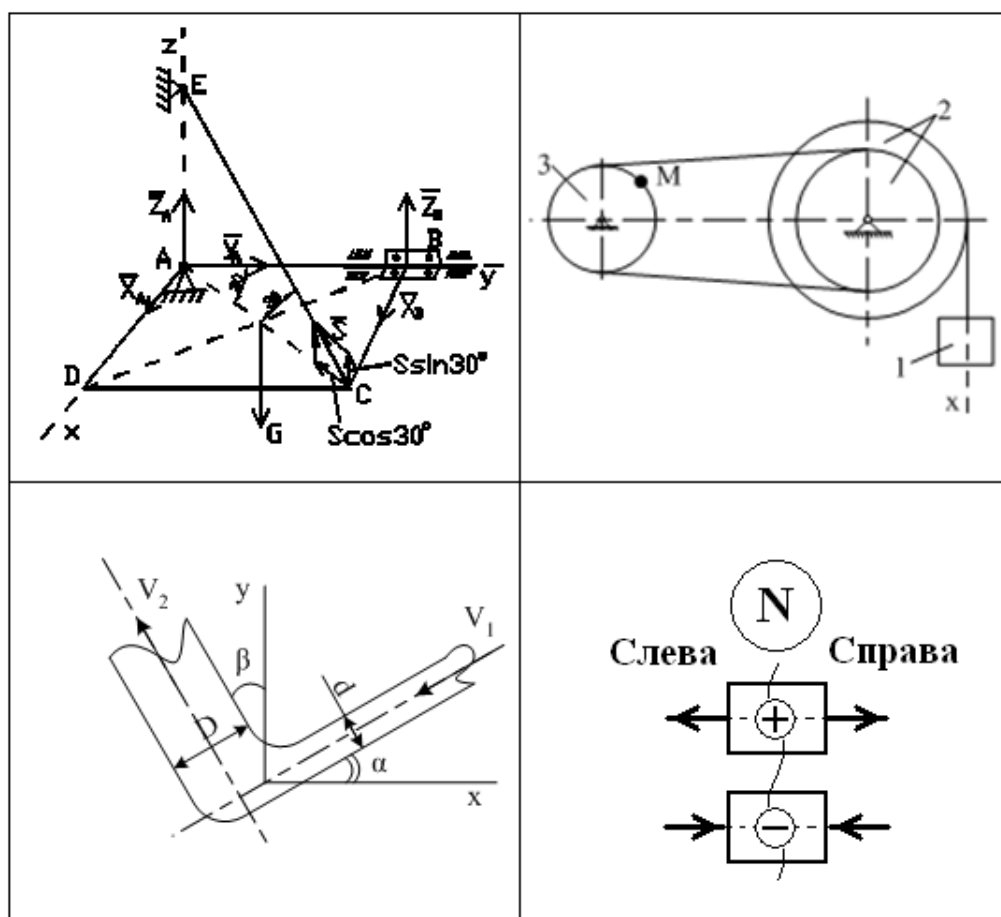


П. В. Кауров, В. Е. Головкин, И. В. Ключкин

МЕХАНИКА

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ для самостоятельной работы студентов

Учебно-методическое пособие



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

П. В. Кауров, В. Е. Головко, И. В. Ключкин

МЕХАНИКА

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
для самостоятельной работы студентов

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2016

УДК 539.4 (075)
ББК 30.121я7
К 301

Кауров П. В., Головки В. Е., Ключкин И. В.

Механика. Примеры решения задач для самостоятельной работы студентов: учебно-методическое пособие / ВШТЭ СПбГУПТД. СПб., 2016. – 50 с.

В настоящем учебно-методическом пособии приводятся примеры решения задач по 4 разделам курса механики. В начале каждого раздела кратко изложены основные теоретические положения, необходимые для решения каждой задачи. Пособие предназначается для самостоятельной работы студентов, изучающих механику.

Рецензенты: заслуженный работник высшей школы РФ, д-р техн. наук, профессор кафедры системного анализа Санкт - Петербургского государственного технологического института (технического университета) В.А. Холоднов;

профессор кафедры инженерной графики и автоматизированного проектирования Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД, канд. техн. наук И. А. Шумейко.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД в качестве учебно-методического пособия.

Редактор и корректор Н. П. Новикова
Техн. редактор Л. Я. Титова

Темплан 2016 г., поз. 117.

Подп. к печати 22.11.16. Формат 60×84/16. Бумага тип. №1. Печать офсетная. Печ. л. 3,25. Уч.- изд. л. 3,25. Тираж 100 экз. Изд № 117. Цена "С". Заказ .

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД, СПб., 198095, ул. Ивана Черных, 4.

© Высшая школа технологии и энергетики
СПбГУПТД, 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Механика играет весьма существенную роль в подготовке студентов любого профиля.

Настоящее учебное пособие содержит примеры решения задач по четырем темам курса механики: статике, кинематике, динамике и сопротивлению материалов.

Статикой называется раздел механики, в котором изучаются способы преобразования систем сил в эквивалентные и рассматриваются задачи на равновесие твердых тел.

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.

Динамикой называется раздел механики, в котором изучаются общие законы движения тел с учетом их массы и действующих на них сил.

Сопротивлением материалов называется раздел механики, в котором изучаются способы расчета элементов конструкций на прочность и жесткость.

1. СТАТИКА

Системой сходящихся сил называется такая система сил, линии действия которой пересекаются в одной точке.

Сходящиеся силы находятся в равновесии, если их равнодействующая равна нулю:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = 0, \quad (1)$$

Если все силы лежат в одной плоскости, то проецируя уравнение (1) на оси координат, расположенные в этой плоскости, получаем условия равновесия для плоской системы сходящихся сил:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0. \quad (2)$$

Если же имеет место **пространственная система сил**, то все силы проецируются на три взаимно перпендикулярные оси, и условия равновесия пространственной системы сходящихся сил имеют вид:

$$\sum P_{ix}=0; \quad \sum P_{iy}=0; \quad \sum P_{iz}=0. \quad (3)$$

При приведении произвольной системы сил к центру получаем главный вектор, равный геометрической сумме сил, входящих в систему:

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i, \quad (4)$$

и главный момент для плоской системы, равный алгебраической сумме моментов всех сил относительно произвольного центра:

$$M_O = \sum_{i=1}^n M_{iO}, \quad (5)$$

а для пространственной системы сил – геометрической сумме моментов:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iO}. \quad (6)$$

Условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\vec{R}^* = 0; M_O = 0. \quad (7)$$

При проецировании уравнений (7) на две взаимно перпендикулярные оси получаем три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iO} = 0. \quad (8)$$

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\vec{R}^* = 0; \vec{M}_O = 0. \quad (9)$$

При проектировании уравнения (9) на три взаимно перпендикулярные оси получаем шесть уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

1.1. Плоская система сходящихся сил

Задача 1.1.1

Груз $P=20$ кН поднимается краном ВАС посредством цепи, перекинутой через блок А и через блок D, который укреплен на стенке так, чтобы угол $CAD=30^\circ$ (рис. 1). Углы между стержнями крана: $CBA=60^\circ$, $ACB=30^\circ$. Определить усилия Q_1 и Q_2 в стержнях АВ и АС.

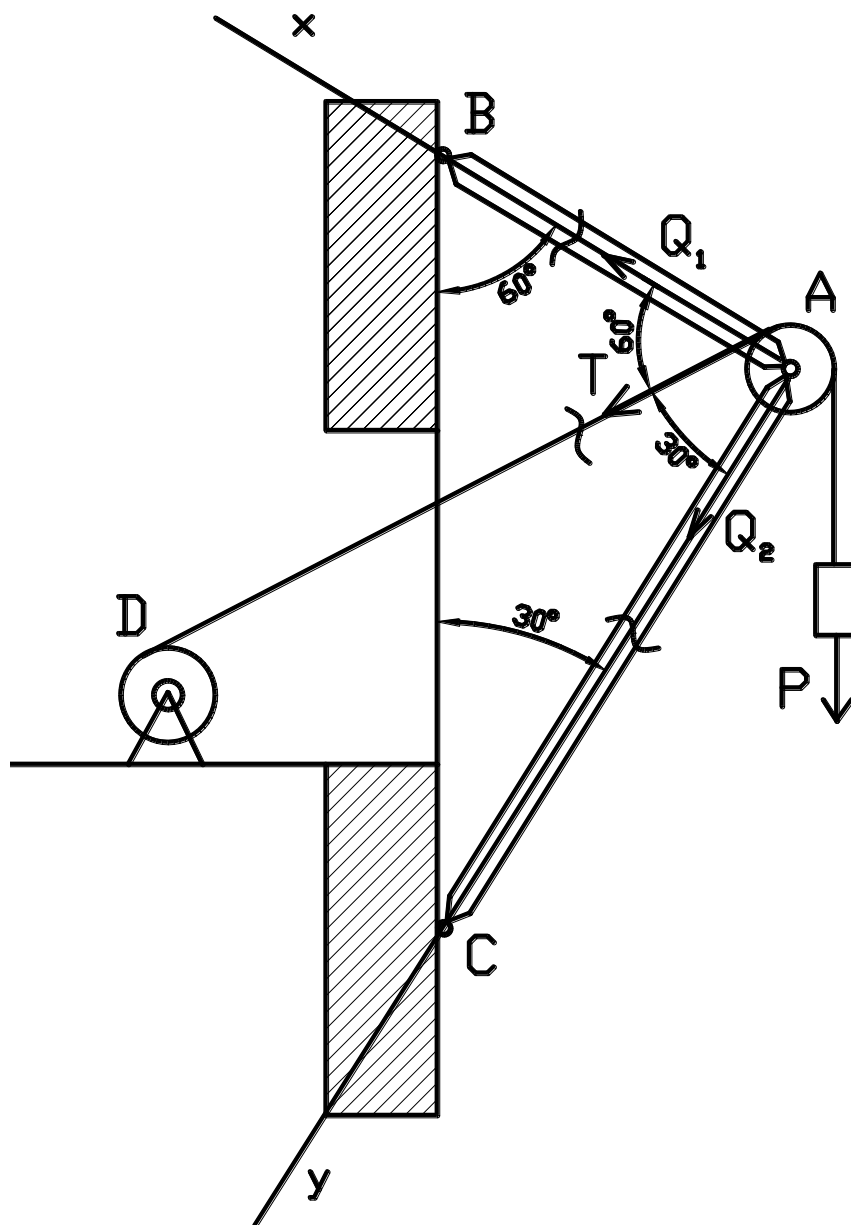


Рисунок 1

Решение

1. Составляем расчётную схему. Блок А принимаем за материальную точку, которая находится в равновесии под действием активной силы P и реакций связей Q_1 , Q_2 , T . Направления усилий Q_1 и Q_2 задаются в предположении, что стержни AB и AC растянуты.

Так как $BAC=90^\circ$, то выбираем систему координат XAY . Стержень AB совпадает с осью X , а стержень AC - с осью Y .

Все силы: P , Q_1 , Q_2 , T лежат в одной плоскости, и линии их действия пересекаются в точке A .

2. Составляем уравнение равновесия для плоской системы сходящихся сил:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad Q_1 + T \cdot \cos 60^\circ - P \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad T \cdot \cos 30^\circ + Q_2 + P \cdot \cos 30^\circ = 0 \quad (12)$$

3. Определяем искомые величины. Так как цепь в блоке А не закреплена, то усилия по всей длине цепи одинаковы, то есть

$$T = P.$$

$$\text{Из (11):} \quad Q_1 = P \cdot \cos 60^\circ - T \cdot \cos 60^\circ = 0, \quad T = P = 20 \text{ кН.}$$

$$\text{Из (12):} \quad Q_2 = -P \cdot \cos 30^\circ - T \cdot \cos 30^\circ = -2 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -34,6 \text{ кН.}$$

Усилия: $Q_1 = 0$ – стержень АВ не нагружен, $Q_2 = -34,6$ кН – стержень АС сжат.

Ответ: $Q_1 = 0$; $Q_2 = -34,6$ кН.

Задача 1.1.2

К шарниру А стержневого шарнирного четырёхугольника САВД, сторона СД которого закреплена, приложена сила $Q = 100$ Н под углом 45° к АВ (рис. 2). Определить величину силы R , приложенной в шарнире В под углом 30° к АВ таким образом, чтобы четырёхугольник САВД был в равновесии, если углы $\angle CAB = 135^\circ$; $\angle DBA = 90^\circ$.

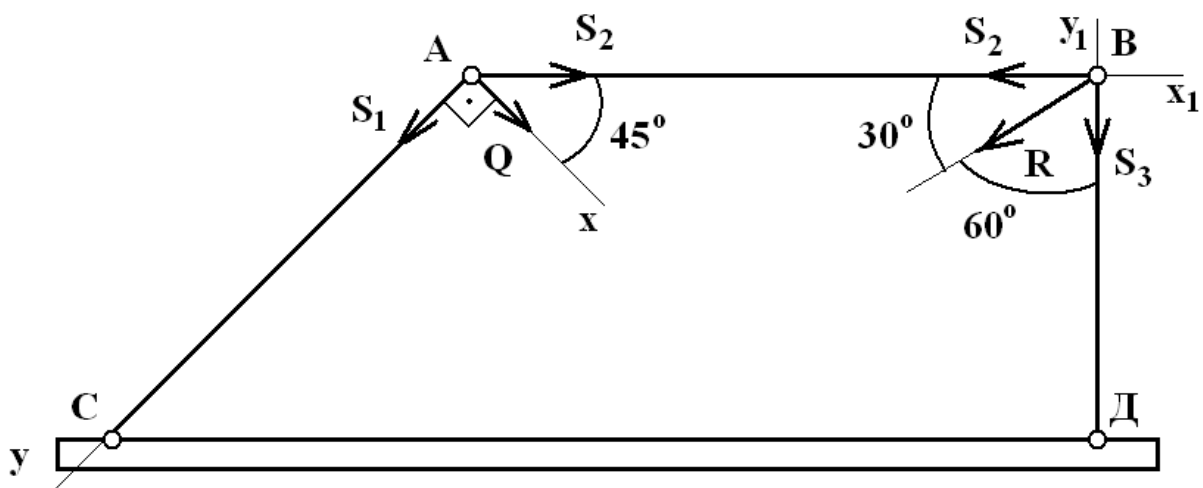


Рисунок 2

Решение

Задача решается методом «вырезания» узлов А и В. Усилия в разрезанных стержнях направляются от узлов А и В внутрь стержней, предполагая стержни работающими на растяжение.

В начале вырезается узел А. В этом узле надо определить силу S_2 , чтобы перейти к рассмотрению узла В, где приложена неизвестная сила R .

Составляем уравнения проекций сил на ось X , перпендикулярную усилию S_1 , чтобы это усилие не проецировалось на данную ось X :

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad Q + S_2 \cos 45^\circ = 0;$$

$$S_2 = - \frac{Q}{\cos 45^\circ} = - \frac{100}{0,707} = -141 \text{ Н.}$$

Рассматриваем равновесие сил, приложенных в узле В. Составляем уравнения проекций на ось x_1 , перпендикулярную усилию S_3 . (В данной задаче усилие S_3 определять не требуется).

$$\sum_{i=1}^n P_{ix_1} = 0; \quad -S_2 - R \cos 30^\circ = 0;$$

$$R = - \frac{S_2}{\cos 30^\circ} = - \frac{-141}{0,866} = 163 \text{ Н.}$$

Ответ: $R = 163 \text{ Н.}$

1.2. Равновесие твердого тела под действием плоской системы сил

Задача 1.2.1

Определить реакции опор А и В балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы, и пары сил с моментом M (рис. 3).

