

**П. В. Кауров
В. Е. Головки
И. В. Ключкин**

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2025**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»**
Высшая школа технологии и энергетики

П. В. Кауров
В. Е. Головки
И. В. Ключкин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2025

УДК 539.4 (075)
ББК 30.121я7
К 301

Рецензенты:

кандидат химических наук, доцент, заведующий кафедрой материаловедения
и технологии машиностроения Высшей школы технологии и энергетики
Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна
А. Н. Евдокимов;
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математических методов в управлении
Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета им. С. М. Кирова
Б. М. Шифрин

Кауров, П. В.

К 301 Теоретическая механика: учебное пособие / П. В. Кауров, В. Е. Головко,
И. В. Ключкин. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2025. — 104 с.
ISBN 978-5-91646-461-0

Учебное пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины
«Теоретическая механика» для студентов, обучающихся по направлениям подготовки:
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»; 15.03.04 «Автоматизация
технологических процессов и производств»; 13.03.01 «Теплоэнергетика и
теплотехника»; 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

В учебном пособии изложен курс теоретической механики, даны основные
понятия и определения. Рассмотрены разделы «Статика», «Кинематика» и «Динамика».

Пособие предназначено для бакалавров очной и заочной форм обучения.

УДК 539.4 (075)
ББК 30.121я7

ISBN 978-5-91646-461-0

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2025
© Кауров П. В., Головко В. Е.,
Ключкин И. В., 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
СТАТИКА	6
Предмет и основные понятия статики	6
Аксиомы статики.....	8
Связи и реакции связей.....	11
Уравнения равновесия системы сходящихся сил на плоскости и в пространстве	17
Пара сил, момент пары сил на плоскости. Теоремы о парах сил.....	18
Момент силы относительно центра на плоскости. Приведение одной силы к центру по методу Пуансо	20
Приведение плоской системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент.....	22
Случаи приведения плоской системы сил к простейшему виду. Теорема Вариньона	24
Условия и уравнения равновесия плоской системы сил.....	26
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Статика»	26
КИНЕМАТИКА.....	28
Пространство и время в классической механике. Система отсчета	29
Способы задания движения точки.....	30
Скорость и ускорение точки	33
Определение скорости и ускорения точки при задании ее движения координатным способом	36
Скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения...	38
Виды движения твердого тела	41
Поступательное движение твердого тела	42
Вращательное движение твердого тела. Закон вращательного движения.....	44
Угловая скорость и угловое ускорение тела	45
Равномерное и равнопеременное вращение тела	47
Скорость и ускорение точки вращающегося тела	49
Сложное движение точки.....	52
Теорема о сложении скоростей.....	54
Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела	56

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Кинематика»	59
ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....	61
Предмет и основные понятия динамики.....	61
Законы (аксиомы) Ньютона. Основные понятия	61
Закон сложения сил (аксиома независимости действия сил)	63
Дифференциальные уравнения движения точки	65
Две основные задачи динамики точки.....	65
Частный случай. Прямолинейное движение точки	67
Теорема об изменении количества движения	71
Работа	74
Теорема об изменении кинетической энергии.....	78
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Динамика материальной точки»	79
ДИНАМИКА СИСТЕМЫ	80
Момент инерции твердого тела относительно оси. Радиус инерции	80
Теорема о моментах инерции тела относительно параллельных осей (теорема Штейнера)	82
Моменты инерции простейших однородных тел	83
Дифференциальное уравнение вращательного движения	87
Элементарная работа и работа силы на конечном перемещении	88
Работа силы тяжести и силы упругости.....	92
Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу при поступательном и вращательном движении	95
Кинетическая энергия материальной точки и механической системы	99
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Динамика системы».....	101
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	103
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	104

ВВЕДЕНИЕ

Теоретической механикой называется наука, в которой изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Простейшая форма движения материи – механическое движение, под которым подразумевают происходящее во времени и пространстве изменение положения одного тела по отношению к другому. С телом, по отношению к которому изучается движение, связывают определенную систему координат.

В природе тела взаимодействуют друг с другом. Взаимодействие тел происходит по-разному, например, оно может заключаться в передаче от одного тела к другому какого-то количества теплоты, электрического заряда и пр. Одним из видов взаимодействия материи является механическое взаимодействие тел.

Механическим взаимодействием называется такое взаимодействие материальных тел, которое изменяет или стремится изменить характер их механического движения.

При этом мы пренебрегаем изменениями в химической структуре тел и их физическим состоянием. Механическое взаимодействие является одной из конкретных форм проявления взаимосвязи как всеобщей формы существования движущейся материи.

Как научная дисциплина теоретическая механика насчитывает в своем историческом развитии свыше двух тысячелетий. Первые теоремы механики были сформулированы в трудах Аристотеля (середина IV в. до н. э.), Архимеда (III в. до н. э.). Однако становление теоретической механики как науки в современном понимании произошло в начале XVII века в трудах Галилея и нашло свое логическое завершение в известном труде Исаака Ньютона «Математические начала натуральной философии» (1678 год). В дальнейшем методы теоретической механики развивались в трудах Эйлера, Даламбера, Лагранжа, Гамильтона и др.

Значительный вклад в развитие механики внесли русские и советские ученые – М. В. Ломоносов, М. В. Остроградский, П. Л. Чебышев, И. В. Мещерский, Н. Е. Жуковский, К. С. Циолковский, А. Н. Крылов, Н. Г. Четаев, Г. К. Суслов, И. Г. Малкин, А. Ю. Ишлинский и др.

Исключительное значение для теоретической механики имеют работы А. М. Ляпунова (1857–1918). Наиболее выдающаяся его работа – создание теории устойчивости движения – имеет широкое техническое применение, и ее развивают многие русские и иностранные ученые.

Курс теоретической механики делится на три раздела: статику, кинематику и динамику.

СТАТИКА

Предмет и основные понятия статики

Статикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются способы преобразования систем сил в эквивалентные и рассматриваются задачи на равновесие твердых тел.

Сформулируем основные понятия статики:

1. *Материальная точка* – тело конечных размеров, которыми можно пренебречь при решении данной задачи.

2. *Система материальных точек* (механическая система) – это такая совокупность материальных точек, в которой движение (положение) каждой точки зависит от движения (положения) остальных точек.

3. *Абсолютно твердое тело* – эта такая система материальных точек, в которой расстояние между любыми точками не изменяется в процессе движения.

Очевидно, абсолютно твердое тело не может деформироваться, т. е. изменять свою форму под влиянием приложенных сил. Это понятие является научной абстракцией, принятой для получения законов движения в наиболее общей форме, справедливых как для движения тел, так жидкостей и газов.

4. *Кинематическое состояние* – это состояние движения (в частном случае покоя), в котором находится данное твердое тело.

Введение этого понятия необходимо в статике, так как здесь не вводятся кинематические характеристики: скорость, ускорение, траектория движения и т. д.

5. *Сила* – это мера механического взаимодействия между телами, характеризующая его интенсивность и направление.

Это взаимодействие может иметь место как при непосредственном контакте (близкодействие), так и через посредство создаваемых телами полей (дальнодействие).

Сила – величина векторная. Действие силы на тело определяется тремя элементами: модулем (величиной), направлением и точкой приложения.

Графически сила P выражается направленным отрезком, где длина отрезка AB выражает в выбранном масштабе модуль силы, прямая DC , по которой направлена сила, называемая линией действия силы, и точка A указывают точку приложения силы (рис. 1).

Для измерения модуля силы принята следующая единица измерения в международной системе (СИ) – 1 Н.

Перевод единицы производится по соотношению:

$$1 \text{ Н} = 1,102 \text{ кг}.$$

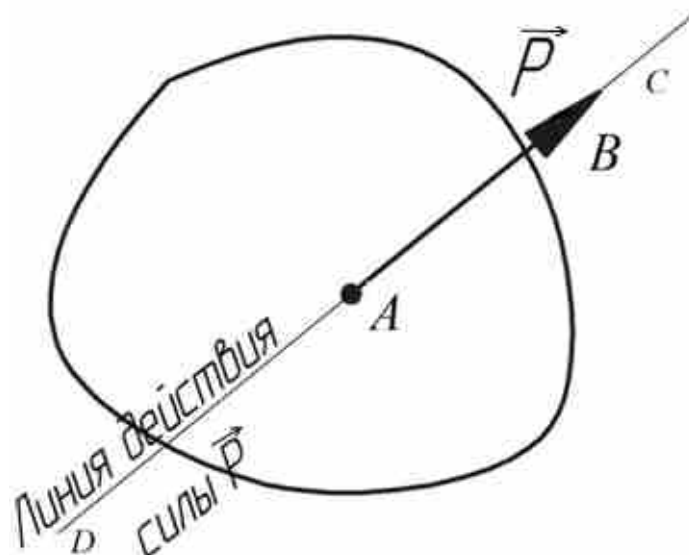


Рисунок 1

Сила, приложенная к телу в какой-либо одной его точке, называется *сосредоточенной*.

Силы, действующие на все точки данного объема или поверхности тела, называются *распределенными*. Из них наибольшее значение имеют силы, равномерно распределенные по длине (погонная нагрузка): q — интенсивность равномерно распределенной нагрузки, т. е. величина силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка. При решении задач такую нагрузку нужно привести к сосредоточенной силе, приложенной в середине отрезка и равной по модулю $Q = q \cdot L$ (рис. 2).

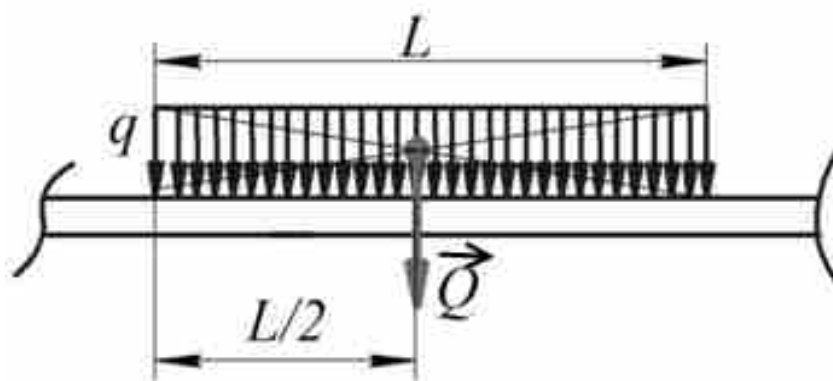


Рисунок 2

Совокупность сил, действующих на данное тело, называется *системой сил*. Системы сил, под действием каждой из которых тело находится в

одинаковом кинематическом состоянии, называются *эквивалентными*.

В частности, если добавление или отбрасывание некоторой системы сил не изменяет кинематического состояния механической системы, то говорят, что эта система сил является *уравновешенной* (или *эквивалентной нулю*).

6. Сила, эквивалентная данной системе сил, называется *равнодействующей*.

7. Сила, равная по модулю равнодействующей и направленная по одной с ней прямой в противоположную сторону, называется *уравновешивающей*.

Аксиомы статики

Все теоремы и уравнения статики выводятся из нескольких исходных фундаментальных положений, называемых аксиомами статики.

I. Аксиома инерции:

Система сил, приложенная к твердому телу, находящемуся в покое или совершающему равномерное прямолинейное движение, является уравновешенной.

II. Аксиома уравновешивания двух сил:

Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, уравновешиваются тогда и только тогда, когда они равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны:

$$\vec{P}_1 = -\vec{P}_2.$$

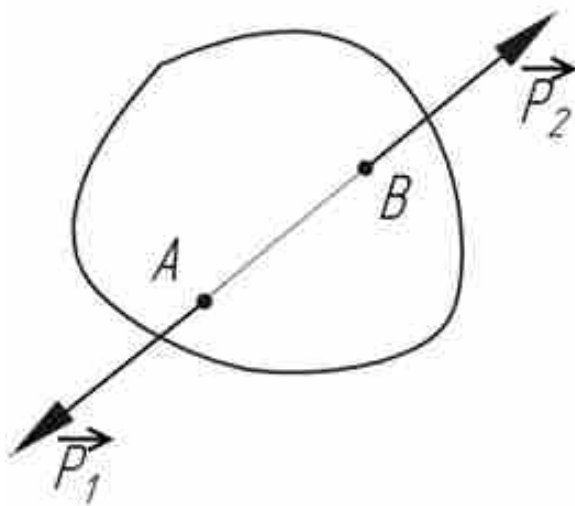


Рисунок 3

III. Аксиома присоединения и отбрасывания систем взаимно уравнивающих сил:

Кинематическое состояние абсолютно твердого тела не изменится при присоединении или отбрасывании системы взаимно уравнивающих сил.

Следствие: Силу можно переносить в любую точку линии ее действия, т. е. сила является скользящим вектором.

Доказательство: пусть на тело действует сила P , приложенная в точке A . Требуется перенести точку приложения этой силы в точку B , лежащую на линии действия силы.

Приложим в точке B тела уравновешенную систему сил (P_1, P_2) так, чтобы соблюдалось равенство (рис. 4):

$$\vec{P}_1 = \vec{P} = -\vec{P}_2.$$

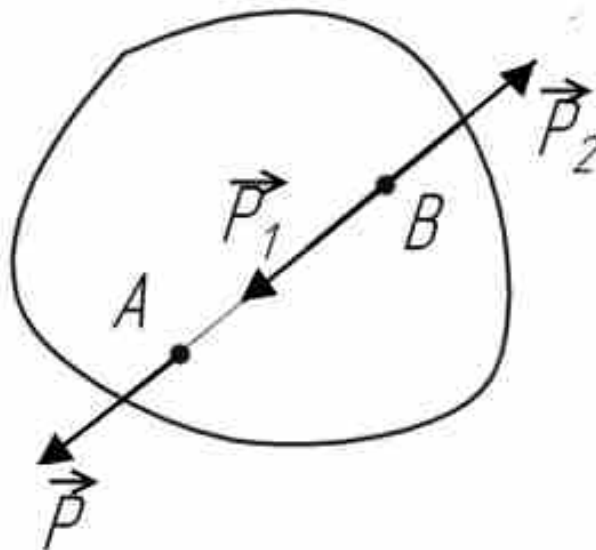


Рисунок 4

От этого действие силы P на тело не изменится. Отбросим уравновешенную систему сил (P_1, P_2) . В результате получим силу $P_1 = P$, но приложенную в точке B тела. Поскольку точка B была выбрана на линии действия силы произвольно, то следствие доказано.

IV. Аксиома параллелограмма сил:

Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах (рис. 5).

Эта аксиома дает способ определения равнодействующей двух сил, приложенных в одной точке тела. Этот способ называется правилом параллелограмма.

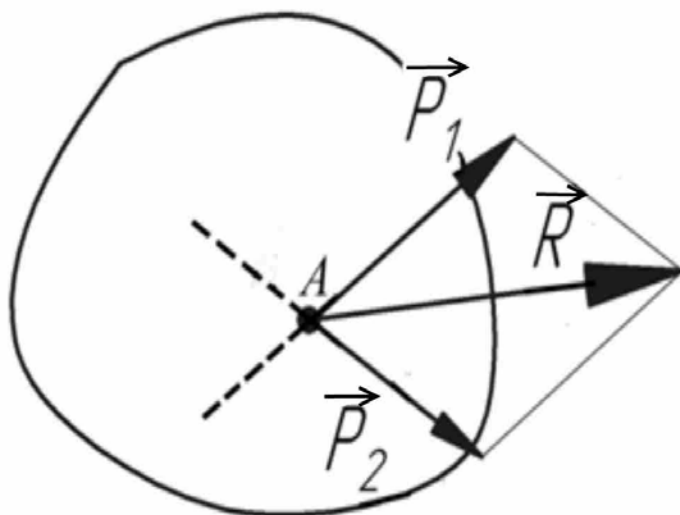


Рисунок 5

V. Аксиома равенства действия и противодействия (3-й закон Ньютона):

Всякому действию соответствует равное по модулю и противоположно направленное противодействие (рис. 6).

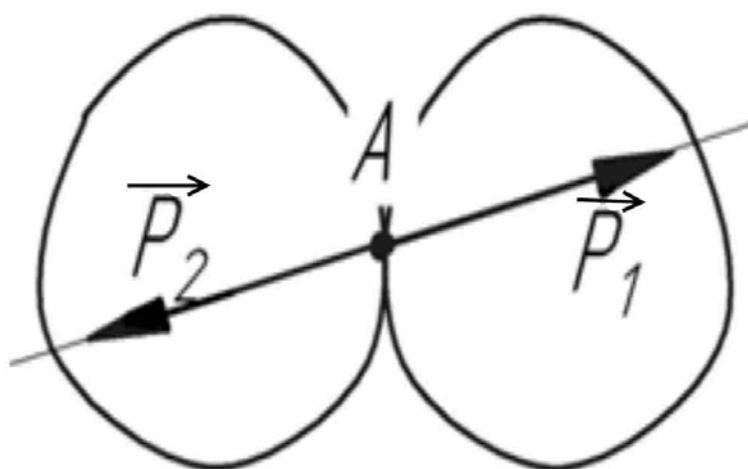


Рисунок 6

$$\vec{P}_1 = -\vec{P}_2.$$

Эта аксиома утверждает, что в природе не существует одностороннего действия силы. Механическое действие и противодействие являются конкретной формой проявления принципа всеобщей связи явлений при механическом взаимодействии тел.

Будучи приложенными к разным телам, силы взаимодействия уравновешенной системы не образуют.

VI. Аксиома затвердевания:

Кинематическое состояние нетвердого тела не изменяется при его мгновенном затвердевании.

Из этой аксиомы следует, что условия равновесия абсолютно твердого тела должны выполняться и для деформируемого тела. Однако для деформируемого тела эти условия *необходимы, но не всегда достаточны*. Так, для равновесия гибкой нити недостаточно того, чтобы приложенные к ее концам силы были равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны, нужно еще, чтобы они растягивали нить, а не сжимали.

Связи и реакции связей

Тело называется *свободным*, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении, т. е. его движение не ограничено твердыми телами.

При решении задач, относящихся к равновесию тела, почти всегда рассматриваемое тело является несвободным.

Тело, перемещения которого в пространстве ограничены какими-либо другими телами, называется *несвободным*.

Тела, ограничивающие свободу перемещения в пространстве данного тела, называются *связями*.

Если тело несвободно, то говорят, что на него наложены связи. В механике связи осуществляются при помощи твердых или гибких тел, соединенных с данным телом или касающихся его. Так, для тела, лежащего на столе, связью является стол; для вала, лежащего в подшипниках, связями являются подшипники; для лестницы, приставленной к стене, связями являются стена и пол. Если под действием приложенных к нему сил тело будет давить на связь, то связь, в свою очередь, будет действовать на это тело.

Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению, называется реакцией связи.

Согласно аксиоме V реакция связи равна по модулю силе давления на связь и направлена в сторону, противоположную этой силе, т. е. в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

Силы, действующие на несвободное тело, делятся на задаваемые (активные) и реакции связей. К задаваемым силам относятся все силы, не являющиеся реакциями связей.

Рассмотрим основные типы связей и их реакции.

1. Гладкая опорная поверхность

Гладкой называется поверхность, трением тела о которую можно пренебречь. Связи без трения называются *идеальными*.

Реакция направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке (рис. 7).

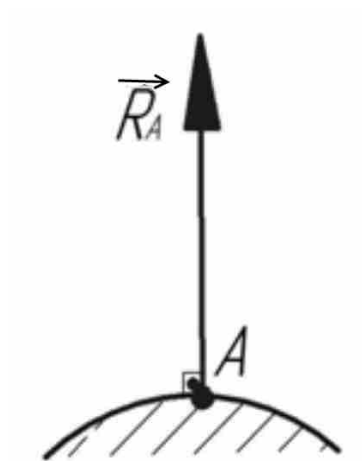


Рисунок 7

Если одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (угол), то реакция направлена по нормали к другой поверхности (рис. 8).

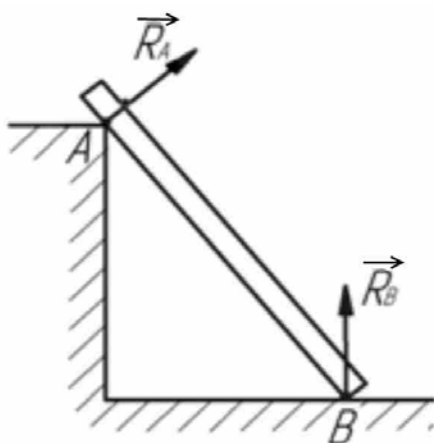


Рисунок 8

2. Гибкая нить (цепь, канат)

Реакция (натяжение) нити направлена вдоль нити к точке ее подвеса и приложена в точке прикрепления нити к телу (рис. 9).

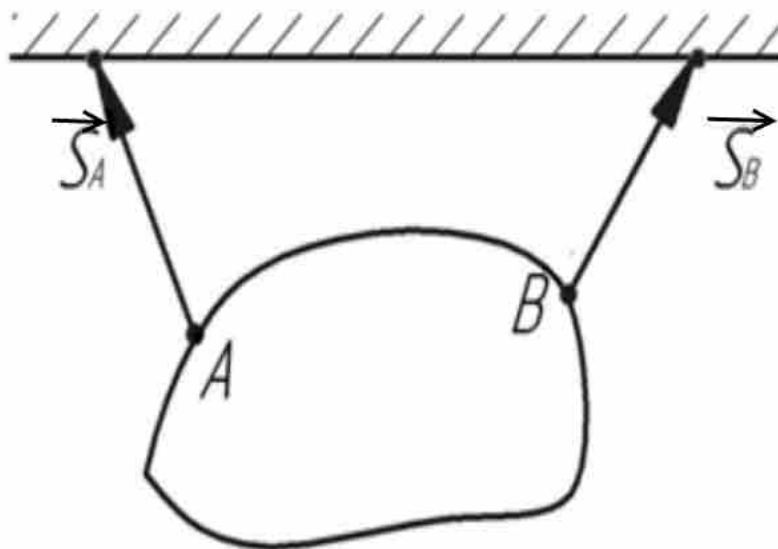


Рисунок 9

3. Стержень

Реакции стержня направлены вдоль стержня: при растяжении – внутрь, а при сжатии – наружу (рис. 10).

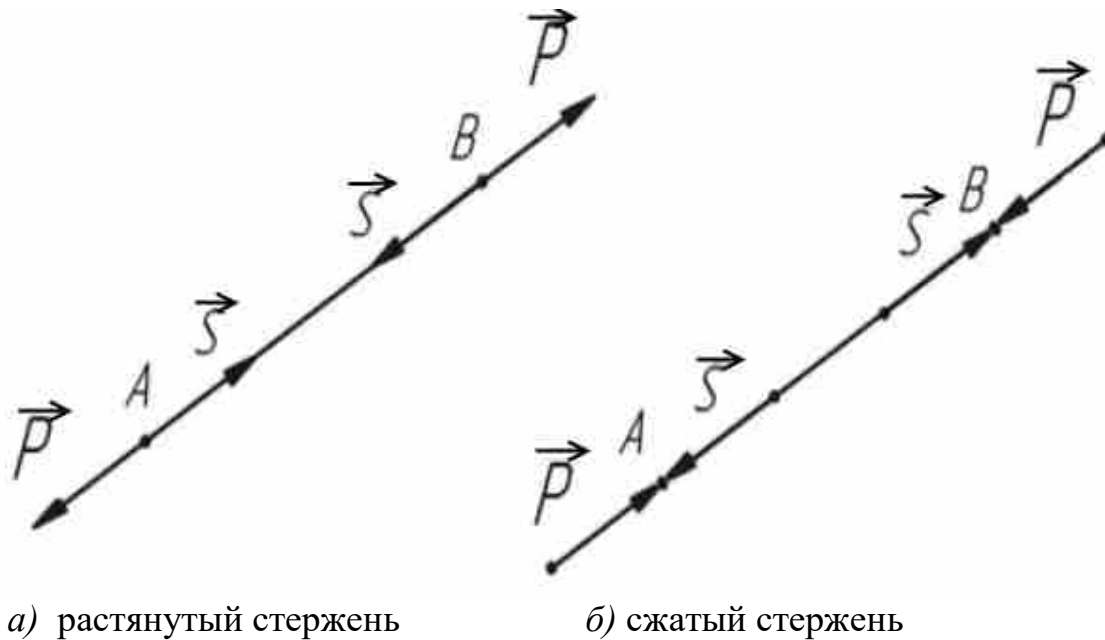


Рисунок 10

4. Опоры балок

- а) подвижная шарнирная опора (подвижный цилиндрический шарнир)

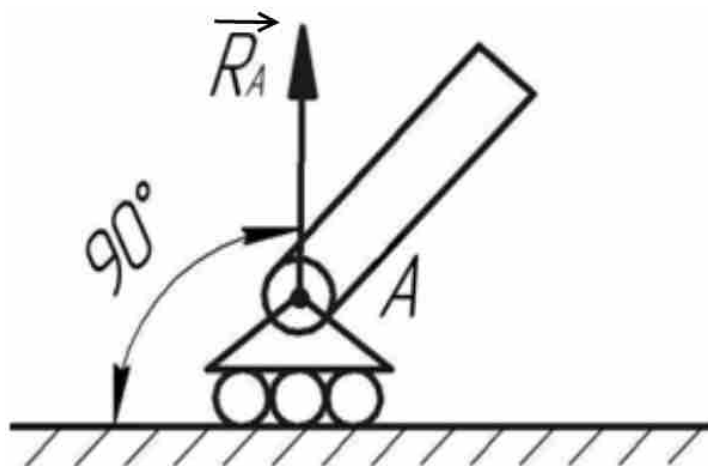


Рисунок 11

Реакция R_A направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки опоры, а линия действия проходит через центр шарнира (рис. 11).

