизвестные силы: $\vec{R}_E$ и две реакции $\vec{X}_D, \vec{Y}_D$ со стороны балки ВД (Рис.13А), которые можно определить из уравнений равновесия :

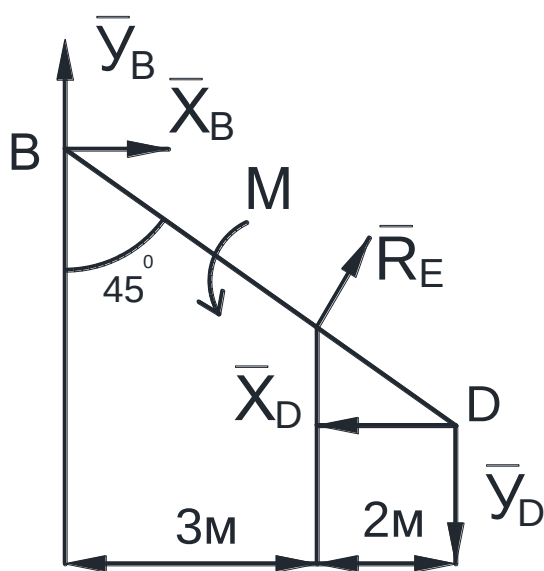


Рис. 13

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, X_D = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, Y_D - Q + R_E = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n m_{id}(\vec{F}_i) = 0, R_E \cdot 5 - Q \cdot 2 = 0,$$

Из этих уравнений находим, что $R_E = 4 \text{ кН}, X_D = 0, Y_D = 6 \text{ кН}$.

Далее в качестве объекта равновесия принимаем балку ВД. На нее

действует задаваемый момент M , $\vec{X}_b, \vec{Y}_b$ балки АВ, реакция $\vec{R}_c$ опоры С и реакции $\vec{X}'_D, \vec{Y}'_D$ балки ДЕ (Рис. 13Б). При этом по величине $X'_D = X_D, Y'_D = Y_D$, а направление соответствующих векторов противоположно, т.е. $\vec{X}'_D = -\vec{X}_D, \vec{Y}'_D = -\vec{Y}_D$.

Поскольку X_D и Y_D уже определены, то неизвестными будут только три величины: R_c, X_b, Y_b . Их находим из следующих уравнений статики:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad X_B + R_c \cos 45^\circ - X'_D = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad Y_B + R_c \cos 45^\circ - Y'_D = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n m_{iB}(\vec{F}_i) = 0, \quad R_c \frac{3}{\cos 45^\circ} - Y'_D - X'_D \cdot 5 + M = 0$$

Подставляя численные значения M, X'_D, Y'_D и разрешая систему уравнений, получим: $R_c = 2\sqrt{2}$ кН, $X_B = -2$ кН, $Y_B = 4$ кН.

Рассматриваем, наконец, равновесие балки АВ. К ней приложены задаваемая сила $\vec{P}$, реакции $\vec{X}'_B, \vec{Y}'_B$ балки ВД $\vec{X}'_B$ и реакции заделки $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_3$ (Рис. 13В). Неизвестными будут только X_A, Y_A, M_3 , поскольку величины $X'_B = X_B, Y'_B = Y_B$ определены из условий равновесия балки ВД. Отметим также, что вектор $\vec{X}'_B$ изображен противоположно истинному направлению. Это сделано, чтобы показать его противоположную направленность вектору $\vec{X}_B$, величина которого получилась отрицательной в процессе решения. Уравнения равновесия балки АВ надо составлять, учитывая то направление $\vec{X}'_B$, которое нарисовано, а численное значение подставлять $X'_B = -2$ кН.

Уравнения статики для балки АВ запишем в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad X_A - X'_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad Y_A - P - Y'_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n m_{ia} = 0, \quad M_3 - P \cdot 3 - Y'_B \cdot 5 = 0,$$

Откуда $X_A = -2 \text{ кН}$, $Y_A = 5 \text{ кН}$, $M_3 = 23 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Итак, для составной конструкции опорные реакции имеют следующие значения: $X_A = -2 \text{ кН}$; $Y_A = 5 \text{ кН}$; $M_3 = 23 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $R_c = 2\sqrt{2} \text{ кН}$; $R_E = 4 \text{ кН}$.

Для проверки результатов можно составить условия равновесия конструкции в целом (см. рис. 12) и подставить в них полученные значения реакций: они должны удовлетворяться тождественно:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, X_A + R_c \cos 45^\circ = -2 + 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \equiv 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, Y_A - P + R_c \cos 45^\circ - Q + R_E = 5 - 1 + 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 + 4 \equiv 0;$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_{ia} (\vec{F}_i) &= 0, M_3 - P \cdot 3 + R_c \left(\frac{3}{\cos 45^\circ} + 5 \cos 45^\circ \right) + M - Q \cdot 12 + R_E \cdot 15 \\ &= 23 - 1 \cdot 3 + 2\sqrt{2} \left(\frac{3 \cdot 2}{\sqrt{2}} + 5 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 18 - 10 \cdot 12 + 4 \cdot 15 \equiv 0 \end{aligned}$$

Силы взаимодействия между балками, естественно, в эти условия не вошли, поскольку они являются внутренними для этой

конструкции.

Заметим, что можно было вместо балки АВ рассматривать равновесие всей конструкции: число неизвестных и уравнений от этого не изменилось бы.

Пример 8. Два однородных стержня одинаковой длины соединены шарнирно в точке С и шарнирно закреплены в точках А и В. Вес каждого стержня равен Р. В точке С к системе стержней подвешен груз Q. Расстояние точки С до горизонтальной прямой АВ равно b, определить АВ = d, определить реакции шарниров А и В (Рис.14).