Направления нагрузок и геометрические размеры указаны на схеме.

Решение

Балка находится в равновесии под действием задаваемых нагрузок: силы P , момента M и реакций связей в шарнирах А и В. В шарнирно-неподвижной опоре А модуль и направление реакции определяются через её проекции на оси координат X_A и Y_A , так как её направление заранее неизвестно. В шарнирно-подвижной опоре В реакция R_B направлена перпендикулярно плоскости качения катков.

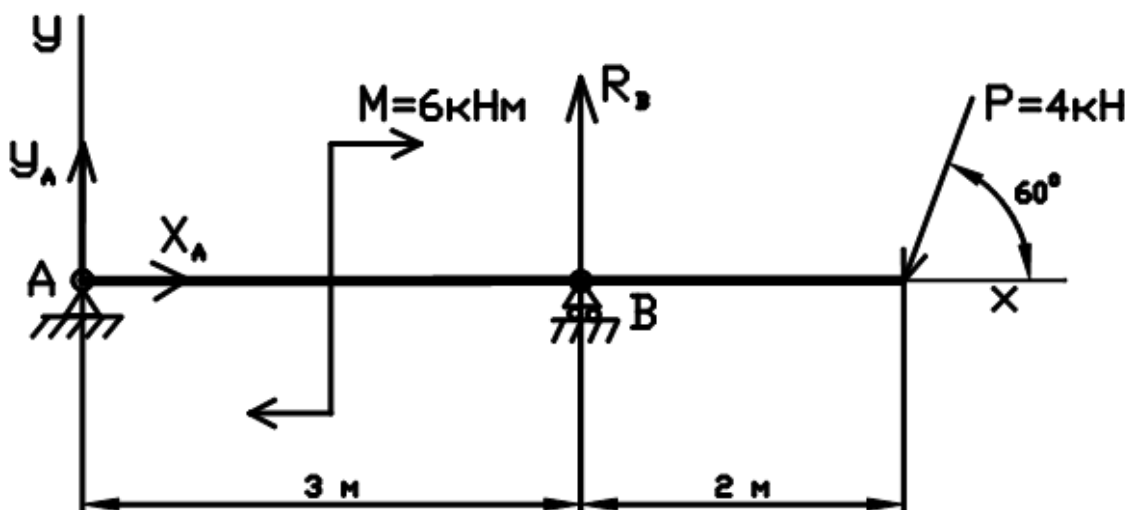


Рисунок 3

Составляем расчётную схему. Проводим оси координат X , Y . Опорные реакции X_A , Y_A , R_B направляем по положительному направлению осей. Отбрасываем связи, наложенные на балку, и заменяем их действие реакциями связей. Рассматриваем равновесие балки под действием задаваемых сил P и M и реакцией связей X_A , Y_A , R_B .

Составляем три уравнения равновесия для рассматриваемой плоской системы сил. При составлении уравнения моментов за центр приведения выбираем точку, где пересекаются линии действия большего количества неизвестных.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad X_A - P \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad Y_A + R_B - P \cdot \sin 60^\circ = 0; \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad -M + R_B \cdot 3 - P \cdot \sin 60^\circ \cdot 5 = 0. \quad (15)$$

Из уравнения (15):

$$R_B = \frac{M + P \cdot \sin 60^\circ \cdot 5}{3} = \frac{6 + 4 \cdot 0,866 \cdot 5}{3} = 7,77 \text{ кН.}$$

Из уравнения (14):

$$Y_A = -R_B + P \cdot \sin 60^\circ = -7,77 + 4 \cdot 0,866 = -4,31 \text{ кН.}$$

Из уравнения (13): $X_A = P \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ кН.}$

Ответ: $X_A = 2 \text{ кН}$; $Y_A = -4,31 \text{ кН}$; $R_B = 7,77 \text{ кН}$.

Задача 1.2.2

Определить реакции заделки консольной балки (рис. 4), находящейся под действием равномерно распределённой нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил.

Дано: $q=3$ кН/м, $M_1=2$ кНм, $M_2=3$ кНм, $P=4$ кН, $\alpha=45^\circ$, размеры показаны на чертеже.

Определить: реакции жёсткой заделки X_A , Y_A , M_A .

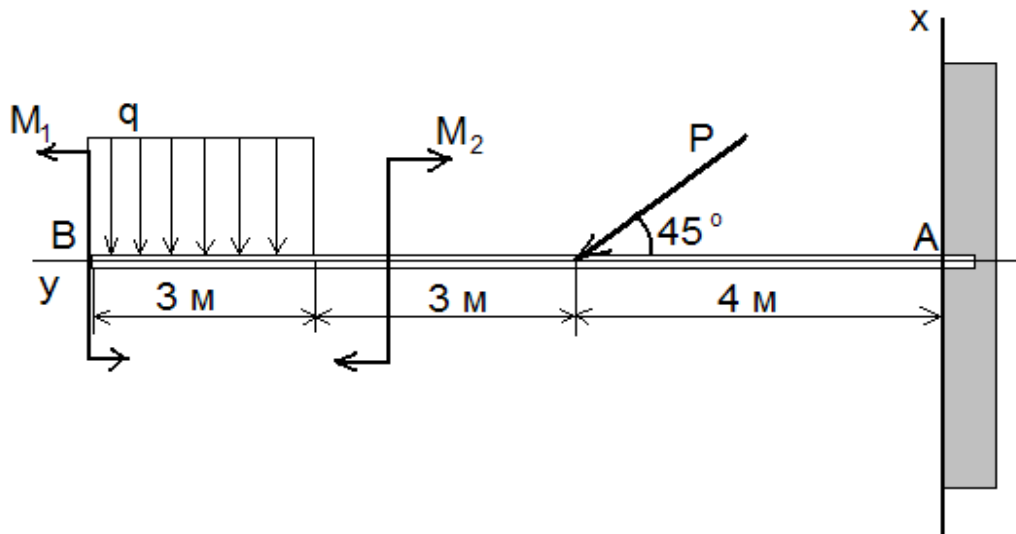


Рисунок 4

Решение

1. Рассмотрим равновесие балки АВ, на которую действуют: активная сила P , пары сил с моментами M_1 и M_2 , равномерно распределённая нагрузка интенсивностью q и реакции связей X_A , Y_A , M_A .

2. Заменяем распределённую нагрузку эквивалентной сосредоточенной силой, приложенной в середине загруженного участка (рис. 5).

$$Q = q \cdot l = 3 \cdot 3 = 9 \text{ кН}.$$

3. Составляем уравнения равновесия балки для плоской системы сил:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad X_A - P \cdot \cos 45^\circ - Q = 0; \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad Y_A + P \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad M_A + P \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ - M_2 + Q \cdot 8,5 + M_1 = 0. \quad (18)$$

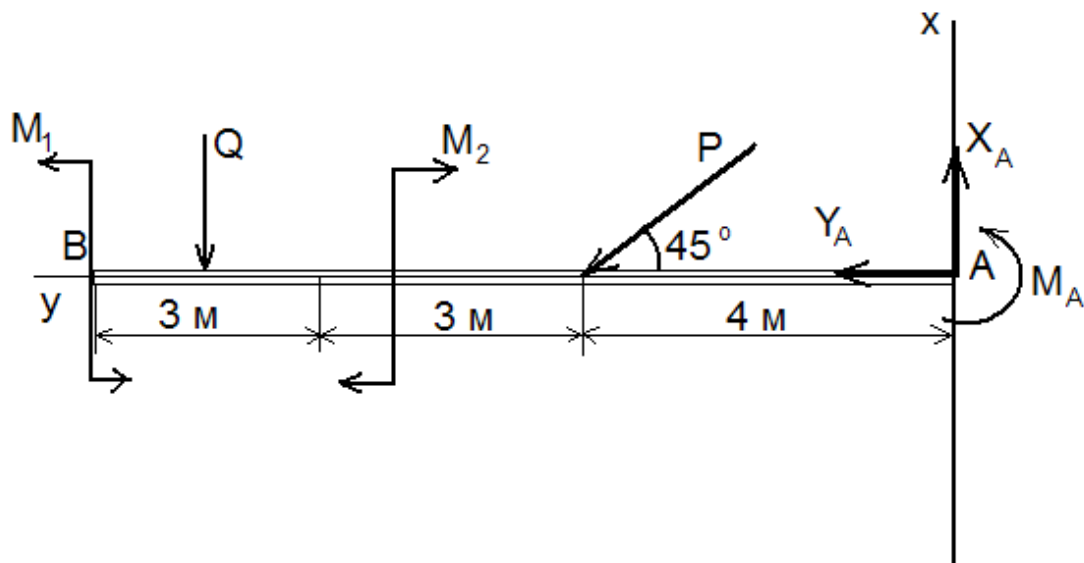


Рисунок 5

4. Определяем искомые величины

из (16): $X_A = P \cdot \cos 45^\circ + Q = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 9 = 11,8 \text{ кН};$

из (17): $Y_A = -P \cdot \sin 45^\circ = -4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2,8 \text{ кН};$

из (18): $M_A = -P \cdot 4 \sin 45^\circ + M_2 - Q \cdot 8,5 - M_1 =$
 $= -4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 - 9 \cdot 8,5 - 2 = -86,8 \text{ кН}.$

Ответ: $X_A = 11,8 \text{ кН}; Y_A = -2,8 \text{ кН}; M_A = -86,8 \text{ кН}.$

Задача 1.2.3

Рама находится в равновесии под действием равномерно распределённой нагрузки q , сосредоточенной силы P и момента M (рис. 6). Опорные закрепления: в точке А – шарнирно неподвижная опора, в точке В – стержень ВС. Требуется определить реакции опор.

Исходные данные: $q=20 \text{ кН/м}; P=10\sqrt{3} \text{ Н}; M=4 \text{ кНм}; a=0,3\text{м}; b=0,2 \text{ м}.$

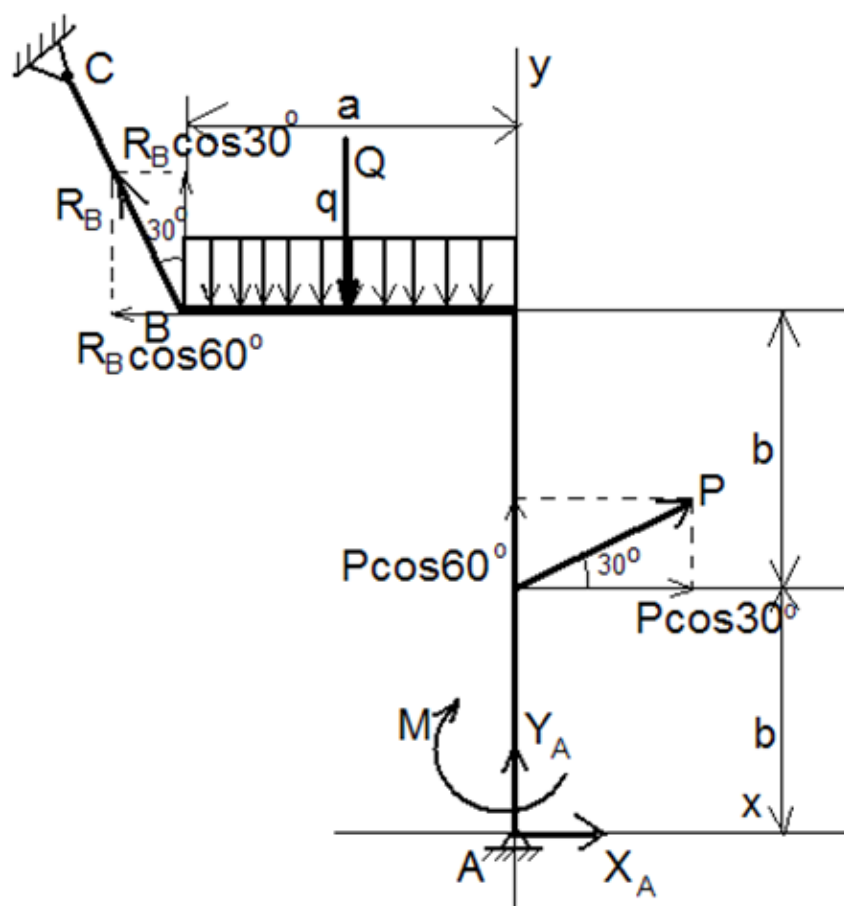


Рисунок 6

Решение

Составляем расчётную схему. Проводим оси координат XAY с началом координат в точке A . Определяем направление опорных реакций. Опорную реакцию шарнирно неподвижной опоры A будем определять через проекции на оси координат X_A и Y_A . Реакция стержня BC направлена вдоль стержня и приложена в точке B .

Заменим равномерно распределённую нагрузку q эквивалентной сосредоточенной силой Q , приложенной в середине загруженного участка:

$$Q = q \cdot a = 20 \cdot 0,3 = 6 \text{ кН.}$$

Составляем уравнения равновесия для заданной плоской системы сил.

При составлении уравнения моментов за центр приведения принимаем точку A , где находятся неизвестные X_A и Y_A .

$$1. \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0;$$

$$-M - P \cdot \cos 30^\circ \cdot b + Q \cdot \frac{a}{2} - R_B \cos 30^\circ \cdot a + R_B \cos 60^\circ \cdot 2b = 0;$$

$$R_B = \frac{-M - P \cdot \cos 30^\circ \cdot b + Q \cdot \frac{a}{2}}{a \cdot \cos 30^\circ - 2 \cdot b \cdot \cos 60^\circ} = \frac{-4 - 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,15}{0,3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot 0,2 \cdot 0,5} = -92 \text{ кН.}$$

$$2. \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad -R_B \cdot \cos 60^\circ + P \cdot \cos 30^\circ + X_A = 0;$$

$$X_A = R_B \cdot \cos 60^\circ - P \cdot \cos 30^\circ = (-92) \cdot \frac{1}{2} - 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -61 \text{ кН.}$$

$$3. \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad R_B \cdot \cos 30^\circ - Q + P \cdot \cos 60^\circ + Y_A = 0;$$

$$Y_A = Q - R_B \cdot \cos 30^\circ - P \cdot \cos 60^\circ = 6 - (-92) \cdot 0,866 - 10\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 76 \text{ кН.}$$

Ответ: $X_A = -61 \text{ кН}$; $Y_A = 76 \text{ кН}$; $R_B = -92 \text{ кН}$.

1.3. Равновесие твёрдого тела под действием пространственной системы сил

Задача 1.3.1

На вал АВ ворота намотана верёвка, поддерживающая груз Q. Радиус R колеса С, насаженного на вал, в шесть раз больше радиуса барабана r вала; другие размеры указаны на рис. 7. Верёвка, намотанная на окружность колеса и натягиваемая грузом Р весом 60 Н, сходит с колеса по касательной, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 30^\circ$. Определить вес груза Q, при котором ворот остаётся в равновесии, а также реакции подшипников А и В, пренебрегая весом вала и трением на блоке D.

Дано: Вал АВ с барабаном. Вес груза $P = 60 \text{ Н}$. Радиус барабана r , радиус колеса R .

$$R/r = 6, \alpha = 30^\circ.$$

Определить: X_A , Z_A , X_B , Z_B , вес груза Q.

Решение

1. Составляем расчётную схему. Рассматриваемая конструкция находится в равновесии под действием двух активных сил P, Q и реакций подшипников А и В.

Реакции подшипников лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения Y, и определяются через проекции на оси X и Z.