б) неподвижная шарнирная опора (неподвижный цилиндрический шарнир).

Реакция R_B проходит через ось шарнира и может занимать любое положение в плоскости, перпендикулярной к этой оси.

При решении задач будем реакцию R_B изображать ее составляющими X_B и Y_B по направлениям осей координат (рис. 12). Определив эти составляющие, можно найти модуль и направление реакции R_B :

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}; \quad \cos \alpha = \frac{X_B}{Y_B}; \quad \cos \beta = \frac{Y_B}{X_B},$$

где α и β – углы, которые составляет вектор R_B с осями координат OX и OY соответственно.

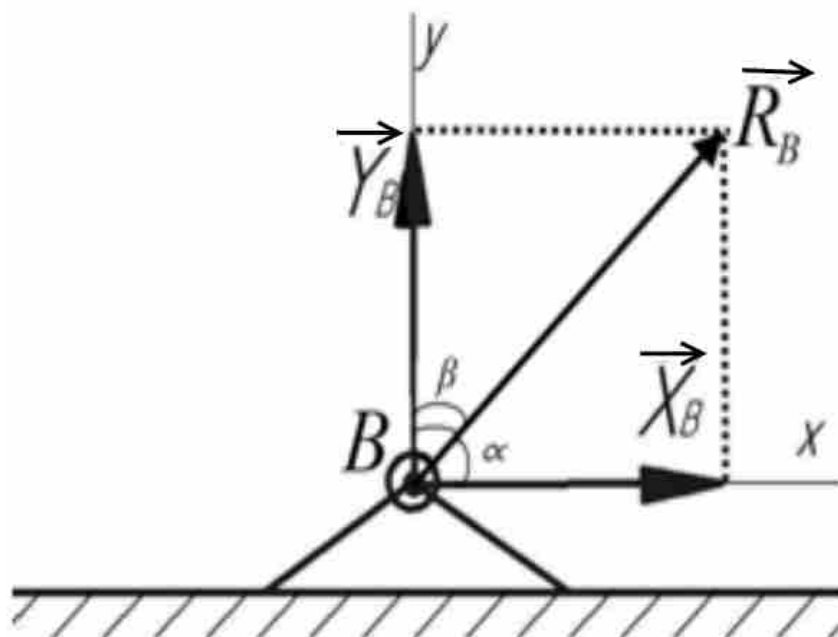


Рисунок 12

5. *Опоры вращающихся твердых тел*

а) на плоскости (рис. 13):

y – ось вращения;

A – цилиндрический подшипник;

R_A – перпендикулярна к оси вращения (параллельна оси x);

B – подпятник (пята);

R_B – имеет две составляющие по осям x и y (X_B и Y_B).

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}.$$

Реакция подшипника A направлена по перпендикуляру к оси вращения z , раскладывается на две составляющие по осям x и y (X_A и Y_A):

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}.$$

Реакция подпятника B имеет составляющие по всем трем координатным осям (рис. 14):

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2}.$$

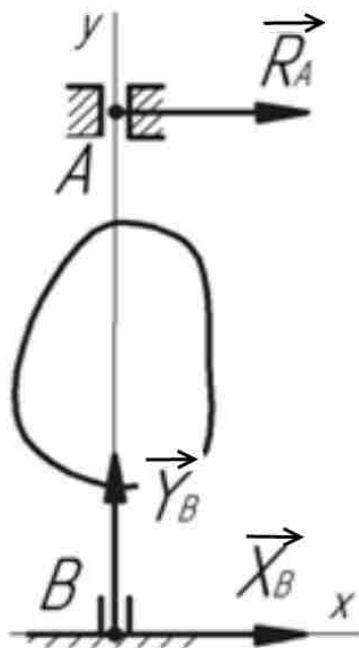


Рисунок 13

б) в пространстве:

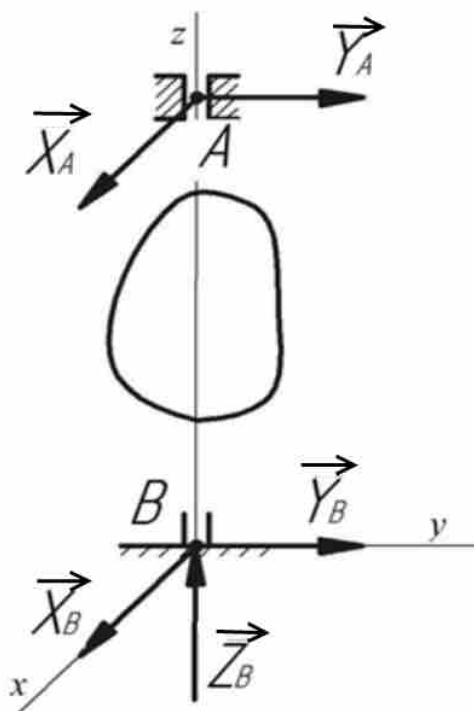


Рисунок 14

Задачи на равновесие несвободных тел решаются на основании следующей аксиомы: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно отбросить связи и заменить их действие на тело реакциями этих связей.

Эта аксиома называется *принципом освобожденности от связей* или аксиомой связей.

Пример: на гладкой горизонтальной плоскости покоится шар (рис. 15). Неподвижная плоскость, ограничивающая движение шара, является для него связью. Если мысленно освободить шар от связи, то для удержания его в покое к нему в точке касания с плоскостью нужно приложить силу $N = -G$.

Тогда шар, освобождаемый от связи, будет свободным телом, на которое действует активная сила G и реакция связи N .

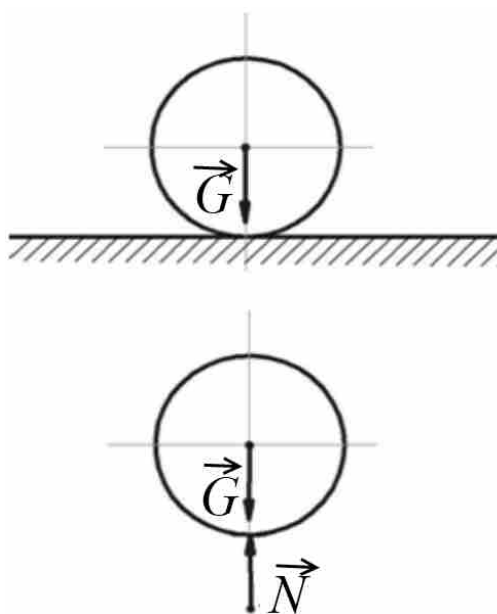


Рисунок 15

Уравнения равновесия системы сходящихся сил на плоскости и в пространстве

Любая система сходящихся сил эквивалентна равнодействующей, которая равна геометрической сумме сил системы и проходит через точку пересечения их линий действия.

Для равновесия сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил равнялась нулю, т. е.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = 0.$$

Спроецируем это равенство на оси координат, получим уравнения равновесия системы сходящихся сил в аналитической форме:

$$\sum_{i=1}^n \bar{P}_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{P}_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{P}_{iz} = 0.$$

Для равновесия системы сходящихся сил в пространстве необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций этих сил на три взаимно перпендикулярные координатные оси были равны нулю.

Если все силы системы лежат в одной плоскости, то, расположив координатные оси Ox и Oy в плоскости действия сил, получим два условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^n \bar{P}_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{P}_{iy} = 0.$$

Пара сил, момент пары сил на плоскости Теоремы о парах сил

Рассмотрим систему двух параллельных, равных по модулю и противоположно направленных сил (рис. 16):

$$|\bar{P}_2| = |\bar{P}_1|;$$

$$\bar{P}_2 = -\bar{P}_1.$$

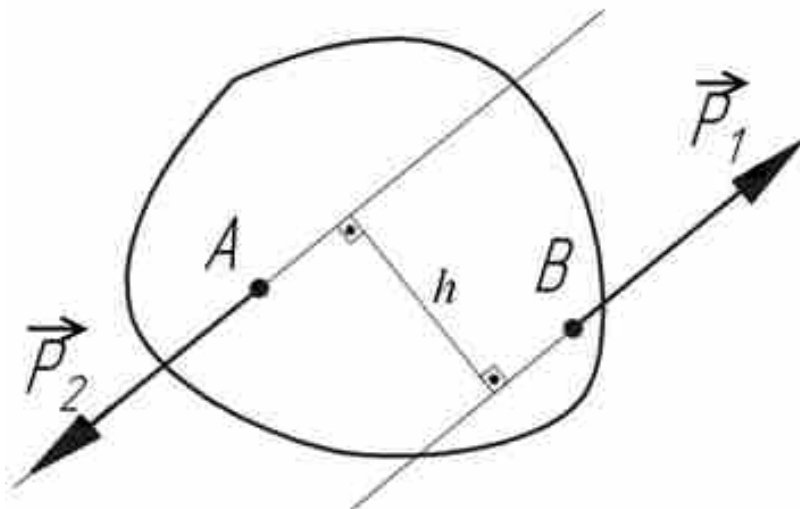


Рисунок 16

Очевидно, равнодействующая этих сил равна нулю, однако силы на основании аксиомы II статики не уравниваются. Следовательно, такая совокупность сил представляет собой первичный элемент статики, который не сводится к силе.

Парой сил называется совокупность двух параллельных, равных по модулю и противоположно направленных сил. Плоскость, в которой лежат эти силы, называется *плоскостью пары*. *Плечо пары* h – это кратчайшее расстояние между линиями действия сил, образующих пару.

Свойства пары сил:

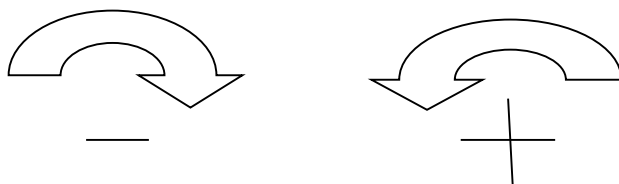
- 1) Пара сил не имеет равнодействующей.
- 2) Пару сил нельзя уравновесить одной силой.
- 3) Под действием пары сил тело совершает вращательное движение.

Основной характеристикой действия пары сил на твердое тело является *момент пары сил*, равный взятому со знаком «плюс» или «минус» произведению модуля любой из сил, образующих пару, на плечо пары.

Момент пары сил является алгебраической величиной:

$$M = \pm P_2 \cdot h = \pm P_1 \cdot h.$$

Знак «+» берется в случае, если пара сил стремится повернуть плоскость действия против часовой стрелки, знак «-» – если по часовой стрелке.



Единицы измерения момента пары сил в системе СИ: $[M] = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Основные теоремы о парах сил на плоскости:

1. *Теорема о переносе пары в произвольное положение на плоскости.*

Не изменяя кинематического состояния твердого тела, пару сил можно переносить из одного положения в любое другое положение в плоскости ее действия (рис. 17).

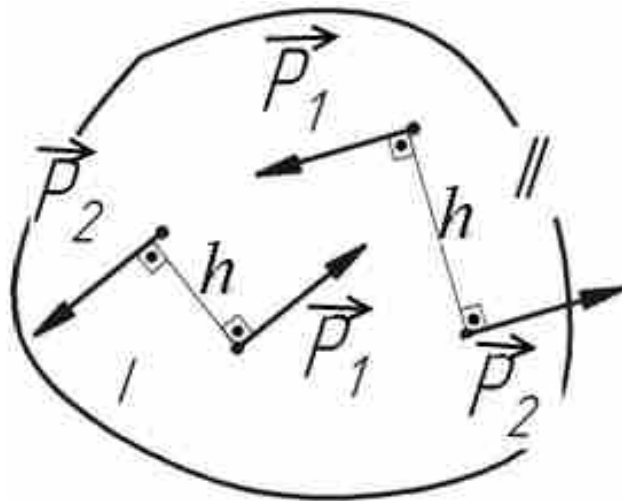


Рисунок 17

Теорема справедлива только в механике абсолютно твердого тела. В механике деформируемого твердого тела (сопротивление материалов) напряженно-деформированное состояние тела зависит от конкретного положения пары сил.

2. *Теорема об эквивалентности пар сил.*

Пары сил на плоскости эквивалентны, если их моменты алгебраически равны.

3. *Теорема о сложении пар, лежащих в одной плоскости.*

Совокупность нескольких пар с моментами M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) эквивалентна одной паре с моментом, равным сумме моментов данных пар:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i.$$

Из теорем 1 и 2 следует, что действие пары сил на твердое тело полностью характеризуется ее моментом.

Из теоремы 3 следует условие равновесия пар сил на плоскости:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = 0.$$

Момент силы относительно центра на плоскости Приведение одной силы к центру по методу Пуансо

Моментом силы P относительно центра O на плоскости называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятая со знаком «+» или «-» (рис. 18):

$$M_0 = \pm P \cdot h.$$

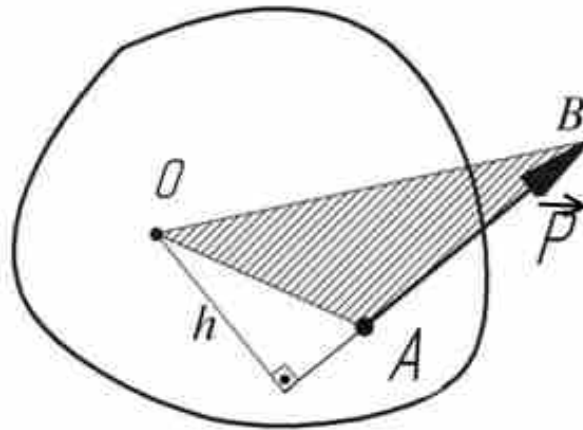


Рисунок 18

Единицы измерения момента силы совпадают с единицами измерения момента пары сил.

Момент силы относительно центра равен нулю, когда линия действия силы проходит через центр ($h = 0$).

Момент силы относительно центра по абсолютному значению можно выразить через площадь S треугольника AOB :

$$|M_0| = 2S_{\triangle AOB}.$$

Так как сила является скользящим вектором, ее можно переносить вдоль линии действия, не изменяя кинематического состояния твердого тела. Чтобы не изменяя кинематического состояния тела, переместить силу в точку, не лежащую на линии действия силы, необходимо присоединить пару сил, момент которой алгебраически равен моменту силы относительно центра приведения.

Докажем это положение, составляющее сущность *метода Пуансо*:

Пусть задана сила P , приложенная в точке A . Перенесем эту силу в точку O , не лежащую на линии действия силы P .

Приложим в точке O две взаимно уравновешивающиеся силы (рис. 19):

$$|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = |\vec{P}|$$

$$\vec{P}_2 = -\vec{P}_1.$$

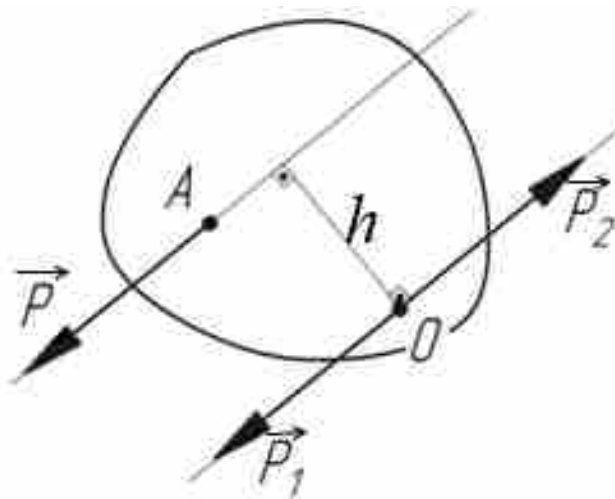


Рисунок 19

Очевидно, силы (P, P_2) составляют пару сил, называемую присоединенной парой. Момент присоединенной пары (рис. 20):

$$M = P \cdot h = M_0.$$

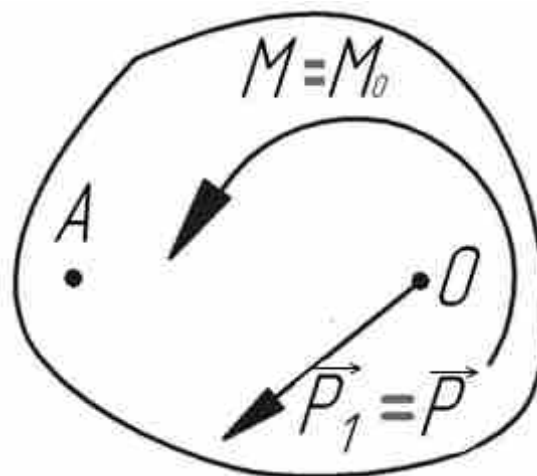


Рисунок 20

Приведение плоской системы сил к данному центру Главный вектор и главный момент

Пользуясь методом Пуансо, можно привести к центру несколько сил. В результате приведения каждой силы к центру O получим:

1. Силу, геометрически равную приводимой силе:

$$\vec{P}_{i1} = \vec{P}_1.$$

2. Пару сил, момент которой равен моменту приводимой силы относительно центра приведения:

$$M_i = \pm P_i \cdot h_i = M_{i0}.$$

Сложим в центре O силы геометрически:

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i.$$

Главный вектор произвольной плоской системы сил R^* определяется геометрической суммой всех сил, входящих в систему.

Сложим алгебраически моменты присоединенных пар:

$$M_0 = \sum_{i=1}^n M_{i0}.$$

Главный момент произвольной плоской системы сил M_0 определяется алгебраической суммой моментов сил, входящих в систему, относительно центра приведения.

Итак, произвольную плоскую систему сил можно привести к совокупности силы, называемой главным вектором, и пары сил, момент которой называется главным моментом системы (рис. 21):

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i,$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^n M_{i0}.$$

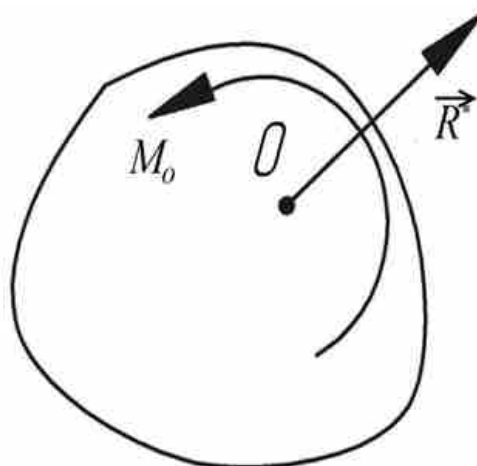


Рисунок 21

Главный вектор системы сил не зависит от центра приведения, а главный момент зависит.

Случаи приведения плоской системы сил к простейшему виду Теорема Вариньона

При приведении произвольной плоской системы сил к центру имеем совокупность силы и пары сил:

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i,$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^n M_{i0}.$$

При этом возможны следующие частные случаи:

$\vec{R}^* = 0$ $M_0 = 0$	Главный вектор и главный момент равны нулю. Система сил находится в равновесии.
$\vec{R}^* = 0$ $M_0 \neq 0$	Случай пары сил с моментом, алгебраически равным главному моменту. <i>Примечание:</i> в этом случае главный момент системы сил не зависит от выбора центра приведения.
$\vec{R}^* \neq 0$ $M_0 = 0$	Случай равнодействующей, проходящей через центр приведения и совпадающей с главным вектором.
$\vec{R}^* \neq 0$ $M_0 \neq 0$	Случай равнодействующей, не проходящей через центр приведения и отличающейся от главного вектора линией действия.

Главный момент M_0 , полученный в результате приведения системы к центру O , представим как момент пары (R, R_1) , силы которой по модулю равны главному вектору (рис. 22):

$$|\vec{R}^*| = |\vec{R}| = |\vec{R}_1|.$$

Плечо пары:

$$h = OK = \frac{M_0}{R^*}.$$

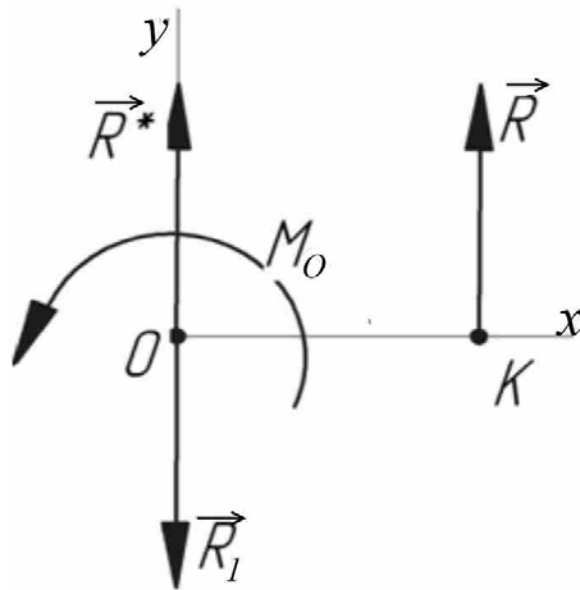


Рисунок 22

На рис. 22 видно, что силы R^* и R_1 , приложенные к точке O , взаимно уравниваются и их можно исключить из рассмотрения.

В итоге приведения получается одна сила R , равная по модулю главному вектору и приложенная в точке K . Эта сила R – равнодействующая.

Докажем *теорему Вариньона* о моменте равнодействующей:

Если плоская система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействующей относительно центра на плоскости равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этого центра.

Определим момент силы R относительно центра O :

$$M_0(\vec{R}) = R \cdot h = R \cdot \frac{M_0}{R^*} = M_0 = M_0(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n M_{i0}.$$

Условия и уравнения равновесия плоской системы сил

При исследовании различных случаев приведения плоской системы к данному центру был рассмотрен случай, когда главный вектор и главный момент системы сил равны нулю. Очевидно, в этом случае силы находятся в равновесии. Следовательно, условиями равновесия произвольной плоской системы сил являются:

$$\overrightarrow{R^*} = 0; \quad M_0 = 0.$$

Из этих двух условий следуют *три уравнения равновесия*:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iO} = 0.$$

Наряду с этой основной формой имеются две другие формы уравнений равновесия на плоскости:

$$\sum_{i=1}^n P_{iu} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0.$$

При этом ось u не перпендикулярна прямой AB .

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iC} = 0.$$

При этом точки A , B и C не должны лежать на одной прямой.

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Статика»

1. В каком случае момент силы относительно данной точки равен нулю?
2. Как найти равнодействующую системы сходящихся сил?
3. Когда система сил приводится к равнодействующей?
4. Как должны быть взаимно расположены главный вектор и главный момент системы сил для того, чтобы она приводилась к равнодействующей?
5. Как изменяется главный момент системы сил при изменении центра приведения?
6. Как определить равнодействующую системы сходящихся сил?
7. Как определяется момент силы относительно точки?
8. Как формулируются условия равновесия системы сходящихся сил на плоскости?

9. Какая система сил называется парой сил, чему равен момент пары сил?
10. Какова связь между моментом силы относительно оси и моментом силы относительно любой точки, лежащей на этой оси?
11. Как зависит главный момент системы сил от выбора центра приведения?
12. При каком условии три непараллельные силы, приложенные к твердому телу, уравниваются?
13. Что такое присоединенная пара, чему равен ее момент?
14. Каковы условия равновесия произвольной плоской системы сил?
15. Что называется силой?
16. Что называется моментом силы, как определяется момент силы относительно точки?
17. Что называется реакцией связи?
18. Что такое пара сил?

КИНЕМАТИКА

В разделе «Кинематика» курса теоретической механики изучается движение тел. Понятие «*движение тела*» подразумевает изменение положения тела с течением времени относительно какого-либо другого тела. Характер наблюдаемого движения будет зависеть от того, по отношению к какому телу оно совершается. Движение в кинематике рассматривается только с геометрической точки зрения, т. е. причины возникновения движения и движущие силы, и их связь между собой не изучаются.

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.

Кинематика имеет весьма большое значение для изучения последнего раздела теоретической механики – динамики, где изучается движение тел под действием сил. С другой стороны, методы кинематики имеют самостоятельное практическое значение для исследования графических свойств движения частей различных механизмов и машин.

Развитие кинематики в XVIII веке связано с работами Леонарда Эйлера (1707–1783), который заложил основы кинематики твердого тела и создал аналитические методы решения задач механики.

Быстрое развитие техники в начале XIX века, в частности машиностроения, потребовало специального исследования геометрических свойств движения тел. Кинематика выделилась в самостоятельный раздел механики, причем особое значение приобрела кинематика механизмов. Крупные исследования в области кинематики механизмов и машин принадлежат французским ученым: Понселе, Шалю, Кориолису, а также русским и советским ученым: основоположникам русской школы теории механизмов и машин П. Л. Чебышеву, Л. В. Ассуру, Н. И. Мерцалову, Л. П. Котельникову, И. И. Артоболевскому и др.

