

П. В. Кауров

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2025**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики**

П. В. Кауров

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2025

УДК 539.3 (075)
ББК 22.251я7
К 301

Рецензенты:

кандидат химических наук, доцент, заведующий кафедрой материаловедения и технологии машиностроения Высшей школы технологии и энергетики
Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна
А. Н. Евдокимов;
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математических методов в управлении
Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета им. С. М. Кирова
Б. М. Шифрин

Кауров, П. В.

К 301 Сопротивление материалов: учебное пособие / П. В. Кауров. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2025. — 96 с.
ISBN 978-5-91646-460-3

Учебное пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Сопротивление материалов» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование».

Учебное пособие содержит общие сведения по теории дисциплины «Сопротивление материалов». Представлен порядок самостоятельного расчета элементов конструкций на прочность и жесткость.

Учебное пособие предназначено для бакалавров очной и заочной форм обучения.

УДК 539.3 (075)
ББК 22.251я7

ISBN 978-5-91646-460-3

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2025
© Кауров П. В., 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
Реальный объект и расчетная схема.....	6
Основные гипотезы сопротивления материалов	6
Упрощения в геометрии реального объекта.....	7
Классификация внешних сил	10
Опоры и реакции	12
Метод сечений для определения внутренних усилий	13
Понятие о напряжениях.....	15
Связь напряжений с внутренними силовыми факторами.....	17
Правило знаков для напряжений	18
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Введение».....	18
ПРОДОЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ	19
Расчет на прочность при растяжении и сжатии	21
Деформации при растяжении и сжатии	22
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Продольная деформация»	24
МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ	25
Испытания материалов на растяжение	25
Испытания материалов на сжатие	29
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Механические свойства материалов»	31
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ	32
Статические моменты площади и центр тяжести сечения	33
Осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения.....	36
Зависимости между моментами инерции сечения относительно параллельных осей	40
Моменты сопротивления и радиусы инерции сечения	41
Изменение моментов инерции при повороте осей координат	43
Главные оси и главные моменты инерции	44
Геометрические характеристики простейших фигур.....	46
Стандартные прокатные профили	50
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Геометрические характеристики поперечных сечений»	55
ЧИСТЫЙ СДВИГ	56
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Чистый сдвиг»	56
КРУЧЕНИЕ	57
Напряжения в поперечном сечении при кручении.....	58
Условие прочности при кручении вала	61

Рациональная форма сечения вала	61
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Кручение»	62
ПЛОСКИЙ ИЗГИБ	63
Прямой чистый изгиб	63
Напряжение при чистом изгибе.....	65
Условие прочности при чистом изгибе.....	67
Напряжения при поперечном изгибе	67
Полная проверка прочности балки.....	69
Рациональные формы сечений балок.....	69
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Плоский изгиб»	71
СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ	72
Степень статической неопределимости.....	72
Основная система метода сил	74
Канонические уравнения метода сил	75
Построение расчетных эпюр.....	76
Определение перемещений	76
Определение величин «лишних» неизвестных и построение эпюр внутренних силовых факторов	79
Учет симметрии при расчете статически неопределимых рам	80
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Статически неопределимые системы».....	81
СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ	82
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Сложное сопротивление»	86
ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА	87
Напряжения при ударе.....	87
Напряжения в движущихся деталях.....	89
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Динамическая нагрузка»	90
УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ	91
Понятие об устойчивости.....	91
Критическая сила	91
Границы применимости формулы Эйлера	92
Коэффициент запаса устойчивости.....	93
Практические расчеты на устойчивость	93
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Устойчивость равновесия деформируемых систем».....	94
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	95
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	96

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов – раздел механики твердого тела, изучающий напряжения и деформации, которые обусловлены силами, действующими на твердые тела – элементы конструкции. Эту дисциплину можно характеризовать и как науку о методах расчета элементов конструкции на прочность, жесткость и устойчивость. Методами сопротивления материалов ведутся практические расчеты и определяются необходимые, как говорят, надежные размеры деталей машин, различных конструкций и сооружений.

Все современные конструкции, машины, приборы и сооружения изготавливают или строят по заранее разработанным проектам.

Проект – это чертеж или ряд чертежей и технических рисунков, в которых указываются все размеры элементов конструкций и деталей машин, необходимых для изготовления, их материалы, а также приводится описание технологии. Таким образом, еще в процессе проектирования необходимо уметь определять размеры элементов и деталей, входящих в состав сооружений или машин. Эти размеры зависят от ряда условий и обстоятельств, в том числе от свойств материала изделия и от предполагаемых на него внешних воздействий.

Любая конструкция должна обладать надежностью при эксплуатации и быть экономичной.

Надежность конструкции обеспечивается, если она сохраняет прочность, жесткость и устойчивость при гарантированной долговечности.

Экономичность в значительной мере определяется расходом материала, применением менее дефицитных конструкционных материалов, возможностью изготовления деталей по наиболее прогрессивным технологиям.

Надежность и экономичность – противоречивые требования.

Прочность – это способность конструкции сопротивляться разрушению при действии на нее внешних сил (нагрузок).

Жесткость – способность элемента конструкции сопротивляться деформации.

Устойчивость – свойство системы сохранять свое начальное равновесие при внешних воздействиях.

Долговечность – конструкция состоит в ее способности сохранять необходимые для эксплуатации свойства в течение заранее предусмотренного отрезка времени.

Таким образом, основная задача сопротивления материалов состоит в разработке инженерных методов конструирования и расчета наиболее типичных элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при заданной долговечности, одновременно обеспечивающих экономичность.

В сопротивлении материалов широко применяются методы теоретической механики и математического анализа, используются данные из разделов физики, изучающих свойства различных материалов, материаловедения и других наук.

Основные понятия сопротивления материалов опираются на законы и теоремы общей механики и в первую очередь на законы статики, без знания

которых изучение данного предмета становится практически невозможным.

В отличие от теоретической механики сопротивление материалов рассматривает задачи, где наиболее существенными являются свойства деформируемых тел, а законы движения тела, как жесткого целого, не только отступают на второй план, но в ряде случаев являются попросту несущественными.

Сопротивление материалов имеет целью создать практически приемлемые простые приемы расчета типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций. Необходимость довести решение каждой практической задачи до некоторого числового результата заставляет в ряде случаев прибегать к упрощающим гипотезам – предположениям, которые оправдываются в дальнейшем путем сопоставления расчетных данных с экспериментом.

Сопротивление материалов является наукой экспериментально-теоретической, так как она широко использует опытные данные и теоретические исследования.

Реальный объект и расчетная схема

В сопротивлении материалов, как и во всякой отрасли естествознания, исследование вопроса о надежности реального объекта начинается с выбора расчетной схемы. Приступая к расчету элемента конструкции, следует, прежде всего, установить, что в данном случае является существенным и что несущественным; необходимо провести схематизацию объекта и отбросить все те факторы, которые не могут сколько-нибудь занятым образом повлиять на работу системы в целом. Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, называется *расчетной схемой*. Выбор расчетной схемы начинается с принятия основных гипотез, которым отвечает материал и конструкция.

Основные гипотезы сопротивления материалов

Предполагается, что все *материалы* обладают такими свойствами, что могут считаться:

Однородными. Под однородностью понимается одинаковость свойств во всех точках тела. Экспериментально доказано, что материал имеет неоднородную, дискретную структуру. Вместе с тем, реальные тела можно рассматривать как однородные в среднем, когда объем элемента тела намного превосходит объем структурных единиц, его составляющих (атомов, молекул, зерен).

Сплошными. Понятие *сплошности*, как среды, непрерывно заполняющей отведенный ей объем, следует из понятия однородности, что в свою очередь

позволяет применить к этой среде анализ бесконечно малых величин.

Изотропными. Сплошная среда принимается изотропной, т. е. обладающей во всех направлениях одинаковыми свойствами. Анизотропными называются материалы, свойства которых в разных направлениях различны (например, древесина).

Деформируемыми. Если в теоретической механике тела считаются абсолютно жесткими, то в сопротивлении материалов тела обладают способностью *деформироваться*, т. е. под действием внешней нагрузки изменять свои начальные размеры и форму. Деформации материала в каждой точке *прямо пропорциональны* действующим в этой точке напряжениям (т. е. подчиняются закону Гука). Они считаются *малыми*, относительно его размеров и можно не учитывать их влияние на взаимное расположение нагрузок и расстояния от нагрузок до любых точек тела (расчет по недеформированной схеме).

Упругими. *Упругостью* называется свойство тел восстанавливать свои первоначальные форму и размеры после снятия нагрузки.

Помимо рассмотренных выше допущений в сопротивлении материалов вводится ряд гипотез, позволяющих значительно упростить расчет.

Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции): результат совместного воздействия нескольких сил равен сумме (алгебраической или геометрической) результатов воздействия каждой из них в отдельности.

Принцип Сен-Венана (принцип локальности): на достаточном удалении от места приложения нагрузки конкретный способ осуществления этой нагрузки можно не учитывать.

Гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений): поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к оси стержня до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и нормальными к его оси при действии нагрузки.

Упрощения в геометрии реального объекта

В сопротивлении материалов все элементы конструкций условно делятся на три типа: стержень, оболочка, массив.

Стержнем называется элемент, длина которого значительно больше его поперечных размеров. Например, для бруса прямоугольного сечения (рис. 1) $L \gg b$, $L \gg h$. Геометрическое место точек, совпадающих с центрами тяжести площадей поперечных сечений стержня, называется осью стержня.

Брус, работающий при растяжении, называется *стержнем*, при изгибе – *балкой*, при кручении – *валом*.