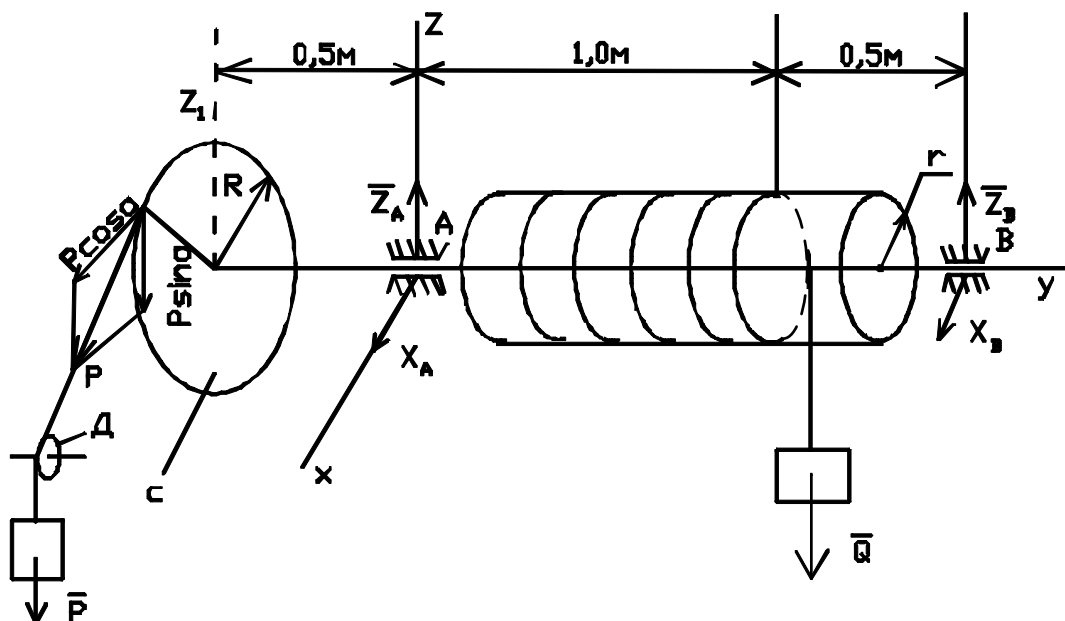


Рисунок 7

2. Составляем уравнения равновесия для рассматриваемой произвольной пространственной системы сил, составляем уравнение моментов сил относительно координатных осей.

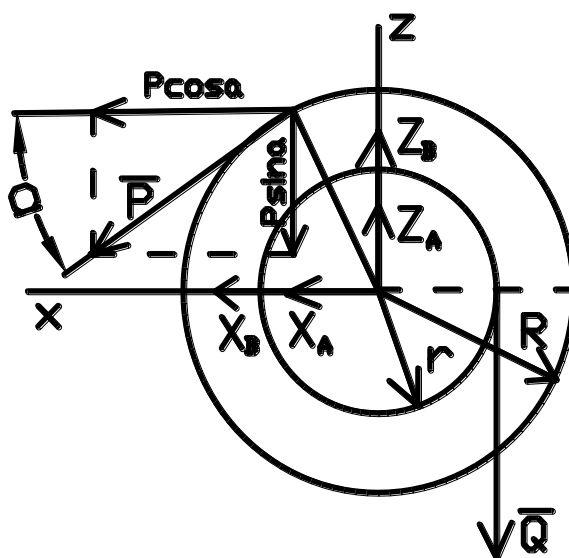


Рисунок 8

$$\sum_{i=1}^n M_{iy} = 0$$

Проецируем конструкцию на плоскость XAZ, перпендикулярную оси Y. Составляющие реакции подшипников X_A , Z_A , X_B , Z_B пересекают ось Y и поэтому моментов относительно этой оси не создают (рис. 8).

$$P \cdot R - Q \cdot r = 0.$$

Откуда:

$$Q = P \frac{R}{r} = 60 \cdot 6 = 360 \text{ Н};$$

$$\sum M_{iz}=0;$$

$$- X_B \cdot 1,5 + P \cdot \cos \alpha \cdot 0,5 = 0;$$

$$X_B = \frac{P \cdot \cos \alpha \cdot 0,5}{1,5} = \frac{60 \cdot 0,866 \cdot 0,5}{1,5} = 17,3 \text{ Н}.$$

$$\sum M_{ix}=0;$$

$$Z_B \cdot 1,5 - Q \cdot 1 + P \cdot \sin \alpha \cdot 0,5 = 0;$$

$$Z_B = \frac{Q \cdot 1 - P \cdot \sin \alpha \cdot 0,5}{1,5} = \frac{360 \cdot 1 - 60 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{1,5} = 230 \text{ Н}.$$

Составляем уравнение проекций сил на координатные оси:

$$\sum P_{ix}=0$$

$$X_A + X_B + P \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$X_A = - X_B - P \cdot \cos \alpha = - 17,3 - 60 \cdot 0,866 = - 69,3 \text{ Н}.$$

$$\sum P_{iz}=0;$$

$$Z_A + Z_B - Q - P \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$Z_A = - Z_B + Q + P \cdot \sin \alpha = - 230 + 360 + 60 \cdot 0,5 = 160 \text{ Н}.$$

Ответ: $Q=360 \text{ Н}$, $X_A=-69,3 \text{ Н}$, $Z_A=160 \text{ Н}$, $X_B=17,3 \text{ Н}$, $Z_B=230 \text{ Н}$.

Задача 1.3.2

Однородная прямоугольная рама весом $G=20 \text{ Н}$ прикреплена к стене при помощи шарового шарнира A и петли B и удерживается в горизонтальном положении верёвкой CE , привязанной в точке C рамы и к гвоздю E , вбитому в стену на одной вертикали с A , причём $\angle ECA = \angle BAC = 30^\circ$ (рис. 9). Определить натяжение верёвки S и опорные реакции.

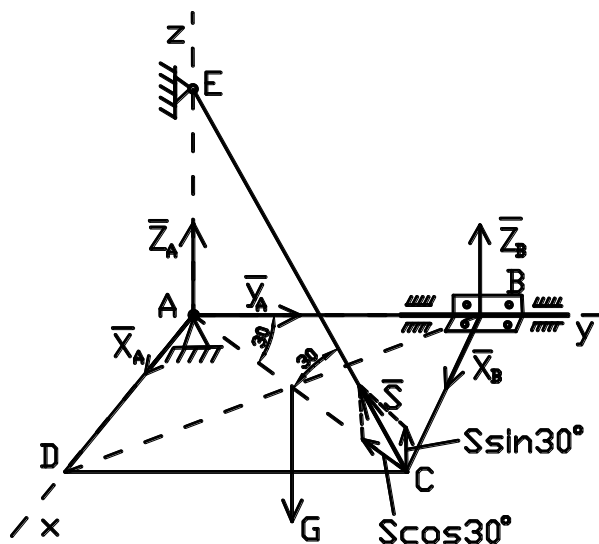


Рисунок 9

Решение

1. Составляем расчётную схему. На схему действует активная сила – сила тяжести G и реакции связей. Шаровой шарнир A не даёт возможности перемещаться точке A в любом направлении. Реакция шарнира A определяется по трём составляющим проекциям на оси координат X_A , Y_A , Z_A . Петля B допускает возможность перемещения точки B вдоль оси вращения Y , но препятствует её перемещению в плоскости, перпендикулярной этой оси. Реакция петли B определяется по двум составляющим X_B и Z_B . Реакция верёвки CE направлена вдоль верёвки и приложена в точке прикрепления верёвки к раме, в точке C . Рассматриваемая конструкция находится в равновесии.

2. Составляем уравнения равновесия для всех сил, приложенных к раме:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad X_A + X_B - S \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ = 0; \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad Y_A - S \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iz} = 0; \quad Z_A - G + Z_B + S \cdot \sin 30^\circ = 0. \quad (21)$$

Для составления уравнений моментов изобразим на вспомогательном чертеже проекции рассматриваемой конструкции вместе с силами на плоскостях, перпендикулярных к осям.

Плоскость, перпендикулярная оси X (рис. 10).

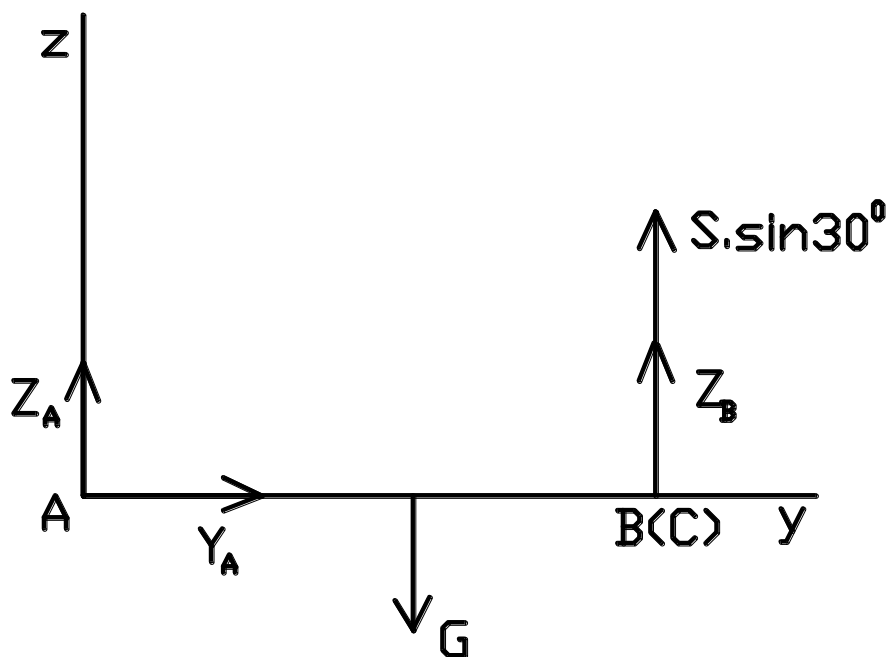


Рисунок 10

$$\sum_{i=1}^n M_{iX} = 0; -G \frac{AB}{2} + z_B \cdot AB + S \cdot \sin 30^\circ \cdot AB = 0. \quad (22)$$

Плоскость, перпендикулярная оси Y (рис. 11).

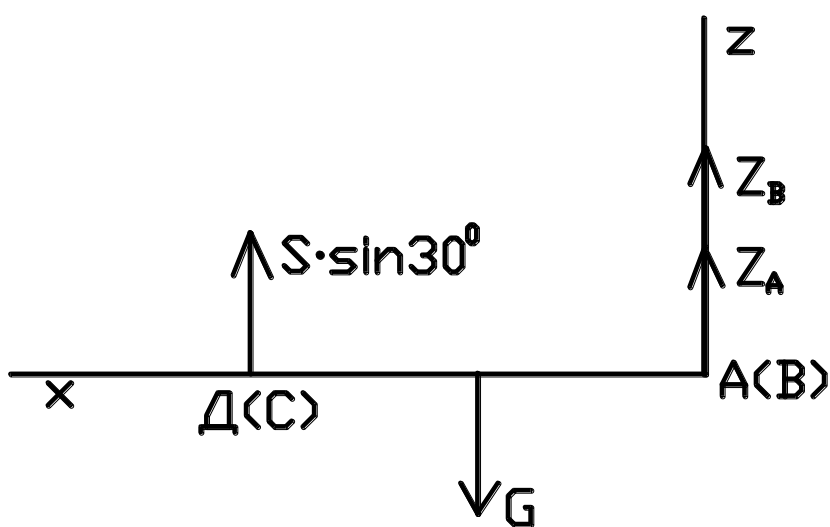


Рисунок 11

$$\sum_{i=1}^n M_{iy} = 0; G \frac{AD}{2} - S \cdot \sin 30^\circ \cdot AD = 0. \quad (23)$$

Плоскость, перпендикулярная оси Z (рис. 12).

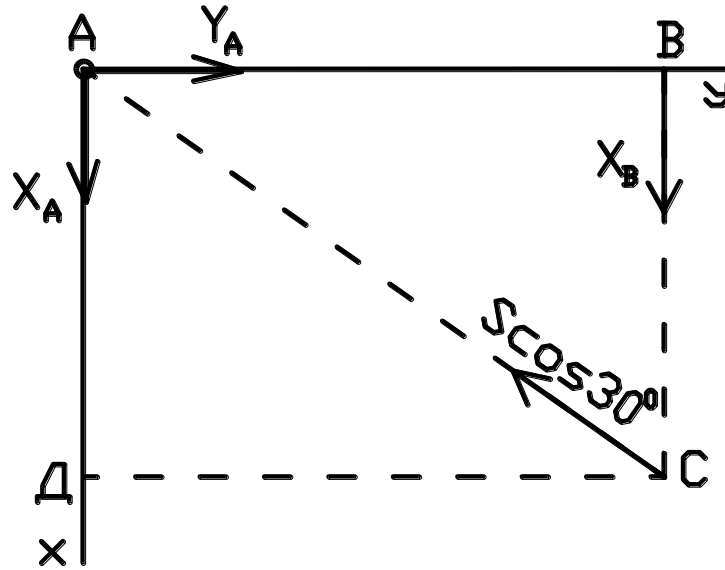


Рисунок 12

$$\sum_{i=1}^n M_{iZ} = 0; X_B \cdot AB = 0 \quad (24)$$

3. Определяем искомые величины, решая уравнения (19)-(24):

из (24): $X_B = 0;$

из (23): $S = \frac{G}{2 \sin 30^\circ} = \frac{20}{2 \cdot 0,5} = 20 \text{ Н};$

из (22): $Z_B = \frac{G}{2} - S \cdot \sin 30^\circ = \frac{20}{2} - 20 \cdot 0,5 = 0 \text{ Н};$

из (19): $X_A = S \cdot \cos 30^\circ \sin 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 8,66 \text{ Н};$

из (20): $Y_A = S \cdot \cos 30^\circ \cos 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15 \text{ Н};$

из (21): $Z_A = G - Z_B - S \cdot \sin 30^\circ = 20 - 0 - 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ Н}.$

Ответ: $S = 20 \text{ Н}; X_A = 8,66 \text{ Н}; Y_A = 15 \text{ Н}; Z_A = 10 \text{ Н}; X_B = Z_B = 0.$

2. КИНЕМАТИКА

2.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения

Движение точки задано уравнениями : $x = 3t, y = \frac{3}{t}$ (см).

Определить в моменты времени $t_1 = 1$ с и $t_2 = 2$ с скорость точки, ускорение точки, касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны траектории. Определить и построить траекторию точки.

Решение

Для определения уравнения точки исключаем параметр t из уравнений движения: $t = \frac{x}{3}$. Подставляем это значение в уравнение координаты y :

$$y = \frac{9}{x} \text{ — уравнение гиперболы.}$$

Точка движется по ветви гиперболы, расположенной в верхнем правом квадранте, так как при подстановке времени $t > 0$ в уравнения движения обе координаты принимают положительное значение. Движение точки происходит сверху вниз.

Траекторию строим по координатам (см. таблицу).