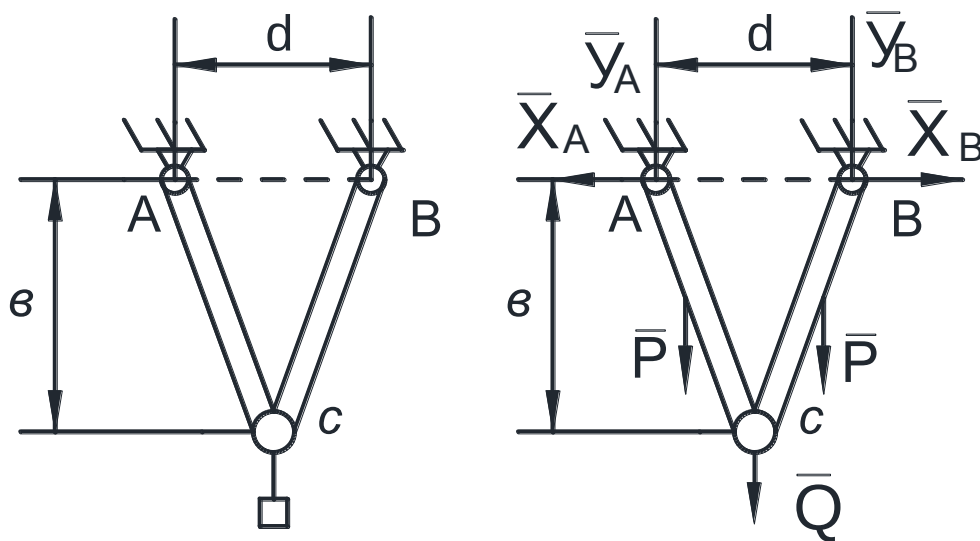


Рис. 14

Решение. Заменяя действие опор реакциями, рассмотрим сначала равновесие этой системы в целом. Уравнения равновесия для такой системы сил будут следующие:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -X_A - X_B = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + Y_B - 2P - Q = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_{ia}(\vec{F}_i) = 0; \quad -P \frac{d}{4} - Q \frac{d}{2} - P \frac{3d}{4} + Y_B d = 0;$$

Из этих уравнений находим:

$$Y_A = Y_B = P + \frac{q}{2} ;$$

$$X_A = X_B.$$

Для нахождения X_A рассмотрим теперь равновесие левого стержня. Сумма моментов всех сил, приложенных к левому стержню, относительно точки С должна быть равна нулю т.е.

$$\sum_{i=1}^n m_{ic} (\vec{F}_i)_{AC} = 0, \quad X_A \cdot b - Y_A \cdot \frac{d}{2} + P \cdot \frac{d}{4} = 0;$$

отсюда

$$X_A = X_b = \frac{d}{4b} (P + Q) .$$

4. РАСЧЕТ ФЕРМ

Многие современные несущие конструкции представляют собой стержневые системы. Под стержневой системой понимается всякая конструкция, состоящая из элементов, имеющих форму бруса. Если элементы конструкции работают в основном на растяжение или сжатие, то стержневая система называется фермой. Ферма состоит из прямых стержней, образующих треугольники (Рис.15).

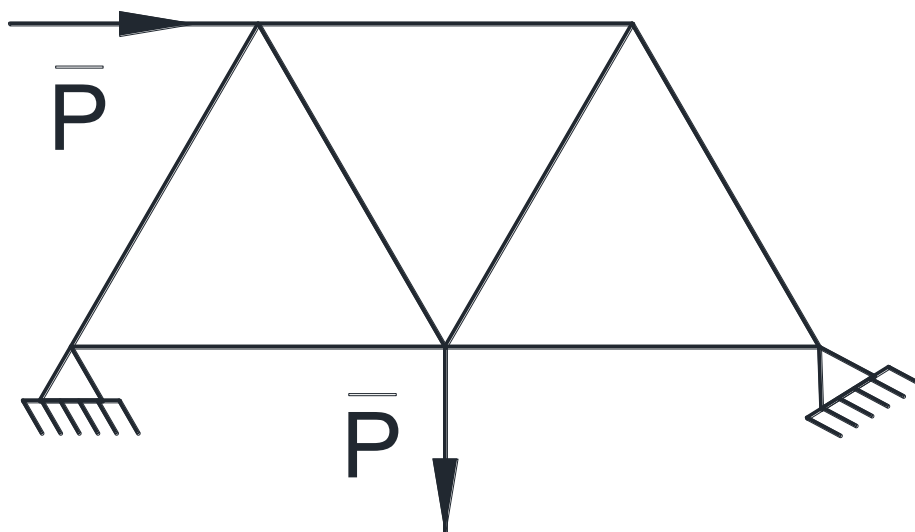


Рис. 15

Для фермы характерно приложение внешних сил в узлах. При расчете ферм предполагают, что стержни соединены идеальными шарнирами и поэтому только растягиваются или сжимаются, их весом пренебрегают.

Особую, наиболее простую для исследования, группу стержневых систем составляют плоские фермы. У плоской фермы оси всех составляющих стержней расположены в одной плоскости, в которой действуют и все внешние силы, включая реакции опор. Наряду с плоскими рассматриваются пространственные фермы, у которых оси составляющих стержней располагаются в различных плоскостях, а приложенные в узлах внешние силы произвольным образом ориентированы в пространстве.

Процесс построения простых ферм сводится к следующему: рассматривается некоторый основной треугольник; к нему двумя стержнями присоединяется новый узел; к полученной фигуре снова двумя стержнями присоединяется еще один новый узел и т.д. Если простая ферма содержит S стержней и n узлов, то между ними существует зависимость:

$$S = 2n - 3$$

Действительно, на образование нового треугольника затрачивается три стержня, следовательно, на присоединение $n-3$ узлов остается еще $s-3$ стержня. Но каждый новый узел присоединяется при помощи двух стержней, т.е. $\frac{1}{2}(s-3) = n-3$, откуда и получается соотношение (18).

Существует несколько способов решения ферм - определения усилий в стержнях. Основными из них являются: способ вырезания узлов и способ разрезов фермы (способ Риттера). При вырезании узлов фермы составляются уравнения равновесия для сил, сходящихся в каждом узле, т.е. реакций стержней и внешних нагрузок, к числу которых надо присоединять, конечно, и реакции опор. Заметим, что статика дает два уравнения равновесия в случае плоской системы сходящихся сил, поэтому число таких уравнений равновесия для n узлов будет $2n$. Однако не все эти уравнения будут независимы, так как в них будут содержаться и реакции опор фермы, получаемые из уравнений равновесия плоской системы сил, приложенной к ферме. Эти три уравнения должны быть исключены из составленных ранее $2n$ уравнений, т.е. усилий в стержнях определяются из $2n-3$ уравнений, и условие статической определимости фермы имеет вид $s=2n-3$; оно совпадает с зависимостью (18) между числом стержней и узлов в простой ферме. Это значит, что простые фермы являются статически определимыми. Расчет фермы следует начинать с узла, в котором сходятся не более двух стержней, и далее так переходить к следующим узлам, чтобы в них встречались не более двух стержней с неизвестными усилиями. Возможны случаи, когда отдельные стержни фермы не будут нагружены. Такие стержни называются нулевыми. При расчете ферм полезно иметь в виду леммы о нулевых стержнях:

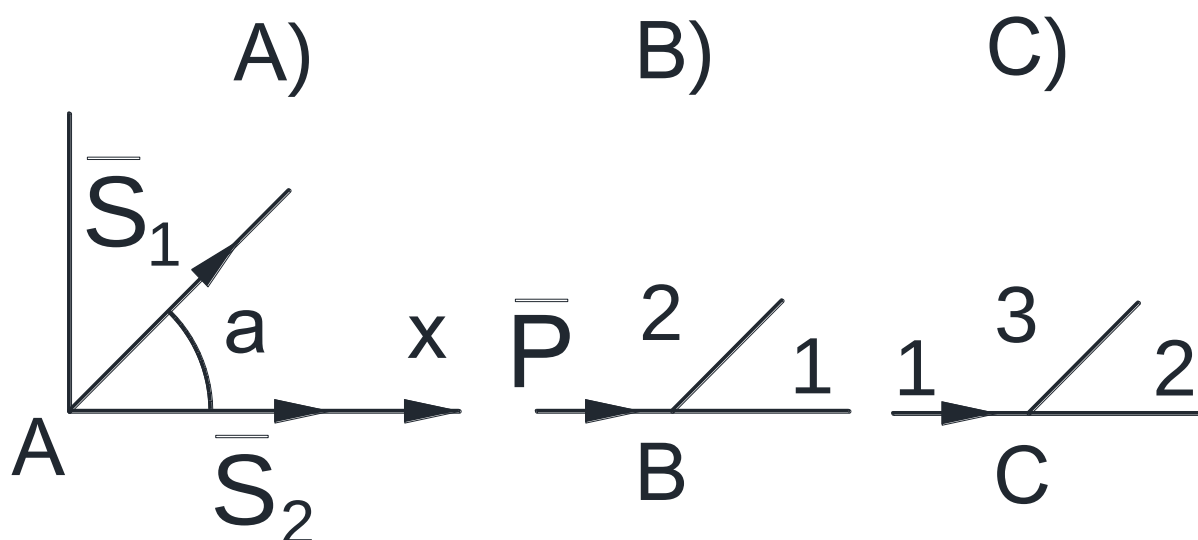


Рис. 16

1. Если к ненагруженному узлу примыкают два стержня, то они будут нулевыми (Рис. 16А). В самом деле, реакции этих стержней должны удовлетворять двум уравнениям равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad s_1 \cos \alpha + s_2 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad s_1 \sin \alpha = 0.$$

2. Если к ненагруженному узлу примыкают два стержня и внешняя нагрузка направлена вдоль одного из них (например, стержня 1), то второй стержень будет нулевым (Рис. 16Б).

3. Если к ненагруженному узлу примыкают три стержня, из которых два (например, стержни 1 и 2) направлены вдоль одной прямой, то третий стержень будет нулевым (Рис. 16В).

Справедливость второй и третьей лемм также вытекает из рассмотрения равновесия соответствующих узлов.

Пример 9. Проиллюстрируем способ вырезания узлов на примере определения усилий в стержнях фермы, изображенной на рис. 17 и нагруженной силой Р.

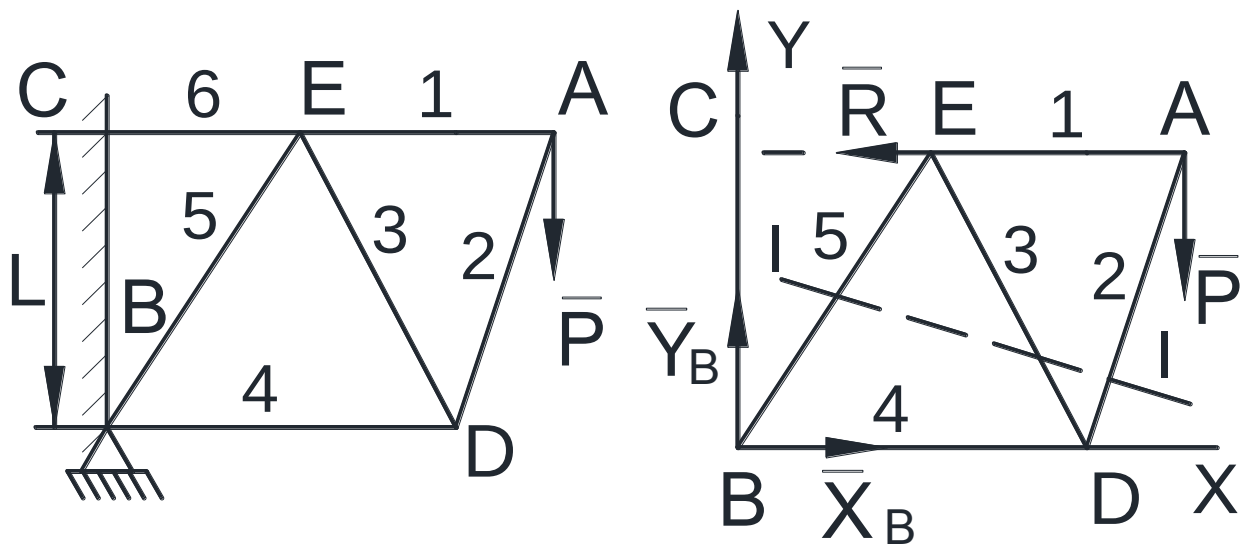


Рис. 17

Ферма состоит из пяти стержней 1-5, имеет четыре узла А, В, Е и Д, т.е. $s=5$, $n=4$. Условие $S=2n-3$ выполняется и ферма является статически определимой. Стержень 6 осуществляет связь фермы с неподвижным основанием.

Выбирая направление осей координат, определяем реакции опорного стержня би цилиндрического шарнира В из следующих уравнений равновесия фермы:

$$\sum_{i=1}^n m_{ic} (\vec{F}_i) = 0; \quad X_B \cdot l - P \cdot 2l = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_{ib} (\vec{F}_i) = 0; \quad R \cdot l - P \cdot 2l = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_B - P = 0;$$

Откуда $R=2P$; $X_B = 2P$; $Y_B = P$.

Далее переходим к определению усилий в стержнях фермы. Можно их находить с помощью графических построений многоугольников сил, а можно и аналитическим путем, составляя уравнения равновесия вырезаемых узлов. Первый метод имеет тот недостаток, что реакции стержней фермы приходится изображать в определенном масштабе дважды, а от этого уменьшается точность построения. Примем для данного примера аналитический метод. Предварительно замечаем, что леммы о нулевых стержнях не показывают наличие ненагруженных стержней.