Развитие кинематики в настоящее время также идет, главным образом, по пути ее приложения к конструированию и исследованию функционирования механизмов и машин. Слово «кинематика» происходит от греческого слова «кинема», что значит движение.

Совокупность геометрической и силовой картин полностью характеризует любые механические процессы. Взаимосвязь между геометрической и силовой картинками устанавливается при последующем изучении курса теоретической механики и имеет важное практическое значение для исследования различных механических процессов.

Основной задачей кинематики является определение всех кинематических величин, характеризующих движение как отдельной точки, так и тела в целом (траектории, скорости, ускорения и т. п.).

Пространство и время в классической механике

Система отсчета

Пространство в механике рассматривается как трехмерное евклидово пространство, все измерения в котором производятся на основании методов евклидовой геометрии. *Время* в механике рассматривается как универсальное, т. е. протекающее одинаково в любой точке пространства и во всех системах отсчета. Она рассматривается как непрерывно изменяющаяся монотонно возрастающая скалярная величина. Все кинематические характеристики движения тела и его отдельной точки (расстояния, скорости, ускорения, и т. д.) рассматриваются как функции времени. За единицу времени принимается одна секунда.

Хотя евклидово пространство и универсальное время и не отражают реальных свойств пространства и времени, тем не менее в механике при изучении движений со скоростями, далекими от скорости света, это дает достаточную для практики точность.

Механическим процессом называется изменение во времени состояния объекта, связанное с его перемещением в пространстве. Состояние объекта (материальной точки или твердого тела) в механике полностью характеризуется его положением в пространстве и быстротой изменения параметров, характеризующих это положение.

Системой отсчета, как правило, служит система трех осей, не лежащих в одной плоскости. По определению такая система отсчета (система координат) считается неподвижной. В кинематике, в отличие от динамики, такой выбор является произвольным.

Если в выбранной системе координат тело не перемещается, то говорят, что оно находится в покое. Поскольку сама система координат может произвольно перемещаться в пространстве, то понятия «движение» и «покой» являются относительными.

Механическим движением называется происходящее во времени и пространстве изменение положения одного тела относительно другого, с которым связана система координат, называемая системой отсчета. Систему отсчета можно связать с любым телом. Эта система может быть как движущейся, так и условно неподвижной. При изучении движений на Земле за условно неподвижную систему отсчета обычно принимают систему координатных осей, неизменно связанных с Землей.

Рассматриваем общий случай движения тела: все его точки будут совершать различные движения (например, при вращении вала машины точки, лежащие на оси вращения, будут находиться в покое, а точки на поверхности вала – двигаться по окружности). Поэтому изучение кинематики начинается с изучения кинематики точки.

Способы задания движения точки

Для решения основной задачи кинематики необходимо, чтобы изучаемое движение было задано (описано).

Задать движение точки (кинематически) – это значит указать способ, позволяющий в любой момент времени определить положение этой точки относительно выбранной системы отсчета.

Существует три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

1. Векторный способ задания движения точки

Положение точки M в пространстве однозначно определяется заданием радиус-вектора r , проведенного из начала координат O в точку M (рис. 23).

При движении точки M радиус-вектор r будет изменяться, т. е. r есть вектор-функция времени.

Значит, чтобы задать движение точки векторным способом, необходимо:

- 1) задать неподвижную точку O в пространстве;
- 2) задать радиус-вектор точки как векторную функцию времени, т. е.

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1)$$

Уравнение (1) представляет собой уравнение движения точки в векторной форме. Векторный способ задания движения точки удобен для получения теоретических выводов, т.е. позволяет описать движение точки одним векторным уравнением (1).

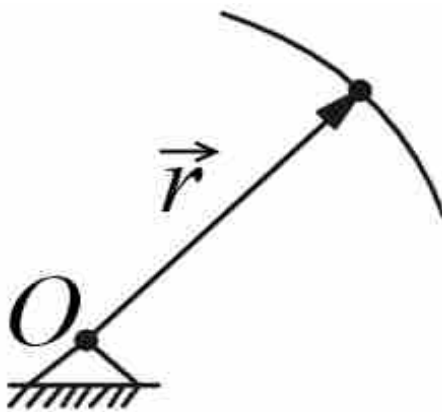


Рисунок 23

Геометрическое место концов радиус-вектора r движущейся точки M называется *траекторией* точки M .

2. Координатный способ задания движения точки

Положение точки M в неподвижной системе отсчета $Oxyz$ определяется тремя координатами x, y, z (рис. 24).

При движении точки M ее координаты изменяются с течением времени. Поэтому, чтобы задать движение точки координатным способом, необходимо:

- 1) задать неподвижную систему отсчета $Oxyz$;
- 2) задать координаты точки M как функции времени, т.е.

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (2)$$

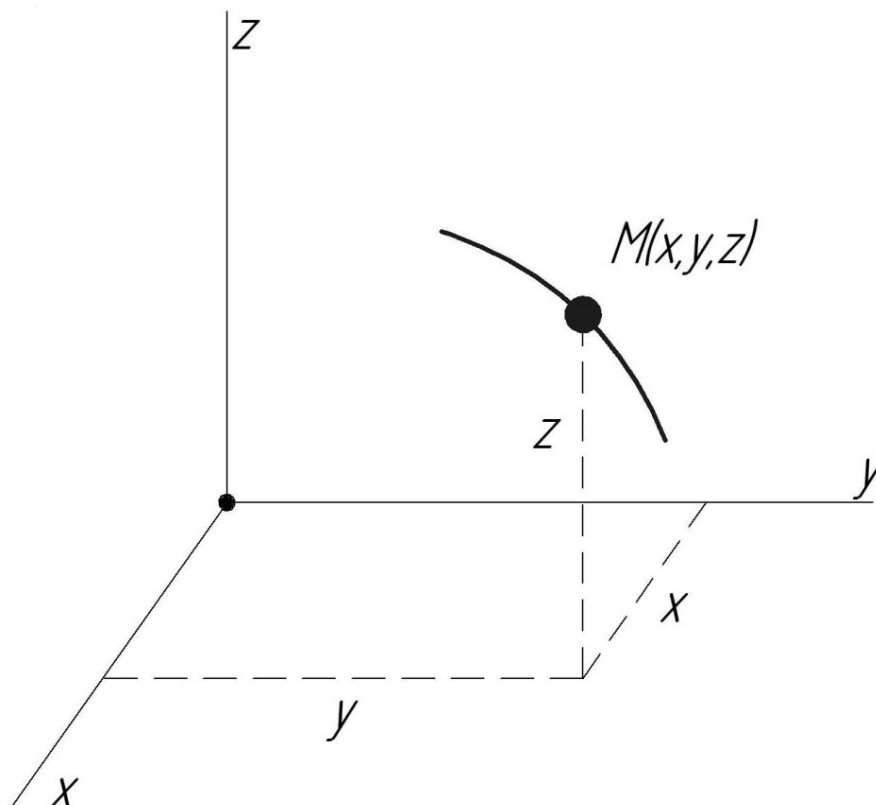


Рисунок 24

Уравнения (2) выражают уравнения движения точки в декартовых координатах.

Движение точки M в плоскости описывается двумя уравнениями, а прямолинейное движение – одним.

Координатный способ задания движения точки применяется для решения различных технических задач.

Уравнения (2), определяющие движение точки, одновременно являются уравнениями траектории точки в параметрической форме, где роль параметра играет время t .

При исключении из этих уравнений параметра t получаются уравнения траектории точки в явной (координатной) форме.

Пример 1. Снаряд движется согласно уравнениям:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (3)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (4)$$

Найти: траекторию снаряда.

Решение: из уравнения (3) находим параметр t :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

Подставив значение t в уравнение (4), получим:

$$y = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Ответ: траекторией снаряда является парабола, ось симметрии которой параллельна оси Oy .

Пример 2. Точка движется согласно уравнениям:

$$x = 2 \sin \pi t, \quad (5)$$

$$y = 3 \cos \pi t. \quad (6)$$

Найти траекторию точки.

Решение: преобразуем уравнения (5) и (6):

$$\sin \pi t = \frac{x}{2},$$

$$\cos \pi t = \frac{y}{3}.$$

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, получим уравнение траектории движения точки:

$$\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t = 1,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Ответ: траекторией точки является эллипс.

3. Естественный способ задания движения точки

Если траектория точки известна, то выбрав на ней начало отсчета O , положение точки M на траектории можно определить криволинейной координатой s (рис. 25).

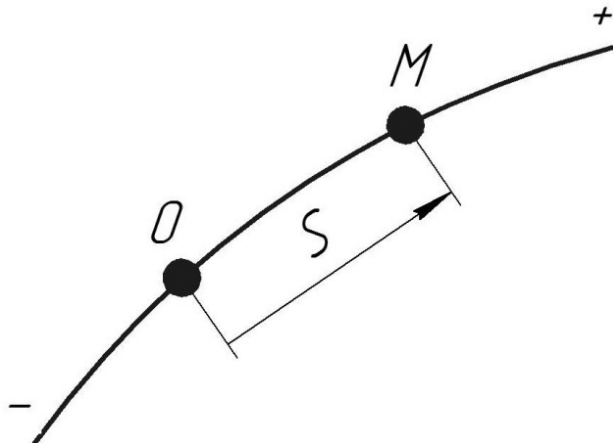


Рисунок 25

При движении точки по траектории криволинейная координата непрерывно изменяется, т. е. координата s является функцией времени.

Значит, чтобы задать движение точки естественным способом, необходимо:

- 1) задать траекторию точки;
- 2) задать начало отсчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета криволинейной координаты;
- 3) задать криволинейную координату s как функцию времени, т. е.

$$s = s(t). \quad (7)$$

Уравнение (7) является уравнением движения точки в естественной форме. Естественный способ задания движения точки применяется для решения различных технических задач в случаях, когда траектория точки заранее известна.

Скорость и ускорение точки

Линия, образованная концами переменного вектора, начало которого находится в определенной точке пространства, называется *годографом* этого вектора. Следовательно, траектория точки является годографом ее радиус-вектора $\vec{r}$.

Скоростью точки называется вектор, характеризующий быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета. Обозначается $\Delta\vec{v}$, основная размерность $м/с$.

Пусть в момент времени $\Delta t = t_1 - t$ точка занимает положение M , определяемое радиус-вектором $\vec{r}$, а в момент времени $\Delta t = t_1 - t$ $t_1 = t + \Delta t$ приходит в положение M_1 , определяемое радиус-вектором $\vec{r}_1$. Тогда перемещение точки за промежуток времени $t_1 = t + \Delta t$ $\Delta t = t_1 - t$

определяется вектором $\overrightarrow{MM_1}$, который называется вектором перемещения (рис. 26).

Из треугольника OOM_1 :

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta\vec{r}.$$

Вектор перемещения точки $\overrightarrow{MM_1}$ является приращением $\vec{r}$ радиус-вектора точки за промежуток времени $t_1 = t + \Delta t$.

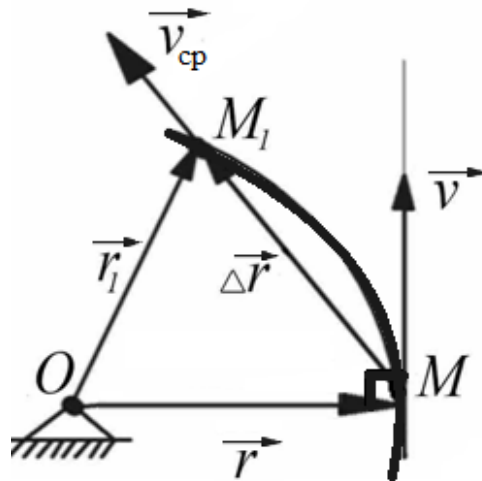


Рисунок 26

Отношение вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt , в течение которого это перемещение произошло, представляет собой вектор средней скорости $\vec{v}_{cp}$ воображаемого движения точки M по хорде MM_1 , т. е.

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Направление вектора $\vec{v}_{cp}$, совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{r}$ перемещения точки.

Взяв предел средней скорости, при условии, что промежуток времени Δt стремится к нулю, получим вектор скорости точки в данный момент времени:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{cp} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

или

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (8)$$

Вектор скорости точки в данный момент времени равен производной от радиус-вектора точки по времени.

Поскольку предельным положением секущей MM_1 является касательная, то вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения. Скорость точки является вектором, условимся в дальнейшем вместо термина «вектор скорости» употреблять термин «скорость».

Ускорение точки – это вектор, характеризующий быстроту изменения скорости, как по величине, так и по направлению в пространстве.

Если точка движется по траектории BC и в момент времени t ее скорость равна $\Delta \vec{v}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ равна $\vec{v}_1$ (рис. 27), то среднее ускорение точки за время Δt определяется по формуле:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

где $\Delta \vec{v}$ – приращение скорости за время Δt .

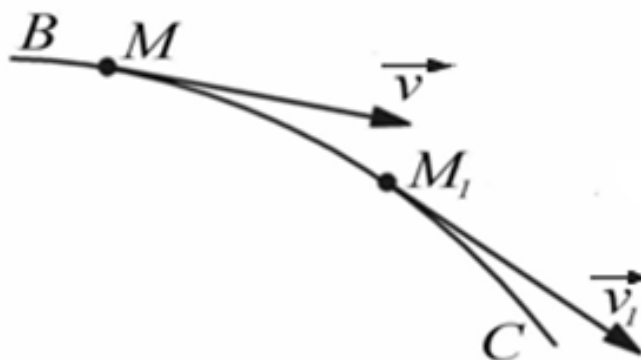


Рисунок 27

Построим годограф скорости (рис. 28). Среднее ускорение точки $\vec{a}_{\text{ср}}$ направлено по $\Delta \vec{v}$.

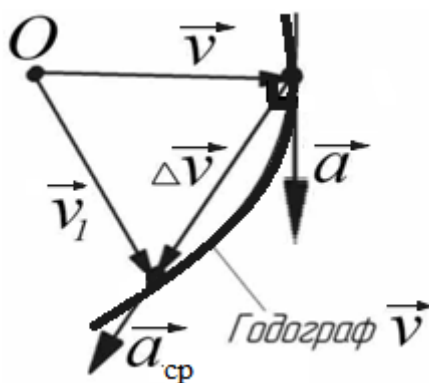


Рисунок 28

Ускорение точки в данный момент времени определяется пределом, к которому стремится среднее ускорение $\vec{a}_{\text{ср}}$ при Δt , стремящемся к нулю:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

или

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (9)$$

Ускорение точки в данный момент времени определяется первой производной от скорости по времени или второй производной от радиус-вектора точки по времени дважды.

Вектор ускорения направлен по касательной к годографу скорости.

Определение скорости и ускорения точки при задании ее движения координатным способом

При координатном способе задания движения модуль и направление скорости точки определяются через проекции вектора скорости на оси координат.

Пусть движение точки задано координатным способом, т. е. заданы уравнения движения точки (2).

Представим радиус-вектор $\vec{r}$ точки M в следующем виде (рис. 29):

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты), взятые на осях координат Ox , Oy и Oz соответственно.

Вектор скорости точки по определению равен производной от радиус-вектора точки по времени. Учитываем при этом, что единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ постоянны по модулю и направлению.

Получим:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}. \quad (10)$$

С другой стороны, вектор скорости точки можно разложить на составляющие по осям координат следующим образом:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (11)$$

где v_x, v_y, v_z – проекции скорости на оси координат.

Сравнивая равенства (10) и (11), заключаем, что коэффициенты при одинаковых единичных векторах в правых частях этих равенств должны быть равны, т. е.

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}; v_y = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}; v_z = \frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}.$$

Проекции скорости точки на оси координат равны производным от соответствующих координат точки по времени.

По известным проекциям, модуль и направление скорости определяется по формулам:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{v_x}{v}; \cos(\vec{v}, \vec{j}) = \frac{v_y}{v}; \cos(\vec{v}, \vec{k}) = \frac{v_z}{v}.$$

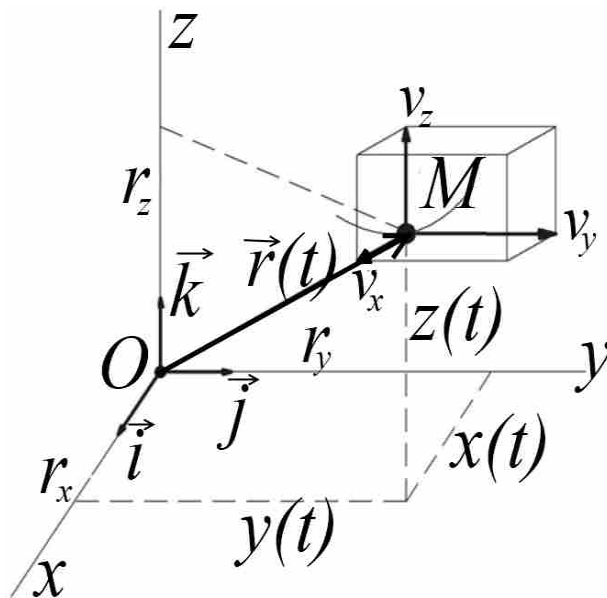


Рисунок 29

Ускорение точки в этом случае также определяется через проекции на координатные оси. Проекции ускорения точки определяются первыми производными по времени от соответствующих проекций скорости или вторыми производными по времени от соответствующих *координат* точки:

$$a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2},$$

$$a_y = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2 y(t)}{dt^2},$$

$$a_z = \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}.$$

По известным проекциям a_x , a_y , a_z величина ускорения определяется по формуле:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Направление вектора ускорения определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{v}; \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{v}; \cos(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{a_z}{v}.$$

Скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения

Пусть движение точки задано естественным способом, т. е. известны: траектория точки, начало и направление отсчета криволинейной координаты и уравнение движения точки (рис. 30). В момент времени $t_1 = t + \Delta t$ точка занимает положение M , а ее координата $s = \overline{OM}$. В момент времени $\Delta t = t_1 - t$ точка переместилась в положение M_1 , определяемое криволинейной координатой $s_1 = s + \Delta s$, $\overline{OM_1} = \overline{OM} + \overline{MM_1}$.

Приращение криволинейной координаты точки за время Δt :

$$\Delta s = s_1 - s.$$

Проведем из произвольного неподвижного центра O_1 радиус-векторы в точки M и M_1 . Теперь зависимость радиус-вектора точки от времени представляет собой сложную функцию $\vec{r}(s(t))$.

Вектор скорости точки в данный момент времени определяем по теореме о дифференцировании сложной функции:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(s(t))}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}. \quad (12)$$

Выясним значение вектора $\frac{d\vec{r}}{ds}$. Вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ направлен вдоль вектора $\Delta \vec{r}$. При $\Delta s \rightarrow 0$ его направление стремится к направлению касательной, проведенной из точки M в сторону увеличения координаты s , а модуль этого вектора стремится к единице:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{|M_1 \ddot{M}|}{M_1 M} = 1.$$

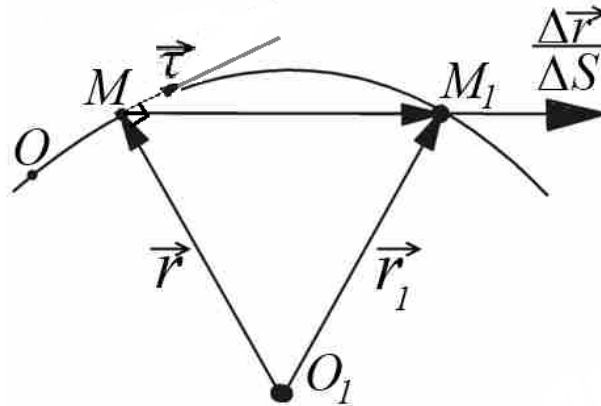


Рисунок 30

Таким образом, вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ имеет модуль, равный единице, и направлен по касательной к кривой в сторону увеличения дуговой координаты.

Значит, этот вектор есть единичный вектор касательной, т. е.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}.$$

Тогда из равенства (12) получим векторное выражение скорости точки:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} = v \vec{\tau},$$

где $v = \frac{ds}{dt}$ – проекция скорости на касательную, которая определяет алгебраическую величину скорости. Следовательно, алгебраическая величина скорости равна производной от криволинейной координаты точки по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Если $\dot{s} > 0$, то точка движется в сторону увеличивающихся значений координаты s , т. е. направление скорости $\Delta \vec{v}$ совпадает с направлением орта $\vec{\tau}$ касательной.

Если $\dot{s} < 0$, то точка движется в сторону уменьшающихся значений криволинейной координаты s , т. е. направление скорости $\Delta \vec{v}$ противоположно направлению орта $\vec{\tau}$ касательной.

Таким образом, знак алгебраической величины скорости указывает направление движения точки по траектории.

Вектор ускорения $\vec{a}$ при естественном способе задания движения имеет

две составляющие:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $\vec{a}_\tau$ – касательное ускорение, $\vec{a}_n$ – нормальное ускорение (рис. 31).

Касательное ускорение характеризует быстроту изменения величины скорости точки и находится по формуле:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Алгебраическое значение касательного ускорения:

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории точки. Если v и $\frac{d^2 s}{dt^2}$ имеют одинаковые знаки, скорость и касательное ускорение направлены в одну сторону, а точка совершает ускоренное движение, в противном случае скорость и касательное ускорение направлены в противоположные стороны, а точка совершает замедленное движение.

Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения вектора скорости по направлению и находится по формуле:

$$\vec{a}_n = \vec{n} \cdot \frac{v^2}{\rho}.$$

Нормальное ускорение *всегда* положительно и направлено к центру кривизны траектории:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho},$$

где ρ – радиус кривизны траектории.

Заметим, что единичные векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны в любой момент времени. Тогда полное ускорение точки может быть найдено по формуле:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

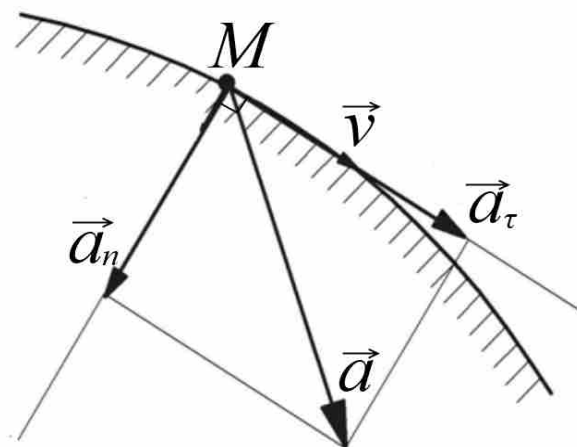


Рисунок 31

Виды движения твердого тела

Изучение движения твердого тела является более сложным и в общем случае не сводится к изучению движения отдельной точки тела. Знание кинематических характеристик, описывающих различные виды движения тела и отдельных его точек, позволяет решать задачи исследования движения сложных механических комплексов и их подсистем.

При изучении кинематики твердого тела сначала устанавливаются кинематические характеристики движения всего тела, а затем уже изучается движение каждой из его точек в отдельности.

Различают пять видов движения твердого тела:

- поступательное;
- вращательное;
- плоское (или плоскопараллельное);
- движение тела вокруг неподвижной точки (или сферическое движение);
- общий случай движения тела.

Приступая к изучению движения тела, нужно прежде всего установить, к какому из указанных видов движения оно относится.

Поступательное и вращательное являются простейшими видами движения твердого тела, остальные – сложными.

Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается параллельно самой себе.

Поступательное движение не следует путать с прямолинейным движением. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями.

Примерами поступательного движения тела могут служить: движение кузова машины, движущейся по прямолинейному пути, движение поршня двигателя машины, движение ползуна кривошипно-шатунного механизма и т. д.

Свойства поступательного движения тела определяются следующей теоремой: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (совпадающие при наложении) траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения.

Для доказательства теоремы рассмотрим поступательное движение тела относительно системы координат $Oxyz$ (рис. 32).

Выбираем две произвольные точки тела A и B , проведем вектор $\overrightarrow{AB}$, соединяющий эти точки. Пусть в момент времени t тело занимало положение (I), а положение точек A и B определялось радиус-векторами $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$, а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ тело переместилось в положение (II), и радиус-векторы точек A_1 и B_1 стали $\vec{r}_{A1}$ и $\vec{r}_{B1}$.

Так как рассматриваемое тело абсолютно твердое и его движение поступательное, то вектор $\overrightarrow{AB}$ при движении тела не меняет модуля и направления, т. е. в любой момент времени имеет место равенство:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \text{const.}$$

Из этого следует, что траектория точки B получается из траектории точки A параллельным смещением всех ее точек на постоянный вектор $\overrightarrow{AB}$, т. е. траектории точек A и B будут одинаковыми (при наложении совпадающими).