Время $t, \text{с}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	∞
$X, \text{см}$	0	1	1,5	3	6	9	∞
$Y, \text{см}$	∞	9	6	3	1,5	1	0

Определяем скорость точки по её проекциям на координатные оси:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right);$$
$$V_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{3}{t^2} \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right).$$

Проекции скорости и их значения для точек в заданный момент времени:

$$\text{при } t_1 = 1 \text{ с: } V_{x1} = 3 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right); \quad V_{y1} = -\frac{3}{1^2} = -3 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right);$$

$$V_1 = \sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 4,2 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right);$$

при $t_2 = 2$ с: $V_{x2} = 3\left(\frac{см}{с}\right)$; $V_{y2} = -\frac{3}{2^2} = -\frac{3}{4}\left(\frac{см}{с}\right)$;

$$V_2 = \sqrt{V_{x2}^2 + V_{y2}^2} = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = 3,1\left(\frac{см}{с}\right).$$

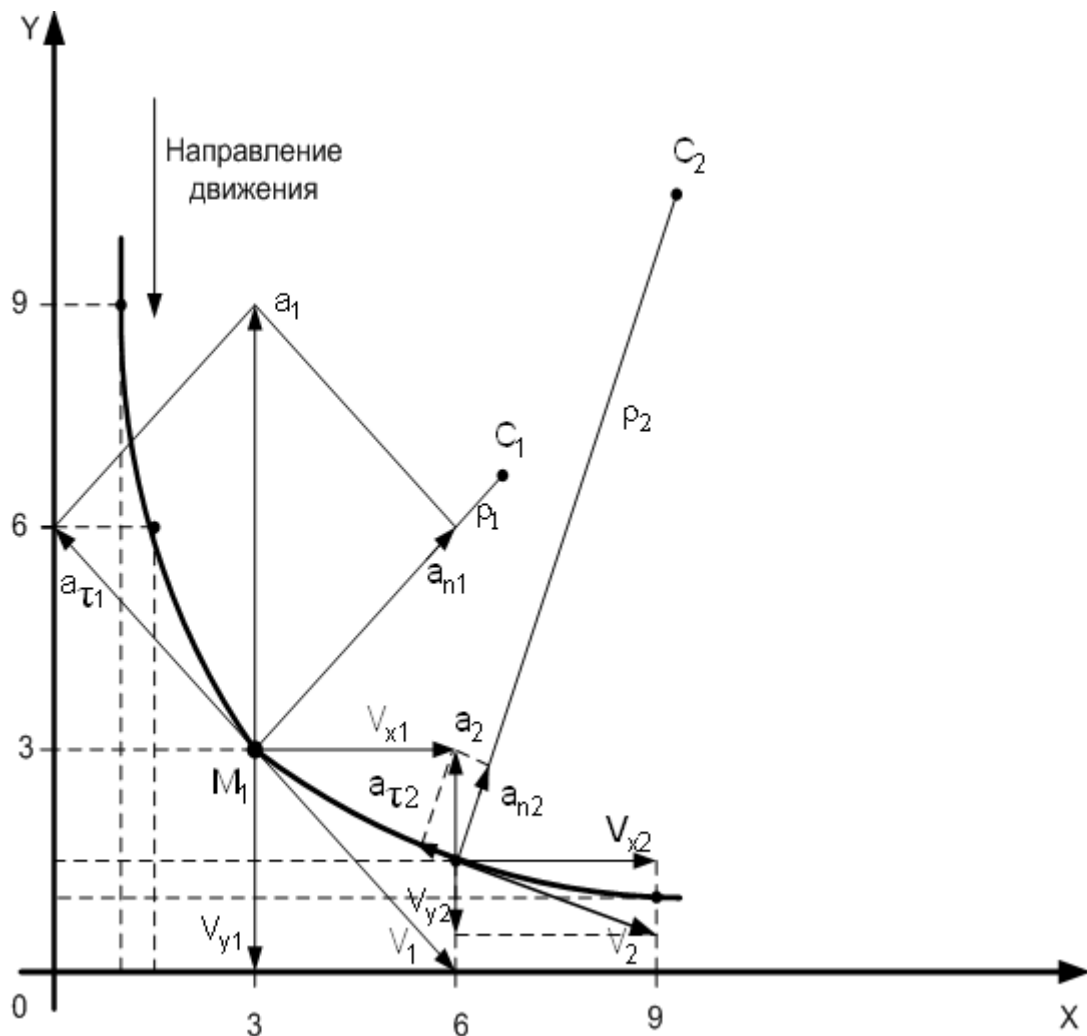


Рисунок 13

Определяем проекции ускорения точки на координатные оси:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0\left(\frac{см}{с^2}\right);$$

$$a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{t^2}\right) = \frac{6}{t^3}\left(\frac{см}{с^2}\right).$$

Проекции ускорения и их значения для точек в заданный момент времени:

при $t_1 = 1$ с: $a_{x1} = 0$; $a_{y1} = \frac{6}{1^3} = 6\left(\frac{см}{с^2}\right)$; $a_1 = |a_{y1}| = 6\left(\frac{см}{с^2}\right)$;

при $t_2 = 2$ с: $a_{x2} = 0$; $a_{y2} = \frac{6}{2^3} = \frac{3}{4} \left(\frac{см}{с^2} \right)$; $a_2 = |a_{y2}| = \frac{3}{4} \left(\frac{см}{с^2} \right)$.

Для определения касательного и нормального ускорений переходим к естественному способу задания движения точки.

Касательные ускорения:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}.$$

При $t_1 = 1$ с: $a_{\tau 1} = \frac{3 \cdot 0 + (-3) \cdot 6}{4,2} = -\frac{18}{4,2} = -4,2 \left(\frac{см}{с^2} \right)$;

при $t_2 = 2$ с: $a_{\tau 2} = \frac{3 \cdot 0 - 0,75 \cdot 0,75}{3,1} = -0,18 \left(\frac{см}{с^2} \right)$.

Нормальные ускорения: $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$.

При $t_1 = 1$ с: $a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{6^2 - (-4,2)^2} = 4,2 \left(\frac{см}{с^2} \right)$;

при $t_2 = 2$ с: $a_{n2} = \sqrt{a_2^2 - a_{\tau 2}^2} = \sqrt{0,75^2 - (-0,18)^2} = 0,71 \left(\frac{см}{с^2} \right)$.

Определяем радиус кривизны траектории в заданные моменты времени:

$$a_n = \frac{a^2}{\rho}; \quad \rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

При $t_1 = 1$ с: $\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}} = \frac{4,2^2}{4,2} = 4,2 (см)$.

При $t_2 = 2$ с: $\rho_2 = \frac{V_2^2}{a_{n2}} = \frac{3,1^2}{0,71} = 13,5 (см)$.

Все результаты решения показаны на чертеже (рис. 13).

Ответ: при $t_1 = 1$ с: $V_1 = 4,2 \left(\frac{см}{с} \right)$, $a_1 = 6 \left(\frac{см}{с^2} \right)$, $a_{\tau 1} = -4,2 \left(\frac{см}{с^2} \right)$,

$a_{n1} = 4,2 \left(\frac{см}{с^2} \right)$, $\rho_1 = 4,2 (см)$; при $t_2 = 2$ с: $V_2 = 3,1 \left(\frac{см}{с} \right)$,

$a_2 = \frac{3}{4} \left(\frac{см}{с^2} \right)$, $a_{\tau 2} = -0,18 \left(\frac{см}{с^2} \right)$, $a_{n2} = 0,71 \left(\frac{см}{с^2} \right)$, $\rho_2 = 13,5 (см)$.

2.2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движении

Зубчатая передача приводится в движение грузом 1, подвешенным к колесу 2. На одной оси с колесом 2 укреплено колесо 3, которое сцепляется с колесом 4 (рис. 14).

Определить скорость и ускорение точки М на ободе колеса 4 в момент времени $t=1$ с. Груз движется по закону: $x = 5t^2 + 10t$ (см). Радиусы колёс соответственно: $r_2 = 10$ см, $r_3 = 6$ см, $r_4 = 8$ см.

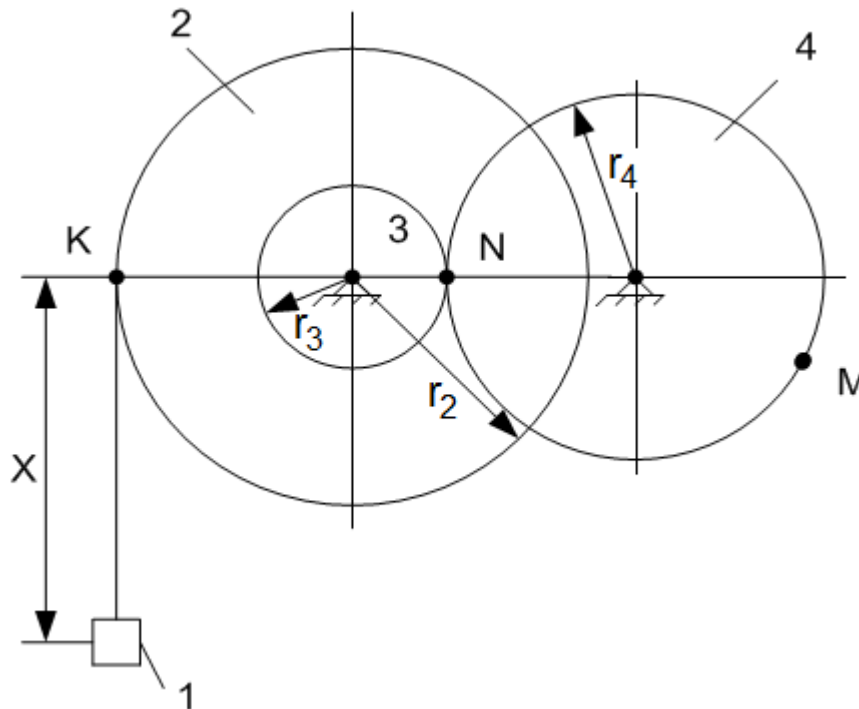


Рисунок 14

Решение

Скорость и ускорение груза 1 будут совпадать со скоростью и вращательным ускорением точки К на ободе колеса 2, с которого сходит нить, к которой подвешен груз:

$$V_K = \frac{dx}{dt} = 10t + 10 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right); \quad a_K^{\text{вп}} = a_1 = \frac{dV_K}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 10 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}^2} \right).$$

Так как колёса 2 и 3 имеют одну ось вращения, то угловая скорость и угловое ускорение у них одинаковые:

$$\omega_{2-3} = \frac{V_k}{r_2} = \frac{10t + 10}{10} = t + 1 \left(\text{с}^{-1} \right);$$

$$\varepsilon_{2-3} = \frac{a_k^{\text{вп}}}{r_2} = \frac{10}{10} = 1 \left(\text{с}^{-2} \right).$$

Точка N – точка соприкосновения колёс 3 и 4. Скорость этой точки и вращательное ускорение для колёс 3 и 4 будут одинаковые:

$$V_N = \omega_{2-3} \cdot r_3 = \omega_4 \cdot r_4;$$

отсюда
$$\omega_4 = \frac{\omega_{2-3} \cdot r_3}{r_4} = \frac{(t+1) \cdot 6}{8} = \frac{(t+1) \cdot 3}{4} (c^{-1});$$

$$a_N^{ep} = \varepsilon_{2-3} \cdot r_3 = \varepsilon_4 \cdot r_4;$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_{2-3} \cdot r_3}{r_4} = \frac{1 \cdot 6}{8} = \frac{3}{4} (c^{-2}).$$

Скорость точки M:

$$V_M = \omega_4 \cdot r_4 = \frac{(t+1) \cdot 3}{4} \cdot 8 = 6t + 6 \left(\frac{cm}{c} \right);$$

в момент t=1с:

$$V_{M1} = 6 + 6 = 12 \left(\frac{cm}{c} \right).$$

Ускорение точки M:

$$a_M^{ep} = \varepsilon_4 \cdot r_4 = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6 \left(\frac{cm}{c^2} \right);$$

$$a_M^y = \omega_4^2 \cdot r_4 = \left(\frac{(t+1) \cdot 3}{4} \right)^2 \cdot 8 = \frac{9(t+1)^2}{2} \left(\frac{cm}{c^2} \right);$$

в момент t=1с:

$$a_{M1}^y = \frac{9 \cdot 2^2}{2} = 18 \left(\frac{cm}{c^2} \right);$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^{bp})^2 + (a_M^y)^2} = \sqrt{6^2 + 18^2} = 18,97 \left(\frac{cm}{c^2} \right).$$

Ответ:

$$V_M = 12 \left(\frac{cm}{c} \right), a_M = 18,97 \left(\frac{cm}{c^2} \right).$$

2.3. Кинематический анализ плоского стержневого механизма

Кривошип ОА длиной 20 см вращается равномерно со скоростью $\omega_0 = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ и приводит во вращение шатун АВ длиной 100 см; ползун В движется по вертикали (рис. 15).

Найти: угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна В в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонтальной осью углы $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

Решение

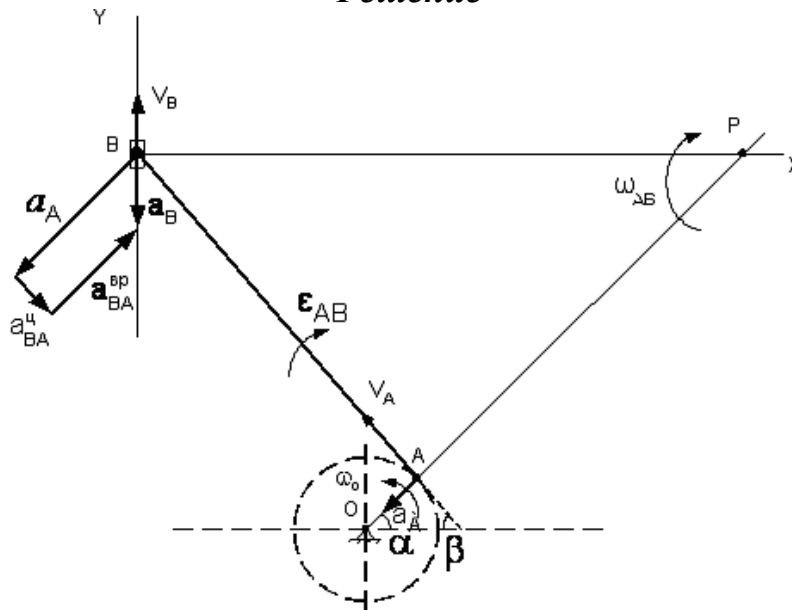


Рисунок 15

1. Определяем скорость точки А:

$$V_A = \omega_0 \cdot OA = 10 \cdot 20 = 200 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right).$$

V_A направлена по перпендикуляру к ОА и согласована с направлением ω_0 .

2. Определяем скорость точки В.

Шатун АВ совершает плоское движение. МЦС находится на пересечении перпендикуляров к скоростям точек А и В.

Угловая скорость звена АВ:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{AB} = \frac{200}{100} = 2 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right);$$

ω_{AB} направлена по часовой стрелке;

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP = 2 \cdot 100\sqrt{2} = 282,8 \left(\frac{см}{с} \right);$$

V_B направлена по направляющей вверх.

3. Определяем ускорение точки А:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^u + \bar{a}_A^{ep};$$

$$a_A^u = \omega_0^2 \cdot AO = 10^2 \cdot 20 = 2000 \left(\frac{см}{с^2} \right).$$

a_A^{ep} направлено к оси вращения звена АО:

$$a_A^{ep} = \varepsilon_0 \cdot AO = 0,$$

так как $\omega_0 = const$, $\varepsilon_0 = \frac{d\omega_0}{dt} = 0$,

$$a_A = \sqrt{(a_A^u)^2 + (a_A^{ep})^2} = 2000 \left(\frac{см}{с^2} \right).$$

4. Определяем ускорения точки В.