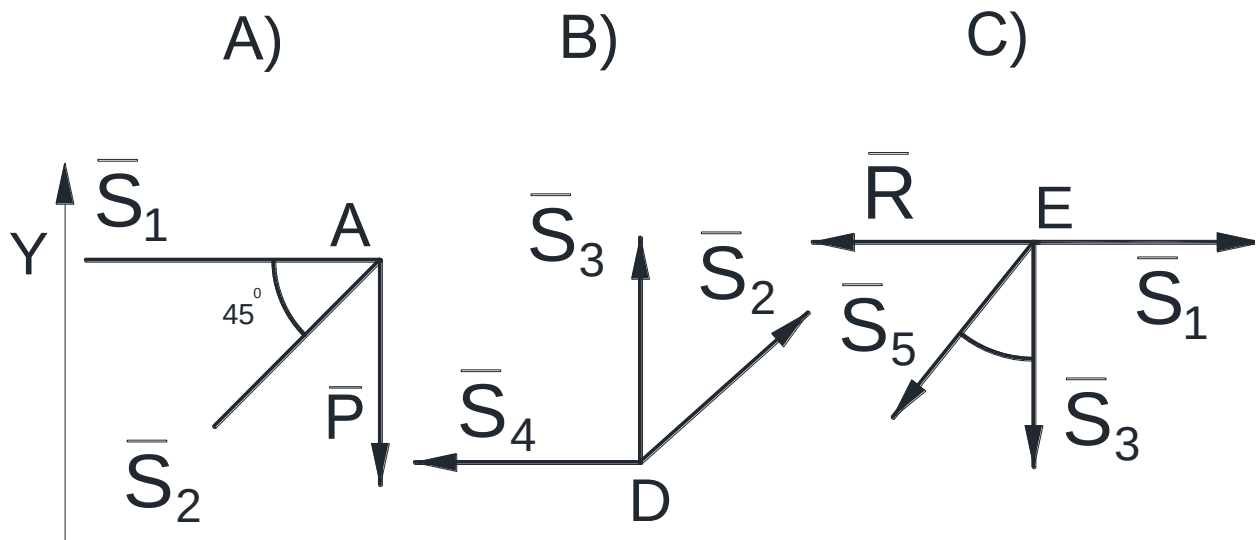


Рис. 18

Расчет начинаем с узла А (Рис. 18А).

Уравнения равновесия этого узла следующие:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -S_1 - S_2 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad -S_2 \cos 45^\circ - P = 0;$$

Откуда $S_1 = P$; $S_2 = -P\sqrt{2}$.

Для узла Д (Рис.18Б) имеем:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S_4 + S'_2 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_3 + S'_2 \cos 45^\circ = 0.$$

Учитывая, что $S'_2 = S_2 = -P\sqrt{2}$, находим: $S_3 = P$; $S_1 = -1$.

Проектируя силы, приложенные к узлу Е (Рис. 18В), на ось у, получаем усилие в пятом стержне:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -S_5 \cos 45^\circ - S'_3 = 0.$$

Откуда $S_5 = -P\sqrt{2}$.

Равновесие узла В можно не рассматривать, поскольку усилия во всех стержнях уже определены.

Результаты вычислений сводим в следующую таблицу:

Стержен	1	2	3	4	5
Усилие	P	$-P\sqrt{2}$	P	$-P$	$-P\sqrt{2}$

Очевидно, что стержни 1, 3, как и опорный стержень 6, растянуты, а

стержни 2, 4 и 5 сжаты. На самом деле усилия S_2, S_4, S_5 противоположны тому, как они изображены на рис. 18.

Другой упомянутый способ расчета ферм, способ Риттера, дает возможность определить усилие в любом стержне фермы, не зная усилия в других стержнях, он заключается в следующем. Через стержень, в котором требуется найти усилие, проводится сечение. Это сечение должно пересекать еще два стержня. К отсеченной части фермы будут приложены действующие на нее нагрузки, реакции опоры и реакции рассеченных стержней. При решении задачи все стержни предполагаются растянутыми, поэтому их реакции на рассматриваемую часть фермы, идущие вдоль стержней, изображаются силами, направленными в сторону отброшенной части фермы, и принимаются положительными. Знак “минус” в ответе укажет, что соответствующий стержень сжат. Реакции опор фермы должны быть найдены заранее, вследствие чего система сил, действующих на рассматриваемую часть фермы, содержит в качестве неизвестных только три реакции разрезанных стержней. Нужно составить три уравнения статики для их определения. Чтобы найти при этом каждую из неизвестных по отдельности и не решать совместной системы трех уравнений, следует пользоваться тремя уравнениями моментов (17). Усилие в каждом из стержней определяется из уравнения моментов относительно точки пересечения двух других стержней. Если же эти два стержня параллельны, то искомое усилие находится из уравнения проекций на ось, перпендикулярную к параллельным стержням. За объект равновесия принимается та часть фермы, на которой приложено меньшее число сил.

Определим, например, усилие в стержнях 2, 3, 5 фермы, рассмотренной выше. С этой целью проводим сечение I-I (см. рис. 17). Мысленно отделяем верхнюю часть фермы и принимаем ее за объект равновесия (рис. 19). На нее действуют известные силы $\vec{P}$ и $\vec{R}$ реакции $\vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_5$ отброшенной части фермы. Чтобы найти $\vec{S}_2$, составляем уравнение моментов относительно точки E:

$$\sum_{i=1}^n m_{iE}(\vec{F}_i) = 0; -Pl - s_2 \cos 45^\circ \cdot l = 0;$$

откуда $S_2 = -P\sqrt{2}$.

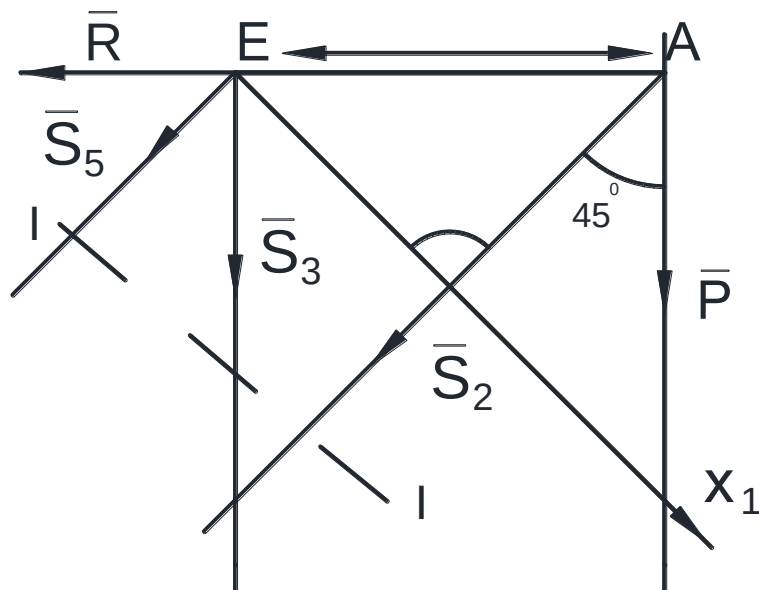


Рис. 19

Аналогично для определения $\vec{S}_5$ составляем уравнение моментов относительно точки 0 пересечения линий действия сил $\vec{S}_3$ и $\vec{S}_2$:

Учитывая, что $R = -2P$, находим, что $S_5 = -P\sqrt{2}$.