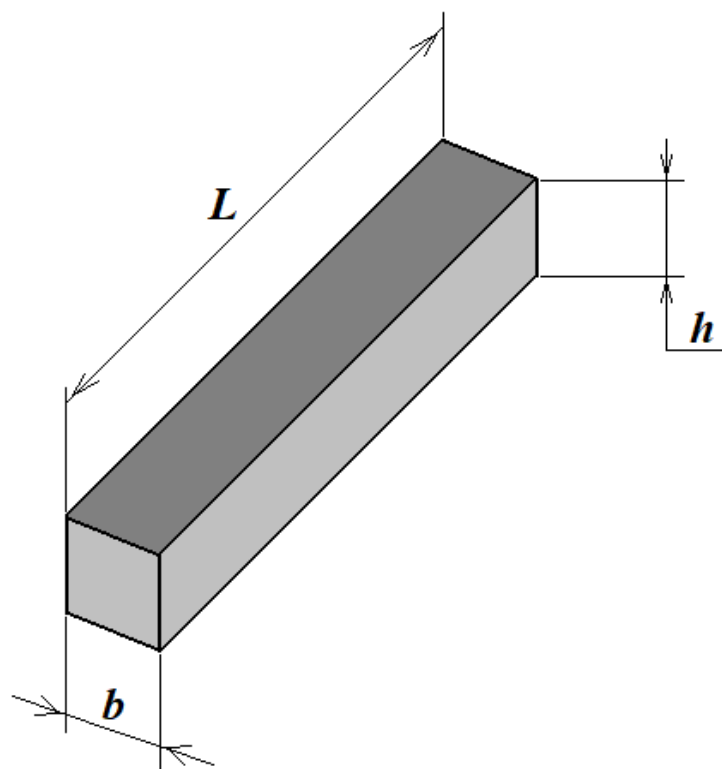


Рисунок 1

Элемент конструкции, образованный двумя поверхностями, отстоящими друг от друга на малое расстояние h , называется *оболочкой*.

На рисунке 2 представлена панель оболочки. Оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость, называется *пластиной* (рис. 3).

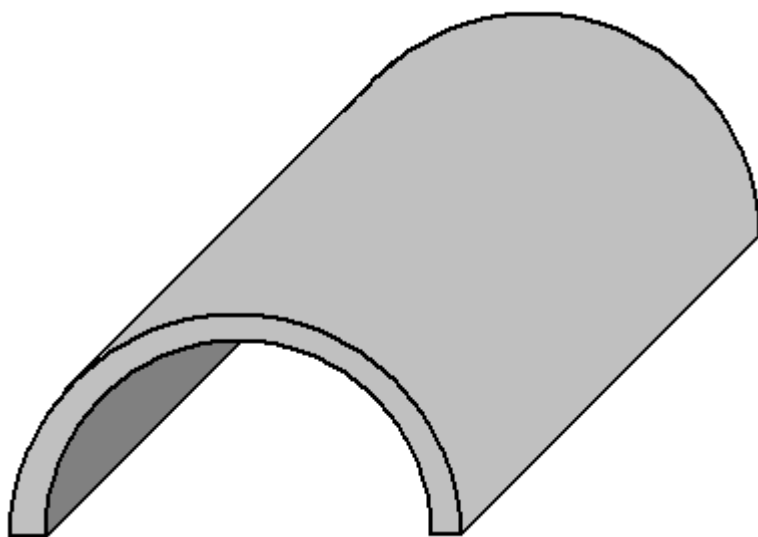


Рисунок 2

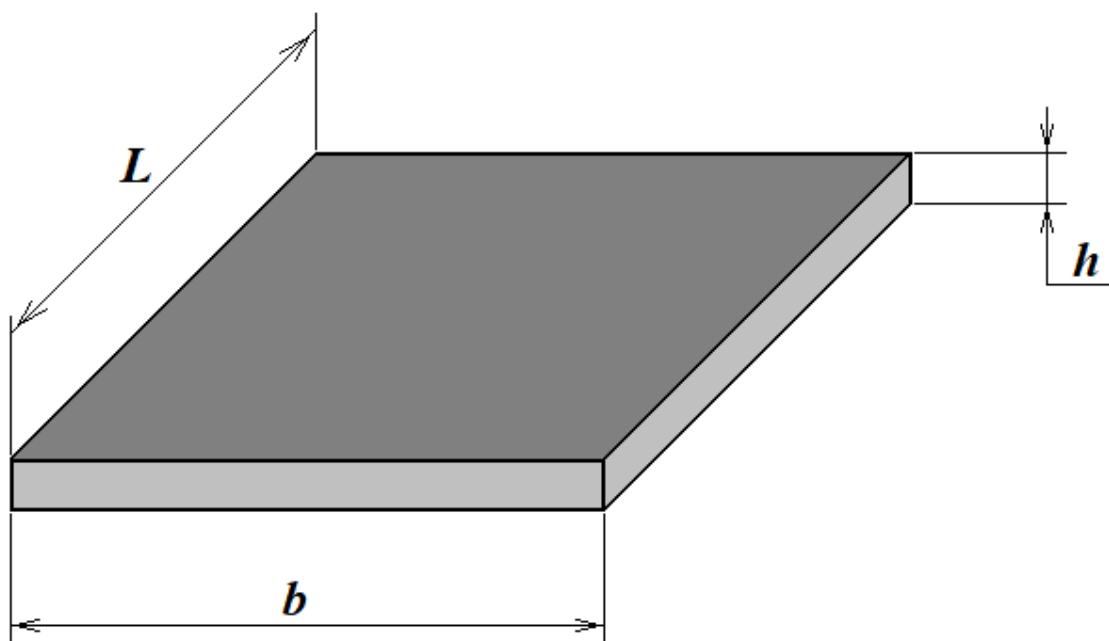


Рисунок 3

Элемент конструкции, размеры которого во всех направлениях мало отличаются друг от друга, называется **массивом** (рис. 4).

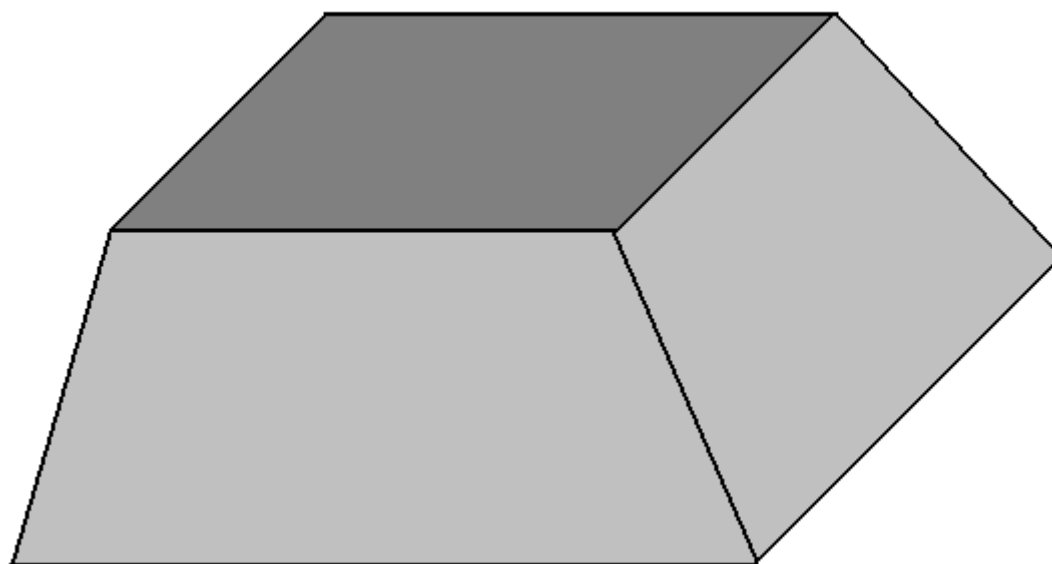


Рисунок 4

Классификация внешних сил

Силы являются мерилем механического взаимодействия тел. По отношению к выбранному материальному телу (элементу конструкции) все действующие силы подразделяются на внешние и внутренние силы. Под **внешними силами (нагрузками)** понимаются силы взаимодействия данного материального тела со всеми другими окружающими его телами.

Взаимодействие между частями рассматриваемого тела характеризуется **внутренними силами**, которые возникают внутри тела под действием внешних нагрузок и определяются силами межмолекулярного воздействия. Эти силы сопротивляются стремлению внешних сил разрушить элемент конструкции, изменить его форму, отделить одну часть от другой. Вообще внутренние силы возникают между всеми смежными частицами тела при нагружении.

Понятно, что деление сил (нагрузок) на внешние и внутренние силы является условным. Одна и та же сила может быть и внутренней и внешней, все зависит от выбора объекта исследования. В сопротивлении материалов считается, что если нет внешних сил, то отсутствуют и внутренние, то есть, справедлива гипотеза о ненапряженном начальном состоянии тела.

Если конструкция рассматривается изолированно от окружающих тел, то действие последних на нее заменяется силами, которые называются **внешними**. Под внешними силами понимаются силы, возникающие в результате взаимодействия рассматриваемого тела с окружающими телами. Внешние силы, действующие на тело, можно разделить на **активные** (независимые) и **реактивные**. Реактивные усилия возникают в связях, наложенных на тело, и определяются действующими на тело активными усилиями.

По месту расположения точек приложения различают объемные и поверхностные силы.

Объемные силы непрерывно распределены по всему объему, занятому телом (вес, силы инерции, магнитные силы и т. п.).

Объемные силы распределены по всему объему рассматриваемого тела и приложены к каждой его частице. В частности, к объемным силам относятся собственный вес сооружения, магнитное притяжение, сила тяжести или силы инерции. Размерность объемных сил Н/м^3 .