Принимаем за полюс точку А и пользуясь теоремой об ускорениях плоской фигуры, запишем:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^u + \bar{a}_{BA}^{ep}. \quad (25)$$

Центростремительное ускорение во вращательном движении точки вокруг полюса А:

$$a_{BA}^u = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2^2 \cdot 100 = 400 \left(\frac{см}{с^2} \right).$$

Вращательное ускорение:

$$a_{BA}^{ep} = \varepsilon_{AB} \cdot AB.$$

Чтобы найти ε_{AB} , воспользуемся графическим построением (рис. 16):

- отложим из точки В ускорение полюса А: $\bar{a}_A$;
- из конца вектора $\bar{a}_A$ отложим $\bar{a}_{AB}^u$ в направлении оси от точки В к полюсу А;
- из конца $\bar{a}_{AB}^u$ проведём направление $\bar{a}_{AB}^{ep}$ до пересечения с направлением $\bar{a}_B$;
- $\bar{a}_B$ направлено по вертикали;
- $\bar{a}_{AB}^{ep}$ перпендикулярно $\bar{a}_{AB}^u$.

Расставим стрелки согласно векторному равенству (25).

Векторное равенство (25) содержит 2 неизвестных алгебраических значения a_B и $a_{BA}^{вр}$.

Спроецируем векторное равенство (25) на две взаимно перпендикулярные оси X и Y.

На ось X:

$$0 = -a_A \cdot \cos 45^\circ + a_{BA}^u \cdot \cos 45^\circ + a_{BA}^{ep} \cdot \cos 45^\circ.$$

Отсюда

$$a_{BA}^{ep} = a_A - a_{BA}^u = 2000 - 400 = 1600 \text{ см/с}^2.$$

Угловое ускорение:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{ep}}{AB} = \frac{1600}{100} = 16 \text{ рад/с}^2.$$

Угловое ускорение направлено в такую сторону, в которую вектор $\vec{a}_{BA}^{ep}$, помещённый в точку B, стремится повернуть плоскость относительно полюса A, то есть по часовой стрелке.

На ось Y:

$$-a_B = -a_A \cos 45^\circ - a_{BA}^u \cos 45^\circ + a_{BA}^{ep} \cos 45^\circ.$$

Отсюда

$$a_B = (a_A + a_{BA}^u - a_{BA}^{ep}) \cos 45^\circ = (2000 + 400 - 1600) \cdot 0,707 = 565,6 \text{ см/с}^2.$$

5. Определяем скорость точки B, пользуясь теоремой о скоростях точек плоской фигуры:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad (26)$$

где $\vec{V}_{BA}$ - вращательная скорость точки B при вращении вокруг полюса A:

$$V_{BA} = \omega_{AB} AB,$$

$\vec{V}_{BA}$ направлена перпендикулярно радиусу вращения AB.

Построим графически равенство (26):

- отложим из точки B скорость полюса $\vec{V}_A$;

- из конца вектора $\vec{V}_A$ проведём направление $\vec{V}_{AB}$ до пересечения с направлением $\vec{V}_B$.

Расставим стрелки согласно равенству (26).

Спроецируем векторное равенство (26) на две взаимно перпендикулярные оси X и Y.

На ось X:

$$0 = -V_A \cos 45^\circ + V_{BA} \cos 45^\circ.$$

Отсюда $V_A = V_{BA}$.

Угловая скорость ω_{AB} :

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{V_A}{AB} = \frac{200}{100} = 2 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

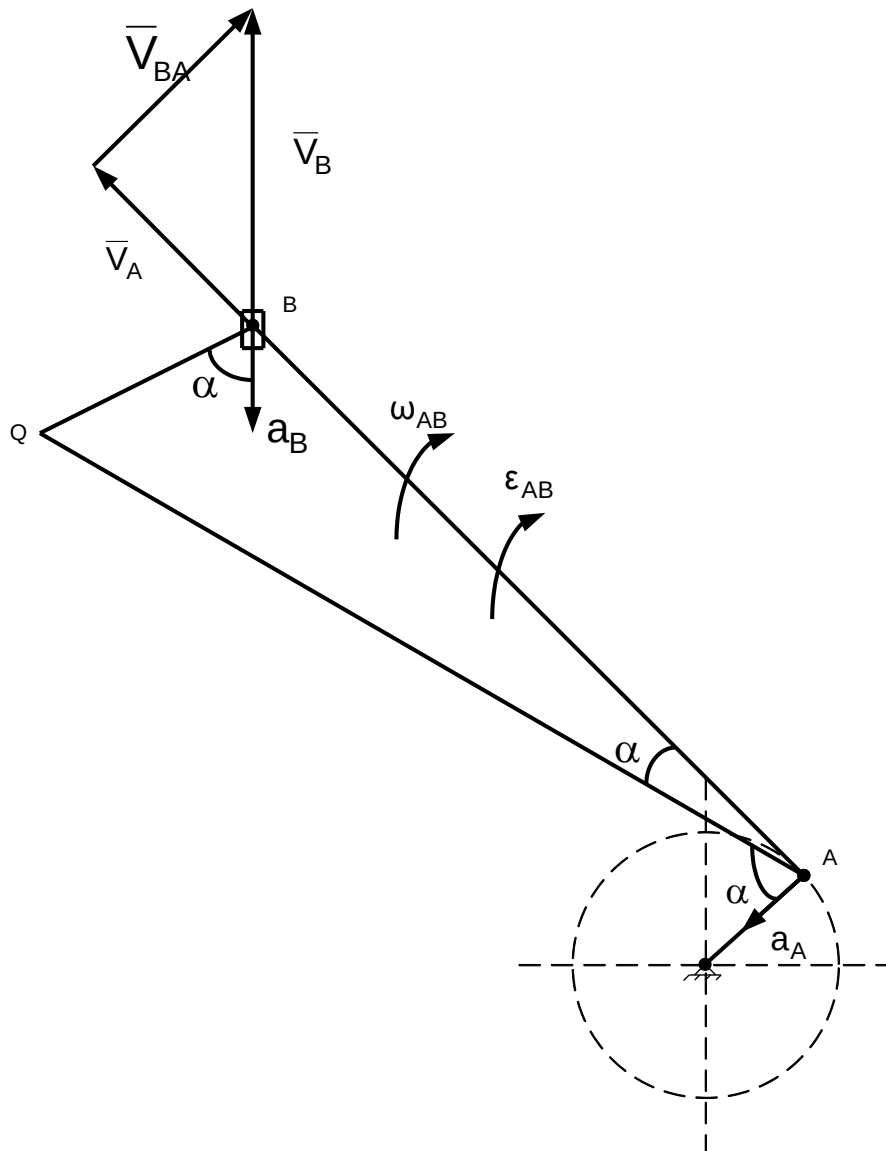


Рисунок 16

На ось Y:

$$V_{By} = V_A \cos 45^\circ + V_{BA} \cos 45^\circ = 2V_A \cos 45^\circ = 2 \cdot 200 \cdot 0,707 = 282,8 \text{ см/с}.$$

6. Определяем ускорение точки B, пользуясь мгновенным центром ускорений:

$$a_B = QB \sqrt{\omega^2 + \epsilon^2}.$$

Тангенс угла между отрезком AQ, соединяющим точку A с мгновенным центром ускорений:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = \frac{16}{2^2} = 4;$$

$$\alpha = 75,96^\circ.$$

Угол α откладывается от оси ускорения точки A по часовой стрелке, то есть так же, как угловое ускорение ε_{AB} .

Расстояние от точки A до мгновенного центра ускорений AQ:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}} = \frac{2000}{\sqrt{16^2 + 2^4}} = 121,27 \text{ см.}$$

Для определения расстояния от точки B до мгновенного центра ускорений рассмотрим треугольник ABQ:

$$\angle QAB = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 75,96^\circ = 14,04^\circ.$$

По теореме косинусов:

$$\begin{aligned} QB &= \sqrt{AB^2 + AQ^2 - 2 \cdot AB \cdot AQ \cdot \cos(90^\circ - \alpha)} = \\ &= \sqrt{100^2 + 121,27^2 - 2 \cdot 100 \cdot 121,27 \cdot 0,97} = 34,35 \text{ см.} \end{aligned}$$

Ускорение точки B определяется из соотношения:

$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ},$$

откуда
$$a_B = \frac{a_A}{AQ} \cdot BQ = \frac{2000}{121,27} \cdot 34,35 = 566,5 \text{ см / с}^2.$$

Для определения направления $\bar{a}_B$ откладываем угол α от оси отрезка QB в направлении, противоположном направлению ε_{AB} , т. е. против хода часовой стрелки.

Ответ:

$$\varepsilon_{AB} = 16 \text{ рад / с}^2, \omega_{AB} = 2 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right), a_B = 566,5 \text{ см / с}^2.$$

3. ДИНАМИКА

3.1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием переменных сил

Материальная точка массы m движется из начала координат вдоль горизонтальной оси OX (рис. 17), имея начальную скорость v_0 . Сила сопротивления движению точки $R=kv^2$. Определить закон движения точки.

Решение

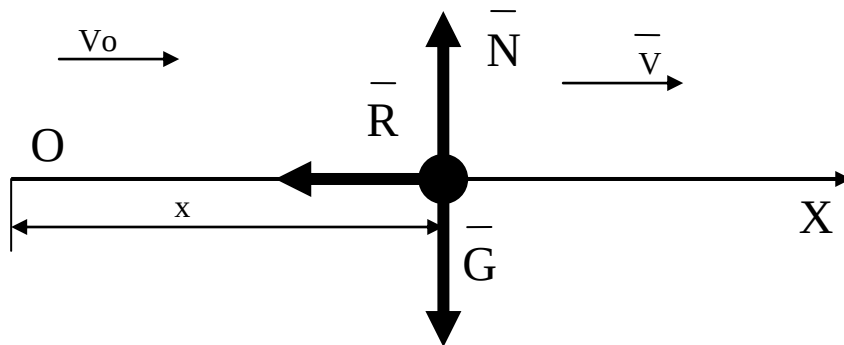


Рисунок 17

На точку действуют: сила тяжести $G=mg$, сила сопротивления R и нормальная реакция N . Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось OX имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = -R = -kv^2 .$$

Разделим переменные в дифференциальном уравнении и, интегрируя его, найдем:

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} &= -\frac{k}{m} \int_0^t dt ; \\ -\frac{1}{v} \Big|_{v_0}^v &= -\frac{kt}{m} ; \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{kt}{m} ; \\ v &= \frac{mv_0}{m + kv_0 t} . \end{aligned}$$

Запишем левую часть равенства: $v = \frac{dx}{dt}$; $\frac{dx}{dt} = \frac{mv_0}{m + kv_0 t}$.

Разделив переменные в последнем равенстве и интегрируя его, найдем закон движения точки:

$$\int_0^x dx = mv_0 \int_0^t \frac{dt}{m + kv_0 t} ;$$

получаем: $x = mv_0 \frac{1}{kv_0} \ln(m + kv_0 t) \Big|_0^t$.

Окончательно: $x = \frac{m}{k} [\ln(m + kv_0 t) - \ln m] = \frac{m}{k} \ln \frac{m + kv_0 t}{m}$ (м).

Ответ:

$$x = \frac{m}{k} \ln \frac{m + kv_0 t}{m} \text{ (м)}.$$

3.2. Теорема об изменении количества движения механической системы в ее применении к сплошной среде

Вода входит в неподвижный канал переменного сечения, симметричного относительно горизонтальной плоскости, со скоростью v_1 под углом α (рис. 18). Скорость воды у выхода из канала v_2 и направлена под углом β .

Определить модуль составляющей силы R , с которой вода действует на стенку канала.

Дано: v_1, D, d, α, β .

Определить: R_x или R_y .

Решение

При установившемся движении масса жидкости, протекающей в единицу времени через любое сечение трубы, постоянна:

$$m = \rho v_1 F_1 = \rho v_2 F_2, \text{ где } F_1 = \frac{\pi D^2}{4}, F_2 = \frac{\pi d^2}{4} .$$

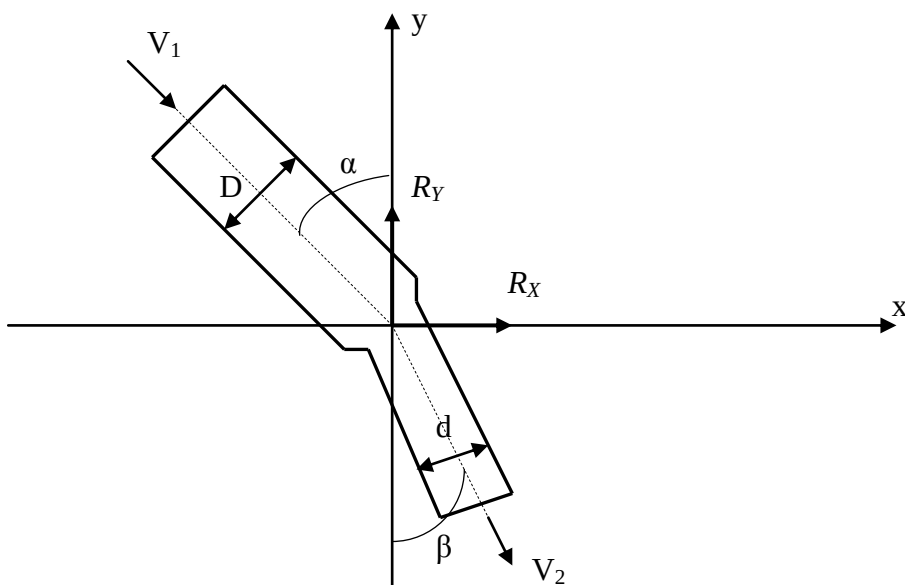


Рисунок 18

Откуда

$$v_2 = \frac{\rho v_1 F_1}{\rho F_2} = \frac{v_1 D^2}{d^2}.$$

Сила тяжести текущей по трубе жидкости перпендикулярна горизонтальной плоскости. Реакция стенок трубы расположена в горизонтальной плоскости.

Применим теорему импульсов к движению жидкости в трубе. За промежуток времени τ получим:

$$\overline{mv_2} - \overline{mv_1} = \overline{R\tau}. \quad (27)$$

Спроецируем равенство (27) на ось X:

$$mv_2 \sin \beta - mv_1 \sin \alpha = R_X \tau,$$

откуда

$$\begin{aligned} R_X &= \frac{mv_2}{\tau} \sin \beta - \frac{mv_1}{\tau} \sin \alpha = \\ &= \rho v_1 \frac{\pi D^2}{4} \frac{v_1 D^2}{d^2} \sin \beta - \rho v_1 \frac{\pi D^2}{4} v_1 \sin \alpha = \\ &= \rho \frac{\pi D^2}{4} v_1^2 \left(\frac{D^2}{d^2} \sin \beta - \sin \alpha \right). \end{aligned}$$

Спроецируем равенство (27) на ось Y:

$$-mv_2 \cos \beta + mv_1 \cos \alpha = R_Y \tau,$$

откуда

$$\begin{aligned} R_Y &= -mv_2 \cos \beta + mv_1 \cos \alpha = -\rho v_1 \frac{\pi D^2}{4} \frac{v_1 D^2}{d^2} \cos \beta + \rho v_1 \frac{\pi D^2}{4} v_1 \cos \alpha = \\ &= \rho \frac{\pi D^2}{4} v_1^2 \left(-\frac{D^2}{d^2} \cos \beta + \cos \alpha \right). \end{aligned}$$

Если требуется определить составляющую R_X , то уравнение (27) проецируется на ось X. Если надо определить R_Y , то уравнение (27) проецируется на ось Y.

$$\text{Модуль силы } R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}.$$

Ответ:

$$R_X = \rho \frac{\pi D^2}{4} v_1^2 \left(\frac{D^2}{d^2} \sin \beta - \sin \alpha \right), \quad R_Y = \rho \frac{\pi D^2}{4} v_1^2 \left(-\frac{D^2}{d^2} \cos \beta + \cos \alpha \right).$$

3.3. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Для заданной механической системы (рис. 19) определить $v_1=f(s_1)$. Считать, что у блоков и катков массы распределены по наружному радиусу. Массами нитей пренебречь, нити предполагая нерастяжимыми. Принять, что движение начинается из состояния покоя. В задании принять следующие обозначения: m_1, m_2, m_3 – массы тел; R и r – радиусы больших и малых окружностей; $f_{\text{тр}}=0,2$ – коэффициент трения скольжения. Проскальзывание отсутствует.