Из векторного треугольника OAB получаем:

$$\overrightarrow{r}_B = \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{AB}. \quad (13)$$

Дифференцируя равенство (13) по времени, найдем:

$$\frac{d\overrightarrow{r}_B}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r}_A}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}.$$

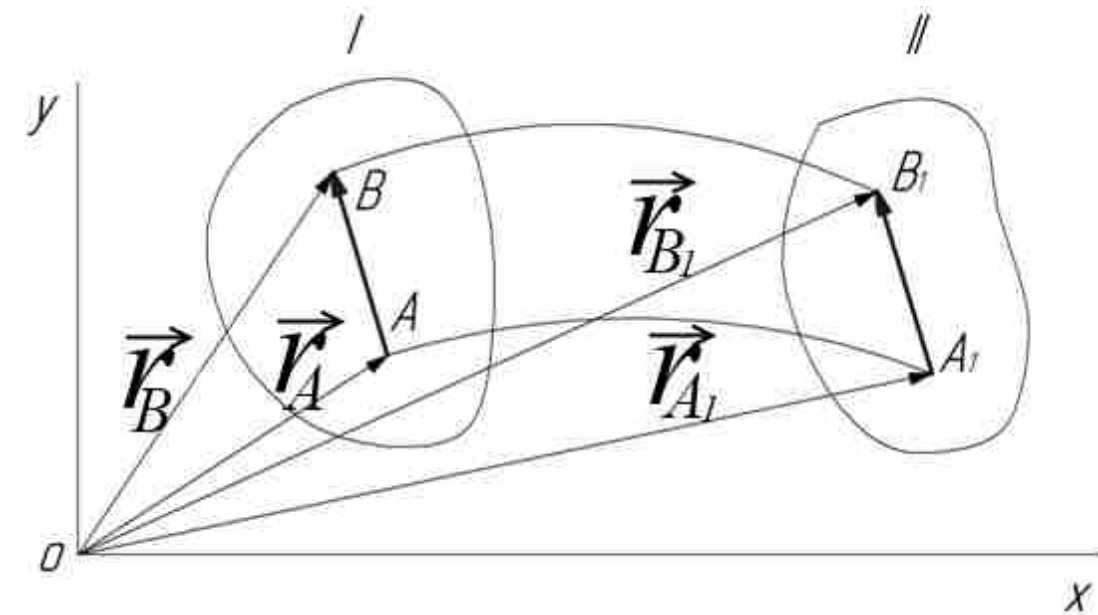


Рисунок 32

Учитывая, что

$$\frac{d\overline{r_B}}{dt} = \overline{v_B}, \quad \frac{d\overline{r_A}}{dt} = \overline{v_A},$$

$$\overline{AB} = \text{const}, \quad \frac{d\overline{AB}}{dt} = 0,$$

окончательно получаем:

$$\overline{v_B} = \overline{v_A}, \quad (14)$$

т. е. скорости точек A и B геометрически равны.

Аналогично, дифференцируя равенство (14) по времени, найдем ускорения точек A и B :

$$\frac{d\overline{v_B}}{dt} = \frac{d\overline{v_A}}{dt}, \quad \overline{a_B} = \overline{a_A},$$

т. е. ускорения точек A и B геометрически равны. Теорема доказана.

Поскольку точки A и B выбраны произвольно, полученные результаты относятся ко все точкам тела. Установленные свойства поступательного движения позволяют свести его изучение к изучению движения отдельной точки тела, т.е. к задаче кинематики точки. Скорость и ускорение, общие для всех точек поступательно движущегося тела, называют скоростью и ускорением тела.

При любом другом движении тела его точки движутся с различными скоростями и ускорениями, поэтому понятия о скорости и ускорении тела имеют смысл только при поступательном движении тела.

Вращательное движение твердого тела

Закон вращательного движения

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором все его точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения, остаются неподвижными.

Для осуществления этого движения достаточно закрепить неподвижно две произвольные точки тела, лежащие на этой прямой, и они во все время движения будут оставаться неподвижными.

Для определения положения вращающегося тела зададим направление оси вращения Z и проведем через нее две полуплоскости: неподвижную полуплоскость H и подвижную полуплоскость Π , связанную с телом и вращающуюся вместе с ним (рис. 33).

Двугранный угол φ между этими полуплоскостями, отсчитываемый от неподвижной полуплоскости H к подвижной полуплоскости Π , называется углом поворота тела φ .

Угол поворота тела считается положительным, когда он отложен против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси вращения Z . Угол поворота тела обычно измеряется в радианах. Часто угол поворота тела выражают через число оборотов N тела.

Поскольку один оборот тела соответствует 2π радиан, то получаем

$$\varphi = 2\pi N.$$

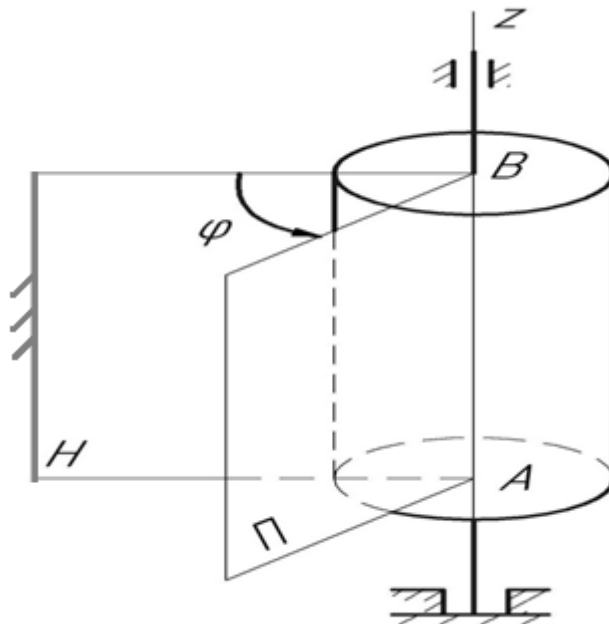


Рисунок 33

При вращении тела угол поворота φ изменяется в зависимости от времени, поэтому, чтобы знать положение тела в любой момент времени, нужно знать зависимость угла поворота φ от времени t :

$$\varphi = \varphi(t). \quad (15)$$

Уравнение (15) выражает закон вращательного движения тела. Оно полностью определяет положение тела в любой момент времени. Следовательно, вращательное движение тела имеет одну степень свободы.

Угловая скорость и угловое ускорение тела

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения тела являются угловая скорость и угловое ускорение тела.

Угловой скоростью называется вектор, характеризующий быстроту и направление вращения тела. Обозначается $\vec{\omega}$, размерность:

$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1}.$$

Если за время $\Delta t = t_1 - t$ приращение угла поворота составляет $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то отношение приращения угла поворота к промежутку времени, за который оно произошло, называется средней угловой скоростью тела за этот промежуток времени:

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (16)$$

Переходя в равенстве (16) к пределу при стремлении промежутка времени к нулю, получим алгебраическую величину угловой скорости тела в данный момент времени:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt};$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Угловая скорость тела в данный момент времени численно равна производной от угла поворота тела по времени.

Знак угловой скорости определяет направление вращения тела:

- если угловая скорость $\omega > 0$, то тело вращается против хода часовой стрелки;
- если угловая скорость $\omega < 0$, то тело вращается по ходу часовой стрелки.

Вектор угловой скорости тела направлен вдоль оси вращения, так чтобы с его конца мы видели вращение тела происходящим против хода часовой стрелки. Вектор угловой скорости есть вектор скользящий, т. е. за его начало можно взять

любую точку, лежащую на оси вращения тела.

Угловым ускорением называется вектор, характеризующий изменение с течением времени вектора угловой скорости тела.

Обозначается $\vec{\varepsilon}$, размерность:

$$[\varepsilon] = \frac{рад}{с^2} = \frac{1}{с^2} = с^{-2}.$$

Если за время $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость изменилась на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то отношение приращения угловой скорости к промежутку времени, за который оно произошло, называется средним угловым ускорением тела за этот промежуток времени:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (17)$$

Переходя в (17) к пределу при стремлении промежутка времени к нулю, получим алгебраическую величину углового ускорения тела в данный момент времени:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{de} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2};$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Угловое ускорение тела в данный момент времени численно равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Знак углового ускорения дает возможность установить, является ли вращение тела в данный момент времени ускоренным или замедленным. Если знаки угловой скорости и углового ускорения одинаковы, тело вращается ускоренно, а если их знаки различны – замедленно.

Вектор углового ускорения тела также направлен вдоль оси вращения. При ускоренном вращении направления $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ совпадают, а при замедленном – противоположны (рис. 34).

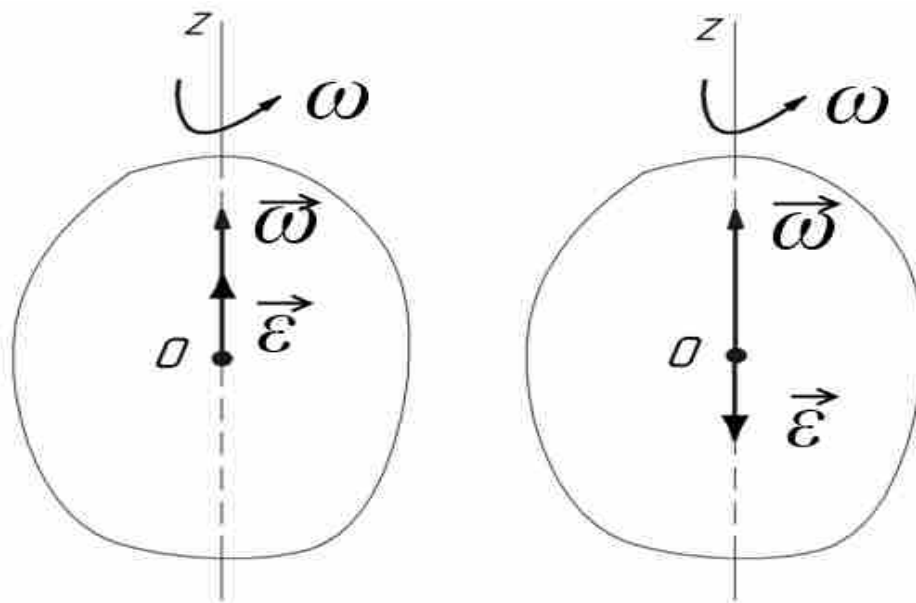


Рисунок 34

Равномерное и равнопеременное вращение тела

Равномерным называется вращение тела с постоянной угловой скоростью. Следовательно, для характерного равномерного вращения имеем:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const};$$

$$d\varphi = \omega \cdot dt. \quad (18)$$

Проинтегрируем уравнение (18) в пределах, соответствующих начальному моменту $t_0 = 0$, при котором угол поворота равен φ_0 , и произвольному моменту времени t , при котором угол поворота равен φ :

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt;$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (19)$$

Уравнение (19) выражает *закон равномерного вращения тела*. Угловая скорость равномерного вращения тела равна отношению приращения угла поворота за некоторый промежуток времени к величине промежутка времени:

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}.$$

В технике угловую скорость равномерного вращения обычно определяют числом оборотов в минуту и обозначают n .

Так как один оборот равен 2π радиан, то зависимость между угловой

скоростью ω [с⁻¹] и n [об/мин] имеет вид:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30};$$

$$n = \frac{30\omega}{\pi}.$$

Равнопеременным называется вращение тела с постоянным угловым ускорением. Следовательно, для равнопеременного вращения имеем:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{d\omega}{dt} = \text{const}; \\ d\omega &= \varepsilon \cdot dt.\end{aligned}\tag{20}$$

Интегрируя уравнение (20) в пределах, соответствующих начальному и конечному моментам времени, получим:

$$\begin{aligned}\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega &= \varepsilon \int_0^t dt; \\ \omega - \omega_0 &= \varepsilon t.\end{aligned}$$

Последнее уравнение представляет собой закон изменения угловой скорости при равнопеременном вращении:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.\tag{21}$$

Запишем уравнение (21) в виде:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon t, \\ d\varphi &= \omega_0 \cdot dt + \varepsilon t \cdot dt.\end{aligned}\tag{22}$$

Проинтегрируем уравнение (22) в соответствующих пределах:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi &= \omega_0 \int_0^t dt + \varepsilon \int_0^t t \cdot dt, \\ \varphi - \varphi_0 &= \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.\end{aligned}$$

Таким образом, получим закон равнопеременного вращения тела:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Если угловая скорость и угловое ускорение имеют одинаковые знаки, то вращение будет равноускоренным, а если разные – равнозамедленным.

Равномерное и равнопеременное вращения имеют большое значение в технике. Так, вал двигателя машины при пуске в ход совершает равноускоренное вращение; при достижении номинального числа оборотов – равномерное вращение и при выключении двигателя – равнозамедленное.

Скорость и ускорение точки вращающегося тела

При вращательном движении тела все его точки описывают окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения. Радиус каждой окружности равен расстоянию соответствующей точки тела от оси вращения. Скорость точки вращающегося тела называется вращательной или линейной скоростью этой точки.

Если за время dt тело повернулось на угол $d\varphi$, то точка M этого тела совершила элементарное перемещение вдоль траектории (окружности), равное (рис. 35):

$$ds = \overset{\cup}{M_1 M} = R \cdot d\varphi.$$

Вращательная скорость точки:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} R;$$

$$v = \omega \cdot R. \quad (23)$$

Скорость точки вращающегося тела численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки в сторону вращения тела.

Из формулы (23) следует, что вращательные скорости точек вращающегося тела пропорциональны расстояниям этих точек от оси вращения.

Выберем на оси вращения произвольную точку O и проведем из нее радиус-вектор $\vec{r}$ точки M (рис. 13). Из треугольника OCM получаем:

$$R = r \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{r}).$$

Тогда модуль вращательной скорости точки M :

$$v = \omega \cdot R = r \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{r}).$$

Вычислим модуль векторного произведения векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot R = r \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{r}).$$

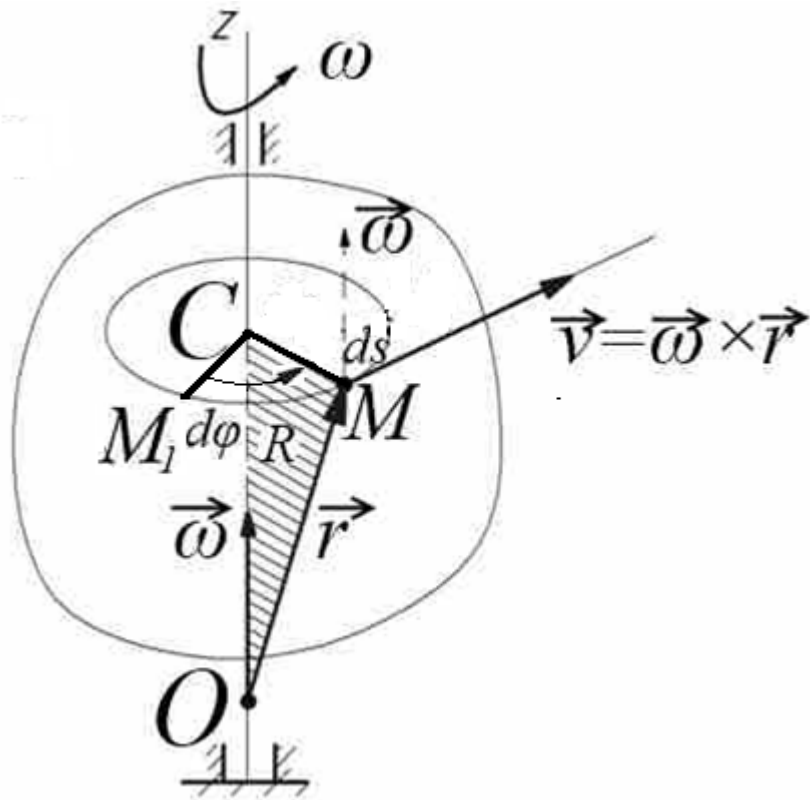


Рисунок 35

Вращательная скорость $\vec{v}$ направлена перпендикулярно к плоскости треугольника OCM , т. е. к плоскости векторов сомножителей $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$. Если смотреть навстречу вектору $\vec{v}$, можно видеть поворот вектора $\vec{\omega}$ к вектору $\vec{r}$ на угол $(\vec{\omega}, \vec{r})$ происходящим против хода часовой стрелки, т. е. направление вращательной скорости $\vec{v}$ совпадает с направлением векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}$. Следовательно, векторы $\vec{v}$ и $\vec{\omega} \times \vec{r}$ имеют равные модули и одинаковое направление, т. е. равны между собой:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (24)$$

Вращательная скорость точки вращающегося тела равна векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки, проведенный из любой точки оси вращения.

Равенство (24) является одним из основных соотношений кинематики твердого тела.

Ускорение точки M вращающегося тела определим по его составляющим: касательному ускорению, которое в этом случае называется вращательным ускорением и обозначается $\vec{a}^{вп}$, и нормальному ускорению, которое в этом случае называется центростремительным ускорением и обозначается $\vec{a}^{ц}$ (рис. 36).

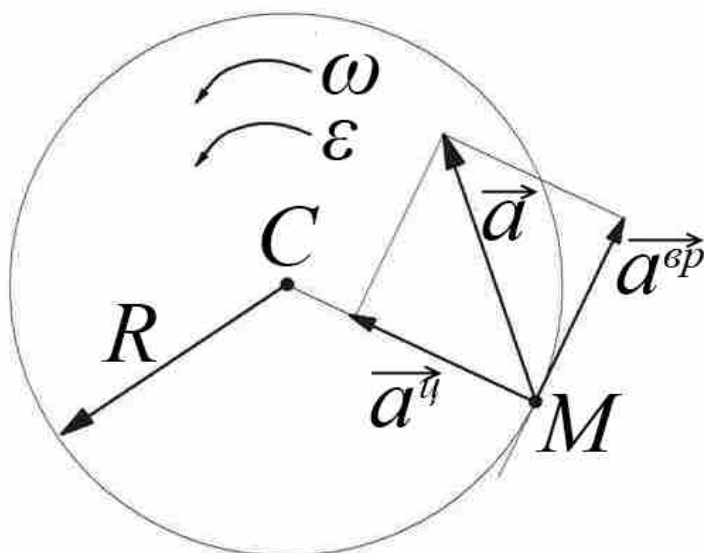


Рисунок 36

По формулам для касательного ускорения точки получаем:

$$a^{\text{вп}} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R.$$

Величина вращательного ускорения точки тела равна произведению углового ускорения тела на расстояние от этой точки тела до оси вращения:

$$a^{\text{вп}} = \varepsilon R. \quad (25)$$

Направление вращательного ускорения точки тела согласуется с направлением ее вращательной скорости в случае ускоренного вращения тела и противоположно ей в случае замедленного вращения тела.

Для центростремительного ускорения:

$$a^{\text{ц}} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Следовательно,

$$a^{\text{ц}} = \omega^2 R. \quad (26)$$

Модуль центростремительного ускорения точки тела равен произведению квадрата угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Направлено центростремительное ускорение всегда к центру окружности, описываемой точкой.

Модуль полного ускорения точки определяется по формуле:

$$a = \sqrt{(a^{\text{вп}})^2 + (a^{\text{ц}})^2} = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + (\omega^2 R)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Следовательно,

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (27)$$

Направление полного ускорения $\vec{a}$ определяется углом α между векторами ускорений полного $\vec{a}$ и центростремительного $\vec{a}^{\text{ц}}$ (радиусом окружности, описываемой точкой) по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a^{\text{bp}}}{a^{\text{ц}}} = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Анализируя выражения (25), (26) и (27), нетрудно убедиться в том, что полное ускорение точки вращающегося тела, так же как и его составляющие – вращательное и центростремительное ускорения, прямо пропорционально расстоянию от точки тела до оси вращения.

Таким образом, в каждый момент времени при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси точки, лежащие на поверхностях концентрических цилиндров, оси симметрии которых совпадают с осью вращения, имеют равные по величине ускорения.

При равномерном вращении тела:

$$\omega = \text{const}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

а значит,

$$a^{\text{bp}} = \varepsilon R = 0.$$

Следовательно, при равномерном вращении ускорение точки тела совпадает с центростремительным ускорением, и его модуль

$$a = a^{\text{ц}} = \omega^2 R.$$

В этом случае полное ускорение $\vec{a}$ точки тела, так же как и центростремительное, направлено к центру окружности, описываемой этой точкой.

Сложное движение точки

Описание механического движения зависит от выбора системы отсчета (неподвижной или подвижной). Во многих практически важных задачах материальная точка совершает движение одновременно вместе с подвижной системой (телом) относительно некоторой неподвижной системы отсчета и в подвижной системе отсчета.

Сложное движение точки – это такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или более движениях. Сложное движение совершает и любая точка колеса движущейся машины, так как она одновременно участвует в двух движениях: движется по окружности колеса относительно корпуса машины и движется вместе с корпусом машины.

Рассмотрим движущееся тело A и точку M , не принадлежащую этому телу, а совершающую по отношению к нему некоторое движение (рис. 37). Через произвольную точку движущегося тела проведем оси координат $Oxuz$, неизменно

связанные с этим телом. Систему осей $Oxyz$ называют подвижной системой отсчета.

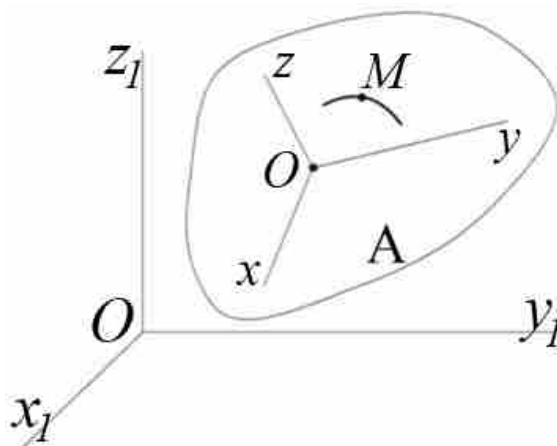


Рисунок 37

Проведем также неподвижные оси координат $Ox_1y_1z_1$, жестко связанные с Землей. Систему осей $Ox_1y_1z_1$ называют неподвижной системой отсчета (рис. 37).

Движение точки M относительно неподвижной системы отсчета $Ox_1y_1z_1$ называется *абсолютным движением*. В приведенном выше примере это движение точки обода колеса машины относительно Земли.

Скорость и ускорение точки в абсолютном движении называют *абсолютной скоростью* и *абсолютным ускорением* точки и обозначают $\vec{v}_{\text{абс}}$, $\vec{a}_{\text{абс}}$.

Движение точки M относительно подвижной системы отсчета $Oxyz$ называется *относительным движением*. В приведенном примере это движение точки обода колеса машины относительно корпуса машины.

Скорость и ускорение точки в относительном движении называют *относительной скоростью* и *относительным ускорением* точки и обозначают $\vec{v}_{\text{отн}}$, $\vec{a}_{\text{отн}}$.

Движение подвижной системы отсчета и неизменно связанного с ней тела A по отношению к неподвижной системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ является для точки M *переносным движением*.

Переносным движением называется движение подвижной системы отсчета по отношению к неподвижной системе. В приведенном примере это движение точки обода колеса машины вместе с корпусом машины.

Скорость и ускорение точки тела A , связанного с подвижной системой отсчета, совпадающей в данный момент времени с движущейся точкой M , называют *переносной скоростью* и *переносным ускорением* точки M и обозначаются $\vec{v}_{\text{пер}}$, $\vec{a}_{\text{пер}}$.

Приведем еще один пример: Пусть человек идет вдоль радиуса

вращающейся платформы (рис. 38). Свяжем подвижную систему отсчета с платформой, а с поверхностью Земли – неподвижную. Тогда движение платформы относительно Земли будет переносным, движение человека по отношению к платформе – относительным, а движение человека по отношению к Земле (вместе с платформой) – абсолютным.

Переносной скоростью человека $\vec{v}_{\text{пер}}$ и его переносным ускорением $\vec{a}_{\text{пер}}$ будет скорость и ускорение той точки платформы, где находится человек в данный момент времени.

Таким образом, абсолютное движение является сложным, состоящим из относительного и переносного движений точки.

Основная задача изучения сложного движения точки состоит в установлении зависимостей между скоростями и ускорениями относительного, переносного и абсолютного движений точки.

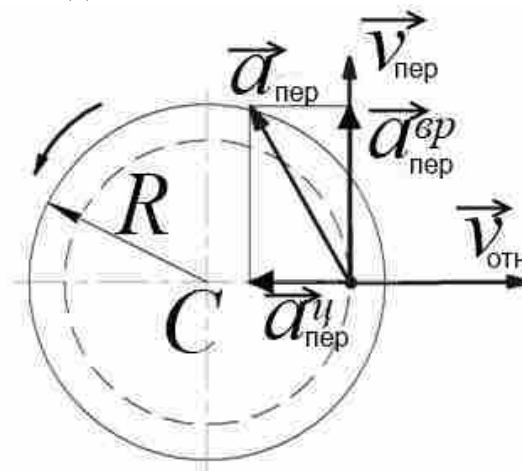


Рисунок 38

Теорема о сложении скоростей

Рассмотрим точку M , совершающую сложное движение (рис. 39). Положение точки M в неподвижной системе отсчета будем определять радиус-вектором $\vec{r}_M$, а в подвижной – радиус-вектором $\vec{r}$. Радиус-вектор точки O начала подвижной системы координат обозначим $\vec{r}_0$.