Силы $\vec{S}_5$ и $\vec{S}_2$ параллельны, поэтому реакцию определяем, составляя уравнение проекций на направление, перпендикулярное этим силам:

$$R \cos 45^\circ + S_3 \cos 45^\circ + P \cos 45^\circ = 0.$$

Отсюда $S_3 = P$.

Дополнительно заметим, что плечи сил в уравнениях моментов можно определять вычислением или находить непосредственно из рисунка, не учитывая масштаб.

В заключение укажем, что если требуется найти усилия в стержнях пространственной статически определимой фермы, то следует пользоваться методом вырезания узлов как наиболее простым. Начинать решение следует с узла, в котором сходятся не более трех стержней, поскольку при рассмотрении равновесия такого узла будем иметь пространственную систему сходящихся

сил, и можно составить три уравнения статики. Далее следует переходить к узлам, в которых встречается не более трех стержней с неизвестными усилиями. Реакции опор при определении усилий в стержнях, как и в случае плоской фермы, должны быть найдены заранее из шести уравнений статики, выражающих условия равновесия пространственной системы сил, приложенных к ферме.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕМ "ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ" И "ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ"

5.1. Центр параллельных сил

Пусть к твердому телу приложена система параллельных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, приводимая к одной равнодействующей, величина и направление которой определяется формулой

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Зафиксируем точки приложения сил $A_1, A_2, \dots, A_n$, т.е. откажемся от возможности переносить силы вдоль их линий действия и введем прямоугольную систему координат, в которой эти точки будут иметь координаты x_i, y_i, z_i . ($i=1, 2, \dots, n$). Нетрудно показать, что при совместном повороте всех сил на один и тот же произвольный угол так, чтобы сохранилась их параллельность, равнодействующая повернется на тот же угол вокруг некоторой точки C , называемой центром параллельных сил (Рис. 20). Будем определять положение точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ в пространстве вектор-радиусами, проведенными из начала координат O . Тогда выражение для вектор-радиуса центра параллельных сил точки C можно представить в следующем виде:

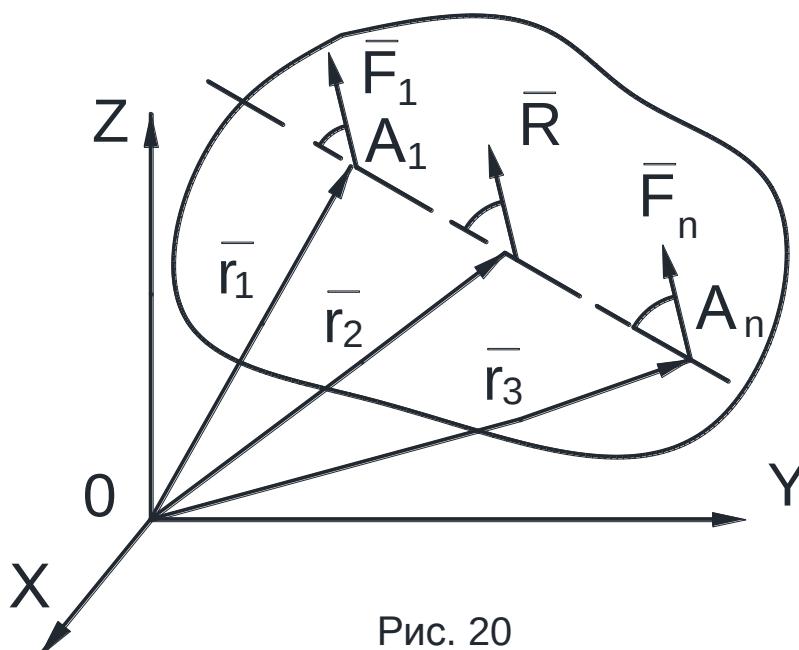


Рис. 20

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i F_i^*}{\sum_{i=1}^n F_i^*}$$

Здесь через F_i^* обозначена алгебраическая величина силы $\vec{F}_i$, равная F_i , если направление силы совпадает с условно принимаемым положительным направлением действия силы, и равная $-F_i$, если направление силы противоположно. Нетрудно видеть, что вектор-радиус $\vec{r}_c$ не зависит от положительного направления силы. В самом деле, если, например, за положительное направление принять направление равнодействующей $\vec{R}$, а потом изменить его на обратное, то в векторном равенстве (19) изменятся знаки перед всеми величинами F_i^* , это эквивалентно умножению числителя и знаменателя правой части формулы (19) на -1. Проектируя векторное равенство (19) на оси координат и учитывая, что проекции вектор-радиуса $\vec{r}_i$ на оси координат представляют не что иное, как координаты точки A_i :

$$r_{ix} = x_i; r_{iy} = y_i; r_{iz} = z_i,$$

получим формулы для координат точки Центра параллельных сил:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i^*}{\sum_{i=1}^n F_i^*}; y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i^*}{\sum_{i=1}^n F_i^*}; z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i F_i^*}{\sum_{i=1}^n F_i^*} \quad (20)$$

5.2. Центр тяжести объема, поверхности, линии

Предположим, что параллельные силы непрерывно распределены по объему тела и имеют одинаковое направление. Это значит, что к каждому из малых (элементарных) объемов $\Delta\vartheta_i$, на которые можно разбить тело, приложена сила $F_i^* = F_i = P_i \Delta\vartheta_i$, пропорциональная по величине рассматриваемому объему. Величина P_i определяет силу, отнесенную к единице объема, и может изменяться при переходе от одной точки тела к другой. Формулы (18) при этом записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i P_i \Delta\vartheta_i}{\sum_{i=1}^n P_i \Delta\vartheta_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i P_i \Delta\vartheta_i}{\sum_{i=1}^n P_i \Delta\vartheta_i}, \quad z_c \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i P_i \Delta\vartheta_i}{\sum_{i=1}^n P_i \Delta\vartheta_i} \end{aligned} \quad (21)$$

Наиболее важное приложение имеет случай, когда величина P_i есть вес единицы объема, т.е. удельный вес тела. Тогда формулы (21) дают координаты центра параллельных сил тяжестичастиц тела, или, коротко говоря, координаты центра тяжести тела.