Решение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, движущегося поступательно, блока 2, совершающего вращательное движение, и катка 3, совершающего плоское движение.

Применим к рассматриваемой системе теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной форме:

$$T_{II} - T_I = \sum_{i=1}^n A_i^E,$$

где T_I – кинетическая энергия начального положения системы,

T_{II} - кинетическая энергия конечного положения системы,
 $\sum A_i^E$ - сумма работ внешних сил.

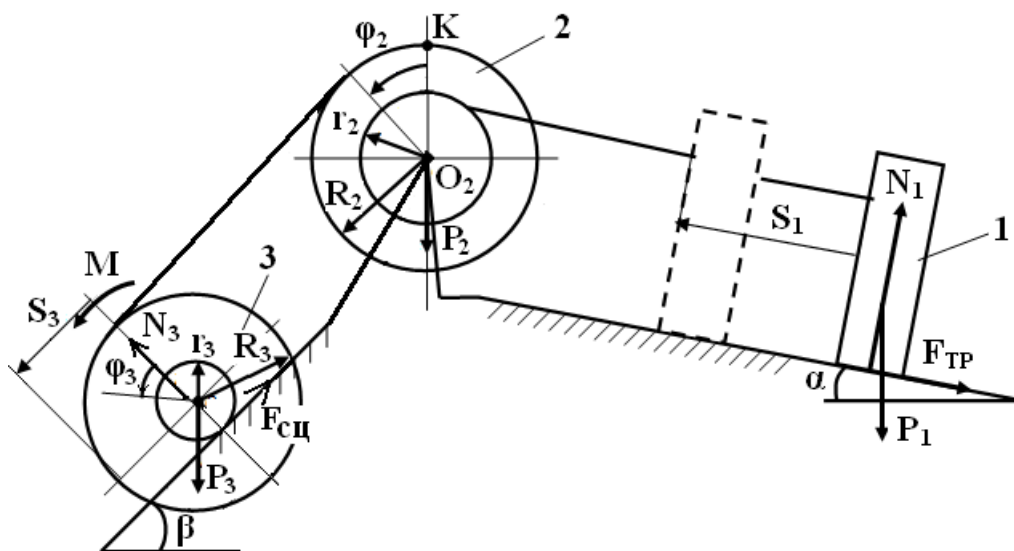


Рисунок 19

Движение системы началось из состояния покоя, поэтому:

$$T_I = 0;$$

$$T_{II} = \sum_{i=1}^n A_i^E.$$

Определим кинетическую энергию механизма в положении II.

При решении подобных задач рекомендуется линейные и угловые скорости всех тел системы выразить через искомую скорость, а перемещения линейные и угловые – через заданное перемещение.

$$T_{II} = T_1 + T_2 + T_3.$$

Груз 1 совершает поступательное движение: $T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}.$

Блок 2 совершает вращательное движение: $T_2 = \frac{I_Z \omega_2^2}{2},$

где I_Z - момент инерции блока относительно оси вращения. В данной задаче масса блока распределена по наружному радиусу, поэтому

$$I_Z = m_2 R_2^2.$$

Выразим угловую скорость блока 2 через скорость груза 1:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}.$$

Получим:

$$T_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2 r_2^2} v_1^2.$$

Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Для него кинетическая энергия вычисляется по формуле $T_3 = \frac{m_3 v_{03}^2}{2} + \frac{I_{Z3} \omega_3^2}{2},$

где $I_{Z3} = m_3 R_3^2$ (масса катка также распределена по наружному радиусу).

Так как нити нерастяжимы, скорости точек K и N равны:

$$v_K = v_N = \omega_2 R_2 = \omega_3 (R_3 + r_3),$$

отсюда

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 R_2}{R_3 + r_3}.$$

Выразим угловую скорость катка 3 через скорость груза 1:

$$\omega_3 = \frac{v_1 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)}.$$

Скорость центра масс катка v_{03} также выразим через скорость груза 1:

$$v_{03} = \omega_3 r_3 = v_1 \frac{r_3 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)}.$$

Итого получим:

$$T_3 = \frac{m_3 R_2^2 r_3^2}{2 r_2^2 (R_3 + r_3)^2} v_1^2 + \frac{m_3 R_3^2 R_2^2}{2 r_2^2 (R_3 + r_3)^2} v_1^2 = \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{2 r_2^2 (R_3 + r_3)^2} v_1^2.$$

Кинетическая энергия всей системы:

$$\begin{aligned} T_{II} &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 R_2^2}{2 r_2^2} v_1^2 + \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{2 r_2^2 (R_3 + r_3)^2} v_1^2 = \\ &= \frac{v_1^2}{2} \left[m_1 + \frac{m_2 R_2^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{r_2^2 (R_3 + r_3)^2} \right]. \end{aligned}$$

Сумма работ внешних сил складывается из:

- работы силы тяжести и силы трения скольжения при движении тела 1 вверх:

$$A_1 = -m_1 g \cdot \sin \alpha \cdot S_1 - f_{TP} \cdot m_1 g \cdot \cos \alpha \cdot S_1 = -m_1 g \cdot S_1 \cdot (\sin \alpha + f_{TP} \cos \alpha).$$

- работы силы тяжести и момента M :

$$A_3 = m_3 g \cdot \sin \beta S_3 + M \cdot \varphi_3$$

- сила $F_{СИ}$ приложена к неподвижной точке (МЦС), и работа этой силы равна нулю.

Выразим перемещение катка 3 через перемещение груза 1, используя кинематические соотношения:

$$\varphi_2 = \frac{S_1}{r_2}; \quad \varphi_3 = \frac{\varphi_2 R_2}{R_3 + r_3} = \frac{S_1 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)}; \quad S_3 = \varphi_3 r_3 = \frac{S_1 R_2 r_3}{r_2 (R_3 + r_3)}.$$

Получим:

$$A_3 = \frac{S_1 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)} [m_3 g r_3 \sin \beta + M].$$

Сумма работ внешних сил:

$$\sum_{i=1}^n A_i^E = -m_1 g S_1 (\sin \alpha + f_{TP} \cos \alpha) + \frac{S_1 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)} [m_3 g r_3 \sin \beta + M].$$

По теореме об изменении кинетической энергии:

$$\frac{v_1^2}{2} \left[m_1 + \frac{m_2 R_2^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{r_2^2 (R_3 + r_3)^2} \right] = -m_1 g S_1 (\sin \alpha + f_{TP} \cos \alpha) + \frac{S_1 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)} [m_3 g r_3 \sin \beta + M].$$

Отсюда найдем искомую скорость груза 1:

$$v_1 = \sqrt{2 \frac{-m_1 g S_1 (\sin \alpha + f_{TP} \cos \alpha) + \frac{S_1 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)} [m_3 g r_3 \sin \beta + M]}{m_1 + \frac{m_2 R_2^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{r_2^2 (R_3 + r_3)^2}}}.$$

Ответ:

$$v_1 = \sqrt{2 \frac{-m_1 g S_1 (\sin \alpha + f_{TP} \cos \alpha) + \frac{S_1 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)} [m_3 g r_3 \sin \beta + M]}{m_1 + \frac{m_2 R_2^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{r_2^2 (R_3 + r_3)^2}}}.$$

4. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

4.1. Продольная деформация

Стержень подвергается *продольной деформации*, когда в его поперечных сечениях возникает внутренняя продольная сила N . Её величина определяется методом сечений по участкам, границами которых являются места приложения внешних продольных сил, действующих на стержень. Из условия равновесия следует, что величина внутренней продольной силы N в поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме внешних продольных сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

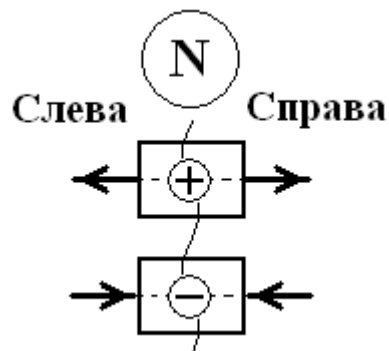


Рисунок 20

Продольная сила N в поперечном сечении стержня считается положительной, когда внешняя продольная сила, приложенная справа или слева от сечения, вызывает растяжение стержня, сжимающая сила считается отрицательной (рис. 20).

Эпюра продольной силы – это график, показывающий изменение величины внутренней продольной силы N в поперечных сечениях стержня в зависимости от координаты x по длине стержня.

Величина *нормального напряжения* σ в любой точке поперечного сечения стержня определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N – величина внутренней продольной силы в сечении, A – площадь поперечного сечения стержня.

Условие прочности при продольной деформации имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{\max}|}{A} \leq [\sigma],$$

где $N_{\max}$ – максимальная величина внутренней продольной силы в сечении стержня, $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

Абсолютное удлинение ΔL на участке длиной L , где продольная сила N постоянна, определяется по формуле

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A},$$

где E – модуль Юнга материала стержня.

Произведение $E \cdot A$ называется *продольной жесткостью* стержня.

Если стержень имеет несколько участков, то абсолютное удлинение будет определяться как алгебраическая сумма абсолютных удлинений на участках

$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot L_i}{E \cdot A_i}.$$

Величина наибольшего относительного удлинения на участке стержня длиной L определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{|\Delta L_{\max}|}{L}.$$

Условие жесткости при продольной деформации имеет вид

$$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon],$$

где $[\varepsilon]$ – допускаемое относительное удлинение.

Задача 4.1

Стальной стержень АЕ (рис. 21) круглого поперечного сечения нагружен заданными продольными силами $F_1=10$ кН, $F_2=7$ кН, $F_3=24$ кН и $F_4=15$ кН.

Длины участков стержня $L_1=k_1L=0,7L$, $L_2=k_2L=0,4L$, $L_3=k_3L=0,5L$, $L_4=k_4L=0,8L$, допускаемое напряжение $[\sigma]=160$ МПа, допускаемое относительное удлинение $[\varepsilon]=0,001$, модуль Юнга материала $E=2 \cdot 10^8$ кПа.

Требуется построить эпюры продольной силы N и относительного удлинения ε , с помощью которых определить диаметр поперечного сечения стержня из условий прочности и жесткости.

Построение эпюры продольной силы

Не вычисляя из уравнений равновесия значение реакции в заделке и используя метод сечений, запишем выражения для продольной силы по участкам стержня. Будем двигаться при этом слева направо в сторону заделки Е, начиная со свободного конца А стержня и используя правило знаков согласно рис. 20.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq L_1$.

$$N_1 = \Sigma N^{\text{IEB}} = F_1 = 10 \text{ кН.}$$

Границы второго участка: $L_1 \leq x_2 \leq L_1 + L_2$.

$$N_2 = \Sigma N^{\text{IEB}} = F_1 - F_2 = 10 - 7 = 3 \text{ кН.}$$

Границы третьего участка: $L_1 + L_2 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 + L_3$.

$$N_3 = \Sigma N^{\text{IEB}} = F_1 - F_2 - F_3 = 10 - 7 - 24 = -21 \text{ кН.}$$

Границы четвертого участка: $L_1 + L_2 + L_3 \leq x_4 \leq L_1 + L_2 + L_3 + L_4$.

$$N_4 = \Sigma N^{\text{IEB}} = F_1 - F_2 - F_3 + F_4 = 10 - 7 - 24 + 15 = -6 \text{ кН.}$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков стержня (рис. 21). После построения эпюры

продольной силы делаем ее проверку, используя правило проверки правильности построения эпюры продольной силы: в тех сечениях стержня, где приложены сосредоточенные продольные силы, на эпюре будут скачки на их величину в соответствии с направлением хода построения и выбранного правила знаков.

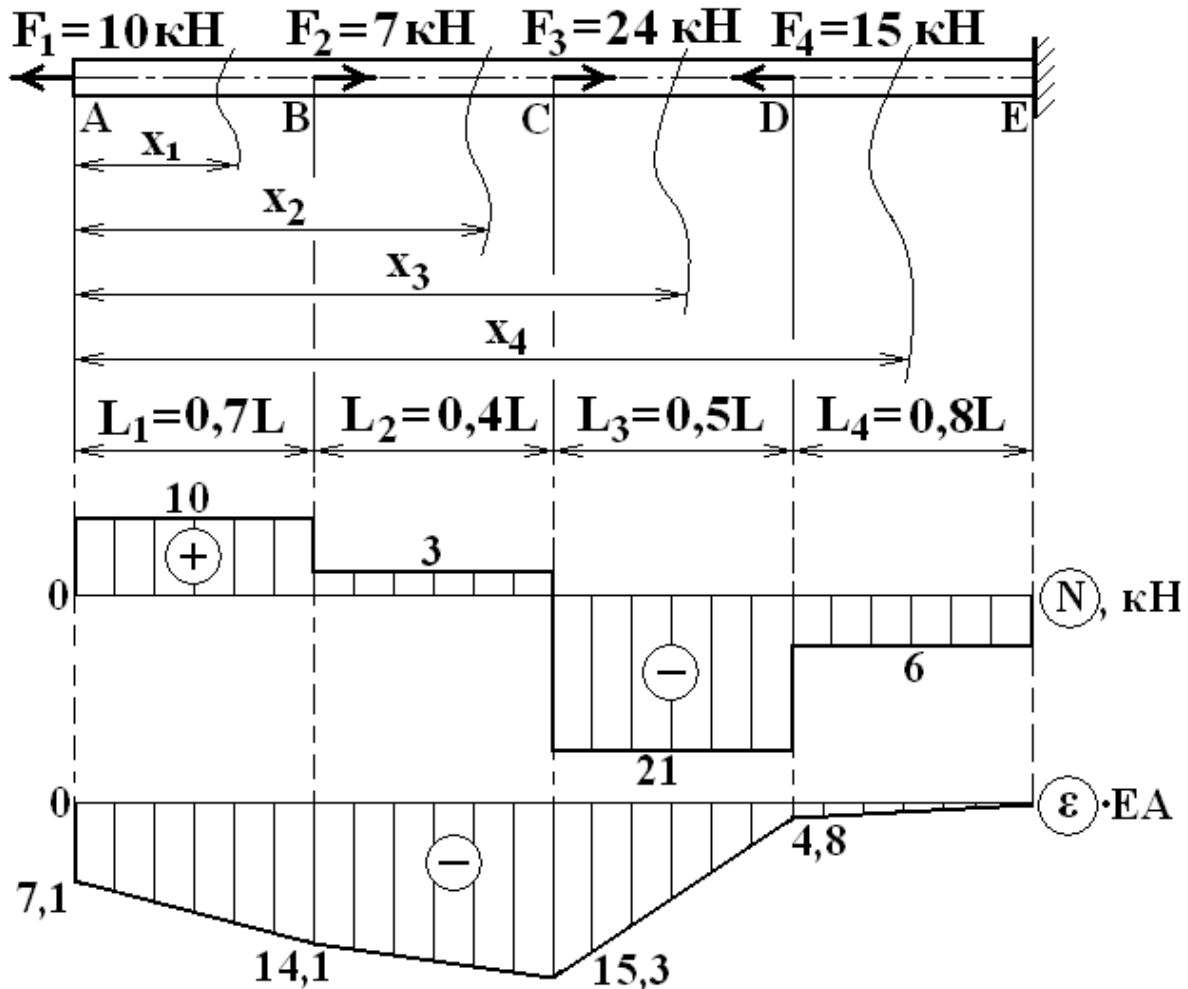


Рисунок 21

Построение эпюры удлинения

Заделка неподвижна, поэтому удлинение в ней $\Delta L_E = 0$.