Поверхностные силы приложены к участкам поверхности и являются результатом непосредственного контактного взаимодействия рассматриваемого объекта с окружающими телами (давление ветра, воды на стенку). Интенсивность поверхностных сил имеет размерность Н/м^2 .

В зависимости от соотношения площади приложения нагрузки и общей площади поверхности рассматриваемого тела, поверхностные нагрузки подразделяются на **распределенные** и **сосредоточенные**.

Иногда тела соприкасаются по очень узкой, но длинной площадке (например, цилиндр и плоскость). В этом случае можно считать, что поверхностная нагрузка действует по линии или распределена по линии, (**погонная распределенная нагрузка**; размерность Н/м). Примером может

служить собственный вес балки, действие снеговой или ветровой нагрузки на сооружение, давление жидкости в резервуаре. Распределенная нагрузка может действовать и по линии как, например, при соприкосании двух цилиндров при параллельном расположении их осей.

Нагрузки, распределенные по линии и сосредоточенные в точках, реально не существуют. Их можно получить лишь в результате схематизации реальных нагрузок, распределенных по объему (объемных сил) и по поверхности.

Распределенные силы приложены значительным участкам поверхности (например, давление пара в паропроводе, трубопроводе, котле, давление воздуха на крыло самолета).

Соприкосновение тела всегда происходит не в точке, а по некоторой площадке, так как тела деформируются. Поэтому сосредоточенных сил в природе не существует, и все поверхностные силы являются распределенными. Но в тех случаях, когда площадка, на которой действует нагрузка, очень мала по сравнению с размерами тела, будем говорить о *сосредоточенной силе*, как о равнодействующей сил, (размерность Н). Сосредоточенные силы – силы, действующие на небольших участках поверхности детали (например, давление шарика шарикоподшипника на вал, давление колеса на рельсы).

По характеру изменения силы во времени различают нагрузки статические и динамические.

Статические нагрузки (постоянные) – такие, которые изменяют свою величину или точку приложения (направление) с очень небольшой скоростью, так что возникающими при этом ускорениями (силами инерции) можно пренебречь.

Статические нагрузки (постоянные) – такие, которые изменяют свою величину или точку приложения (направление) с очень небольшой скоростью, так что возникающими при этом ускорениями (силами инерции) можно пренебречь. Собственный вес зданий – это постоянно действующая нагрузка на протяжении всего периода эксплуатации здания.

Динамические нагрузки (переменные) – изменяются во времени с большой скоростью, при этом силы инерции должны быть учтены, так как оказывают существенное влияние на конструкцию (например, ударные). Динамические нагрузки подразделяются на внезапно приложенные, повторно-переменные и ударные. Примером внезапно приложенной нагрузки может служить действие веса железнодорожного состава, проходящего через мост; повторно-переменной – нагрузка на шатун в двигателе внутреннего сгорания; ударной – действие силы удара молота на его фундамент или гидравлический удар в гидросистеме. Ударные нагрузки возникают также в случае плохой пригонки или износа сопряженных деталей, когда зазоры превышают величину, допустимую по конструктивным и технологическим условиям. Например, при износе зубьев шестерен или деталей шариковых подшипников в машине возникают характерные стуки, свидетельствующие о возникновении ударных нагрузок, быстро приводящих к выходу конструкции из строя.

Динамические нагрузки также подразделяются на *периодические и случайные нагрузки*. К случайным нагрузкам относятся нагрузки, действующие

на детали автомобилей, тракторов, станков, а также нагрузки, действующие на сооружения (дома, мачты, краны и т. п.) от давления ветра, снега и т. п.

Временная нагрузка может сохранять более или менее постоянную величину в течение всего периода ее действия, а может непрерывно изменяться по некоторому закону; в последнем случае она называется **переменной нагрузкой**.

В машиностроении расчетные нагрузки определяются в зависимости от конкретных условий работы машины: по номинальным значениям мощности, угловой скорости отдельных ее деталей, силы тяжести, сил инерции и т. п.

Опоры и реакции

Все опорные устройства условно делятся на три основных типа (рис. 5):

Неподвижная шарнирная опора A : такая опора допускает вращение конца стержня, но устраняет поступательное движение ее в любом направлении. Возникающую в ней реакцию можно разложить на две составляющие, одна из которых направлена вдоль оси бруса (X_A), другая – перпендикулярно к оси стержня (Y_A).

Подвижная шарнирная опора B : такая опора не препятствует вращению конца стержня и его перемещению вдоль плоскости качения. В ней может возникнуть только одна реакция, которая перпендикулярна плоскости качения и проходит через ось катка (Y_B).

Жесткая заделка или защемление C : такое закрепление не допускает ни линейных, ни угловых перемещений опорного сечения. В этой опоре в общем случае может возникать реакция, которую обычно раскладывают на две составляющие (X_C и Y_C) и момент защемления (M_C).

При рассмотрении реального объекта в число внешних сил включаются не только заданные нагрузки, но и реакции связей (опор), дополняющие систему сил до равновесного состояния.

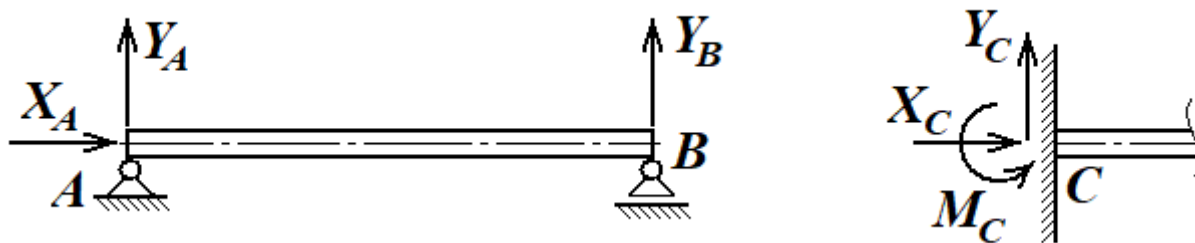


Рисунок 5

Метод сечений для определения внутренних усилий

Внутри любого материала имеются внутренние межатомные силы. Приложение к телу внешней нагрузки вызывает изменение (увеличение или уменьшение) их, т. е. появление дополнительных внутренних сил. Дополнительные силы взаимодействия, возникающие внутри объекта под действием внешних сил, называются в сопротивлении материалов внутренними силами. Для определения внутренних усилий используется **метод сечений**. Сущность метода заключается в следующем. Пусть некоторое тело находится в равновесии под действием системы внешних сил (рис. 6).

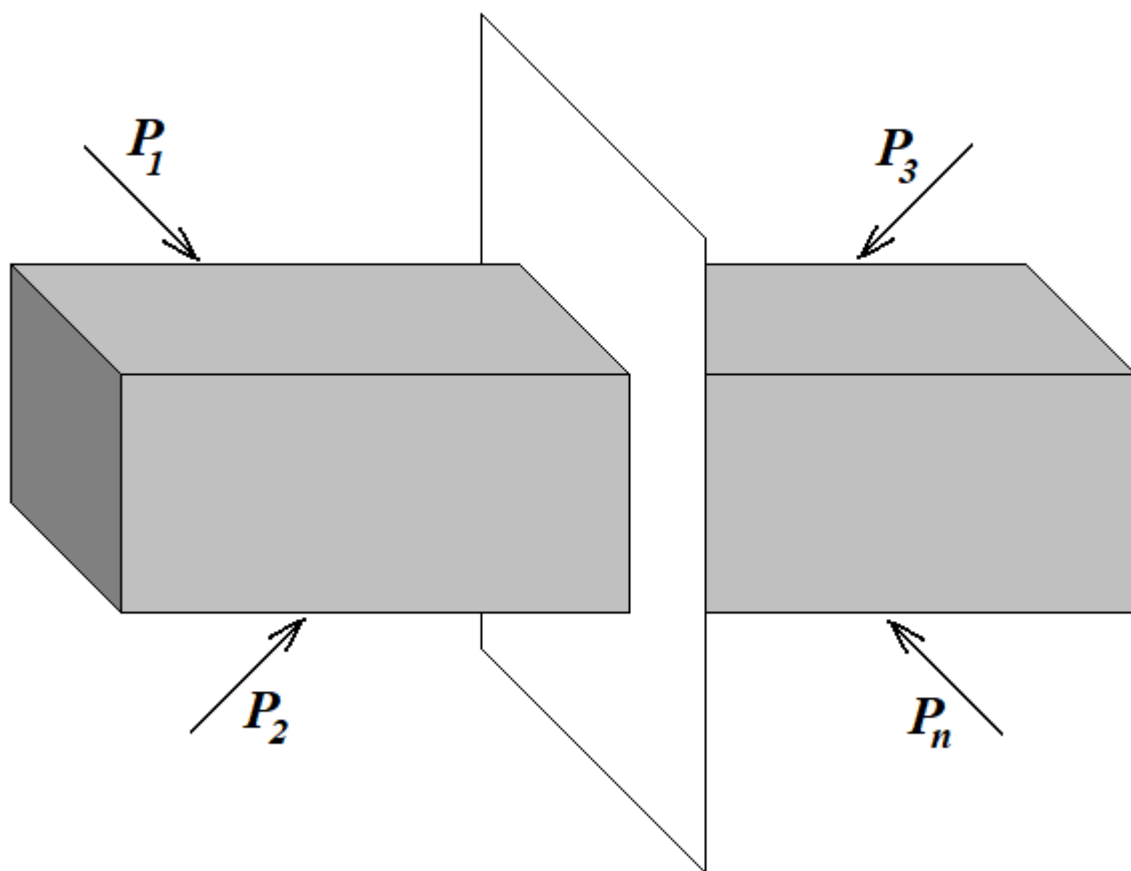


Рисунок 6

Рассечем (мысленно) тело на две части плоскостью, перпендикулярной продольной оси тела (поперечным сечением). **Отбросим** правую или левую часть тела. Чтобы оставшаяся часть находилась в равновесии, по плоскости сечения должны действовать внутренние силы. **Заменим** действие одной части на другую внутренними силами (рис. 7). Эти внутренние силы по характеру приложения – распределенные, в общем случае они не одинаковы по всему сечению. Внутренние силы могут быть приведены к их равнодействующим: главному вектору – R и главному моменту – M .