В случае однородного тела P_i постоянно (не зависит от координат) и может быть вынесено за знак суммы в числителе и знаменателе, а затем сокращено. Таким образом, получаем формулы для координат центра тяжести однородного тела:

$$x_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n x_i \Delta\vartheta_i, \quad y_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n y_i \Delta\vartheta_i, \quad z_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n z_i \Delta\vartheta_i \quad (22)$$

(через $V = \sum_{i=1}^n \Delta\vartheta_i$ обозначен объем тела).

Говорят также, что формулы (22) определяют центр тяжести объема.

Если параллельные силы непрерывно распределены по некоторой

поверхности S , то в формулах (21) надо положить $F_i^* = F_i = \delta_i \Delta S_i$ (δ_i – сила, отнесенная к единице площади поверхности, ΔS_i – элементарные площади поверхности, на которые мысленно разбита поверхность). Считая δ_i весом единицы площади, будем иметь дело с центром тяжести тонкой плоской пластины или с центром тяжести неплоской тонкой оболочки. При однородном материале и постоянной толщине пластины или оболочки δ_i будет постоянным, следовательно, формулы

$$x_c = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n x_i \Delta S_i, y_c = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n y_i \Delta S_i, z_c = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n z_i \Delta S_i \quad (23)$$

определяют координаты центра тяжести однородной поверхности, площадь которой $S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i$.

Параллельные силы могут быть непрерывно распределены и вдоль некоторой линии, как, например, силы тяжести, приложенные к тонкой проволоке, ось которой представляет данную линию. Соответственно, в формулах (21) надо положить $F_i^* = F_i = q_i \Delta l_i$ (здесь q_i – вес единицы длины проволоки – погонный вес, Δl_i – элементарная длина участков, на которые она разбита). При однородном материале и постоянном поперечном сечении q_i будет постоянной, и формулы для координат центра тяжести однородной линии примут следующий вид:

$$x_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n x_i \Delta l_i; y_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n y_i \Delta l_i; z_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n z_i \Delta l_i; \quad (24)$$

($L = \sum_{i=1}^n \Delta l_i$ – длина линии). В случае плоской кривой, расположенной в плоскости xu , получим $z_c = 0$.

Пользуясь приведенными формулами для определения центра тяжести объема, поверхности, линии, следует учитывать, что они являются приближенными, так как значения координат x_i, y_i, z_i , определяются соответственно с точностью до объемов, поверхностей $\Delta \vartheta_i$ или длин Δl_i . Точные выражения координат

центра тяжести можно получить в результате предельного перехода, устремляя в формулах (22),(23),(24) число n к бесконечности, а величины $\Delta\vartheta_i$, ΔS_i и Δl_i - к нулю. Пределы такого рода, как известно, называются определенными интегралами.

Для центра тяжести объема точные формулы выражаются объемными интегралами и имеют вид:

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint_{(\vartheta)} x d\vartheta, y_c = \frac{1}{V} \iiint_{(\vartheta)} y d\vartheta, z_c = \frac{1}{V} \iiint_{(\vartheta)} z d\vartheta, \quad (25)$$

Центр тяжести поверхности вычисляется с помощью поверхностных интегралов по следующим формулам:

$$x_c = \frac{1}{S} \iint_{(s)} x dS, y_c = \frac{1}{S} \iint_{(s)} y dS, z_c = \frac{1}{S} \iint_{(s)} z dS.$$

Наконец, для определения центра тяжести линии используются криволинейные интегралы, и соответствующие формулы имеют вид:

$$x_c = \frac{1}{L} \int_{(l)} x dl, y_c = \frac{1}{L} \int_{(l)} y dl, z_c = \frac{1}{L} \int_{(l)} z dl \quad (26)$$

5.3. Методы определения центра тяжести однородных тел

В практических приложениях определение центра тяжести тел может быть произведено во многих случаях без применения методов интегрального исчисления, если применять следующие положения:

1. Пусть однородное тело имеет плоскость симметрии, которую можно принять за плоскость x, y . Это значит, что каждому элементу

объема $\Delta\vartheta_i$ с координатами x_i, y_i, z_i будет соответствовать равный по величине элемент объема с координатами $x_i, y_i, -z_i$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^n z_i \Delta\vartheta_i = 0,$$

откуда $Z_c = 0$, т.е. центр тяжести лежит в плоскости симметрии.

При наличии двух плоскостей симметрии центр тяжести будет находиться на прямой их пересечения; в частности, при наличии оси симметрии центр тяжести будет расположен на этой оси. Наконец, в случае трех плоскостей симметрии центр тяжести совпадает с точкой пересечения этих плоскостей. В симметричной фигуре центр тяжести будет лежать в плоскости этой Фигуры на ее оси симметрии, а при двух осях симметрии - совпадать с точкой их пересечения.

2. Если тело может быть разбито на такие части, центры тяжести которых известны, то координаты центра тяжести всего тела будут определяться по формулам (22). Для вычисления центра тяжести поверхности или линии в этом случае следует пользоваться формулами (23) и (24). При наличии в теле полости можно пользоваться теми же формулами, применяя прием, который в некоторых случаях упрощает вычисления. Разбивают тело на две части, одна из которых представляет сплошное тело, включая сюда и полость с положительным объемом, а другая - полость с отрицательным объемом. Для случая однородной пластины аналогично вводится понятие об отрицательной площади.

3. Определение центров тяжести линий и площадей в некоторых случаях может быть облегчено, если пользоваться теоремами Паппа-Гульдина.