Удлинение сечения **D** относительно неподвижной заделки **E**

$$\Delta L_{DE} = \frac{N_4 \cdot L_4}{EA},$$

откуда
$$\varepsilon_{DE} \cdot EA = \frac{\Delta L_{DE}}{L} \cdot EA = N_4 \cdot k_4 = -6 \cdot 0,8 = -4,8 \text{ кН}.$$

Относительное удлинение сечения **С** относительно неподвижной заделки **Е** складывается из суммы относительных удлинений сечения **С** относительно **Д** и сечения **Д** относительно **Е**, т. е.

$$\varepsilon_{CE} \cdot EA = \varepsilon_{CD} \cdot EA + \varepsilon_{DE} \cdot EA,$$

где $\varepsilon_{CD} \cdot EA = \frac{\Delta L_{CD}}{L} \cdot EA = N_3 \cdot k_3 = -21 \cdot 0,5 = -10,5 \text{ кН},$

тогда $\varepsilon_{CE} \cdot EA = \varepsilon_{CD} \cdot EA + \varepsilon_{DE} \cdot EA = -10,5 + (-4,8) = -15,3 \text{ кН}.$

Аналогично определяются относительные удлинения сечений **В** и **А** относительно неподвижной заделки **Е**:

$$\varepsilon_{BE} \cdot EA = \varepsilon_{BC} \cdot EA + \varepsilon_{CE} \cdot EA,$$

где $\varepsilon_{BC} \cdot EA = \frac{\Delta L_{BC}}{L} \cdot EA = N_2 \cdot k_2 = 3 \cdot 0,4 = 1,2 \text{ кН},$

тогда $\varepsilon_{BE} \cdot EA = \varepsilon_{BC} \cdot EA + \varepsilon_{CE} \cdot EA = -15,3 + 1,2 = -14,1 \text{ кН},$

$$\varepsilon_{AE} \cdot EA = \varepsilon_{AB} \cdot EA + \varepsilon_{BE} \cdot EA,$$

$$\varepsilon_{AB} \cdot EA = \frac{\Delta L_{AB}}{L} \cdot EA = N_1 \cdot k_1 = 10 \cdot 0,7 = 7 \text{ кН},$$

$$\varepsilon_{AE} \cdot EA = \varepsilon_{AB} \cdot EA + \varepsilon_{BE} \cdot EA = 7 + (-14,1) = -7,1 \text{ кН}.$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков стержня (см. рис. 21).

Определение диаметра стержня

Так как сечение стержня по длине не меняется, то из условия прочности определим минимальный диаметр стержня круглого сплошного сечения

$$d_{\min} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot |N_{\max}|}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 21 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,01293 \text{ м} = 12,93 \text{ мм}.$$

Полученное значение округлим до **d = 15 мм**.

Определение наибольшего относительного удлинения

Сначала определим величину площади стержня круглого сплошного сечения

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (0,015)^2}{4} = 17,65 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

Тогда продольная жесткость стержня будет равна

$$EA = 2 \cdot 10^8 \cdot 17,65 \cdot 10^{-5} = 35320 \text{ кН}.$$

Величина наибольшего относительного удлинения

$$|\varepsilon_{\text{MAX}}| = \frac{|\varepsilon_{\text{CE}} \cdot EA|}{EA} = \frac{|-15,3|}{35320} = 0,00043.$$

Выполняем проверку условия жесткости стержня

$$|\varepsilon_{\text{MAX}}| = 0,00043 < 0,001 = [\varepsilon].$$

Условие жесткости стержня для диаметра 15 мм выполняется, в противном случае диаметр стержня надо увеличить до значения, определяемого формулой

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot |\varepsilon_{\text{MAX}} \cdot EA|}{E \cdot \pi \cdot [\varepsilon]}}.$$

4.2. Кручение

Стержень подвергается деформации **кручения**, когда в его поперечных сечениях возникают внутренние крутящие моменты M_K . Их величина определяется методом сечений по участкам, границами которых являются места приложения внешних крутящих моментов T , действующих на стержень. Из условия равновесия следует, что величина внутреннего крутящего момента M_K в поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме внешних крутящих моментов T , действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

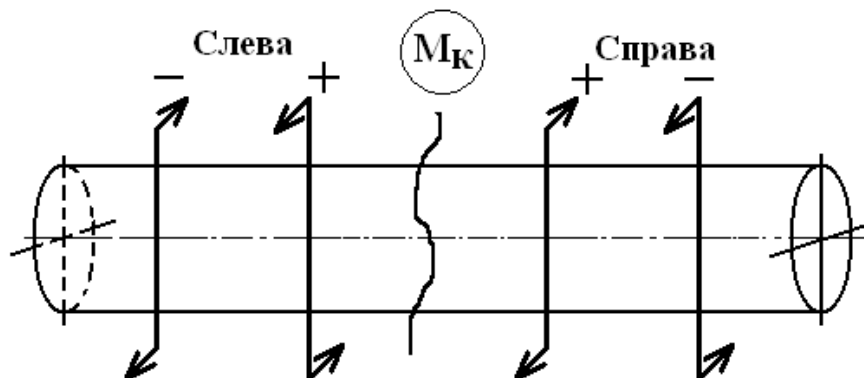


Рисунок 22

Крутящий момент M_K в поперечном сечении вала считается положительным, когда внешний крутящий момент T действует по часовой стрелке при взгляде на соответствующий торец вала (рис. 22).

Эпюра крутящего момента – это график, показывающий изменение величины внутреннего крутящего момента в поперечных сечениях вала в зависимости от координаты x .

Для цилиндрического стержня круглого поперечного сечения диаметром **d** величина касательного напряжения **τ** в точке поперечного сечения, находящегося на расстоянии **ρ** от центра (рис. 23), определяется по формуле

$$\tau = \frac{M_K}{I_p} \cdot \rho,$$

где **M_K** – величина крутящего момента в сечении, **I_p** – полярный момент инерции сечения. Для круглого сплошного сечения диаметром **d** полярный момент инерции **I_p** определяется по формуле

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}.$$

Максимальные касательные напряжения τ в поперечном сечении вала действуют в точках, наиболее удаленных от центра, т. е. при **ρ = d/2** (см. рис. 23). Их величина определяется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p},$$

где **W_p** – полярный момент сопротивления. Для круглого сплошного сечения **W_p** определяется по формуле

$$W_p = \frac{I_p \cdot 2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}.$$

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{|M_K|}{W_p} \leq [\tau],$$

где **[τ]** – допускаемое касательное напряжение при кручении.

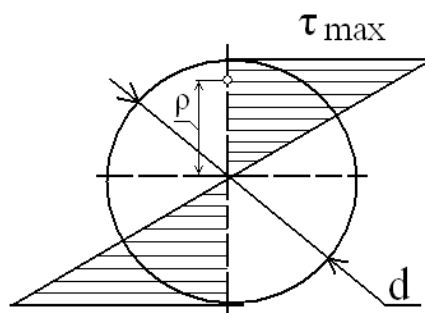


Рисунок 23

Угол закручивания φ на участке вала длиной **L**, где крутящий момент **M_K** постоянен, определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_K \cdot L}{G \cdot I_p},$$

где G – модуль сдвига материала вала.

Произведение $G \cdot I_p$ называется *жесткостью при кручении* вала.

Если стержень имеет несколько участков, то угол закручивания будет определяться как алгебраическая сумма углов закручивания на участках

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{Ki} \cdot L_i}{G \cdot I_{pi}}.$$

Величина наибольшего относительного угла закручивания (рад/м) на участке вала длиной L определяется по формуле

$$\Delta\varphi = \frac{|\varphi_{\max}|}{L}.$$

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\Delta\varphi_{\max} \leq [\Delta\varphi],$$

где $[\Delta\varphi]$ – допускаемый относительный угол закручивания.

Задача 4.2

Стальной стержень АЕ круглого поперечного сечения нагружен крутящими моментами $T_1 = 7$ кНм, $T_2 = 10$ кНм, $T_3 = 15$ кНм и $T_4 = 24$ кНм.

Длины участков стержня $L_1 = k_1L = 0,8L$, $L_2 = k_2L = 0,7L$, $L_3 = k_3L = 0,4L$, $L_4 = k_4L = 0,5L$ (рис. 24), допускаемое напряжение $[\tau] = 25$ МПа, допускаемый относительный угол закручивания $[\Delta\varphi] = 0,006$ рад/м, модуль сдвига материала стержня $G = 0,8 \cdot 10^8$ кПа.

Требуется построить эпюры крутящего момента M_K и относительного угла закручивания $\Delta\varphi$, с помощью которых определить диаметр поперечного сечения стержня из условий прочности и жесткости.

Построение эпюры крутящих моментов

Не вычисляя из уравнений равновесия значение реактивного момента в заделке и используя метод сечений, запишем выражения для крутящего момента по участкам вала. Будем двигаться при этом слева направо в сторону заделки E , начиная со свободного конца A вала и используя правило знаков согласно рис. 22.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq L_1$.
 $M_{K1} = \Sigma T_{\text{ЛЭВ}} = T_1 = 7$ кНм.

Границы второго участка: $L_1 \leq x_2 \leq L_1 + L_2$.

$$M_{K2} = \Sigma T^{\text{ЛЭВ}} = T_1 - T_2 = 7 - 10 = -3 \text{ кНм.}$$

Границы третьего участка: $L_1 + L_2 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 + L_3$.

$$M_{K3} = \Sigma T^{\text{ЛЭВ}} = T_1 - T_2 - T_3 = 7 - 10 - 15 = -18 \text{ кНм.}$$

Границы четвертого участка: $L_1 + L_2 + L_3 \leq x_4 \leq L_1 + L_2 + L_3 + L_4$.

$$M_{K4} = \Sigma T^{\text{ЛЭВ}} = T_1 - T_2 - T_3 + T_4 = 7 - 10 - 15 + 24 = 6 \text{ кНм.}$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков вала (см. рис. 24). После построения эпюры крутящих моментов делаем ее проверку, используя правило проверки правильности построения эпюры крутящих моментов: в тех сечениях вала, где приложены сосредоточенные крутящие моменты, на эпюре будут скачки на их величину в соответствии с направлением хода построения и выбранного правила знаков.

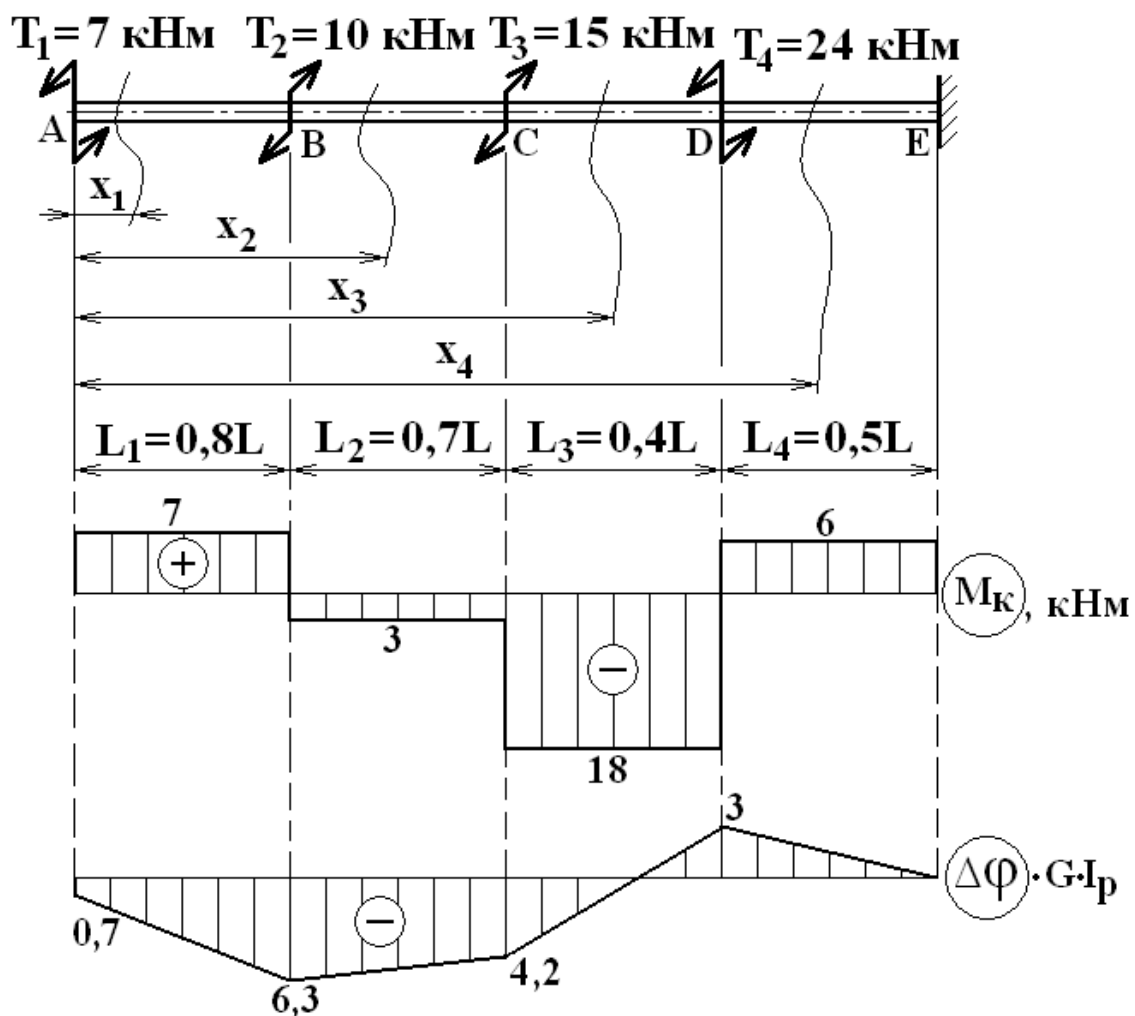


Рисунок 24

Построение эпюры углов закручивания

Заделка неподвижна, поэтому угол закручивания в ней $\varphi_E=0$ рад.
Угол поворота сечения **D** относительно неподвижной заделки **E**

$$\varphi_{DE} = \frac{M_{K4} \cdot L_4}{G \cdot I_p},$$

откуда
$$\Delta\varphi_{DE} \cdot GI_p = \frac{\varphi_{DE}}{L} \cdot GI_p = M_{K4} \cdot k_4 = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ кНм}.$$

Относительный угол закручивания сечения **C** относительно неподвижной заделки **E** складывается из суммы относительных углов закручивания сечения **C** относительно **D** и сечения **D** относительно **E**, то есть

$$\Delta\varphi_{CE} \cdot GI_p = \Delta\varphi_{CD} \cdot GI_p + \Delta\varphi_{DE} \cdot GI_p,$$

где
$$\Delta\varphi_{CD} \cdot GI_p = \frac{\varphi_{CD}}{L} \cdot GI_p = M_{K3} \cdot k_3 = -18 \cdot 0,4 = -7,2 \text{ кНм},$$

тогда
$$\Delta\varphi_{CE} \cdot GI_p = \Delta\varphi_{CD} \cdot GI_p + \Delta\varphi_{DE} \cdot GI_p = -7,2 + 3 = -4,2 \text{ кНм}.$$

Аналогично определяются относительные углы закручивания сечений **B** и **A** относительно неподвижной заделки **E**:

$$\Delta\varphi_{BE} \cdot GI_p = \Delta\varphi_{BC} \cdot GI_p + \Delta\varphi_{CE} \cdot GI_p,$$

где
$$\Delta\varphi_{BC} \cdot GI_p = \frac{\varphi_{BC}}{L} \cdot GI_p = M_{K2} \cdot k_2 = -3 \cdot 0,7 = -2,1 \text{ кНм},$$

тогда
$$\Delta\varphi_{BE} \cdot GI_p = \Delta\varphi_{BC} \cdot GI_p + \Delta\varphi_{CE} \cdot GI_p = -2,1 + (-4,2) = -6,3 \text{ кНм},$$

$$\Delta\varphi_{AE} \cdot GI_p = \Delta\varphi_{AB} \cdot GI_p + \Delta\varphi_{BE} \cdot GI_p,$$

$$\Delta\varphi_{AB} \cdot GI_p = \frac{\varphi_{AB}}{L} \cdot GI_p = M_{K1} \cdot k_1 = 7 \cdot 0,8 = 5,6 \text{ кНм},$$

$$\Delta\varphi_{AE} \cdot GI_p = \Delta\varphi_{AB} \cdot GI_p + \Delta\varphi_{BE} \cdot GI_p = 5,6 + (-6,3) = -0,7 \text{ кНм}.$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков вала (см. рис. 24).