Обозначим единичные векторы подвижных осей координат $Ox_1y_1z_1$ через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и разложим радиус-вектор $\vec{r}$ на составляющие по этим осям:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Из векторного треугольника OO_1M имеем:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \vec{r} = \vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (28)$$

Для определения относительной скорости точки M нужно мысленно остановить переносное движение, т. е. подвижную систему координат

Оху_z, и считать векторы $\vec{r}_0$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ постоянными. В этом случае, дифференцируя равенство (28) по времени, получим:

$$\vec{v}_{отн} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \quad (29)$$

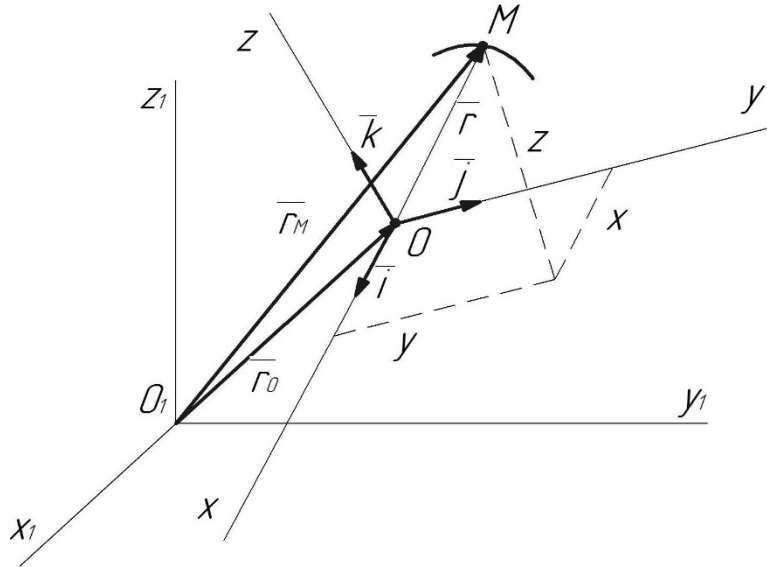


Рисунок 39

Для определения переносной скорости точки M нужно мысленно остановить относительное движение точки и определить скорость ее как точки, неизменно связанной с подвижной системой. В этом случае, дифференцируя равенство (28) по времени, при условии, что координаты точки M постоянны, получим:

$$\vec{v}_{пер} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (30)$$

Абсолютную скорость точки M найдем, дифференцируя по времени равенство (28), в котором все члены переменные:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{a6c} &= \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \\ &= \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt} = \\ &= \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) + \left(\frac{d\vec{r}_0}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\right). \end{aligned}$$

Сравнивая последнее равенство с равенствами (29) и (30), приходим к выводу, что в правой части этого равенства первое из двух выражений,

заклученных в скобки, представляет собой относительную скорость $\vec{v}_{отн}$ точки, а второе – переносную скорость точки $\vec{v}_{пер}$.

Следовательно,

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}. \quad (31)$$

Равенство (31) выражает *теорему о сложении скоростей*, которая формулируется следующим образом: абсолютная скорость точки при сложном движении равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей этой точки.

Абсолютная скорость $\vec{v}_{абс}$ точки определяется диагональю параллелограмма, построенного на относительной $\vec{v}_{отн}$ и переносной $\vec{v}_{пер}$ скоростях точки как на сторонах (рис. 40).

Модуль абсолютной скорости точки можно аналитически вычислить по формуле:

$$v_{абс} = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2 + 2v_{отн} v_{пер} \cos(\vec{v}_{отн}, \vec{v}_{пер})}.$$

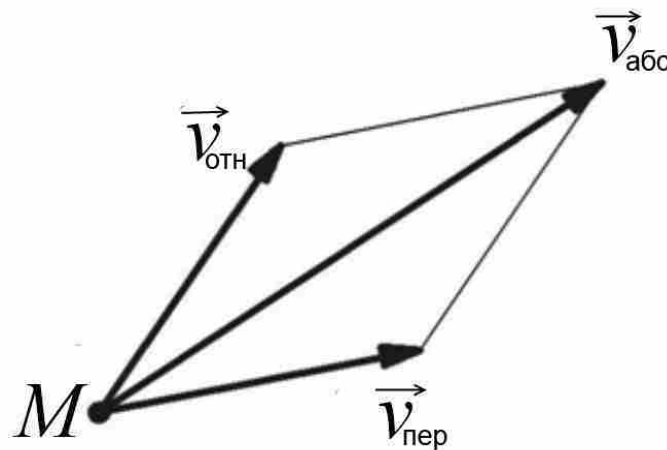


Рисунок 40

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела

Плоским, или плоскопараллельным, называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости H (рис. 41).

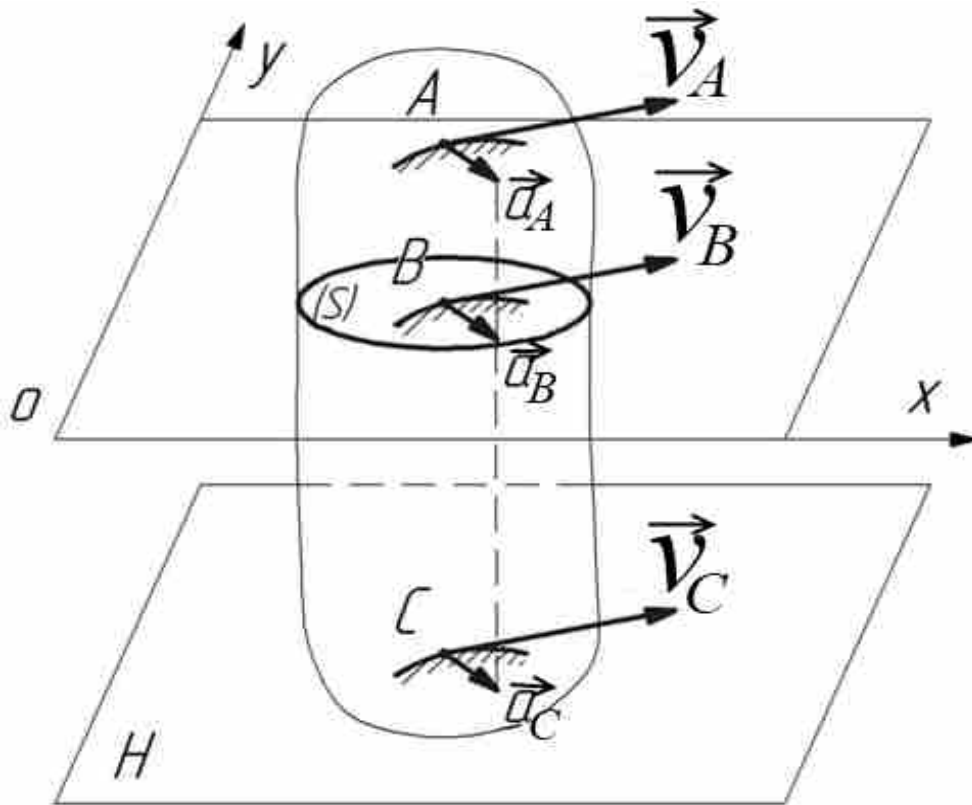


Рисунок 41

Это движение имеет большое распространение в технике. Подавляющее большинство встречающихся на практике механизмов являются плоскими, т. е. представляют собой сочленение твердых тел, совершающих плоское движение. Таково, например, движение шатуна кривошипно-ползунного механизма двигателя машины. Плоское движение совершает колесо машины, движущейся по прямолинейному участку пути.

Рассмотрим сечение S тела какой-либо плоскостью Oxy параллельной неподвижной плоскости H . Из определения плоского движения следует, что любая прямая AB , проведенная в теле перпендикулярно к неподвижной плоскости H (а значит к сечению S) будет перемещаться поступательно, т. е. все точки тела, лежащие на этой прямой, движутся одинаково, так же как и точка B сечения S .

Траектории точек прямой AB тождественны и параллельны. Скорости этих точек геометрически равны:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C.$$

Ускорения также геометрически равны:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C.$$

Таким образом, для определения движения тела необходимо знать движение лишь одной точки на каждой прямой, проведенной перпендикулярно к плоскости H . Следовательно, плоское движение тела вполне определяется движением плоской фигуры, полученной при пересечении тела любой плоскостью Oxy , параллельной неподвижной плоскости H . В дальнейшем

плоскость Oxy будем совмещать с плоскостью чертежа, а вместо всего тела изображать только плоскую фигуру S (рис. 42).

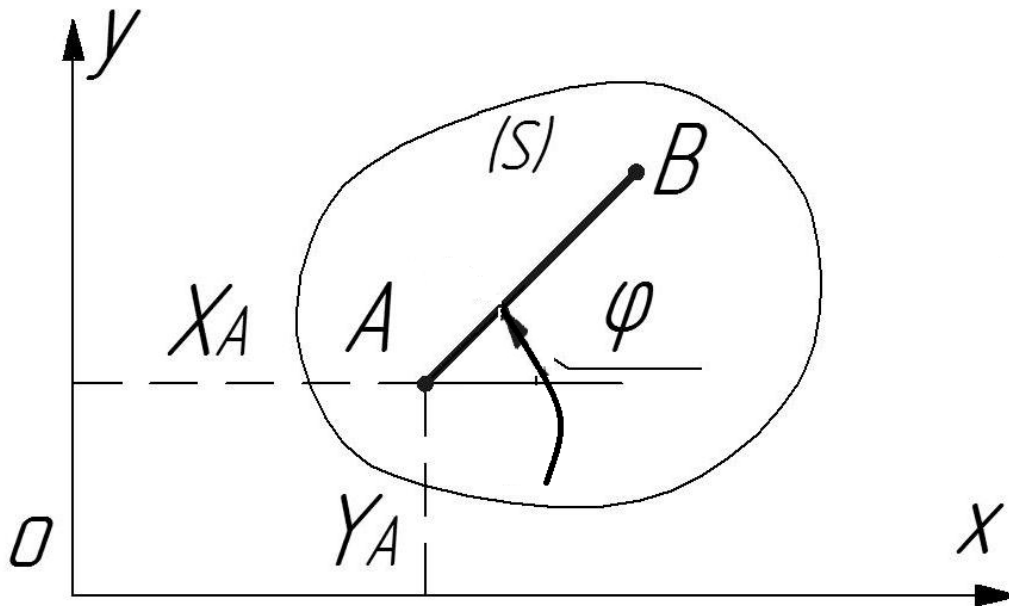


Рисунок 42

Рассмотрим два произвольных положения плоской фигуры в плоскости (рис. 43). Положение плоской фигуры в плоскости определяется положением отрезка AB . Перемещение отрезка AB в положение A_1B_1 можно произвести, суммируя поступательное перемещение вместе с полюсом A (или B) и вращение вокруг полюса.

Положение фигуры S в плоскости Oxy полностью определяется положением какого-либо отрезка AB , проведенного в этом сечении. В свою очередь, положение отрезка AB в плоскости Oxy определяется двумя координатами точки A , называемой полюсом, X_A , Y_A и углом φ , который отрезок AB образует с осью Ox .

При движении тела величины X_A , Y_A и φ будут изменяться, поэтому, чтобы знать положение тела в пространстве в любой момент времени, нужно знать эти параметры как функции времени, т. е.

$$X_A = X_A(t); \quad Y_A = Y_A(t); \quad \varphi_A = \varphi_A(t). \quad (32)$$

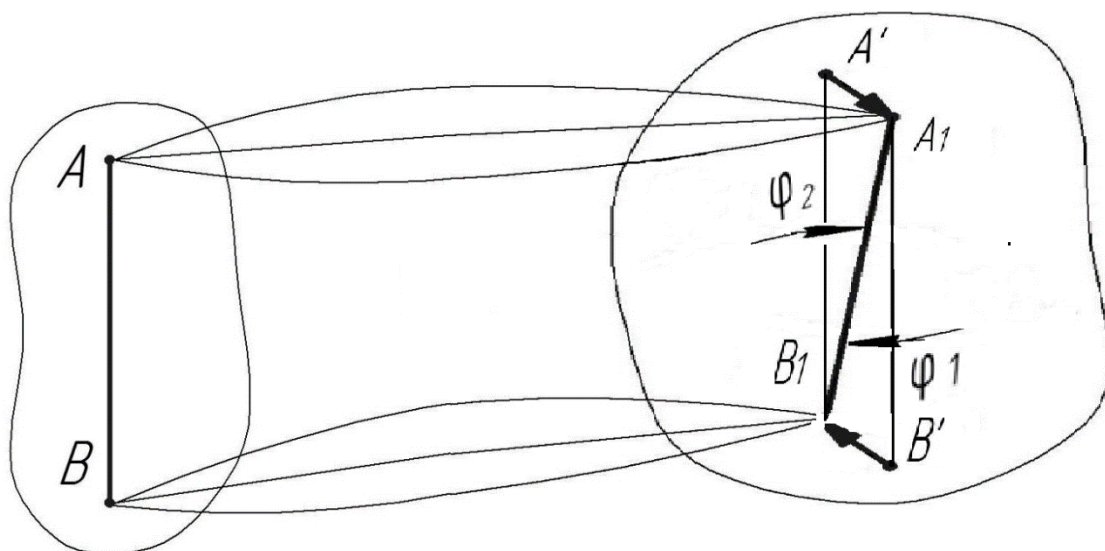


Рисунок 43

Уравнения (32) являются уравнениями плоского движения тела. Из этих уравнений следует, что плоское движение тела складывается из поступательного движения вместе с полюсом A (определяется первыми двумя уравнениями) и вращательного движения вокруг полюса (определяется третьим уравнением).

При изучении плоского движения за полюс можно выбирать любую точку тела. При этом характеристики поступательной части движения (скорость и ускорение полюса) зависят от выбора полюса, а характеристики вращательной части движения (угловая скорость и угловое ускорение тела) от выбора полюса не зависят, так как угол поворота φ тела от положения полюса не зависит.

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Кинематика»

1. В чем состоят основные задачи кинематики?
2. В каких случаях движения точки касательное ускорение обращается в нуль?
3. В чем состоит теорема о сложении скоростей?
4. В каких случаях движения точки нормальное ускорение обращается в нуль?
5. Как выражается зависимость между угловой скоростью вращающегося тела и линейной скоростью какой-нибудь точки этого тела?
6. В каких случаях движения точки полное ускорение обращается в нуль?
7. Как выражаются касательное и нормальное ускорения точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
8. Как записать уравнения движения точки в декартовых осях координат?
9. Как изображается угловая скорость тела в виде вектора, как этот вектор направлен?

10. Как направлен вектор скорости криволинейного движения точки по отношению к ее траектории?
11. Как направлен вектор ускорения криволинейного движения точки по отношению к ее траектории, в какой плоскости он лежит?
12. Как определяются скорости и ускорения точки в проекции на оси декартовой системы координат?
13. Как определяется модуль и направление ускорения точки при координатном способе задания ее движения?
14. Какое движение называется вращением вокруг своей оси?
15. Какое движение твердого тела называется плоским?
16. Какое вращение твердого тела называется равномерным, какое равномерно-переменным?
17. Какая зависимость существует между угловой скоростью вращающегося тела и числом его оборотов в минуту?
18. Как изображается угловая скорость тела в виде вектора, как определить направление этого вектора?
19. Как выражается зависимость между угловой скоростью вращающегося тела и линейной скоростью какой-нибудь точки этого тела?
20. Как классифицируется движение точки по ускорениям?
21. Как определяется скорость точки при координатном способе задания движения?
22. Какая зависимость существует между радиус-вектором движущейся точки и вектором скорости этой точки?
23. Какая зависимость существует между радиус-вектором движущейся точки и вектором ускорения точки?
24. Какие существуют способы определения скорости движения точки?

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Предмет и основные понятия динамики

Динамика – это раздел теоретической механики, в котором изучается связь между движением материальных тел и силами, действующими на них. В отличие от кинематики, где движение материальных тел рассматривалось только с геометрической точки зрения, то есть независимо от причин, вызывающих или изменяющих это движение, в динамике движение тела (в общем случае – движение механической системы) рассматривается в совокупности с действующими на это тело (на эту систему) силами.

В курсе изложения теоретической механики раздел «Динамика» может быть разделен на две большие части: динамика материальной точки и динамика системы. В первой части изучается движение *материальной точки*, а именно, такого тела, что различием в движении отдельных точек этого тела можно пренебречь.

Основанием теоретической механики являются аксиомы (или законы) Ньютона. Эти аксиомы представляют собой постулаты, справедливость которых подтверждается многовековыми наблюдениями и опытом человечества.

Ньютон сформулировал законы механического движения по отношению к абсолютному (неподвижному) пространству. Системы координат, неподвижные относительно этого пространства или движущиеся относительно него поступательно, равномерно и прямолинейно, называют *инерциальными системами отсчета*.

Отметим, что в теоретической механике считается, что инерциальные системы отсчета эквивалентны во всех отношениях. Таким образом, все уравнения и законы механики не зависят от конкретного выбора инерциальной системы отсчета. В этом состоит важнейший принцип механики – *принцип относительности Галилея*.

Законы (аксиомы) Ньютона Основные понятия

Законы (аксиомы), которые лежат в основе классической динамики, Исаак Ньютон сформулировал и изложил в своем труде «Математические начала натуральной философии» в 1687 году. Все дальнейшие выводы динамики получены логическим путем с использованием методов математического анализа из этих основных законов (аксиом).

1-й закон Ньютона (аксиома инерции)

Если на материальную точку не действуют силы, то она находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно.

Обозначим через $\vec{F}$ главный вектор всех сил, действующих на точку, $\vec{v}$ – вектор скорости точки. Таким образом, первый закон Ньютона можно выразить так:

$$\text{если } \vec{F} = 0, \text{ то } \vec{v} = \text{const}.$$

Если скорость $\vec{v} = 0$, то этот случай соответствует состоянию покоя, в случае $\vec{v} \neq 0$ точка движется равномерно (с постоянной скоростью).

Сила выражает механическое воздействие на материальную точку, оказываемое на нее со стороны других тел. Материальная точка, поставленная в условия аксиомы инерции, – это точка, *изолированная* от воздействия на нее других тел. Очевидно, что понятие изолированной материальной точки является идеализированным.

Инерцией (инертностью) называется свойство материальной точки сохранять свою скорость (как по величине, так и по направлению), в частном случае, сохранять состояние покоя (скорость равна нулю). Это свойство было указано Галилеем.

Итак, первый закон Ньютона определяет свойство инерции материальной точки. С другой стороны, верно и обратное утверждение: если точка движется неравномерно и прямолинейно, то на нее действует сила $\vec{F} \neq 0$.

2-й закон Ньютона (основная аксиома динамики)

Если $\vec{a}$ – ускорение, а m – это масса материальной точки в инерциальной системе отсчета, то сила, действующая на эту материальную точку, по модулю равна произведению массы на ускорение, а по направлению совпадает с направлением ускорения, или:

$$|\vec{F}| = m \vec{a}. \quad (33)$$

Это векторное уравнение устанавливает соотношение между тремя величинами – силой, массой и ускорением. В то же время оно является основным уравнением динамики и дает способ определения модуля и направления силы.

Масса m – скалярная положительная величина – является основной динамической характеристикой материальной точки и остается постоянной во все время движения (согласно воззрениям классической механики). За единицу массы в Международной системе единиц принимается масса эталона, который хранится в Париже. Единица массы называется *килограмм (кг)*.

Из уравнения (33) видно, что модуль силы пропорционален массе точки, то есть, чтобы сообщить точке данное ускорение, нужно приложить тем большую силу, чем больше ее масса. За единицу силы принимается такая сила, которую надо приложить к материальной точке массой 1 кг, чтобы вызвать ее

ускорение в инерциальной системе отсчета, равное 1 м/с^2 . Эта единица силы называется *Ньютоном (Н)*.

Второй закон Ньютона можно сформулировать иначе, введя понятие количества движения. *Количеством движения* материальной точки называется вектор $\vec{q}$, величина которого равна произведению массы точки на ее скорость, то есть $\vec{q} = m\vec{v}$, а направление совпадает с направлением вектора скорости.

Как известно из кинематики, ускорение точки может быть найдено как производная от скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

и, учитывая, что масса материальной точки – величина постоянная, уравнение (33) может быть представлено в следующем виде:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt},$$

то есть *сила, приложенная к материальной точке, равна производной от количества движения этой точки по времени.*

3-й закон Ньютона (аксиома взаимодействия материальных точек)

Если одна точка действует на другую, то и вторая точка действует на первую, причем силы, с которыми действуют друг на друга эти материальные точки, равны по модулю и направлены по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

Отметим, что ускорения, которые сообщают друг другу две точки А и В, по модулю пропорциональны массам этих точек и направлены по прямой АВ в противоположные стороны:

$$\frac{\vec{a}}{\vec{a}'} = \frac{\vec{m}'}{\vec{m}}.$$

Закон сложения сил (аксиома независимости действия сил)

Если на материальную точку действуют одновременно несколько сил, то ускорение этой точки равно геометрической сумме тех ускорений, которые получает эта точка при действии каждой из этих сил в отдельности.

Действительно, опыт показывает, что сила взаимодействия двух материальных точек не может быть изменена возможными действиями на них других материальных точек, если положение, скорость и физическое состояние (электрическое, магнитное и т. д.) этих точек остаются неизменными. Иными словами, когда точки P_i ($i = 1, \dots, k$) действуют на одну и ту же точку P с силами $\vec{F}_i$, то ускорения $\vec{a}_i$, которые они вызвали бы у нее, действуя каждая отдельно, складываются. В этом состоит аксиома независимости действия сил.

Пусть m – масса точки P . Тогда, согласно уравнению (33), $\vec{a}_i = \frac{1}{m} \vec{F}_i$. В соответствии с аксиомой независимости сил, ускорение $\vec{a}$ точки P вычисляется по формуле:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_k = \frac{1}{m} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_k),$$

откуда видно, что ускорение $\vec{a}$ точки P таково, каким оно было бы, если бы к ней было приложено не k отдельных сил, а одна сила $\vec{F}$, равная сумме сил $\vec{F}_i$:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_k.$$

Это и есть закон сложения сил. Он является эквивалентной формулировкой аксиомы независимости действия сил. Упомянутая сила $\vec{F}$, действие которой заменяет действие всех сил $\vec{F}_i$, называется равнодействующей сил $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_k$, приложенных к точке P .

Отметим, что силы, действующие на точку, можно разделить на две группы: активные силы (их можно условно назвать заданными силами) и реакции связей (пассивные силы). Активные силы заранее известны и сохраняются в случае, если связи мгновенно исчезнут. Пассивные силы заранее не известны и зависят не только от материальных приспособлений, которые реализуют связи, а также от активных сил и движения материальной точки.

Замечание. В разделе «Кинематика» было отмечено, что всякое механическое движение мы можем наблюдать и изучать только по отношению к выбранной системе отсчета, связанной с каким-нибудь материальным телом. Значит, в действительности мы не можем установить абсолютно неподвижную систему отсчета. Отсюда возникает довольно важный вопрос: В какой системе отсчета применимы к механическому движению законы Ньютона? Итак, желая воспользоваться законами классической механики, мы должны прежде всего установить такую систему отсчета, которую можно было бы считать инерциальной, т. е. в которой применимы, по крайней мере, с достаточной степенью точности, законы Ньютона.

Как показывают наблюдения и опыт, в большинстве задач динамики, относящихся к технической практике, за такую систему отсчета можно принять систему осей, связанных с Землей. В тех же случаях, когда приходится учитывать суточное вращение Земли, за инерциальную систему отсчета принимают геоцентрическую систему координат, начало которой находится в центре Земли, а оси направлены к трем wybranнм «неподвижным» звездам. В астрономии пользуются гелиоцентрической системой координат, начало которой совпадает с центром Солнца, а оси направлены к трем wybranнм «неподвижным» звездам. Современное состояние наших знаний показывает, что гелиоцентрическая система отсчета с весьма большой степенью точности является инерциальной системой.

Дифференциальные уравнения движения точки

Пусть материальная точка $M(x, y, z)$ массой m движется по криволинейной траектории с ускорением $\vec{a}$ под действием некоторой переменной силы $\vec{F}$. Проекции этой силы на оси инерциальной системы отсчета обозначим через X, Y, Z . Тогда на основании 2-го закона Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (34)$$

Спроецируем векторное равенство (37) на координатные оси, получим:

$$X = ma_x, Y = ma_y, Z = ma_z. \quad (35)$$

Как известно из кинематики, проекции ускорения на координатные оси выражаются так:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Подставляя последние выражения в уравнение (38), получим:

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, Y = m \frac{d^2y}{dt^2}, Z = m \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (36)$$

Таким образом, получили систему трех дифференциальных уравнений второго порядка, выражающих в координатной форме основную аксиому динамики.

Уравнения (36) в динамике точки являются основными и называются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки*.

Замечание: в случае, когда на материальную точку действует не одна сила, а система сил, то под X, Y, Z следует понимать проекции главного вектора этой системы сил.

Две основные задачи динамики точки

В динамике точки рассматривается движение материальной точки в связи с силами, приложенными к ней, и ставится целью решение *двух основных задач динамики точки*:

- 1) по заданному движению найти силы, приложенные к точке;
- 2) по заданным силам найти движение точки.