Теорема 1. Боковая поверхность тела вращения, описанная дугой плоской кривой, которая вращается вокруг оси, расположенной в плоскости кривой и ее не пересекающей, равна длине дуги, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести дуги (Рис. 21):

$$S = 2\pi x_c L$$

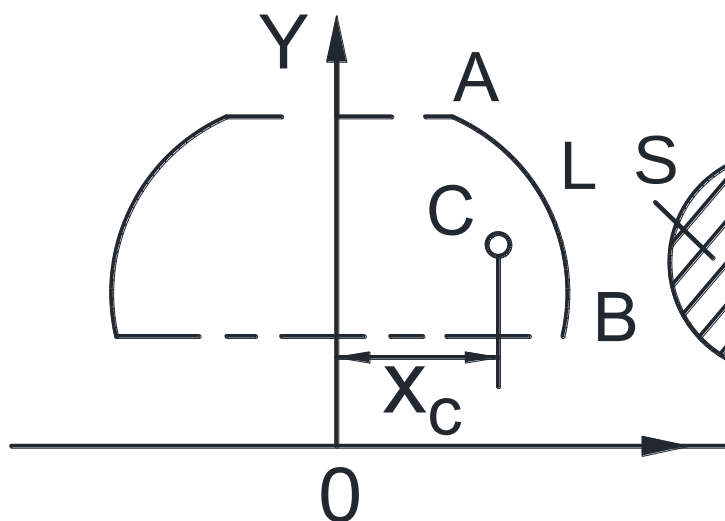


Рис. 21

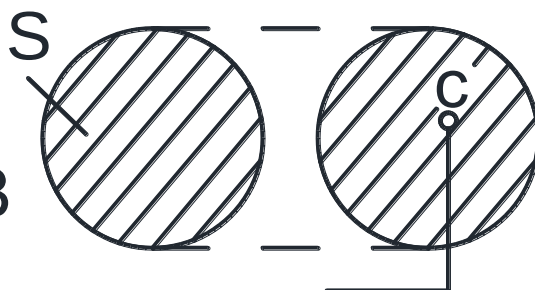


Рис. 22

Теорема 2. Объем тела вращения, описанного плоской фигурой, которая вращается вокруг оси, расположенной в плоскости фигуры и не пересекающей ее контуры, равен произведению площади фигуры на длину пути, описанного ее центром тяжести (Рис. 22):

$$V = 2\pi x_c S$$

5.4. Примеры определения центров тяжести однородных линий, плоских фигур и тел

Пример 1. Определим центр тяжести площади треугольника. С этой целью разобьем его прямыми, параллельными основанию, на бесконечно тонкие полоски (Рис. 23). Центр тяжести каждой такой полоски находится в ее середине, а середина всех прямых, параллельных основанию треугольника, лежит на его медиане. Следовательно, центр тяжести треугольника должен лежать на этой медиане. Аналогичное рассуждение применимо и к медиане другой стороны треугольника, поэтому центр тяжести треугольника должен лежать в точке пересечения медиан. Отсюда следует

также, что центр тяжести треугольника находится на расстоянии, равном одной трети высоты треугольника от соответствующего основания.

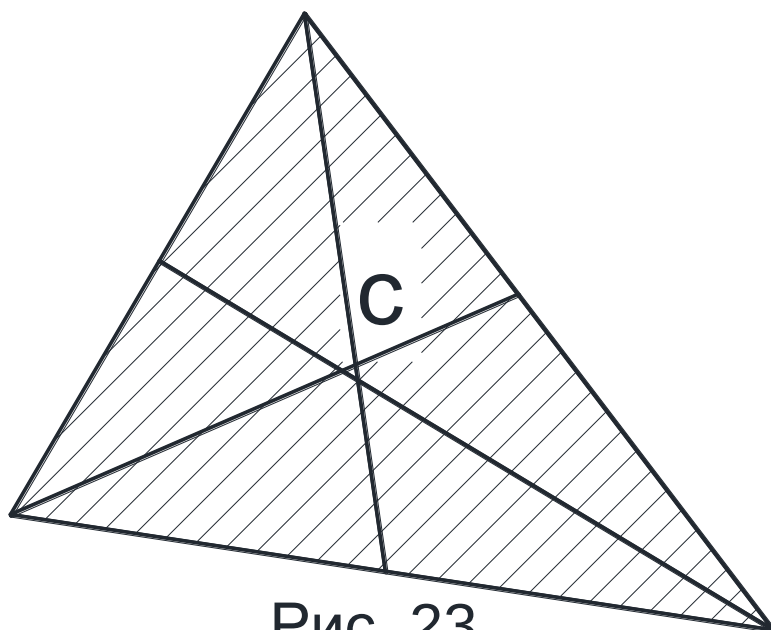


Рис. 23

Пример 2. Пусть из прямоугольной однородной пластинки вырезаны треугольник и отверстие так, как это указано на рис. 24 (размеры даны в сантиметрах). Определим координаты центра тяжести оставшейся части.

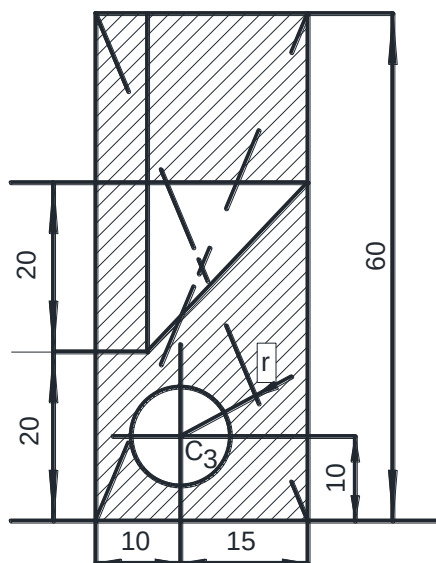


Рис. 24

Решение. При вычислении используем метод отрицательных площадей, т.е. будем считать, что искомый центр тяжести есть центр тяжести трех фигур сплошного прямоугольника площадью S_1 , треугольника с отрицательной площадью S_2 , круга с отрицательной площадью S_3 . Имеем:

$$S_1 = 25 \cdot 50 = 1250 \text{ см}^2;$$

$$S_2 = -\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 = -200 \text{ см}^2;$$

$$S_3 = -3,14 \cdot 4^2 = -50,2 \text{ см}^2.$$

Координаты центров тяжести C_1, C_2, C_3 площадей S_1, S_2, S_3 будут:

$$x_1 = 12,5 \text{ см}; \quad x_2 = 11,6 \text{ см}; \quad x_3 = 10 \text{ см};$$

$$y_1 = 25 \text{ см}; \quad y_2 = 33,4 \text{ см}; \quad x_3 = 25 \text{ см}.$$

В соответствии с формулами (23) получим, что искомый центр тяжести Сопределяется следующими координатами:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} \\ &= \frac{12,5 \cdot 1250 - 11,6 \cdot 200 - 10 \cdot 50,2}{1250 - 200 - 50,2} = 12,8 \text{ см}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{25 \cdot 1250 - 33,4 \cdot 200 - 25 \cdot 50,2}{1250 - 200 - 50,2} \\ &= 24,1 \text{ см}. \end{aligned}$$

Пример 3. Определим положение центра тяжести полукруга радиуса R (Рис. 25). В силу симметрии $y_c = 0$, т.е. центр тяжести расположен на оси x . Чтобы найти координату x_c , воспользуемся второй теоремой Паппа-Гульдена.