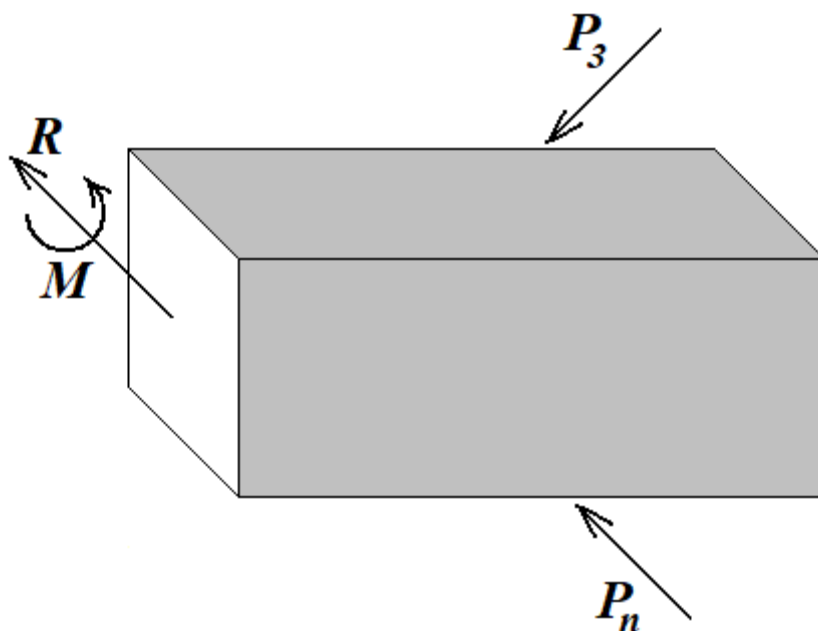


Рисунок 7

Рассмотрим правую часть. Введем ортогональную систему координат с началом в точке O , причем ось x пусть совпадает с продольной осью тела, а оси z и y – с главными центральными осями инерции поперечного сечения. Разложим главный вектор R и момент M по осям (рис. 8). Получим шесть составляющих, которые называются **внутренними силовыми факторами** (В.С.Ф.):

N – продольная (нормальная) сила, проекция вектора R на ось x ;

Q_y, Q_z – поперечные силы, проекции вектора R на оси y и z , соответственно;

T – крутящий момент, составляющая момента M вокруг оси x ;

M_y, M_z – изгибающие моменты, составляющие момента M вокруг осей y и z , соответственно.

Уравновесим отсеченную часть. Так как отсеченная часть тела находится в равновесии, то для определения шести неизвестных В.С.Ф. составим шесть уравнений статического равновесия:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum Z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sum m_{ox} = 0; \\ \sum m_{oy} = 0; \\ \sum m_{oz} = 0, \end{cases}$$

из которых поочередно определяются все В.С.Ф.:

$N = \sum P_{ix}$ – **нормальная сила**, равная сумме проекций всех внешних сил, действующих на отсеченную часть, на продольную ось x ;

$Q_y = \sum P_{iy}; Q_z = \sum P_{iz}$ – **поперечные силы**, равные по величине суммам проекций всех внешних сил, действующих на отсеченную часть, относительно осей y и z соответственно;

$T = \sum m_{ix}$ – **крутящий момент**, равный сумме внешних моментов,

действующих на отсеченную часть, относительно оси x ;

$M_y = \sum m_{iy}$; $M_z = \sum m_{iz}$ – **изгибающие моменты**, равные суммам внешних моментов, действующих на отсеченную часть, относительно осей y и z соответственно.

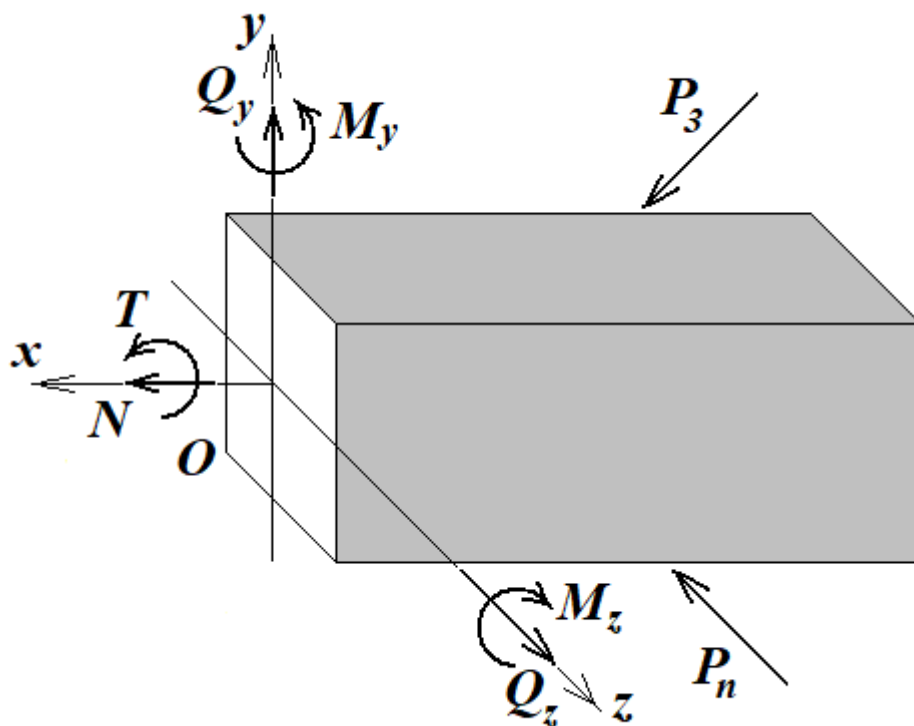


Рисунок 8

Для наглядного представления о характере работы конструкции строят графики изменения В.С.Ф. по длине стержня (вдоль оси продольной x). Такой график принято называть **эпюрой** (от французского слова *épure* – чертеж).

Понятие о напряжениях

Используя метод сечений, мы определяем во всех случаях внутренние усилия в виде сосредоточенных равнодействующих сил и моментов. В действительности внутренние усилия по характеру приложения являются распределенными и в общем случае они не одинаковы по поперечному сечению.

Рассмотрим правую часть тела (рис. 9). Выделим на плоскости сечения площадку ΔA ; по этой площадке будет действовать внутренняя сила ΔR .

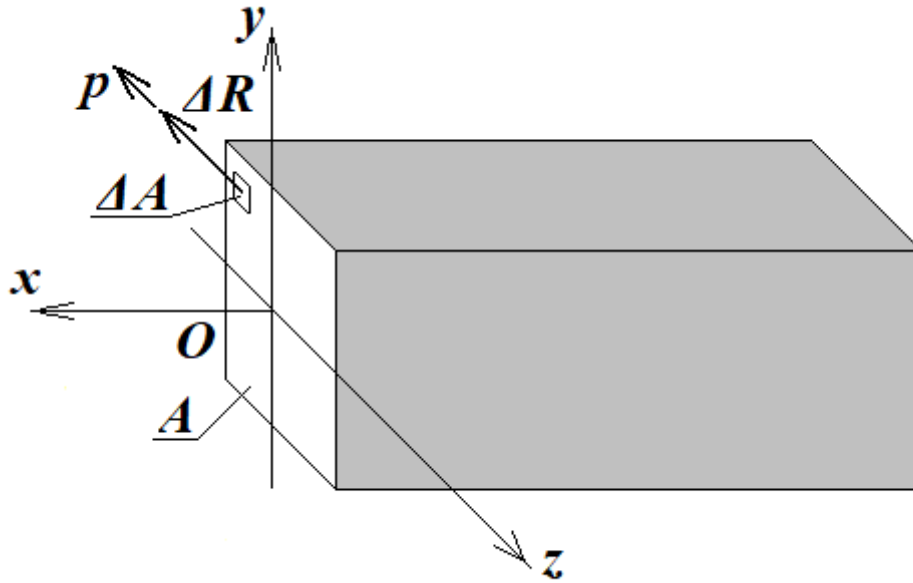


Рисунок 9

Величина отношения $\frac{\Delta R}{\Delta A} = p_{cp}$ называется средним напряжением на площадке ΔA . Истинное напряжение в точке A получим, устремив ΔA к нулю:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A} = \frac{dR}{dA}.$$

Это напряжение называется **полным напряжением** в данной точке и в общем случае оно направлено под некоторым углом α к плоскости сечения.

Спроектировав полное напряжение на внешнюю нормаль $\mathbf{n}$ к сечению (рис. 10), получим **нормальное напряжение** в точке A :

$$\sigma = p \cdot \cos \alpha$$

проекция полного напряжения на плоскость сечения даст **касательное напряжение** в точке A :

$$\tau = p \cdot \sin \alpha,$$

где α – угол между направлением $\mathbf{p}$ и внешней нормалью $\mathbf{n}$ (для поперечного сечения направление внешней нормали совпадает с направлением оси x).