Используя дифференциальные уравнения (36), которые были получены в предыдущем пункте, можно решить обе основные задачи динамики точки.

Первая (прямая) задача динамики точки

Дано: движение точки, масса точки – m .

Найти: силу, действующую на точку в каждый момент.

Решение: пусть движение точки задано тремя кинематическими уравнениями:

$$x(t), y(t), z(t), \quad (37)$$

которые представляют собой координаты точки как известные функции времени. Тогда для того, чтобы найти неизвестную силу $\vec{F}$, действующую на точку, необходимо подставить заданную массу точки m и уравнения движения (37) в уравнения (36). Получим:

$$X = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}, Y = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, Z = m \frac{d^2 z(t)}{dt^2}. \quad (38)$$

Определив три проекции искомой силы $\vec{F}$, будем знать ее модуль и направление в каждый момент времени.

Таким образом, первая (прямая) задача динамики точки решается путем дифференцирования дважды уравнений движения точки (36) и подстановки этих производных и массы точки m в уравнения (38), из которых находится неизвестная сила, действующая на точку в каждый момент.

Пример: движение материальной точки весом 2 кг выражается уравнениями $x = 3\cos(2\pi t)$ м, $y = 4\sin(\pi t)$ м, где t выражено в секундах.

Определить: проекции силы, действующей на точку, в зависимости от ее координат.

Решение: из данных кинематических уравнений движения точки находим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &= -12\pi^2 \cos(2\pi t) = -4\pi^2 x(t), \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= -4\pi^2 \sin(\pi t) = -\pi^2 y(t). \end{aligned}$$

Чтобы найти проекции искомой силы, умножим полученные уравнения на массу точки:

$$\begin{aligned} X &= 2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -8\pi^2 x(t), \\ Y &= 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -2\pi^2 y(t). \end{aligned}$$

Ответ: $X = -8\pi^2 x(t), Y = -2\pi^2 y(t).$

Вторая (обратная) задача

Дано: сила $\vec{F}$, действующая на точку, масса точки m .

Найти: движение точки.

Решение: чтобы найти движение точки, а именно, выразить ее координаты как функции времени, необходимо проинтегрировать дифференциальные уравнения движения точки (36), считая X , Y , Z неизвестными функциями времени.

Заметим, что при интегрировании системы (36) в общем случае, получим 6 произвольных постоянных. Таким образом, чтобы полностью определить движение точки под действием заданной силы $\vec{F}$, надо задать начальные условия движения – начальное положение точки (3 координаты) и начальную скорость точки (3 проекции вектора скорости на оси координат). В случае плоского движения, произвольных постоянных будет только 4, как и начальных условий (2 координаты начального положения и 2 проекции вектора скорости на оси координат).

Частный случай. Прямолинейное движение точки

Пусть материальная точка движется по прямолинейной траектории под действием силы $\vec{F}$. Примем эту прямую за ось Ox , тогда координаты y и z точки будут постоянно равны нулю. Таким образом, уравнения (36) примут вид

$$X = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Очевидно, что направление действующей силы $\vec{F}$ совпадает с направлением траектории, то есть $F = \pm X$, знак «плюс» соответствует случаю, когда действующая сила направлена в положительную сторону оси Ox , знак «минус» – в отрицательную. Получили, что в случае прямолинейного движения материальной точки из трех дифференциальных уравнений движения (36) осталось только одно:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X.$$

Рассмотрим различные случаи определения прямолинейного движения точки, когда известна действующая сила, то есть решим вторую задачу динамики.

1. Действующая сила является *постоянной*.

Пример: тяжелое тело спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом 30° к горизонту (рис. 44). В начальный момент его скорость равнялась 2 м/сек.

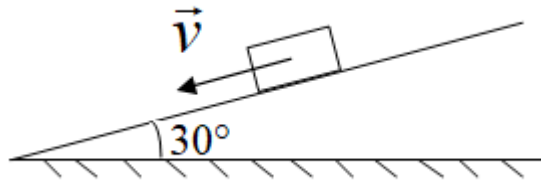


Рисунок 44

Найти: за какое время тело пройдет путь 9,6 м.

Решение: примем начальное положение точки за начало координат, ось Ox направим вдоль поверхности в сторону движения точки так, чтобы вектор скорости лежал на оси, а ось Oy – перпендикулярно к оси Ox вверх.

На точку действуют сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и реакция опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно к плоскости движения (рис. 45).

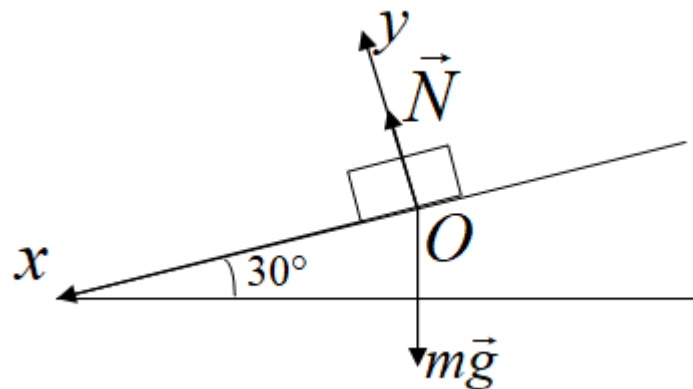


Рисунок 45

При указанном выборе оси Ox имеем:

$$X = mg \cos 60^\circ, \quad Y = N - mg \cos 30^\circ, \quad Z = 0.$$

Кроме того, в начальный момент при $t = 0$, имеем:

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

$$v_{0x} = 2, \quad v_{0y} = v_{0z} = 0.$$

Составляя дифференциальные уравнения движения точки, получим:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = mg \cos 60^\circ, \quad m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = N - mg \sin 60^\circ, \quad m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = 0.$$

Сокращаем первое уравнение на m , получим:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = g \cos 60^\circ;$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 9,8 \cdot 0,5;$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 4,9.$$

Интегрируя первое уравнение, находим:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 4,9t + C_1. \quad (39)$$

Заменяя $\frac{dx(t)}{dt}$ через v_x , получаем закон изменения проекции на ось Ox вектора скорости:

$$v_x = 4,9t + C_1.$$

Остается найти постоянную C_1 . Для этого подставляем известное значение проекции на ось Ox вектора скорости в начальный момент времени, т. е. при $t = 0$:

$$2 = 4,9 \cdot 0 + C_1;$$

$$2 = C_1.$$

Подставляем в (39) найденное значение C_1 :

$$\frac{dx(t)}{dt} = 4,9t + 2.$$

Интегрируем еще раз, получим:

$$x(t) = 4,9 \frac{t^2}{2} + 2t + C_2.$$

Аналогично находим постоянную C_2 , используя начальные данные:

$$0 = 4,9 \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 + C_2;$$

$$0 = C_2.$$

Тогда закон изменения движения точки вдоль оси Ox примет вид:

$$x(t) = 2,45t^2 + 2t. \quad (40)$$

Рассмотрим второе и третье из дифференциальных уравнений движения точки. Так как координаты точки вдоль осей Oy и Oz не изменяются в процессе движения, а начальное положение совпадает с началом координат, то во все время движения

$$y(t) = 0, \quad z(t) = 0,$$

а значит, что:

$$N = mg \cos 30^\circ, \quad v_y = v_z = 0.$$

Чтобы найти, за какое время тело пройдет путь 9,6 м, подставим эту величину в уравнение (40):

$$9,6 = 2,45t^2 + 2t;$$

$$2,45t^2 + 2t - 9,6 = 0;$$

$$t_1 = 1,61;$$

$$t_2 = -2,43.$$

Очевидно, что отрицательное значение t не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: Тело пройдет путь, равный 9,6 м, за 1,61 с.

2. Действующая сила является *переменной* и зависит только от времени.

Пример: материальная точка массой m движется из состояния покоя под действием силы $X = Q \sin(kt)$.

Найти: закон движения точки.

Решение. Дифференциальное уравнение движения точки имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = Q \sin(kt), \quad \text{или} \quad mdv = Q \sin(kt) dt.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от 0 до v и от 0 до t , получим:

$$mv = -\frac{Q}{k} [\cos(kt) - 1], \quad \text{или} \quad v = -\frac{Q}{mk} [\cos(kt) - 1].$$

Заменяя v через $\frac{dx}{dt}$, имеем:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{Q}{mk} [\cos(kt) - 1],$$

откуда

$$dx = \frac{Q}{mk} dt - \cos(kt) dt.$$

Принимая начальное положение точки за начало отсчета и интегрируя это уравнение в пределах от 0 до x и от 0 до t , находим закон движения точки под действием заданной периодической силы:

$$x = \frac{Q}{mk} t - \frac{Q}{k^2 m} \sin(kt).$$

Это уравнение показывает, что в данном случае движение точки можно рассматривать как результат сложения двух движений:

1. Равномерного движения

$$x = \frac{Q}{mk} t,$$

2. Гармонического колебания:

$$x = -\frac{Q}{k^2 m} \sin(kt).$$

Ответ: $x = \frac{Q}{mk} t - \frac{Q}{k^2 m} \sin(kt).$

Последние три частных случая требуют достаточно громоздких математических вычислений при решении дифференциального уравнения движения точки и не будут подробно рассматриваться в данном учебном пособии.

3. Действующая сила является переменной и зависит только от положения точки (координаты x).

4. Действующая сила является переменной и зависит только от скорости точки.

5. Общий случай – переменная сила $\vec{F}$ (может зависеть от времени, координаты, скорости точки).

Теорема об изменении количества движения

Эта теорема устанавливает связь между количеством движения материальной точки и импульсом силы, действующей на точку. Как было указано ранее, *количеством движения материальной точки* называется *векторная* величина, равная произведению скорости этой точки на ее массу, то есть величина $m\vec{v}$.

Определим размерность этой величины:

$$\begin{aligned} [\text{количество движения}] &= \text{масса} \times \text{скорость} = (\text{сила/ускорение}) \times \text{скорость} = \\ &= \text{сила} \times (\text{время}^2/\text{длина}) \times (\text{длина/время}) = \text{сила} \times \text{время}. \end{aligned}$$

Запишем проекции количества движения на оси координат:

$$mv_x = m \frac{dx}{dt}, \quad mv_y = m \frac{dy}{dt}, \quad mv_z = m \frac{dz}{dt}.$$

Элементарным импульсом силы называется векторная величина, равная произведению силы на бесконечно малый промежуток времени, в течение которого действует эта сила, т. е. вектор $\vec{F} dt$, имеющий, очевидно, то же направление, что и сила $\vec{F}$. Чтобы найти импульс силы за конечный промежуток времени t , нужно разделить этот промежуток на весьма большое число n очень малых интервалов dt_i , составить геометрическую сумму элементарных импульсов, соответствующих каждому из этих интервалов, и затем перейти к

пределу, предполагая, что $n \rightarrow \infty$ и $dt_i \rightarrow 0$. Если обозначим импульс силы за время t через $\vec{S}$, то получим:

$$\vec{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i dt_i = \int_0^t \vec{F} dt. \quad (41)$$

Таким образом, импульс силы за конечный промежуток времени выражается определенным векторным интегралом. Так как импульс есть произведение силы на время, то его численное значение выражается, очевидно, в Ньютон·секунда (Н · сек).

Проекции вектора $\vec{S}$ на координатные оси на основании равенства (41) выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_i dt_i = \int_0^t X dt, \\ S_y &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Y_i dt_i = \int_0^t Y dt, \\ S_z &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Z_i dt_i = \int_0^t Z dt. \end{aligned} \right\}$$

Здесь X, Y, Z обозначают проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси. Возьмем теперь основное уравнение динамики:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \text{ или } m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \text{ или } \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

Отсюда получаем:

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt.$$

Таким образом: *дифференциал количества движения материальной точки равен элементарному импульсу действующей на эту точку силы*. Интегрируя это уравнение в пределах от 0 до t и обозначая начальную и конечную скорости точки через $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$, получим:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^t \vec{F} dt$$

или

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S}. \quad (42)$$

Равенство (42) выражает теорему о количестве движения: *изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно импульсу действующей на эту точку силы за то же время*.

Если известны количества движения материальной точки $m\vec{v}$ и $m\vec{v}_0$, то легко построить вектор $\vec{S}$, как указано на рис. 46.

Наоборот, если известен импульс $\vec{S}$ и начальная скорость точки $\vec{v}_0$, то из равенства (42) находим скорость $\vec{v}$, а именно:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{1}{m}\vec{S}.$$

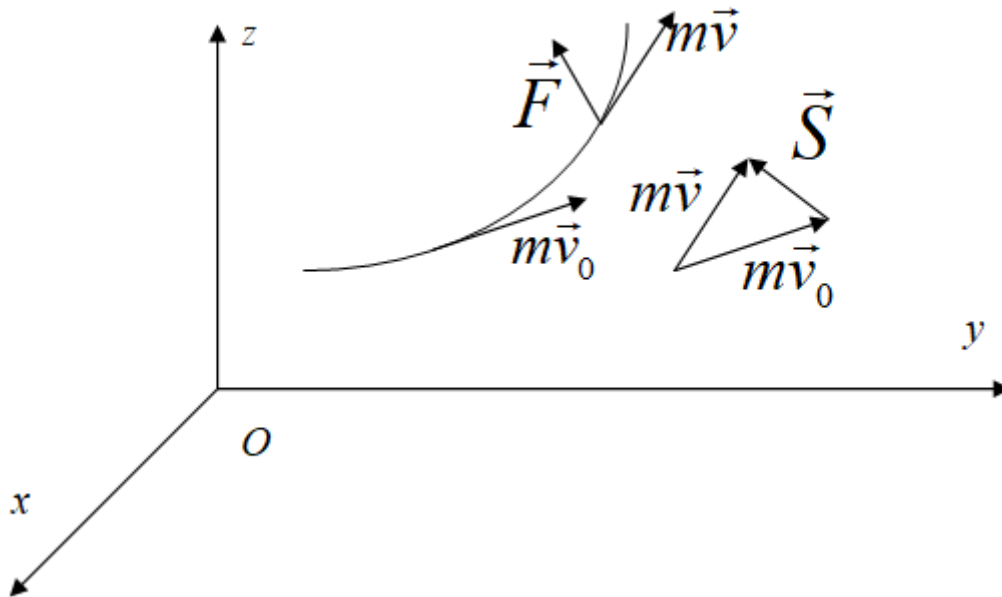


Рисунок 46

Спроецируем левую и правую части векторного равенства (42) на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= S_x = \int_0^t X dt, \\ mv_y - mv_{0y} &= S_y = \int_0^t Y dt, \\ mv_z - mv_{0z} &= S_z = \int_0^t Z dt, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

т. е. изменение проекции количества движения на какую-нибудь ось равно проекции импульса действующей силы на ту же ось.

Если проекции силы X , Y , Z являются известными функциями времени t , то, выполняя интегрирование в уравнениях (43), найдем проекции скорости v_x , v_y и v_z и, следовательно, сможем определить модуль и направление скорости точки для любого момента t .

Следствие 1. Пусть $X = 0$. Тогда

$$mv_x - mv_{0x} = 0,$$

$$v_x = v_{0x} = \text{const},$$

т. е. если проекция действующей силы на данную ось во все время движения равна нулю, то проекция скорости движущейся точки на эту ось остается постоянной.

Следствие 2. Пусть $X = \text{const}$. Тогда $\int_0^t X dt = Xt$ и, следовательно,
 $mv_x - mv_{0x} = Xt.$

Следствие 3. Пусть $\vec{F} = \text{const}$. Тогда $\vec{S} = \int_0^t \vec{F} dt = \vec{F}t$ и, следовательно,
 $m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{F}t.$

Из теоремы о количестве движения следует, что эффект действия силы, выражающийся в изменении количества движения материальной точки, измеряется импульсом этой силы.

Работа

Первые две рассмотренные теоремы относятся к понятию количества движения материальной точки. Следующая теорема динамики точки связана с понятием кинетической энергии. *Кинетической энергией материальной точки* называется скалярная величина, равная по величине половине произведения массы движущейся точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Определим размерность этой величины:

$$\left[\frac{mv^2}{2} \right] = [\text{масса} \times \text{скорость}^2] = \left[\frac{\text{сила} \times \text{время}^2}{\text{длина}} \times \frac{\text{длина}^2}{\text{время}^2} \right] = [\text{сила} \times \text{длина}].$$

Количество движения и кинетическая энергия являются основными мерами механического движения.

Прежде чем переходить к выводу теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки, рассмотрим понятие работы силы.

Пусть модуль силы $\vec{F}$ – величина переменная. В этом случае для

вычисления работы на пути s разобьем этот путь на большое число n очень малых участков $ds_1, ds_2, \dots, ds_n$. Значения модуля силы $\vec{F}$ в начале каждого из этих участков обозначим соответственно через $F_1, F_2, \dots, F_n$. Так как участок ds_i очень мал, то величину F_i на этом участке приближенно можно считать постоянной (с тем большей точностью, чем меньше ds_i). Поэтому *элементарная работа* на пути ds_i будет равна:

$$F_i ds_i \text{ или } -F_i ds_i.$$

Работа считается положительной, если направление силы $\vec{F}$ совпадает с направлением движения точки. Если же сила направлена в сторону, противоположную движению точки, то работа считается отрицательной.

Взяв сумму этих элементарных работ и переходя затем к пределу при $ds_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, получим работу переменной силы на конечном пути s . В пределе сумма этих элементарных работ выразится определенным интегралом. Если обозначим работу через A , получим:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_i ds_i = \int_0^s F ds$$

или

$$A = - \int_0^s F ds.$$

Для того чтобы вычислить этот интеграл, модуль силы $\vec{F}$ нужно выразить как функцию переменного s . В качестве примера вычисления работы переменной силы решим следующую задачу.

Размерность работы выражается так:

$$[A] = [\text{сила} \times \text{длина}],$$

а потому работа, как и кинетическая энергия, измеряется, очевидно, в Ньютон $\cdot$ метр (Н $\cdot$ м).

Частный случай. Если точка приложения постоянной силы $\vec{F}$ движется по прямой, совпадающей с линией действия силы, то работа этой силы равна произведению ее модуля F на длину пути s , пройденного точкой приложения силы, взятому с определенным знаком («плюс» или «минус»):

$$A = \pm F s.$$

Рассмотрим, как вычисляется работа в случае криволинейного движения точки. Пусть точка приложения M силы $\vec{F}$, переменной как по величине, так и по направлению, описывает криволинейную траекторию. Требуется определить работу этой силы на пути $M_0 M_1 = s$. Разобьем весь этот путь на большое число весьма малых участков; пусть один из таких элементарных участков есть $MM' = ds$. Разложим силу $\vec{F}$ на две составляющие $\vec{F}_\tau$ и $\vec{F}_n$, направленные

соответственно по касательной и нормали к траектории в точке M .

Тогда элементарная работа силы $\vec{F}$ на пути ds выражается произведением $F_\tau ds$, взятым, так же как и в случае прямолинейного движения, со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, совпадает ли направление силы $\vec{F}$ с направлением скорости $\vec{v}$ точки приложения этой силы или эта сила направлена в сторону, противоположную скорости $\vec{v}$. Если под F_v будем понимать проекцию силы $\vec{F}$ на направление скорости $\vec{v}$, то, обозначая угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{v}$ через φ , получим:

$$F_v = F \cos \varphi = |F_\tau|,$$

или

$$F_v = F \cos \varphi = -|F_\tau|$$

в зависимости от знака $\cos \varphi$. Элементарная работа в обоих случаях будет равна

$$\vec{F}_v d\vec{s} = F \cos \varphi ds.$$

Если угол φ острый, то элементарная работа положительна. Если же этот угол тупой (в этом случае касательная сила $\vec{F}_\tau$ направлена, очевидно, противоположно скорости $\vec{v}$), то эта работа отрицательна.

Взяв сумму элементарных работ и переходя к пределу в предположении, что число n участков, на которые была разбита дуга M_0M_1 , неограниченно возрастает, а длина каждого участка ds_i стремится к нулю, получим работу силы $\vec{F}$ на конечном пути от M_0 до M_1 :

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_{iv} ds_i = \int_0^s F_v ds,$$

или

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_i \cos \varphi_i ds_i = \int_0^s F \cos \varphi ds. \quad (44)$$

Таким образом, работа силы на конечном пути выражается криволинейным интегралом, взятым вдоль соответствующей дуги траектории, которую описывает точка приложения силы. Если сила во все время движения перпендикулярна направлению скорости движения ее точки приложения, то работа этой силы равна нулю, так как в этом случае $\varphi = 90^\circ$ и $\cos \varphi = 0$.

Выражение работы (44) можно представить еще в другом виде. Из кинематики известно, что элементарный путь ds , пройденный движущейся точкой за время dt , равен vdt , а потому

$$F \cos \varphi ds = Fv \cos \varphi dt;$$

следовательно, выполняя интегрирование по переменному t , получим:

$$A = \int_0^t Fv \cos \varphi dt.$$

Этой формулой для вычисления работы можно пользоваться и в том

случае, когда скорость движения точки приложения силы, а также модуль и направление силы известны для любого момента t (т. е. определены как функции от t). Выражение $Fv\cos\varphi dt$, стоящее под интегралом, представляет собой элементарную работу силы $\vec{F}$ за время dt .

Произведение $Fv\cos\varphi$ есть скалярное произведение силы $\vec{F}$ и скорости $\vec{v}$, а потому

$$Fv\cos\varphi dt = \vec{F} \cdot \vec{v} dt.$$

Если обозначим радиус-вектор точки M через $\vec{r}$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$), то по известной из кинематики формуле:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

отсюда

$$d\vec{r} = \vec{v} dt$$

и, следовательно,

$$Fv\cos\varphi dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (45)$$

т. е. *элементарная работа равна скалярному произведению силы на дифференциал радиуса-вектора точки приложения этой силы.*

Если разложим векторы $\vec{F}$ и $\vec{r}$ по координатным осям, то получим:

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где X, Y, Z обозначают проекции силы $\vec{F}$ на эти оси, а x, y, z – координаты точки M . Из второго равенства следует, что

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz.$$

Подставляя выражения для $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ в равенство (45) и принимая во внимание, что

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0,$$

получим аналитическое выражение элементарной работы:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = Xdx + Ydy + Zdz. \quad (46)$$

Здесь dx, dy, dz представляют собой дифференциалы координат точки приложения силы, т. е.

$$dx = v_x dt, \quad dy = v_y dt, \quad dz = v_z dt.$$

Полученным аналитическим выражением (46) для элементарной работы часто пользуются при вычислении работы силы на криволинейном пути.

Докажем теперь теорему о работе равнодействующей силы.

Пусть к материальной точке M приложены две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$,

равнодействующая которых равна $\vec{R}$. Обозначим работу сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{R}$ на пути s соответственно через A_1 , A_2 и A .

Проецируя векторное равенство:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

на направление скорости точки M , получим:

$$R_v = F_{1v} + F_{2v}.$$

Умножая обе части этого равенства на элемент пути ds и интегрируя в пределах от 0 до S (вдоль траектории точки M), получим:

$$\int_0^S R_v ds = \int_0^S F_{1v} ds + \int_0^S F_{2v} ds$$

или, на основании равенства (44),

$$A = A_1 + A_2.$$

Таким образом, приходим к теореме: *работа равнодействующей на некотором пути равна сумме работ составляющих сил на том же пути.*

Теорема об изменении кинетической энергии

Пусть материальная точка M массы m движется под действием силы $\vec{F}$ по некоторой криволинейной траектории. Напишем основное уравнение динамики точки, выражающее второй закон Ньютона: $\vec{F} = m\vec{a}$; проецируя это векторное равенство на направление скорости $\vec{v}$, получим:

$$ma_v = F_v.$$

Как известно из кинематики,

$$a_v = \frac{dv}{dt},$$

следовательно,

$$m \frac{dv}{dt} = F_v = F \cos \varphi,$$

где φ есть угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{v}$. Умножая обе части этого равенства на vdt , получим:

$$mvdt = Fv \cos \varphi dt,$$

или

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Fv \cos \varphi dt. \quad (47)$$

Правая часть этого равенства представляет собой элементарную работу силы $\vec{F}$; следовательно, *дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе силы, действующей на эту точку*. Этот результат выражает теорему о кинетической энергии в дифференциальной форме.

Интегрируя уравнение (47) в соответствующих пределах, получим:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A. \quad (48)$$

Равенство (48) выражает теорему о кинетической энергии в конечной форме: *изменение кинетической энергии движущейся материальной точки равно работе приложенной к ней силы на пройденном этой точкой пути*.

Стоит отметить, если на движущуюся материальную точку действуют несколько сил, то в уравнении (48) под A нужно понимать работу равнодействующей, равную сумме работ этих сил на данном пути.

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Динамика материальной точки»

1. Каковы основные задачи динамики?
2. Каковы свойства внутренних сил?
3. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением динамики?
4. Какой алгоритм решения задач динамики с помощью дифференциальных уравнений?
5. Как записывается и формулируется теорема об изменении момента количества движения материальной точки?
6. Как направлена и чему равна по величине сила инерции материальной точки?
7. Как определить работу переменной силы?
8. Как определяется работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении?
9. Как определяется момент количества движения материальной точки относительно центра и оси?
10. Как определяются постоянные интегрирования при решении второй задачи динамики?
11. Как формулируется теорема об изменении кинетической энергии?
12. Что называется кинетической энергией материальной точки?
13. Что называют количеством движения?