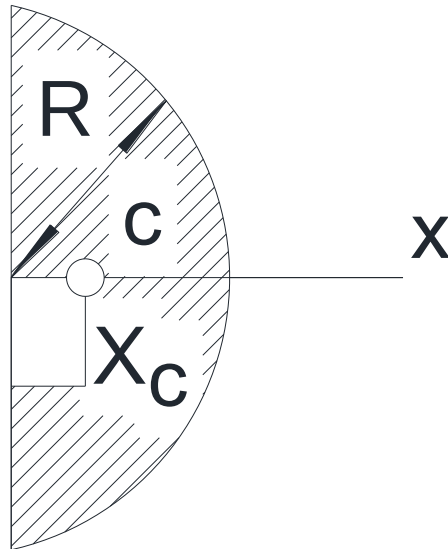


Рис. 25

Представим себе, что полукруг вращается вокруг своего диаметра. В результате получится шар, объем которого

$$V = \frac{3}{4}\pi R^3.$$

Площадь полукруга $S = \frac{\pi R^2}{2}$, а длина окружности, описываемой его центром тяжести при вращении, $l = 2\pi x_c$. На основании теоремы Паппа-Гульдена находим, что

$$x_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}$$

Пример 4. Рассмотрим двухопорную балку АВ, которая нагружена равномерно распределенными силами собственного веса (Рис. 26А). Эти силы характеризуются интенсивностью нагрузки q Н/м, т.е. силой, приходящейся на единицу длины балки.

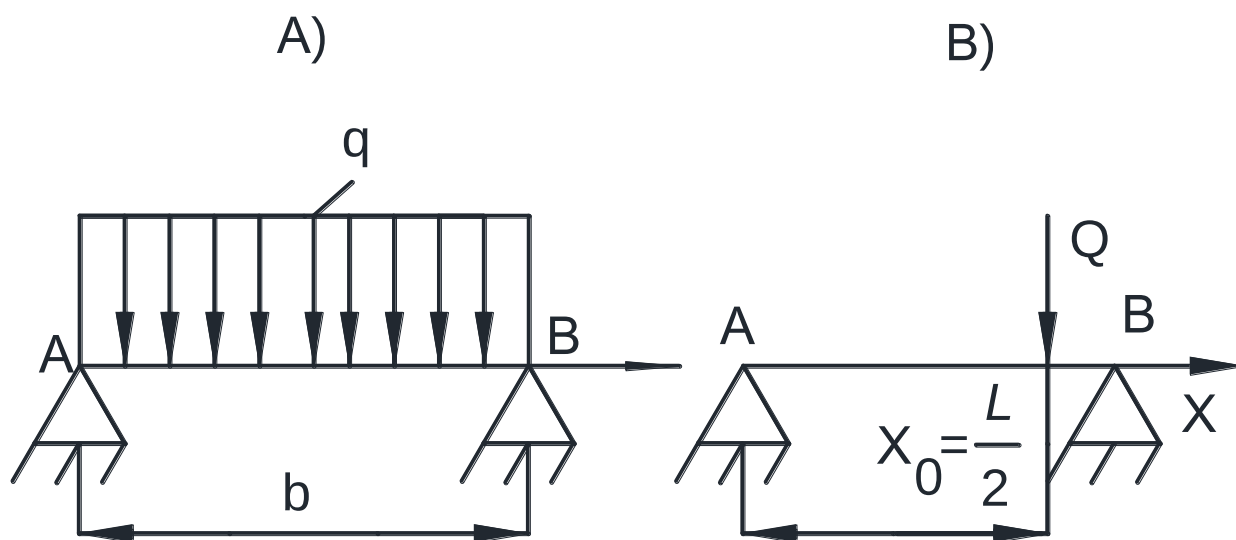


Рис. 25

Равнодействующая распределенных сил будет равна силе $Q=ql$ (Рис. 26Б). Точка x_c приложения равнодействующей силы Q на оси x балки определяется как координата центра тяжести однородной линии в соответствии с первой из формул (26):

$$x_c = \frac{1}{l} \int_0^l x dx = \frac{l^2}{2l} = \frac{l}{2}.$$

Пример 5. Рассмотрим несколько более сложный пример. Докажем, что центр тяжести конуса возвышается над плоскостью основания на $H/4$, где H - высота конуса (Рис. 27). Направим ось по высоте H вверх, расположив начало O на основании конуса, площадь которого обозначим через S . В соответствии с последней формулой (20) можем написать:

$$z_c = \frac{1}{V} \iiint_{(\vartheta)} z d\vartheta = \frac{1}{9} \int_0^H z \cdot s(z) dz,$$

где $s(z)$ - площадь сечения, расположенного на расстоянии от основания;

$s(z)dz$ - элементарный объем dV .

По известной теореме

$$\frac{s(z)}{S} = \frac{(H - Z)^2}{H^2},$$

откуда $S(z) = \frac{S}{H^2} (H - Z)^2$.

Поэтому интеграл в выражении для Z_c будет равен:

$$\int_0^H z \cdot s(z) \cdot dz = \frac{S}{H^2} \int_0^H z \cdot (H - Z)^2 dZ = \frac{SH^2}{12}$$

Объем конуса можно вычислить как интеграл:

$$V = \int_0^H S(Z) dZ = \frac{S}{H^2} \int_0^H (H - Z)^2 dZ = \frac{1}{3} SH$$

Учитывая последнее выражение, получим, что координата центра тяжести Z_c определяется по формуле

$$Z_c = \frac{\frac{SH^2}{12}}{\frac{1}{3}SH} = \frac{H}{4},$$

откуда и следует сказанное выше.

Изложенные примеры указывают на многообразие приемов, с помощью которых может быть определен центр тяжести тела, фигуры, линии. Знание этих приемов и умение их применять в практической деятельности, как и знание основных положений статики твердого тела, являются обязательными требованиями, предъявляемыми к современному инженеру.

Библиографический список

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - СПб.: Политехника, 2009. Ч.1,2.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 2011.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 2010. Ч.1, 2.

Содержание

1. Приведение произвольной системы сил к простейшему виду	3
2. Условия равновесия системы сил.....	14
3. Равновесие плоской системы сил, приложенных к системе твердых сочлененных тел.....	29
4. Расчет ферм.....	35
5. Методические указания по изучению тем “центр параллельных сил” и “центр тяжести”	44
Библиографический список.....	56