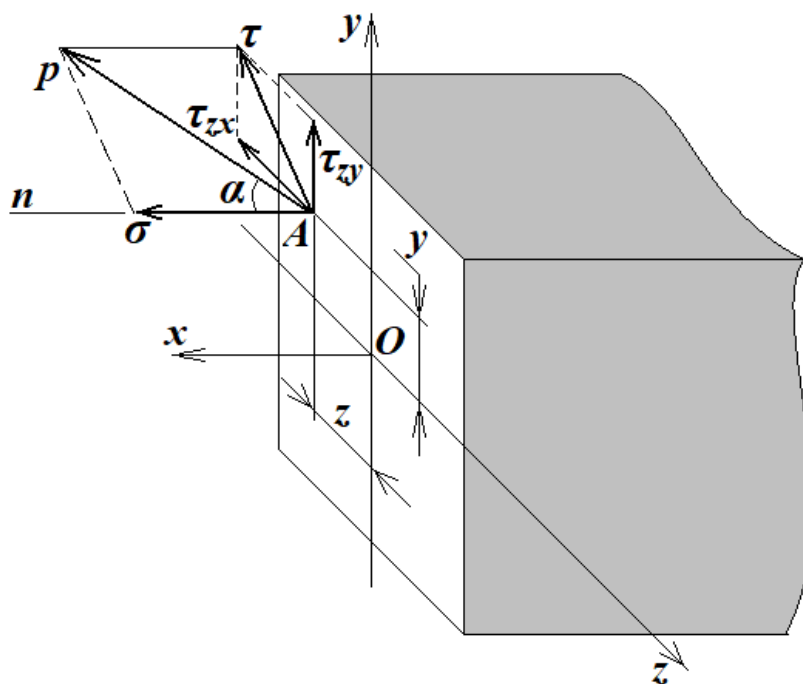


Рисунок 10

Нормальные напряжения возникают, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или, наоборот, сблизиться. Касательные напряжения связаны со сдвигом частиц по плоскости рассматриваемого сечения.

Очевидно, что

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Касательное напряжение в свою очередь может быть разложено на составляющие τ_{zx} и τ_{zy} по направлениям осей z и y . Размерность напряжений – $\text{Н/м}^2 = \text{Па}$.

Связь напряжений с внутренними силовыми факторами

Нормальные и касательные напряжения в каждом поперечном сечении тела связаны определенным образом с внутренними усилиями, действующими в этом сечении. Если рассмотреть элементарную площадку dA поперечного сечения A стержня с действующими по этой площадке напряжениями σ , τ_{zx} и τ_{zy} , то получим, что на площадку dA действуют элементарные силы $\sigma \cdot dA$, $\tau_{zx} \cdot dA$ и $\tau_{zy} \cdot dA$.

Тогда можно записать следующие интегральные зависимости:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA; & T &= \int_A (\tau_{zx}y - \tau_{zy}z) dA; \\ Q_y &= \int_A \tau_{zy} dA; & M_y &= \int_A \sigma_y z dA; \\ Q_z &= \int_A \tau_{zx} dA; & M_z &= \int_A \sigma_z y dA. \end{aligned}$$

Правило знаков для напряжений

Нормальное напряжение σ считается положительным, если совпадает по направлению с внешней нормалью n к площадке и отрицательным, если его направление обратно.

Касательные напряжения τ считаются положительными, если вектор касательных напряжений следует поворачивать против хода часовой стрелки до совпадения с внешней нормалью n и отрицательными – в противном случае (рис. 11).

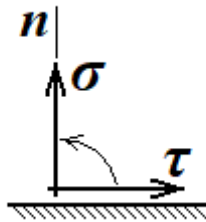


Рисунок 11

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Введение»

1. Какие допущения о свойствах материалов приняты в курсе сопротивления материалов?
2. Что понимается под сплошностью, однородностью и изотропностью?
3. В чем заключается принцип независимости действия сил?
4. Что называется расчетной схемой конструкции и чем она отличается от реального объекта?
5. Что понимается под стержнем, пластиной, оболочкой, массивом?
6. Каковы размерности сосредоточенных сил и моментов, а также интенсивностей распределенных нагрузок?
7. На каких гипотезах и допущениях основаны выводы расчетных зависимостей сопротивления материалов?

ПРОДОЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Продольной деформацией (осевым растяжением – сжатием) стержня называется вид нагружения, при котором равнодействующая внешних сил прикладывается в центре тяжести поперечного сечения и действует вдоль продольной оси.

Под **растяжением (сжатием)** понимают такой вид деформации стержня, при котором в его поперечном сечении возникает лишь один внутренний силовой фактор – продольная сила N .

Поскольку продольная сила численно равна сумме проекций, приложенных к одной из отсеченных частей, внешних сил на ось стержня (для прямолинейного стержня она совпадает в каждом сечении с осью x), то растяжение (сжатие) имеет место, если все внешние силы, действующие по одну сторону от данного поперечного сечения, сводятся к равнодействующей, направленной вдоль оси стержня (рис. 12).

Для того чтобы сформулировать предпосылки теории растяжения (сжатия) (призматического) стержня, обратимся к эксперименту. Представим себе стержень, изготовленный из какого-либо податливого материала (например, резины), на боковую поверхность которого нанесена система продольных и поперечных рисок (рис. 13). Эта ортогональная система рисок остается таковой и после приложения растягивающей нагрузки. Поскольку поперечные риски являются следами поперечных сечений на поверхности стержня и остаются прямыми и перпендикулярными к оси стержня, то это свидетельствует о выполнении **гипотезы плоских сечений Бернулли**. Деформация растяжения стержня сводится к одноосному растяжению его продольных волокон, и в поперечном сечении стержня возникают лишь нормальные напряжения σ (рис. 12). Ортогональность продольных и поперечных рисок свидетельствует также об отсутствии сдвигов, а следовательно, и связанных с ними касательных напряжений в поперечных и продольных сечениях стержня.

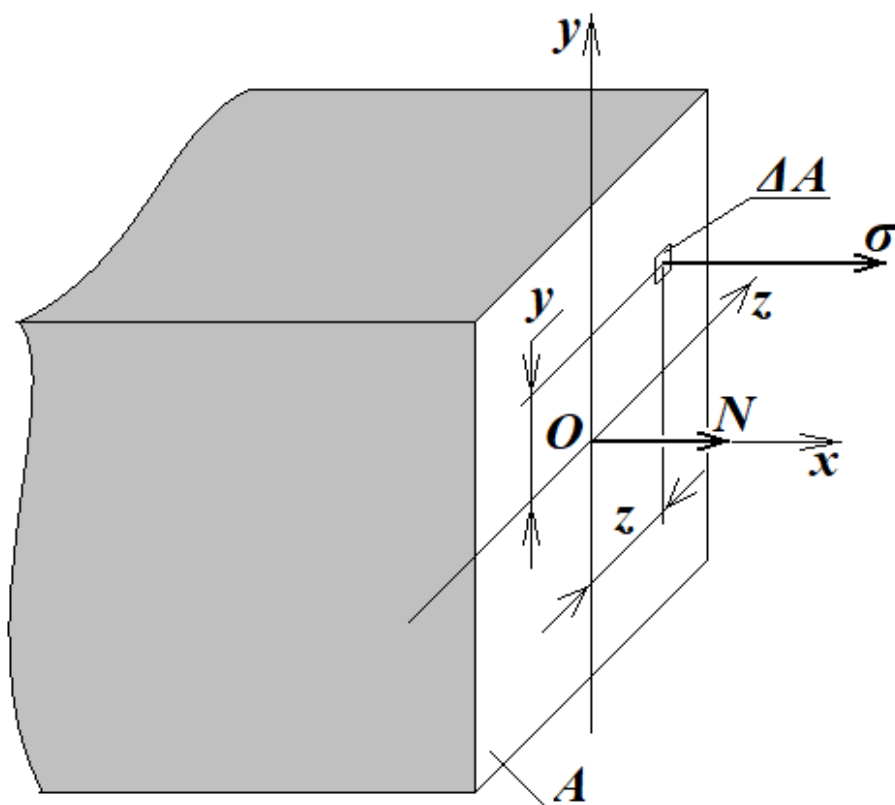


Рисунок 12

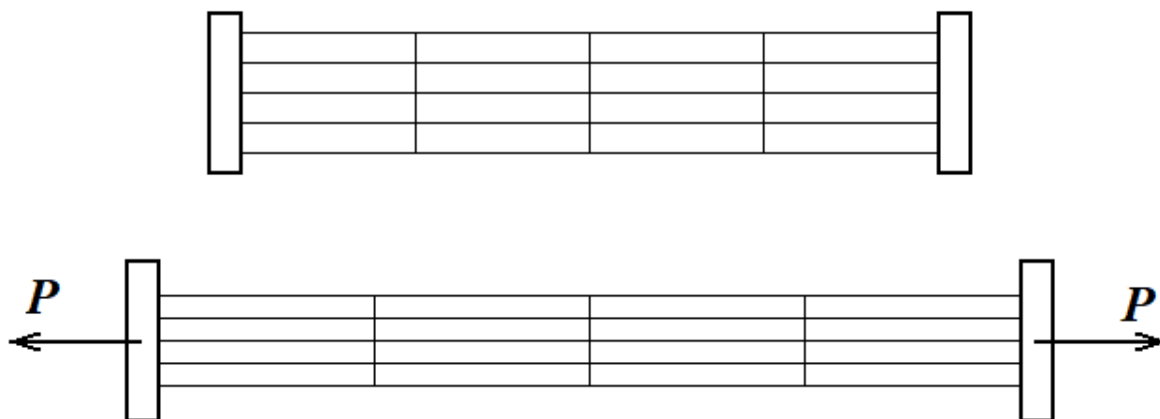


Рисунок 13

Продольная сила N равная сумме проекции внутренних сил, действующих в данном поперечном сечении площадью A (рис. 12), очевидно будет равна:

$$N = \int_A \sigma dA,$$

откуда получим, что $N = \sigma \cdot A$, или $\sigma = N / A$.