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

Различные виды техники представляют собой сложные комплексы, состоящие из систем взаимодействующих между собой агрегатов и узлов, звеньев, механическими моделями которых являются твердые тела, материальные точки.

Таким образом, возникает механическая модель системы материальных точек как совокупности находящихся в силовом контакте твердых тел, размерами которых можно пренебречь при решении конкретной задачи.

Абсолютно твердое тело представляет собой частный случай этой модели как системы материальных точек, расстояния между которыми не изменяются в процессе движения.

Основная задача состоит в усвоении основ методологии исследования вращательного движения систем материальных точек, обосновании меры инерции при вращении твердого тела и выработке навыков составления дифференциального уравнения вращения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси.

Важным является обобщение меры инерции в случае вращательного движения, которая учитывает распределение масс в твердом теле. Такой мерой является момент инерции.

Существенным является то, что только моменты внешних сил оказывают влияние на вращательное движение твердого тела.

В технике имеется большое количество вращающихся деталей (валы, кривошипы, шкивы), поэтому навыки в исследовании динамики вращательного движения имеют практическое значение.

Момент инерции твердого тела относительно оси Радиус инерции

Положение центра масс характеризует распределение масс системы не полностью. Например, если расстояния r от оси z каждого из одинаковых шариков A и B увеличить или уменьшить на одну и ту же величину, то положение центра масс системы не изменится, а распределение масс станет другим (рис. 47). Это приведет к тому, что движение системы под действием тех же приложенных сил изменится, т. е. вращение вокруг оси Z станет происходить медленнее или быстрее.

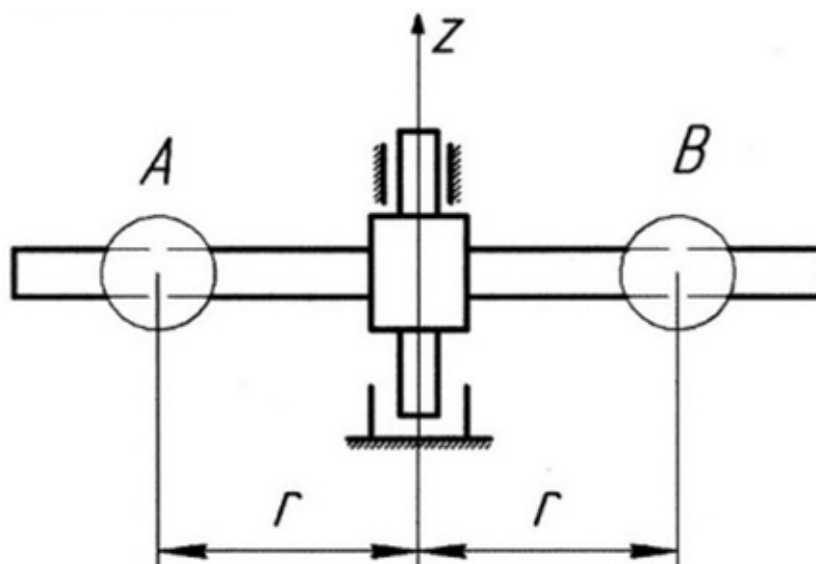


Рисунок 47

Значит, не изменяя положения центра масс системы, можно изменить распределение масс, что приведет к изменению движения системы. Это требует введения дополнительных характеристик распределения масс.

Такой характеристикой является *момент инерции* тела относительно оси.

Моментом инерции J_z твердого тела относительно некоторой оси (осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений массы m , каждой точки тела на квадрат расстояния от этой точки до оси:

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

При непрерывном распределении масс материальных точек в твердом теле осевой момент инерции определяется формулой:

$$J_z = \int_{(V)} r^2 dm,$$

где dm – масса элементарной частицы тела;

r – расстояние этой частицы от оси Z .

Из определения следует, что осевой момент инерции является величиной положительной и не равен нулю.

В дальнейшем будет показано, что *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении*, т. е. выполняет такую же роль, какую масса при поступательном движении тела. Момент инерции тела относительно данной оси Z можно представить в виде произведения массы тела на квадрат длины некоторого отрезка J_z , называемого радиусом инерции тела относительно этой оси, т. е.

$$J_z = m i_z^2.$$

Следовательно, моментом инерции тела относительно данной оси называется скалярная величина, равная произведению массы тела на квадрат радиуса инерции тела относительно этой оси.

Радиусом инерции тела относительно какой-либо оси называется такое расстояние от этой оси, в конце которого нужно сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела. Если момент инерции тела относительно данной оси известен, то радиус инерции тела относительно этой оси находится по формуле:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}}.$$

Таким образом, зная момент инерции, можно найти, радиус инерции тела и наоборот.

Осевой момент инерции измеряется в $[\text{кг} \cdot \text{м}^2]$.

Теорема о моментах инерции тела относительно параллельных осей (теорема Штейнера)

Через центр масс C тела проведем координатные оси x, y, z , а через любую точку O на оси Cy проведем ось z_1 , параллельную оси z (рис. 48).

Оси, проходящие через центр масс тела, называются *центральными*. Расстояние между осями z и z_1 обозначим через d . Выделим произвольную точку тела с массой m_j и координатами x_1, y_1, z_1 . Расстояние этой точки от оси z обозначим через H_j ; а от оси z_1 – через h_j .

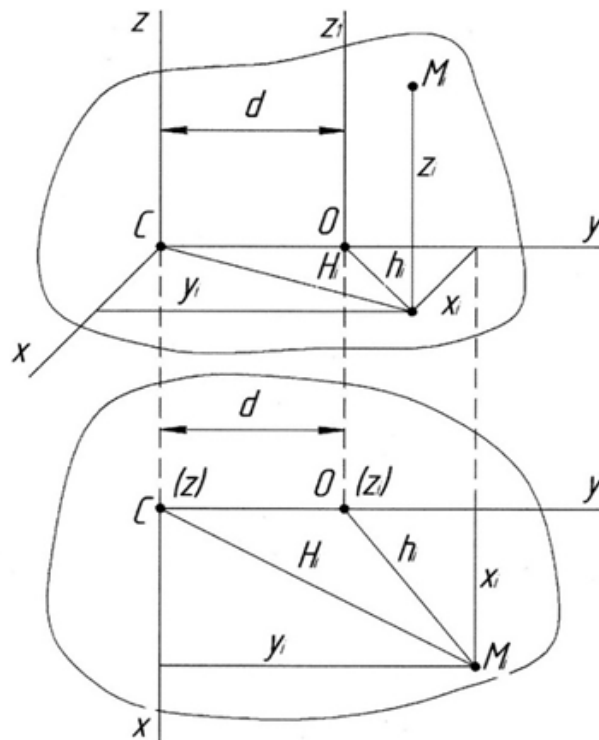


Рисунок 48

Тогда на основании определения момент инерции тела относительно

центральной оси z :

$$\begin{aligned}
 J_z &= \sum_{i=1}^n m_i H_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2). \\
 J_{z1} &= \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i [x_i^2 + (y_i - d)^2] = \\
 &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 - 2y_i d + d^2) = \\
 &= J_z - 2d \sum_{i=1}^n m_i y_i + d^2 \sum_{i=1}^n m_i = J_z + md^2. \\
 \sum_{i=1}^n m_i y_i &= my_C = 0. \\
 J_{z1} &= J_z + md^2. \\
 J_{z1} &= \sum_{i=1}^n J_{z,i} + m_i \cdot d_i^2.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Равенство (49) выражает следующую теорему:

Момент инерции тела относительно любой оси равен моменту инерции этого тела относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.

Из этой теоремы следует, что из всех моментов инерции тела относительно параллельных осей наименьшим будет момент инерции относительно центральной оси.

Равенство (49) широко используется в практических расчетах при определении моментов инерции тел относительно осей, не проходящих через центр масс.

Моменты инерции простейших однородных тел

Тонкий однородный стержень

Определим момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m относительно оси y , перпендикулярной к оси стержня и проходящей через его конец (рис. 49).

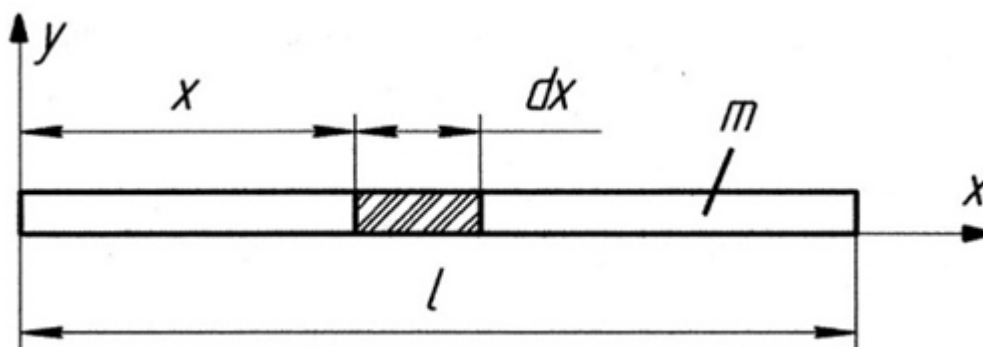


Рисунок 49

Разобьем стержень по длине на малые отрезки. Тогда масса любого элементарного отрезка стержня длиной dx , находящегося на расстоянии x от оси y , будет равна:

$$dm = \rho dx = \frac{m}{l} dx,$$

$$J_z = \int_{(V)} r^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{m}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

$$J_z = \frac{1}{3} ml^2. \quad (50)$$

Момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно к его оси, равен одной третьей произведения массы стержня на квадрат его длины.

Применим теорему Штейнера (50) для определения момента инерции тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его центр тяжести (рис. 50)

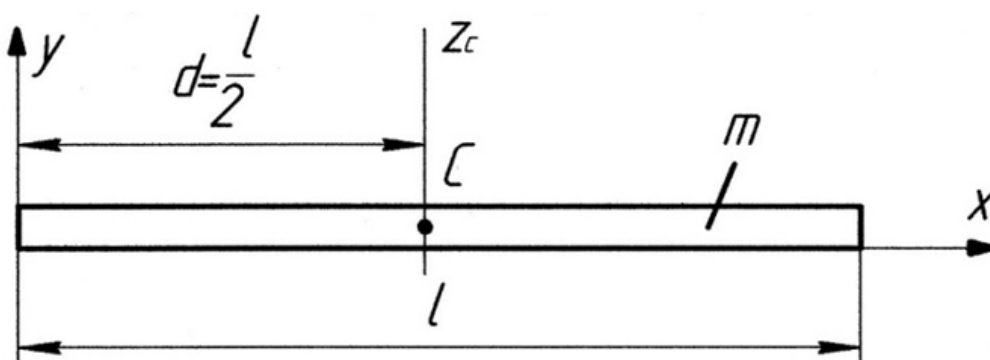


Рисунок 50

$$J_z = J_{zC} + m \cdot d^2,$$

$$J_{zC} = J_z - m \cdot d^2.$$

Момент инерции относительно оси, проходящей через конец стержня

$$J_z = \frac{ml^3}{3}.$$

Подставляя это значение, получим:

$$J_{zC} = J_z - m \cdot d^2 = \frac{ml^3}{3} - m \frac{l^2}{4} = \frac{ml^2}{12}.$$

Тонкое однородное кольцо

Определим момент инерции точного однородного кольца радиуса R и массы m относительно центральной оси Z , перпендикулярной к плоскости кольца (рис. 51).

В данном случае все точки кольца находятся от оси Z на расстоянии $r = R$, поэтому найдем:

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i R^2 = R^2 \sum_{i=1}^n m_i = mR^2.$$

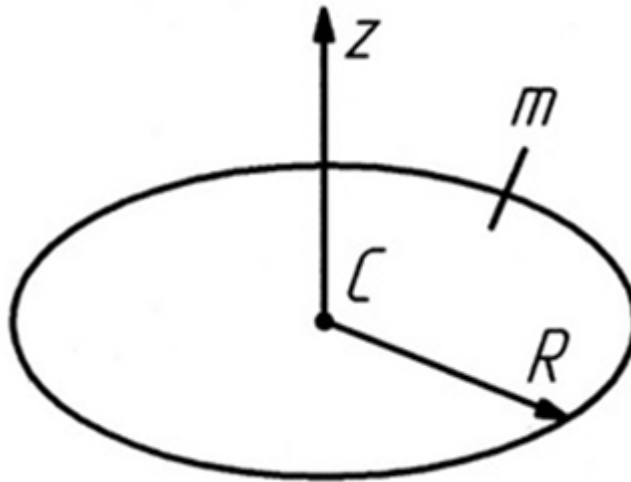


Рисунок 51

Следовательно,

$$J_z = mR^2. \quad (51)$$

Очевидно, такой же результат получится при вычислении момента инерции тонкостенного цилиндра массой m с радиусом R относительно центральной оси. Момент инерции тонкого однородного кольца (тонкостенного цилиндра) относительно его центральной оси равен произведению массы кольца

(цилиндра) на квадрат его радиуса.

При приближенном вычислении моментов инерции полых цилиндрических тел с тонким ободом (например, маховиков) пренебрегают толщиной обода и считают всю массу тела равномерно распределенной по его внешней боковой поверхности, т. е. момент инерции таких тел вычисляют по формуле (51) как для кольца.

Круглая однородная пластина

Вычислим момент инерции круглой однородной пластины радиусом R и массой m относительно центральной оси перпендикулярной ее плоскости.

Разобьем пластину на множество элементарных колец и рассмотрим одно из них радиусом r и толщиной dr (рис. 52).

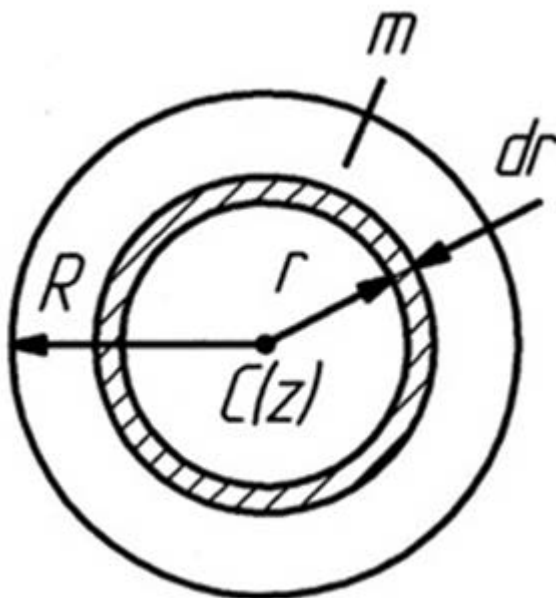


Рисунок 52

Площадь элементарного кольца:

$$ds = 2\pi r dr.$$

Масса этого кольца:

$$ds = \rho ds = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2m}{R^2} r dr,$$

где ρ – масса единицы пластины, равная

$$\rho = \frac{2m}{R^2}.$$

Тогда

$$I_z = \int_{(V)} r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{2m}{R^2} r dr = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}.$$

Следовательно,

$$J_z = \frac{1}{2} mR^2.$$

Такая же формула получится и для момента инерции однородного круглого цилиндра.

Момент инерции круглой однородной пластины (круглого однородного цилиндра) относительно центральной оси равен половине произведения массы пластины (цилиндра) на квадрат ее радиуса.

Формулы для вычисления моментов инерции однородных тел различной геометрической формы приводятся в технических справочниках. Для тел неоднородных или тел сложной формы моменты инерции вычисляются экспериментально.

Дифференциальное уравнение вращательного движения

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси под действием внешних сил (рис. 53).

Z – ось вращения тела. Применим к вращающемуся телу теорему о моменте количества движения относительно оси вращения Z :

$$\frac{dL_z^*}{dt} = M_z^E.$$

Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения:

$$L_z^* = J_z \omega,$$

где J_z – момент инерции относительно оси вращения;

ω – угловая скорость тела.

Главный момент внешних сил M_z^E определяется алгебраической суммой всех внешних сил системы относительно оси вращения Z :

$$M_z^E = \sum_{i=1}^n M_{iz}^E.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}(J_z \omega) = \sum_{i=1}^n M_{iz}^E.$$

Так как $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ – угловое ускорение тела, можно это уравнение представить в виде:

$$J_z \varepsilon = \sum_{i=1}^n M_{iz}^E. \quad (52)$$

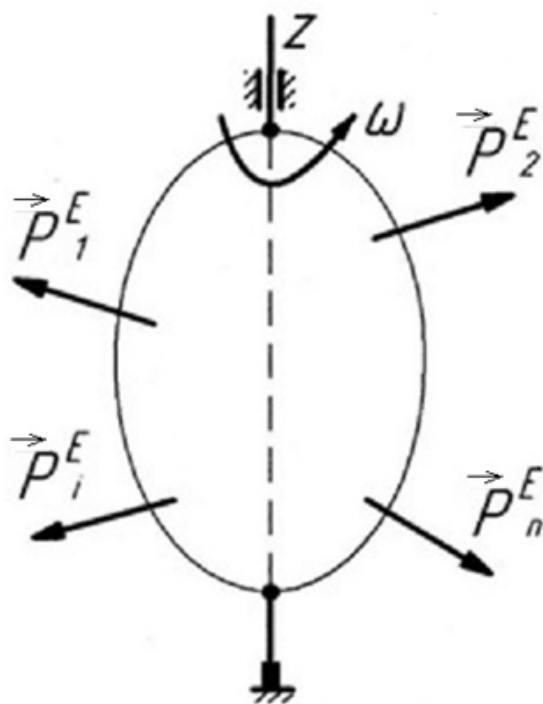


Рисунок 53

Угловая скорость тела определяется производной от угла поворота по времени, поэтому уравнение (52) можно представить в виде:

$$J_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum_{i=1}^n M_{iz}^E. \quad (53)$$

Применяя на практике уравнения (52) и (53), удобно левую часть всегда считать положительной. Тогда знаки моментов внешних сил, входящих в правую часть, зависят от того, способствует или препятствует момент данной силы вращению тела в определенном направлении или нет.

Моменты сил, способствующие вращению, считаются положительными, а препятствующие – отрицательными.

Дифференциальное уравнение вращения можно также получить из уравнения поступательного движения, заменяя характеристики поступательного движения на их аналоги во вращательном движении.

Элементарная работа и работа силы на конечном перемещении

Энергия, являясь общей количественной мерой различных форм движения материи, может переходить из одного вида в другой. Например, потенциальная энергия поднятой плотины воды на гидроэлектростанции

переходит в кинетическую энергию вращающихся турбин, которая в свою очередь превращается в электрическую энергию, по проводам передается на большие расстояния, чтобы опять перейти в кинетическую энергию станков, в тепловую энергию электропечей, в световую, в звуковую и другие виды энергии. Это изменение энергии, изменение формы движения, рассматриваемое с количественной стороны, называется работой.

Поскольку количественная сторона движения оценивается модулем скорости, то понятие работы можно определить так:

Работой силы на некотором перемещении ее точки приложения называется скалярная величина, характеризующая то действие силы, которое приводит к изменению модуля скорости движущейся точки.

Элементарная работа – это работа силы на бесконечно малом перемещении dr . При этом вектор силы при движении по элементу dr не изменяет ни модуля, ни направления в пространстве: $P = const$.

Тогда работа силы будет представляться скалярным произведением $P \cdot a$ и называться *элементарной работой* и обозначаться δA ,

$$\delta A = \vec{P} \cdot d\vec{r} = P_x dx + P_y dy + P_z dz. \quad (54)$$

Обозначение δA вместо dA обусловлено тем, что выражение в общем случае не представляет полного дифференциала некоторой функции, так как сила в общем случае зависит не только от положения точки, но и от скорости точки по времени, т. е. $P = (r, v, t)$, и выражение (54) не может являться полным дифференциалом в случае действия такой силы.

Выражение (54) представлено в эквивалентной форме:

$$\delta A = P \cdot ds \cdot \cos(\vec{P}, \vec{\tau}) = P_\tau \cdot ds. \quad (55)$$

Так как $||dr|| = ds$, а предельным положением секущей dr является касательная τ (рис. 54), P_τ в выражении (55) представляет собой проекцию вектора силы на направление касательной. Если сила P является *переменной*, т. е. ее модуль и направление непрерывно изменяются от точки к точке, а точка приложения движется по некоторой произвольной кривой (рис. 55), то работа такой силы определяется криволинейным интегралом первого или второго рода по кривой M_1M_2 :

$$A = \int_{M_1M_2} P \cdot ds \cdot \cos(\vec{P}, \vec{\tau}) = \int_{M_1M_2} P_\tau \cdot ds.$$

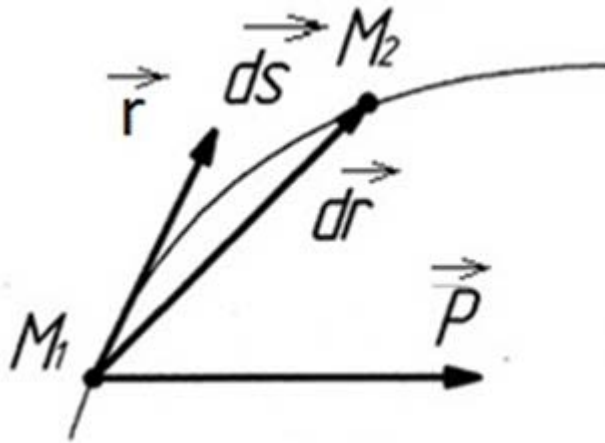


Рисунок 54

$$A = \int_{M_1 M_2} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{M_1 M_2} (P_x dx + P_y dy + P_z dz).$$

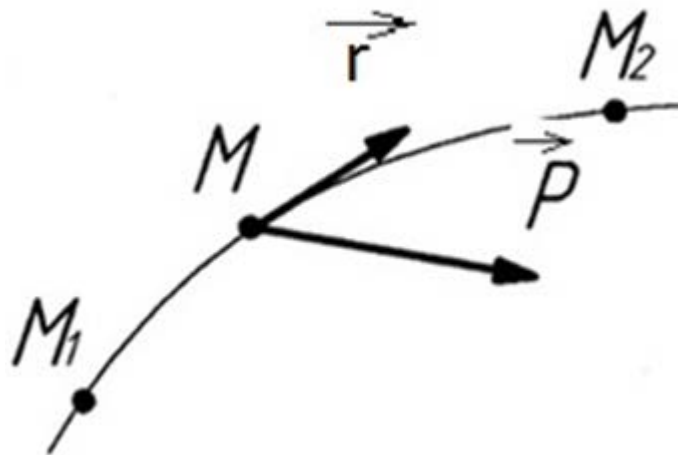


Рисунок 55

Единицы измерения работы в системе СИ:

$$[A] = [P] \cdot [s] = 1 \text{ Нм} = 1 \text{ Дж}.$$

Рассмотрим работу постоянной силы при прямолинейном движении точки ее приложения (рис. 56).

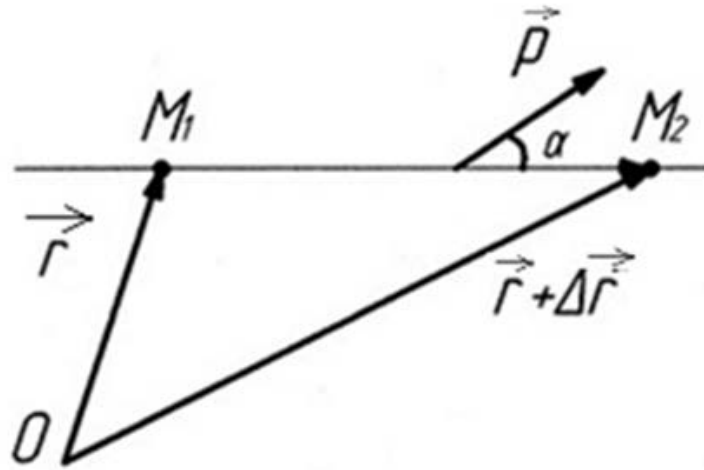


Рисунок 56

Работа определяется выражением, которое можно представить в виде скалярного произведения вектора силы на вектор перемещения:

$$A = \vec{P} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{P} \cdot \vec{p} = \vec{P} \cdot \Delta \vec{r}, \quad (56)$$

где $\vec{p} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \Delta \vec{r}$ – вектор перемещения точки приложения силы.

Выражением (56) представлена работа силы на конечном перемещении.

Работа силы является скалярной величиной, ее знак зависит от знака косинуса угла между направлениями вектора силы и вектора перемещения.

Если $\cos \alpha > 0; 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $A > 0$.

Если $\cos \alpha < 0; \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, то $A < 0$.

Если $\cos \alpha = 0; \alpha = \frac{\pi}{2}$, то $A = 0$.

Т. е. если сила перпендикулярна направлению перемещения, то ее работа равна нулю (рис. 57).