Определение диаметра вала

Так как сечение вала по длине не меняется, то из условия прочности определим минимальный диаметр вала круглого сплошного сечения

$$d_{\min} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |M_{\text{к MAX}}|}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 18 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 25 \cdot 10^6}} = 0,154 \text{ м} = 154 \text{ мм}.$$

Полученное значение округлим до **d = 160 мм**.

Определение наибольшего относительного угла закручивания

Сначала определим величину полярного момента инерции I_p при кручении вала круглого сплошного сечения. Так как сечение вала по длине постоянно, то для каждого участка имеем

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (0,16)^4}{32} = 64,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Тогда жесткость стержня при кручении будет равна

$$GI_p = 0,8 \cdot 10^8 \cdot 64,3 \cdot 10^{-6} = 5144,6 \text{ кНм}^2.$$

Величина наибольшего относительного угла закручивания будет равна

$$|\Delta \varphi_{\text{MAX}}| = \frac{|\Delta \varphi_{\text{BE}} \cdot GI_p|}{GI_p} = \frac{|-6,3|}{5144,6} = 0,00122 \text{ рад/м}.$$

Выполняем проверку условия жесткости вала

$$|\Delta \varphi_{\text{MAX}}| = 0,00122 \text{ рад/м} < 0,006 \text{ рад/м} = [\Delta \varphi].$$

Условие жесткости вала для диаметра 160 мм выполняется, в противном случае диаметр вала надо увеличить до значения, определяемого формулой

$$d_{\min} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot |\Delta \varphi_{\text{MAX}} \cdot GI_p|}{G \cdot \pi \cdot [\Delta \varphi]}}.$$

4.3. Изгиб

Деформация, при которой меняется кривизна геометрической оси, называется **изгибом**. Стержень при изгибе называется **балкой**.

При изгибе стержня за счет действия на него внешней поперечной нагрузки (сосредоточенных сил и моментов) в поперечных сечениях стержня возникают следующие внутренние силовые факторы: поперечная сила Q и изгибающий момент M .

Если плоскость, в которой лежат действующие нагрузки, совпадает с одной из главных плоскостей инерции, то такой изгиб называется **прямым**, а если не совпадает, то **косым**. Если величина поперечной силы в сечении не равна нулю, то такой изгиб называется **поперечным**. Если величина поперечной силы в сечении равна нулю и изгибающий момент постоянен, то такой изгиб называется **чистым**.

Далее будет рассмотрена теория прямого поперечного изгиба.

Величина **поперечной силы** Q_Y в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на ось Y всех внешних сил, действующих по одну сторону (справа или слева) от рассматриваемого сечения. Поперечная сила считается положительной, если она направлена слева вверх и справа вниз. При противоположных направлениях поперечная сила считается отрицательной (рис. 25).

Величина **изгибающего момента** M_Z в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме моментов внешних нагрузок, действующих по одну сторону (справа или слева) от рассматриваемого сечения. Изгибающий момент считается положительным, если он направлен слева от сечения по часовой стрелке, а справа - против часовой стрелки. При противоположных направлениях считается отрицательным (см. рис. 25).

Эпюрой поперечных сил Q и изгибающих моментов M называется график, показывающий изменение соответствующих величин в зависимости от координаты X .



Рисунок 25

Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе имеет вид

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{|M_{\text{MAX}}|}{W_Z} \leq [\sigma],$$

где σ_{MAX} – максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении балки, $|M_{\text{MAX}}|$ – наибольшее по модулю значение изгибающего момента, взятое с его эпюры, W_z – момент сопротивления постоянной по длине балки площади поперечного сечения, $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение при изгибе.

Для круглого сплошного сечения величина W_z определяется по формуле

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32},$$

где d – диаметр стержня.

При изгибе балки существует дифференциальная зависимость

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x).$$

Из неё следуют правила проверки построенных эпюр Q и M :

1. В тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные силы, включая опорные реакции, на эпюре Q будут скачки на их величину, а на эпюре M – излом эпюры.
2. В тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные моменты, на эпюре M будут скачки на их величину, а на эпюре Q особенностей не будет.
3. Если эпюра Q представлена горизонтальной линией, то эпюра M будет наклонной к оси x прямой.
4. На участке, где поперечная сила Q положительна, изгибающий момент M возрастает, а если сила Q отрицательна, то момент M убывает.

Задача 4.3

Стальной стержень АВ круглого поперечного сечения нагружен изгибающими моментами $M_{01} = 15$ кНм, $M_{02} = 15$ кНм и поперечными силами $F_1 = 5$ кН и $F_2 = 20$ кН (рис. 26).

Длины участков стержня $a=2$ м, $b=3$ м, $c=1$ м, допускаемое напряжение $[\sigma]=160$ МПа.

Требуется определить реакции в опорах А и В, построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M , определить диаметр поперечного сечения стержня из условия прочности.

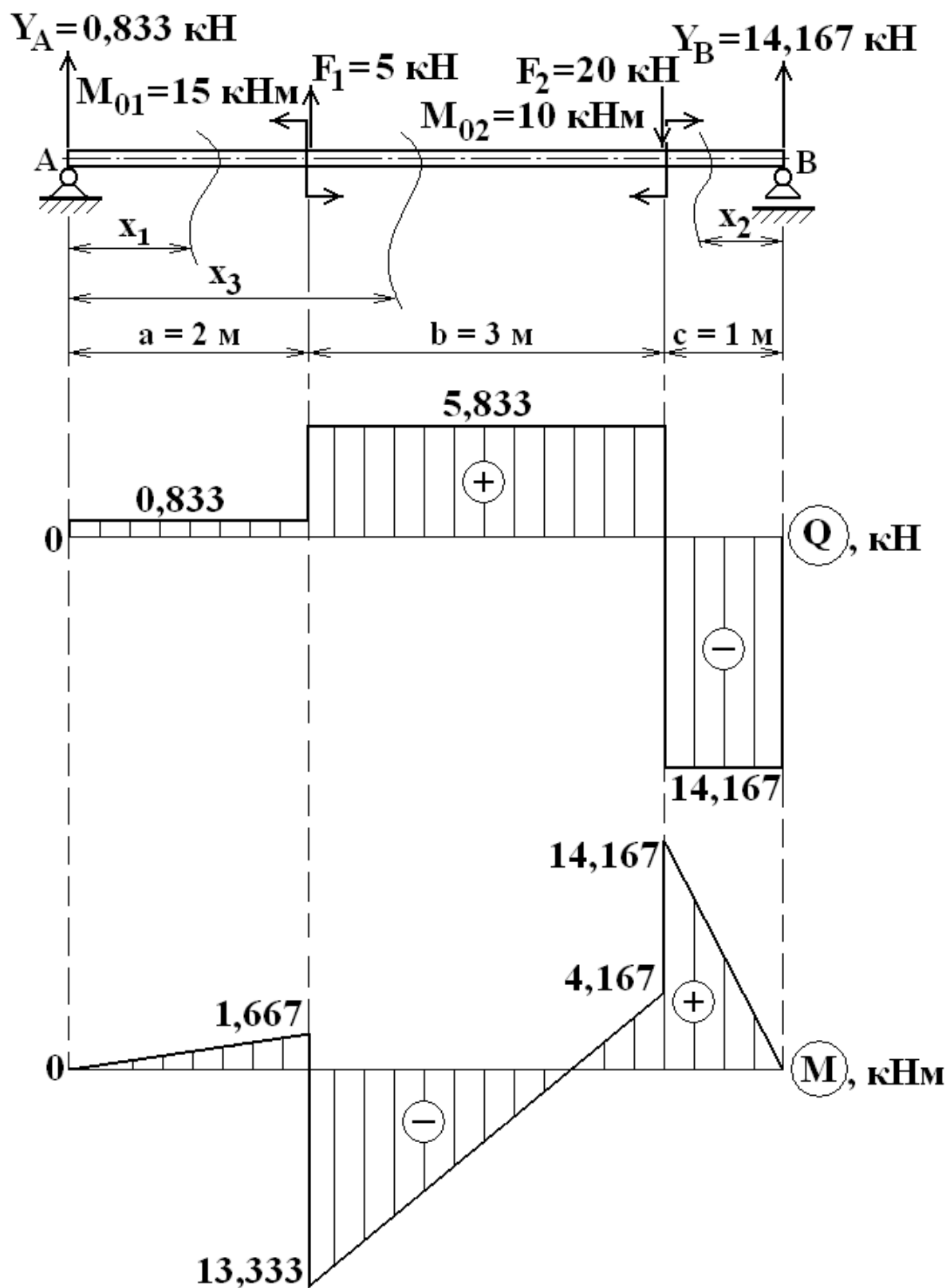


Рисунок 26

Определение реакций опор

Для определения реакции в опорных закреплениях используем уравнения равновесия статики на плоскости. Для этого в опорах **A** и **B** покажем действие реакций Y_A и Y_B , направив их предварительно вертикально вверх (см. рис. 26). Так как горизонтальных сил к балке не приложено, то $X_A=0$.

Для нахождения реакции Y_A составим сумму моментов всех действующих сил относительно точки **B**

$$\sum_{i=1}^n M_{Bi} = 0;$$

$$-Y_A \cdot (a + b + c) + M_{01} - F_1 \cdot (b + c) - M_{02} + F_2 \cdot c = 0;$$

$$Y_A = \frac{M_{01} - F_1 \cdot (b + c) - M_{02} + F_2 \cdot c}{a + b + c} = \frac{15 - 5 \cdot (3 + 1) - 10 + 20 \cdot 1}{2 + 3 + 1} = 0,833 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции Y_A получилось положительным, то её направление соответствует показанному направлению Y_A на расчетной схеме (в противном случае направление следует поменять на обратное).

Для нахождения реакции Y_B составим сумму моментов всех действующих сил относительно точки **A**

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0;$$

$$Y_B \cdot (a + b + c) + M_{01} - F_2 \cdot (b + a) - M_{02} + F_1 \cdot a = 0;$$

$$Y_B = \frac{M_{02} + F_2 \cdot (b + a) - M_{01} - F_1 \cdot a}{a + b + c} = \frac{10 + 20 \cdot (3 + 2) - 15 - 5 \cdot 2}{2 + 3 + 1} = 14,167 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции Y_B получилось положительным, то её направление соответствует показанному направлению Y_B на расчетной схеме (в противном случае направление следует поменять на обратное).

Сделаем проверку найденных реакций:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = Y_A + Y_B + F_1 - F_2 = 0,833 + 14,167 + 5 - 20 = 0.$$

Проверка сошлась, теперь на расчетной схеме все известно и можно приступить к построению эпюр поперечной силы и изгибающего момента.

Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента

Заданная балка состоит из трех участков. Рассечем ее последовательно на каждом из них и запишем выражения для поперечной силы и изгибающего момента, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, используя правило знаков согласно рис. 25.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq a$.

$$Q_1 = \Sigma Q^{\text{ЛЭВ}} = Y_A = 0,833 \text{ кН.}$$

$$M_1 = \Sigma M^{\text{ЛЭВ}} = Y_A \cdot x_1 = 0,833 \cdot x_1.$$

При $x_1 = 0 \text{ м}$, $M_1 = 0 \text{ кНм}$.

При $x_1 = a = 2 \text{ м}$, $M_1 = 1,667 \text{ кНм}$.

Границы второго участка: $0 \leq x_2 \leq c$.

$$Q_2 = \Sigma Q^{\text{ПР}} = -Y_B = -14,167 \text{ кН.}$$

$$M_2 = \Sigma M^{\text{ПР}} = Y_B \cdot x_2 = 14,167 \cdot x_2.$$

При $x_2 = 0 \text{ м}$, $M_2 = 0 \text{ кНм}$.

При $x_2 = c = 1 \text{ м}$, $M_2 = 14,167 \text{ кНм}$.

Границы третьего участка: $a \leq x_3 \leq a + b$.

$$Q_3 = \Sigma Q^{\text{ЛЭВ}} = Y_A + F_1 = 0,833 + 5 = 5,833 \text{ кН.}$$

$$M_3 = \Sigma M^{\text{ЛЭВ}} = Y_A \cdot x_3 - M_{01} + F_1 \cdot (x_3 - a) = 0,833 \cdot x_3 - 15 + 5 \cdot (x_3 - 2).$$

При $x_3 = a = 2 \text{ м}$, $M_3 = 0,833 \cdot 2 - 15 = -13,333 \text{ кНм}$.

При $x_3 = a + b = 5 \text{ м}$, $M_3 = 0,833 \cdot 5 - 15 + 5 \cdot (5 - 2) = 4,167 \text{ кНм}$.

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков балки (см. рис. 26). После построения эпюры делаем ее проверку, используя правила построения эпюр при изгибе.

Определение диаметра балки

Так как сечение балки по длине не меняется, то из условия прочности определим минимальный диаметр балки круглого сплошного сечения

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_{\text{MAX}}|}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 14,167 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0966 \text{ м} = 96,6 \text{ мм}.$$

Полученное значение округлим до **d=100 мм**.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: учебник. – М.: Высшая школа, 2004.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике.- СПб.: Лань, 2005.

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. А.А. Яблонского.- СПб.: Лань, 2010.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.- М.: Наука, 2009.

Яблонский А.А. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 2010.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
1. Статика.....	3
1.1. Плоская система сходящихся сил.....	4
1.2. Равновесие твердого тела под действием плоской системы сил.....	7
1.3. Равновесие твёрдого тела под действием пространственной системы сил.....	12
2. Кинематика.....	18
2.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения.....	18
2.2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движении.....	21
2.3. Кинематический анализ плоского стержневого механизма.....	23
3. Динамика.....	28
3.1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием переменных сил.....	28
3.2. Теорема об изменении количества движения механической системы в ее применении к сплошной среде.....	29
3.3. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы.....	31
4. Сопротивление материалов.....	35
4.1. Продольная деформация.....	35
4.2. Кручение.....	39
4.3. Изгиб.....	45
Библиографический список.....	50