Таким образом, при растяжении (сжатии) призматического стержня нормальные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению, а касательные напряжения в сечениях отсутствуют, что является следствием гипотезы плоских сечений. Указанное, несмотря на, казалось бы, очевидность и простоту, является фундаментальным результатом, строго говоря, лишь для призматического стержня. Однако в инженерной практике его используют и для приближенной оценки нормальных напряжений в стержнях переменного сечения. При этом, чтобы погрешность формулы была невелика, необходимо, чтобы площадь поперечного сечения стержня изменялась достаточно плавно вдоль его оси.

Одна и та же продольная сила N при действии на различные части стержня (левую или правую) имеет противоположные направления. Знак N зависит от характера вызываемой ею деформации. Продольная сила считается положительной, если вызывает растяжение элемента, и она отрицательная, если вызывает сжатие (рис. 14).

Ее величина определяется методом сечений по участкам, границами которых являются места приложения внешних продольных сил, действующих на стержень.

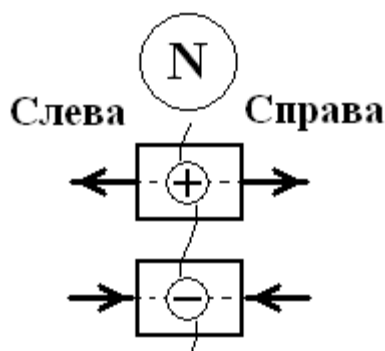


Рисунок 14

Расчет на прочность при растяжении и сжатии

Условие прочности при растяжении (сжатии) призматического стержня из пластического материала (т. е. материала, одинаково работающего на растяжение и сжатие) будет иметь вид:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение. Напряжение σ в условии прочности подставляется по модулю, так как знак σ в этом случае роли не играет. Для

стержней из хрупких материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, знак напряжения имеет принципиальное значение, и условие прочности приходится формулировать отдельно для растяжения и сжатия.

Условие прочности при растяжении или сжатии заключается в том, что наибольшее расчетное напряжение в элементе конструкции не должно превосходить допускаемого напряжения.

С использованием условия прочности выполняются три вида расчетов:

1. **Проверочный расчет** (проверка прочности). При заданных нагрузках и площади поперечного сечения A определяют расчетное напряжение и сравнивают его с допускаемым:

$$\sigma \leq [\sigma].$$

Превышение расчетного напряжения по сравнению с допускаемым не должно превышать 5 %, иначе прочность рассчитываемой детали считается недостаточной.

2. **Проектировочный расчет** (подбор сечения). По известным нагрузкам и допускаемому напряжению $[\sigma]$ определяют необходимые размеры поперечного сечения:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

Определение допускаемой нагрузки. По известным размерам и материалу детали определяют допускаемую нагрузку:

$$[N] \leq A \cdot [\sigma].$$

Деформации при растяжении и сжатии

Опыты показывают, что при растяжении длина стержня увеличивается, а поперечное сечение уменьшается (рис. 15), при сжатии наоборот.

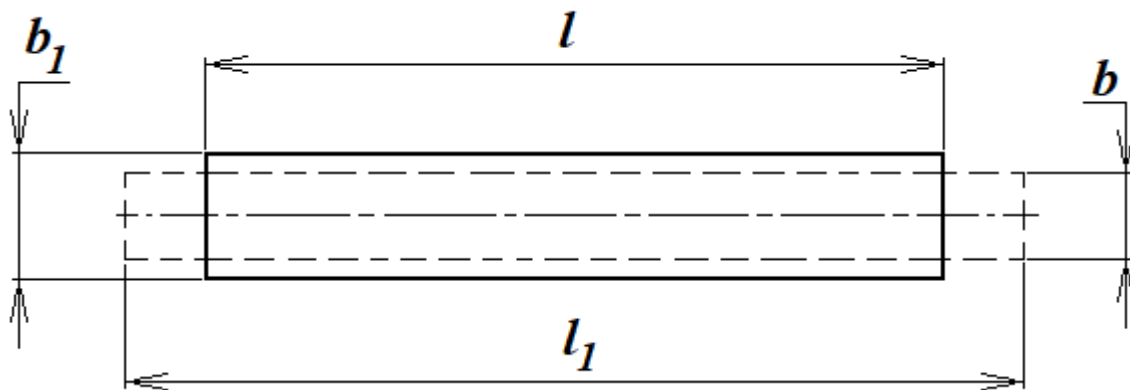


Рисунок 15

Абсолютная продольная деформация равна:

$$\Delta l = l_1 - l.$$

Абсолютная поперечная деформация равна:

$$\Delta b = b_1 - b.$$

Относительная продольная деформация ε равна:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Относительная поперечная деформация ε' равна:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b_1}.$$

В пределах малых удлинений для большинства материалов справедлив **закон Гука – нормальные напряжения в поперечном сечении прямо пропорциональны относительной продольной деформации:**

$$\sigma = E \cdot \varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности **E – модуль Юнга** (модуль продольной упругости) его величина постоянна для каждого материала. Он характеризует жесткость материала, т. е. способность сопротивляться деформации под действием внешней нагрузки.

Отношение относительной поперечной деформации ε' к относительной продольной деформации ε , взятое по модулю, называется коэффициентом поперечной деформации или **коэффициентом Пуассона:**

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|.$$

Эта величина ν является постоянной для каждого материала и определяется экспериментально.

Значения ν для различных материалов изменяются в пределах $0 \leq \nu \leq 0,5$ ($\nu = 0$ у пробки, $\nu = 0,5$ у резины).

Для большинства конструкционных материалов $\nu = 0,25 \dots 0,33$.

E и ν являются основными характеристиками упругости изотропного материала.

Так как $\varepsilon = \Delta l / l$, а $\sigma = N / A$, то подставляя в закон Гука $\sigma = E \cdot \varepsilon$ можно получить формулу для определения абсолютного удлинения (укорочения) стержня:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \leq [\Delta l].$$

Эта зависимость также выражает закон Гука.

Знаменатель **EA** называется **продольной жесткостью** или жесткостью при растяжении – сжатии.

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Продольная деформация»

1. Что понимается под растяжением-сжатием?
2. Какие случаи деформации бруса называются центральным растяжением или сжатием?
3. С помощью какого метода определяют внутренние силы при растяжении брусев?
4. Как можно нагрузить прямой брус, чтобы он работал только на растяжение (сжатие)?
5. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении стержня при его растяжении или сжатии?
6. Что называется полной (абсолютной) продольной деформацией?
7. Что представляет собой относительная продольная деформация?
8. Каковы размерности абсолютной и относительной продольной деформаций?
9. Что называется модулем Юнга? В каких единицах он измеряется?
10. Как формулируется закон Гука?
11. Что происходит с поперечными размерами бруса при его растяжении и сжатии?
12. Что называется коэффициентом Пуассона?

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

Испытания материалов на растяжение

При проектировании конструкций требуется знать параметры материалов, характеризующие их прочностные и деформационные свойства. Эти характеристики материалов обычно определяются путем экспериментальных исследований, проводимых на соответствующих испытательных машинах. Среди множества испытаний, которым могут подвергаться различные материалы, далее рассматриваются испытания пластичных и хрупких материалов на растяжение и сжатие.

Наибольшую информацию о механических свойствах материалов можно получить при их испытаниях на растяжение.

Например, для испытания на растяжение металлов используются специальные образцы, обычно имеющие круглые поперечные сечения.

На рис. 16 показан типовой металлический образец, имеющий *рабочую часть* с круглым поперечным сечением диаметром d_0 и первоначальной длиной l_0 . Рабочая часть образца расположена между *захватами*, с помощью которых передается растягивающее усилие F на образец от специальных устройств машины. Различают длинные образцы с отношением $l_0/d_0 \sim 10$ и $l_0/d_0 \sim 5$.

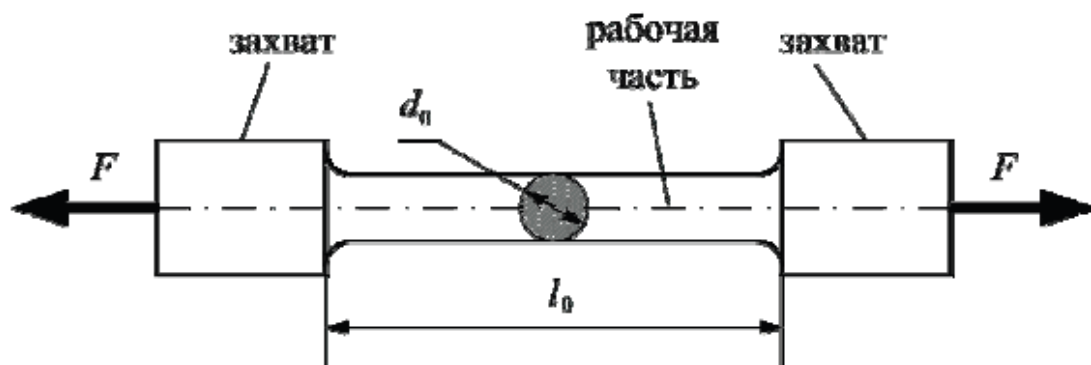


Рисунок 16

Все машины, используемые при испытаниях материалов на растяжение, снабжены устройствами для автоматической записи в определенном масштабе *диаграммы растяжения*, то есть графика зависимости между удлинением рабочей части образца Δl и растягивающей образец силой F .