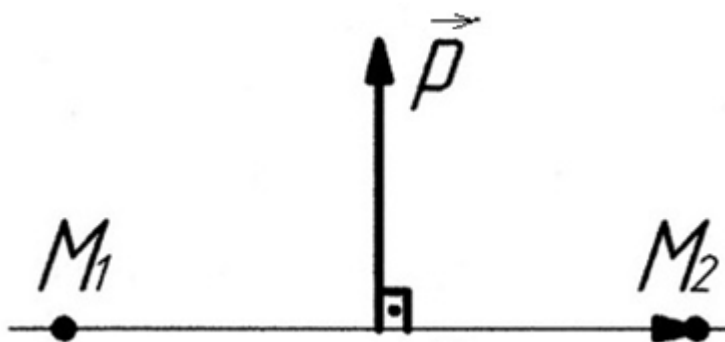


Рисунок 57

Работа силы тяжести и силы упругости

Работа силы тяжести

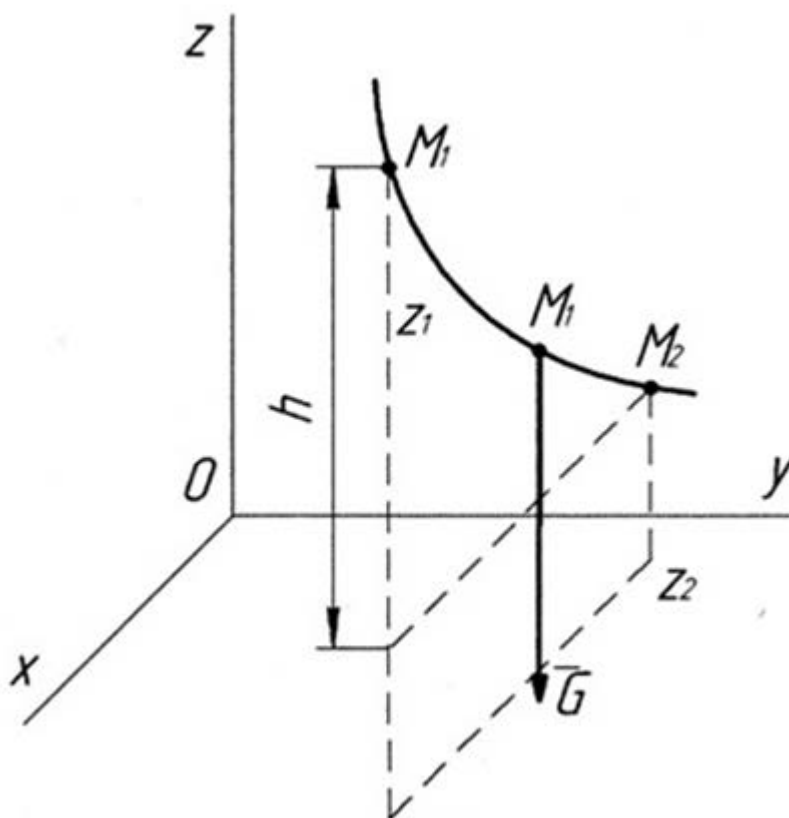


Рисунок 58

Пусть материальная точка M под действием силы тяжести G (рис. 58) перемещается из положения M_1 в положение M_2 . Проекции силы тяжести G на оси координат будут равны:

$$G_x = G_y = 0; \quad G_z = -G.$$

Подставляя эти значения проекций в формулу (56), получим:

$$\begin{aligned} A &= \int_{M_1 M_2} (G_x dx + G_y dy + G_z dz) = -G \int_{Z_1}^{Z_2} dz = \\ &= -G \int_{Z_1}^{Z_2} dz = -G(Z_2 - Z_1) = G(Z_1 - Z_2). \end{aligned}$$

Если точка M_1 выше M_2 , то $Z_1 - Z_2 = h$.

Если точка M_1 ниже M_2 , то $Z_1 - Z_2 = -h$,

где h – величина вертикального перемещения точки M .

Таким образом, окончательно:

$$A = \pm G \cdot h.$$

Работа силы тяжести равна взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения. Работа положительна, если начальное положение точки выше конечного (точка опускается), и отрицательна, если начальное положение точки ниже конечного (точка поднимается). Работа силы тяжести не зависит от длины пути и вида траектории точки ее приложения.

Работа силы упругости

Пусть груз, прикрепленный к свободному концу пружины, перемещается по горизонтальной плоскости из положения $M_1(x_1)$ в положение $M_2(x_2)$. Примем точку O , соответствующую положению груза при ненапряженной пружине, за начало координат и найдем работу упругой силы на этом перемещении груза.

При растяжении пружины в ней возникает сила упругости, направленная к точке O и пропорциональная удлинению пружины, т. е.

$$P = cx,$$

где c – коэффициент жесткости пружины, т. е. сила необходимая для растяжения или сжатия пружины на 1 см.

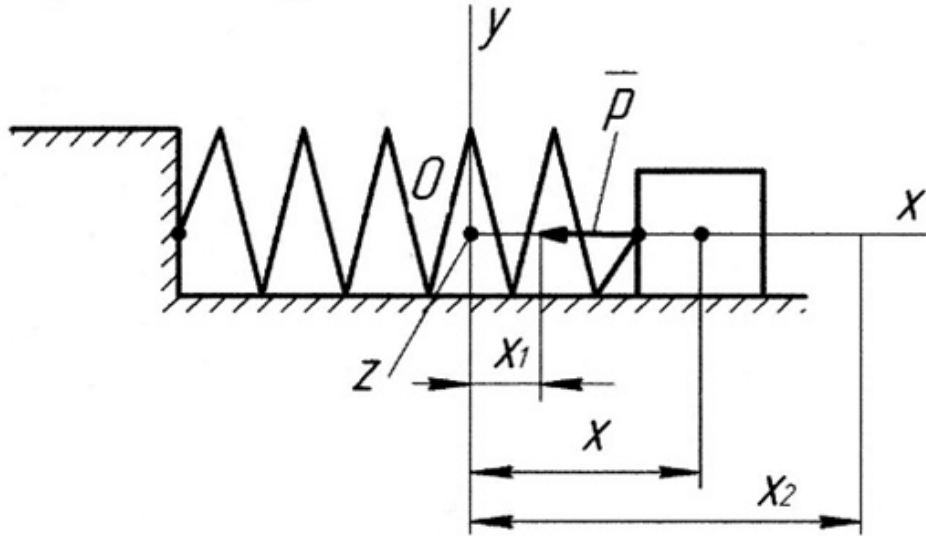


Рисунок 59

Проекции силы упругости на оси координат будут равны:

$$P_x = -P = -cx, \quad P_y = P_z = 0.$$

Подставляя эти значения проекций в формулу (56) для работы, получим:

$$A = \int_{M_2}^{M_1} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = -C \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dx = -\frac{C}{2} (x_2^2 - x_1^2) = \frac{C}{2} (x_1^2 - x_2^2).$$

В полученном выражении x_1 представляет собой начальное удлинение пружины, а x_2 – конечное удлинение пружины. Следовательно, окончательно получим:

$$A = \frac{C}{2} ((\Delta l_{нач})^2 - (\Delta l_{кон})^2). \quad (57)$$

Работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начальной и конечной деформации пружины. Работа силы упругости положительна, если $|\Delta l_{нач}| > |\Delta l_{кон}|$ (конец пружины приближается к равновесному положению), и отрицательна, если $|\Delta l_{нач}| < |\Delta l_{кон}|$ (конец пружины удаляется от равновесного положения).

Формула (57) применяется для вычисления работы сил упругости во всех случаях, когда силы пропорциональны деформации.

Если начальное удлинение пружины $X_1 = 0$, а конечное удлинение $X_2 = h$, то работа силы упругости определяется выражением:

$$A = \pm \frac{ch^2}{2}.$$

Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу при поступательном и вращательном движении

Пусть за промежуток времени Δt сила P совершает работу A . Тогда средняя мощность силы за этот промежуток времени определяется выражением:

$$N_{cp} = \frac{A}{\Delta t}.$$

Мощностью силы в данный момент времени (мгновенной мощностью) называется отношение элементарной работы к элементарному интервалу времени dt :

$$N = \frac{\delta A}{dt}. \quad (58)$$

Подставляя в (58) значение δA из (57), получим:

$$N = \frac{\vec{P} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{P} \cdot \vec{v} = P_x v_x + P_y v_y + P_z v_z.$$

Таким образом, мгновенная мощность силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости. Единицы измерения мощности:

$$[N] = \frac{[A]}{[t]} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 1 \text{Вт}.$$

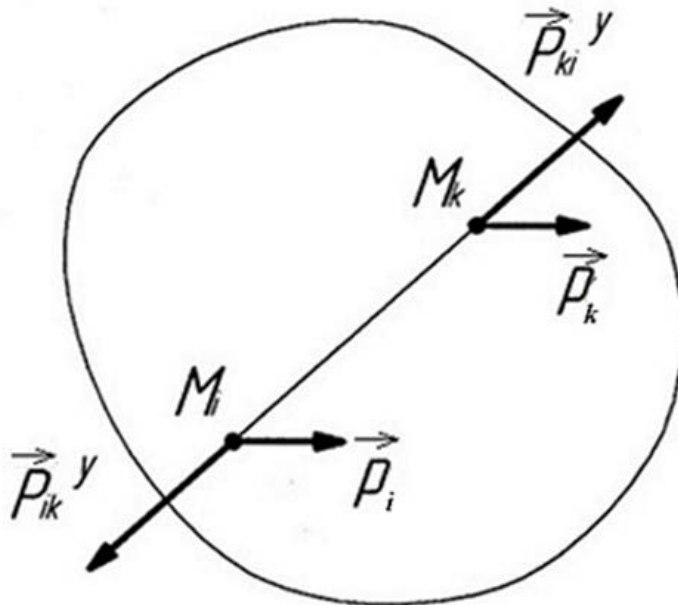


Рисунок 60

Как известно, силы, действующие на твердое тело, подразделяются на внешние и внутренние. Работа внутренних сил при поступательном движении, очевидно, равна нулю. Рассмотрим две взаимодействующие между собой точки тела M_i и M_k (рис. 60) к которым приложены внутренние силы взаимодействия P_i и P_k . Согласно принципу равенства действия и противодействия $\vec{P}_{ik}^I = -\vec{P}_{ki}^I$. При поступательном движении отрезок $M_i M_k$ перемещается параллельно самому себе и не изменяет своей длины, как расстояние между точками абсолютно твердого тела.

Следовательно, векторы перемещения точек M_i и M_k геометрически равны:
 $\vec{p}_i = \vec{p}_k = \vec{p}$.

Следовательно,

$$\sum A_{ik}^I = \sum_{i,k=1}^n (\vec{P}_{ik}^I \cdot \vec{p} + \vec{P}_{ki}^I \cdot \vec{p}) = \sum_{i,k=1}^n (\vec{P}_{ik}^I + \vec{P}_{ki}^I) \cdot \vec{p} = \sum_{i,k=1}^n (0) \cdot \vec{p} = 0.$$

Определим теперь сумму работ всех внешних сил. Пусть к точкам M_i тела приложены внешние силы P_i^E (рис. 61).

Примем за полюс точку O . Скорости всех точек тела при поступательном движении геометрически равны, т. е.

$$\vec{U}_i = \vec{U}_O,$$

или

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt},$$

откуда вытекает геометрическое равенство векторов элементарных перемещений:

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_O.$$

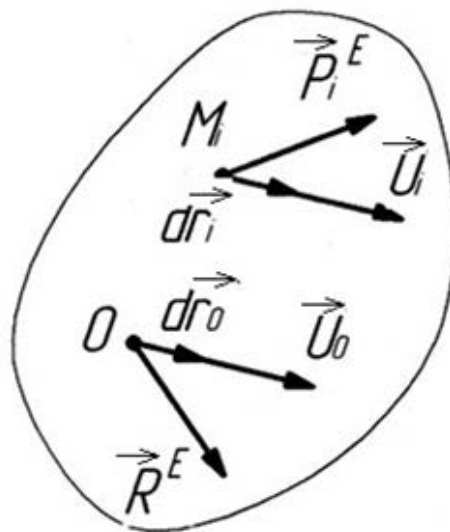


Рисунок 61

Определяем элементарную работу всех внешних сил:

$$\delta A^E = \sum_{i=1}^n \delta A_i^E = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i^E \cdot d\vec{r}_0 = \left(\sum_{i=1}^n \vec{P}_i^E \right) \cdot d\vec{r}_0 = \vec{R}^E \cdot d\vec{r}_0,$$

где $\vec{R}^E$ – главный вектор внешних сил,

$$\vec{R}^E = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i^E.$$

Работа внешних сил на конечном перемещении тела из положения (I) в положение (II):

$$A^E = \int_I^{II} \vec{R}^E \cdot d\vec{r}_0.$$

Мощность внешних сил:

$$N^E = \frac{\delta A^E}{dt} = \frac{\vec{R}^E \cdot d\vec{r}_0}{dt} = \vec{R}^E \cdot \vec{v}_0.$$

Элементарная работа приложенной к телу силы P_i^E :

$$\delta A_i^E = P_{i\tau}^E \cdot ds_i = P_{i\tau}^E \cdot R_i \cdot d\varphi,$$

где $ds_i = R_i$ – элементарное перемещение точки M_i приложения силы P_i^E ;

$d\varphi$ – элементарный угол поворота тела;

R_i – расстояние точки M_i от оси вращения тела Z .

Учитывая, что

$$P_{i\tau}^E \cdot R_i = M_z(\vec{P}_i^E) = M_{iZ}^E$$

окончательно получим:

$$\delta A_i^E = M_{iZ}^E \cdot d\varphi. \quad (59)$$

Таким образом, работа и мощность внешних сил при поступательном движении твердого тела равна работе и мощности их главного вектора. Рассмотрим вращающееся тело. Пусть в некоторой точке M_i тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Z , приложена внешняя сила P_i^E . Точка M_i приложения силы описывает при движении тела окружность радиуса $CM_i = R$ (рис. 62).

Элементарная работа внешней силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению момента этой силы относительно оси вращения на элементарный угол поворота тела.

Формула (59) справедлива и при действии на тело нескольких внешних

сил. В этом случае вращений момент равен оси вращения, т. е.:

$$M_Z^E = \sum M_{iz}^E.$$

Работа силы P_i^E на конечном угле поворота тела от φ_1 до φ_2 определяется равенством:

$$A = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} M_Z^E \cdot d\varphi. \quad (60)$$

Для вычисления работы по формуле (60) необходимо учитывать зависимость вращающего момента от угла поворота тела, т. е. $M_Z^E = f(\varphi)$. Если вращающий момент не изменяется во время движения тела, т. е. $M_Z^E = \text{const}$, то:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_Z^E \cdot d\varphi = M_Z^E (\varphi_2 - \varphi_1).$$

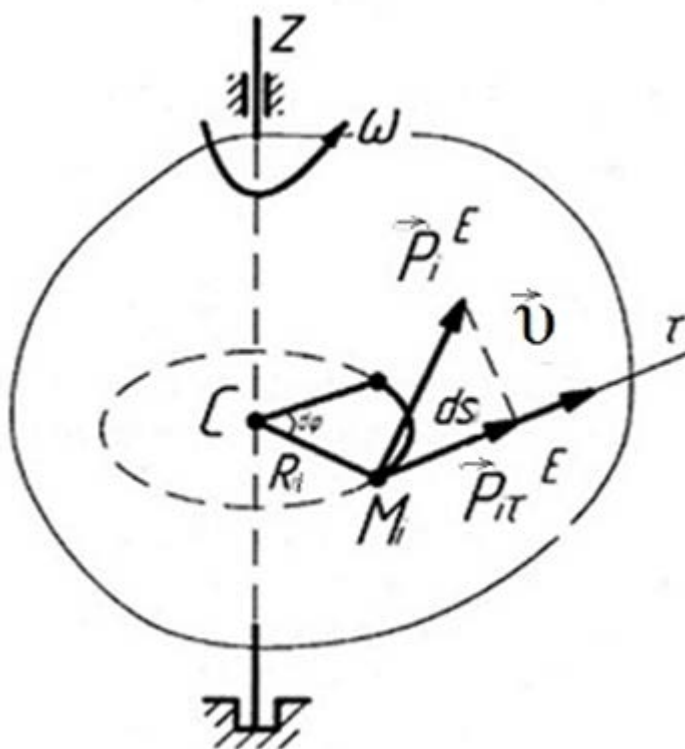


Рисунок 62

Знак работы момента определяется следующим образом:

Если момент способствует вращению тела в заданном направлении, то работа положительна, если препятствует вращению, то работа отрицательна (рис. 63).

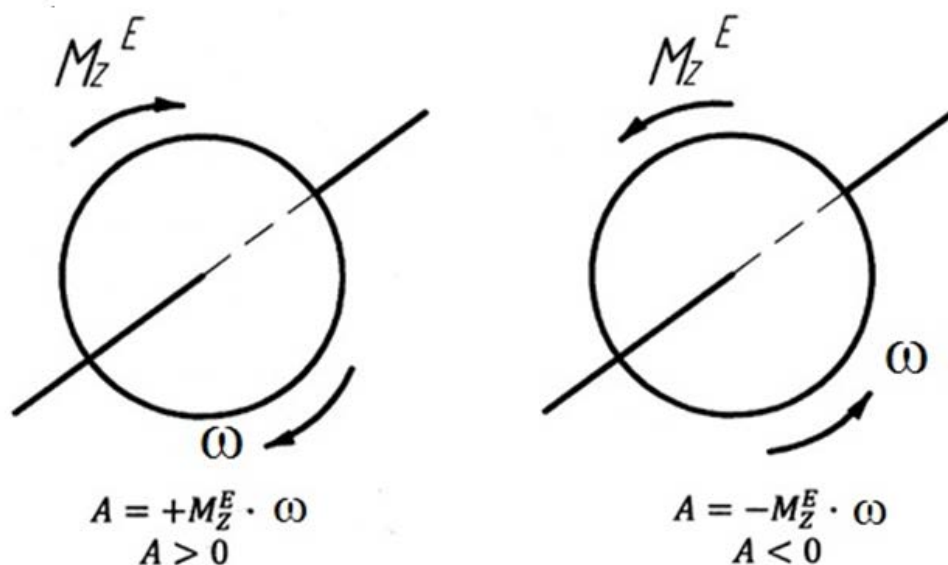


Рисунок 63

Мощность силы при вращательном движении тела:

$$N = \frac{\delta A}{dt} M_z^E \frac{d\varphi}{dt} = M_z^E \cdot \omega. \quad (61)$$

Мощность внешних сил, приложенных к твердому телу при вращательном движении, равна произведению вращающего момента на угловую скорость тела.

Из формулы (61) следует, что при постоянной мощности вращающий момент будет тем больше, чем меньше угловая скорость тела.

Кинетическая энергия материальной точки и механической системы

Кинетическая энергия твердого тела

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{1}{2} m v^2.$$

Кинетической энергией механической системы называется скалярная величина, равная сумме кинетических энергий всех точек системы, т.е.:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2. \quad (62)$$

Кинетическая энергия есть мера механического движения, которая отражает способность механического движения превращаться в другую форму движения материи (в форму потенциальной энергии, теплоты,

электричества и т. д.).

Кинетическая энергия является величиной скалярной и всегда положительной, поэтому она не зависит от направления движения точки или системы.

Размерность кинетической энергии соответствует размерности работы, т. е. в системе «СИ» – Дж.

Очень часто механическая система представляет твердое тело или совокупность твердых тел. Поэтому нужно уметь определять кинетическую энергию твердого тела при различных видах его движения.

Найдем формулы для вычисления кинетической энергии при важнейших видах движения твердого тела.

Поступательное движение тела

При поступательном движении тела скорости всех его точек в каждый момент времени геометрически равны скорости центра масс тела. В этом случае для любой точки тела формула (62) дает:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C,$$

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \cdot v_C^2 = \frac{v_C^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i = \frac{m v_C^2}{2}.$$

Следовательно, кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости его центра масс.

Таким образом, кинетическая энергия тела при поступательном движении вычисляется как кинетическая энергия материальной точки, имеющей массу этого тела.

Вращательное движение тела

Скорость любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис. 64), определяется выражением:

$$\vec{v}_i = \omega \cdot \vec{r}_i.$$

Кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}. \quad (63)$$

Сравнивая формулы (62) и (63), можно заметить, что при вращательном

движении тела его момент инерции играет такую же роль, как его масса при поступательном движении, а угловая скорость вращения играет роль скорости при поступательном движении.

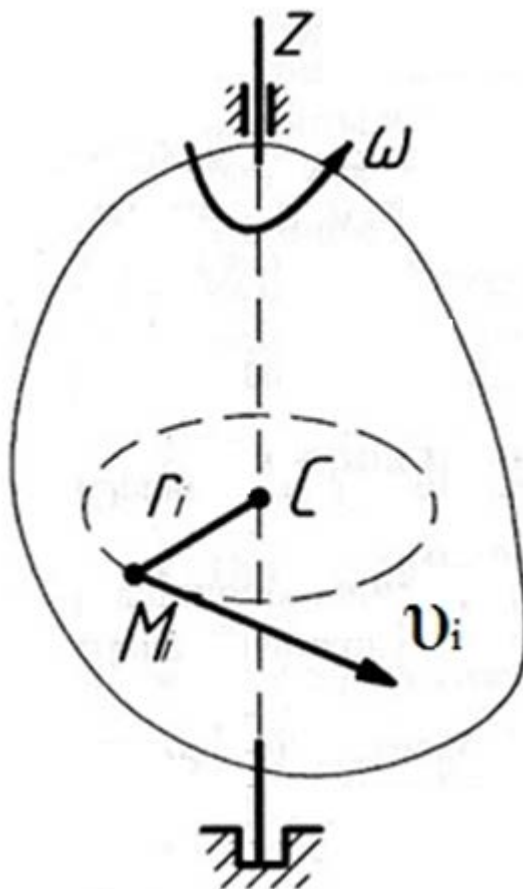


Рисунок 64

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Динамика системы»

1. Как выражается кинетическая энергия твердого тела при поступательном, вращательном и плоском движениях?
2. Как вычислить момент инерции механической системы относительно параллельной оси, если известен момент инерции этой системы относительно оси, проходящей через ее центр масс?
3. Какая зависимость между моментами инерции тела относительно параллельных осей?
4. Как вычисляются вектор количества движения системы через массу системы и скорости ее центра масс?
5. Как вычисляются осевые моменты инерции механической системы? Что они характеризуют?

6. Как вычисляются центробежные моменты инерции механической системы? Что они характеризуют?
7. Как вычисляется работа потенциальных сил на конечном перемещении точки?
8. Как вычисляется работа вращающего момента?
9. Как вычисляется работа момента сопротивления качению?
10. Как вычисляется работа силы упругости?
11. Что такое мощность сил?
12. Как вычисляется элементарная и полная работа переменной по величине и направлению силы на криволинейном участке траектории?
13. Как вычисляются моменты инерции однородных тел относительно осей, проходящих через центр тяжести и являющихся осями симметрии?
14. Как записывается дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси?
15. Что называется кинетической энергией механической системы?
16. Чему равна работа сил тяжести и упругости?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное учебное пособие должно помочь студенту не только освоить лекционный материал, но и самостоятельно изучить разделы дисциплины, отвечая на предложенные в конце каждого раздела контрольные вопросы. Самостоятельная подготовка состоит не только в ответах на контрольные вопросы, но и в изучении предлагаемой в настоящем пособии литературы по дисциплине «Теоретическая механика».

Методами теоретической механики решается большой круг задач из различных областей науки и техники. Приобретенные знания и компетенции служат прочной основой для освоения последующих дисциплин, таких как «Сопротивление материалов», «Теория механизмов и машин», «Детали машин». Понимание законов механики необходимо для решения широкого круга практических задач.

Теоретические знания, приобретенные при изучении данного учебного пособия, должны стать необходимой частью подготовки будущих технических специалистов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Теоретическая механика : учебник / А. Я. Корнилов, А. В. Воробьева, С. К. Иванов, А. В. Лановая. – Москва : Юриспруденция, 2024. – 248 с. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/147352.html> (дата обращения: 13.01.2025).
2. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. 1, 2. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – СПб.: Политехника, 2009. – Текст: непосредственный.
3. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2009. – 732 с. – Текст: непосредственный.
4. Маркеев, А. П. Теоретическая механика: учебник для университетов / А. П. Маркеев. – Москва: ЧеРо, 1999. – 572 с. – Текст: непосредственный.
5. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики / Н. Н. Никитин. – М.: Высшая школа, 2011. – 720 с. – Текст: непосредственный.
6. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М.: Наука, 2009. – 416 с. – Текст: непосредственный.
7. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. Ч. 1, 2 / А. А. Яблонский. – СПб.: Лань, 2010. – Текст: непосредственный.

Учебное издание

**Кауров Павел Викторович
Головко Виктор Евгеньевич
Клюшкин Иван Владимирович**

Теоретическая механика

Учебное пособие

Редактор и корректор А. А. Чернышева
Техн. редактор М. Д. Баранова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 04.12.2025 г. Рег. № 5203/25

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.