Рассмотрим диаграмму растяжения пластичного материала, получаемую при испытании образца из низкоуглеродистой стали с достижением его полного разрушения (разрыва), показанную на рис. 17.

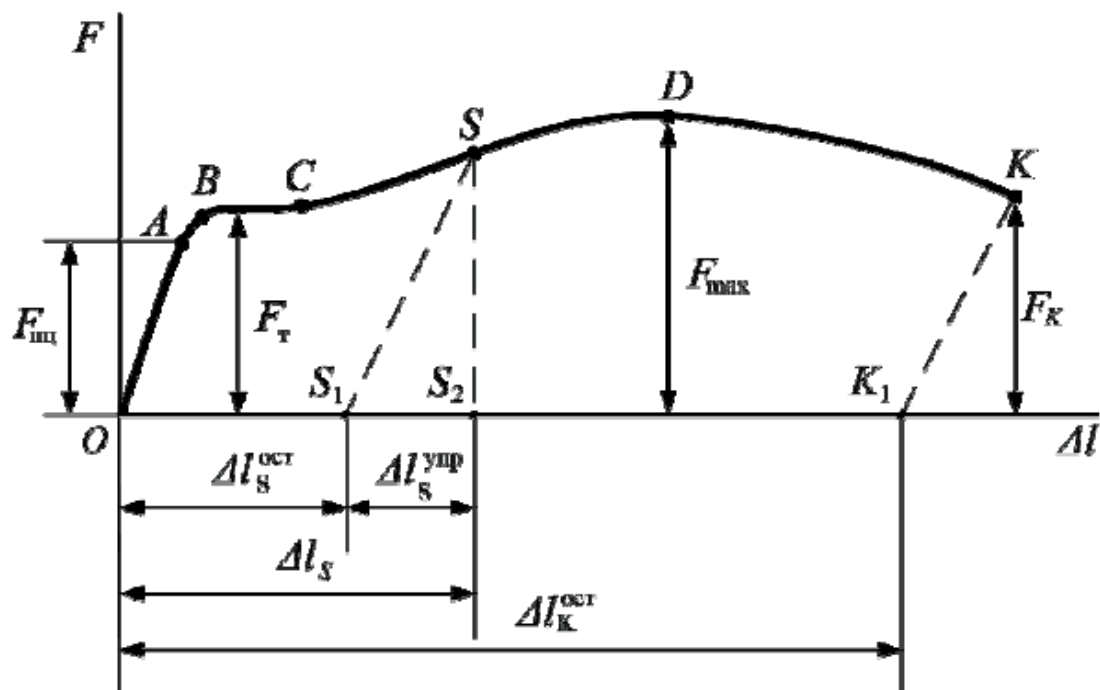


Рисунок 17

На начальной стадии нагружения образца диаграмма растяжения представляет собой прямолинейный отрезок OA , который называется *участком пропорциональности* или *зоной упругости*. На этом участке выполняется прямо пропорциональная зависимость между удлинением Δl и растягивающей нагрузкой F , что свидетельствует о выполнении закона Гука. В точке A измеряется нагрузка $F_{пц}$, которая используется для определения предела пропорциональности. *Пределом пропорциональности $\sigma_{пц}$* называется нормальное напряжение в поперечных сечениях рабочей части образца, до которого выполняется закон Гука:

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0},$$

где $A_0 = \pi(d_0)^2/4$ – первоначальная площадь круглого поперечного сечения рабочей части образца с диаметром d_0 .

При дальнейшем нагружении образца его деформация начинает увеличиваться быстрее, чем нагрузка, и диаграмма становится криволинейной. После участка пропорциональности диаграмма переходит в почти горизонтальный участок BC , который называется *площадкой текучести*. Здесь деформации растут практически без увеличения нагрузки. Нагрузка F_T , измеряемая на площадке текучести, используется для определения предела текучести. *Пределом текучести σ_T* называется нормальное напряжение в поперечных сечениях образца, при котором он деформируется без заметного увеличения растягивающей нагрузки:

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}.$$

Далее образец вновь приобретает способность воспринимать внешнее возрастающее усилие, и диаграмма переходит на криволинейный участок **CD**, который называется *участком упрочнения*. В конце этого участка достигается нагрузка $F_{\max}$, которая используется для вычисления временного сопротивления (предела прочности). *Временным сопротивлением σ_B* называется нормальное напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца:

$$\sigma_B = \frac{F_{\max}}{A_0}.$$

При максимальном усилии на образец в его наиболее слабом месте возникает локальное уменьшение поперечного сечения, которое называется *шейкой*. Дальнейшая деформация образца происходит практически в этой его части. Сечение в середине шейки продолжает уменьшаться, но напряжения в этом сечении увеличиваются даже при уменьшении нагрузки, приложенной к образцу. Удлинение части образца, расположенной вне области шейки, происходит незначительно. И наконец, в точке **K** происходит разрыв образца. В точке **K** диаграммы измеряется величина разрушающей силы F_K , которая используется для определения напряжения, называемого *истинным сопротивлением разрыву*.

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A_K},$$

где $A_K = \pi(d_K)^2/4$ – площадь шейки в месте ее разрыва с диаметром d_K (рис. 18).

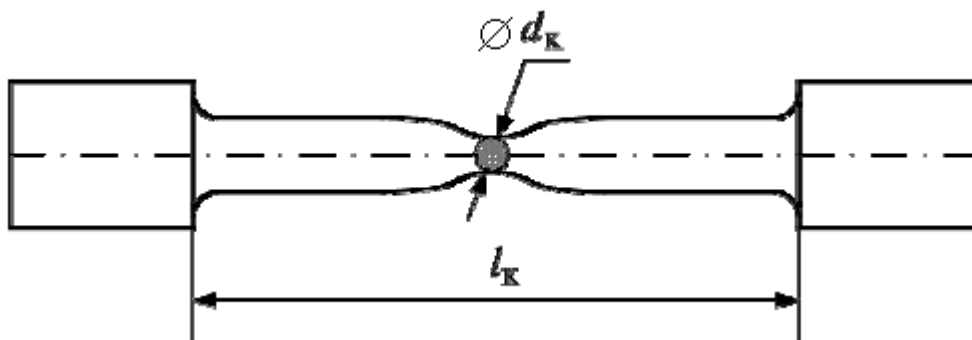


Рисунок 18

Предел пропорциональности $\sigma_{пц}$, предел текучести σ_T , временное сопротивление σ_B и истинное сопротивление разрыву σ_K , определяемые экспериментально, называются *характеристиками прочности* пластичного материала. Например, для низкоуглеродистой стали марки Ст 3, широко применяемой в строительных конструкциях, эти характеристики имеют следующие значения: $\sigma_{пц} = 195...200$ МПа, $\sigma_T = 220...250$ МПа, $\sigma_B = 370...470$ МПа, $\sigma_K = 900...1000$ МПа.

Вместе с вышеназванными характеристиками прочности материала

экспериментально определяются его *характеристики пластичности*.

Здесь следует отметить, что после нагрузки $F_{\text{пц}}$, соответствующей пределу пропорциональности, полная деформация Δl_s образца в каждой точке S диаграммы начинает складываться из двух частей (рис. 17):

$$\Delta l_s = \Delta l_s^{\text{упр}} + \Delta l_s^{\text{ост}},$$

где $\Delta l_s^{\text{упр}}$ – *упругая часть* деформации, которая исчезает после снятия нагрузки на образец;

$\Delta l_s^{\text{ост}}$ – *остаточная часть* деформации, которая остается после снятия нагрузки.

Для определения этих частей полной деформации из точки S проводится отрезок SS_1 , по которому происходит разгрузка образца параллельно прямолинейному участку диаграммы OA . При этом отрезком S_1S_2 изображается в определенном масштабе упругая часть деформации, а отрезком OS_1 – остаточная часть. На участке пропорциональности деформация является полностью упругой ($\Delta l^{\text{ост}} = 0$).

Одной из характеристик пластичности является *относительное остаточное удлинение после разрыва* δ , которое равно отношению приращения длины рабочей части образца после разрыва к первоначальной ее длине l_0 , выраженному в процентах:

$$\delta = 100\% \cdot \frac{l_k - l_0}{l_0} = 100\% \cdot \frac{\Delta l_k^{\text{ост}}}{l_0}.$$

Другой характеристикой пластичности является *относительное сужение после разрыва* ψ , которое представляет собой отношение уменьшения площади поперечного сечения рабочей части образца в месте разрыва (в минимальном сечении шейки) к первоначальной площади поперечного сечения A_0 , выраженному в процентах:

$$\psi = 100\% \cdot \frac{A_0 - A_k}{A_0}.$$

Для стали марки Ст 3 характеристики пластичности имеют следующие приблизительные значения: $\delta \sim 25...27\%$, $\psi \sim 60...70\%$. Чем больше эти характеристики для данного материала, тем более пластичным считается этот материал.

Рассмотрим далее диаграмму растяжения чугуна, которая имеет вид, типичный при испытании хрупкого материала на растяжение (рис. 19).

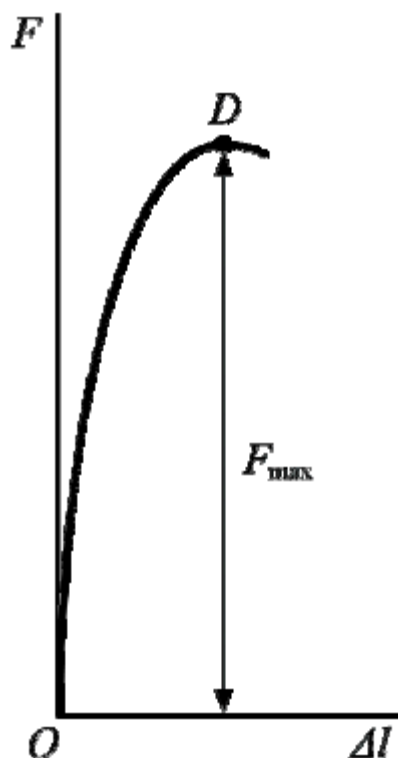


Рисунок 19

Диаграмма не имеет прямолинейного участка, так как деформации не пропорциональны нагрузкам даже при небольших напряжениях. Нагрузка увеличивается до наибольшего значения $F_{\max}$ в точке **D** диаграммы, которому соответствует предел прочности $\sigma_B = F_{\max} / A_0$, где A_0 – площадь поперечного сечения образца. Значение предела прочности для чугуна при растяжении $\sigma_B \sim 120...190$ МПа. После точки **D** без увеличения нагрузки происходит разрыв образца. Образец разрушается при незначительном удлинении и без образования шейки. Остаточные деформации обычно не превышают 1 % от первоначальной длины образца. Таким образом, хрупким материалам соответствуют очень малые характеристики пластичности δ и ψ .

Испытания материалов на сжатие

Испытание материалов на сжатие обычно выполняется на тех же машинах, которые используются при испытаниях на растяжение, но с применением специальных приспособлений. При этом получают *диаграммы сжатия*, графически показывающие зависимость между сжимающей нагрузкой F и деформацией образца Δl . В качестве образцов используются стержни с постоянным круглым или квадратным поперечным сечением, длина которых превышает в 1,5...3 раза его поперечные размеры.

Рассмотрим диаграмму сжатия пластичного материала, показанную на рис. 20а. Начальный участок диаграммы до точки *A* является прямолинейным и на этом участке выполняется закон Гука. Угол наклона этого участка совпадает с углом наклона аналогичного участка диаграммы растяжения. Это свидетельствует о том, что модуль нормальной упругости *E* для пластичного материала при растяжении и сжатии является одинаковым.

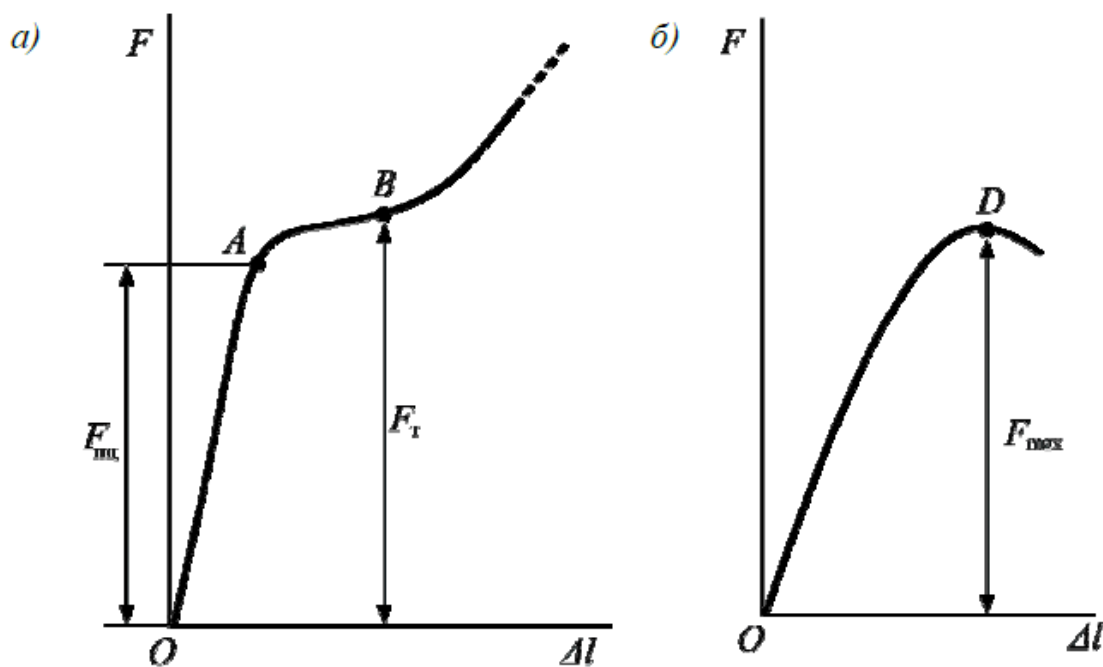


Рисунок 20

После точки *A* диаграмма переходит в криволинейный участок, подобный участку диаграммы при растяжении. Площадка текучести здесь выражена слабее, то есть не является горизонтальной. При дальнейшем нагружении, когда появляются значительные остаточные деформации, образец сплющивается. Обычно на этом испытание заканчивают, так как разрушение образца не происходит. Значения предела пропорциональности $\sigma_{пл}$ и предела текучести σ_t при сжатии практически совпадают с их значениями, полученными при растяжении. Остальные характеристики прочности пластичного материала, то есть временное сопротивление σ_b и истинное сопротивление разрыву σ_k , при сжатии не определяются.

На рис. 20б показана диаграмма сжатия чугуна как типичный пример такой диаграммы для хрупкого материала. В начале диаграммы имеется почти линейная зависимость между нагрузкой F и деформацией Δl . На этом участке форма и размеры образца изменяются незначительно. При приближении к максимальной нагрузке диаграмма становится более полой. Когда нагрузка достигает значения F_{max} в точке *D* диаграммы, в образце появляются трещины и наступает разрушение образца. Разрушение хрупкого материала происходит в

основном от сдвига в сечениях с наибольшими касательными напряжениями (угол наклона этих сечений к оси образца равен 45°). В точке **D** диаграммы вычисляется предел прочности $\sigma_B = F_{\max} / A_0$.

Хрупкие материалы сопротивляются сжатию значительно лучше, чем растяжению. Например, у чугуна предел прочности на сжатие $\sigma_{BC} = 560 \dots 900$ МПа больше предела прочности на растяжение $\sigma_{BP} = 120 \dots 90$ МПа примерно в 4...5 раз.

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Механические свойства материалов»

1. С какой целью снимается диаграмма растяжения?
2. В каких координатах строится диаграмма растяжения?
3. Каковы отличия диаграмм растяжения пластичного и хрупкого материалов?
4. Как происходит разрушение при растяжении и сжатии пластичных и хрупких материалов?
5. Чем отличается диаграмма сжатия пластичной и хрупкой сталей от диаграмм растяжения?
6. Чем отличаются диаграмма сжатия чугуна от диаграммы растяжения?
7. Что называется остаточным относительным удлинением образца и остаточным относительным сужением шейки образца?
8. Как определить по диаграмме растяжения упругую и пластическую деформации?
9. Чем отличается диаграмма растяжения малоуглеродистой стали от диаграммы для высокоуглеродистой стали?
10. Чем отличается диаграмма истинных напряжений от диаграммы условных напряжений?
11. Что называется условным пределом текучести, и для каких материалов введена эта характеристика?
12. Что называется пределами пропорциональности, упругости, текучести, прочности?
13. Что такое площадка текучести?
14. Как опытным путем можно найти численное значение модуля Юнга?
15. С какой целью и как проводят испытание материалов на сжатие?

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

При изучении вопросов прочности, жесткости и устойчивости стержней возникает необходимость оперировать следующими геометрическими характеристиками поперечных сечений, такими как:

- статические моменты площади;
- моменты инерции сечений;
- моменты сопротивления;
- радиусы инерции.

Эти характеристики в силу своего узкого прикладного значения в общем курсе геометрии не изучаются, так как имеют применение в основном в пределах задач сопротивления стержней различным видам деформации.

Площадь является простейшей геометрической характеристикой и имеет размерность м^2 . Если представить себе, что поперечное сечение состоит из бесчисленного множества элементарных площадок dA (рис. 21), то площадь всего сечения:

$$A = \int dA.$$

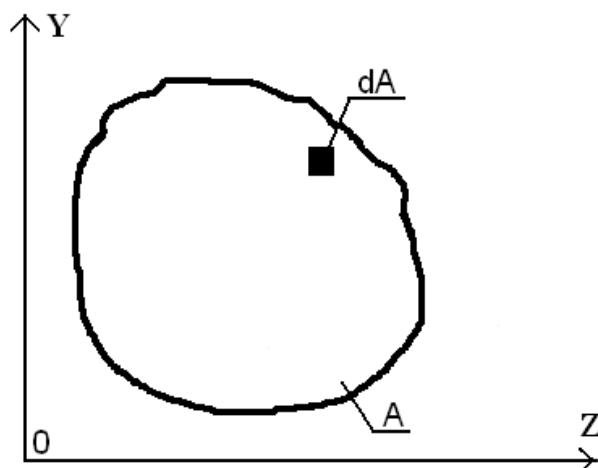


Рисунок 21

Отметим два важных свойства площади: она всегда положительна и не зависит от выбора системы координат.

Остальные геометрические характеристики зависят не только от формы и размеров сечений, но также и от положения осей и точек, относительно которых они вычисляются.

Рассмотрим, например, два случая изгиба силой P консольной балки прямоугольного поперечного сечения (рис. 22).

Очевидно, что величина прогиба в первом случае будет больше, чем во втором ($f_1 > f_2$). Так как площадь поперечного сечения не изменилась, то она не влияет на прогиб. Малый прогиб во втором случае обусловлен тем, что

поперечные сечения балки при изгибе поворачиваются вокруг оси Y , относительно которой момент инерции прямоугольного поперечного сечения I_Y значительно больше (как будет показано далее, $I_Y = b \cdot h^3/12$), чем относительно оси Z , так как $I_Z = h \cdot b^3/12$ (при $h > b$).

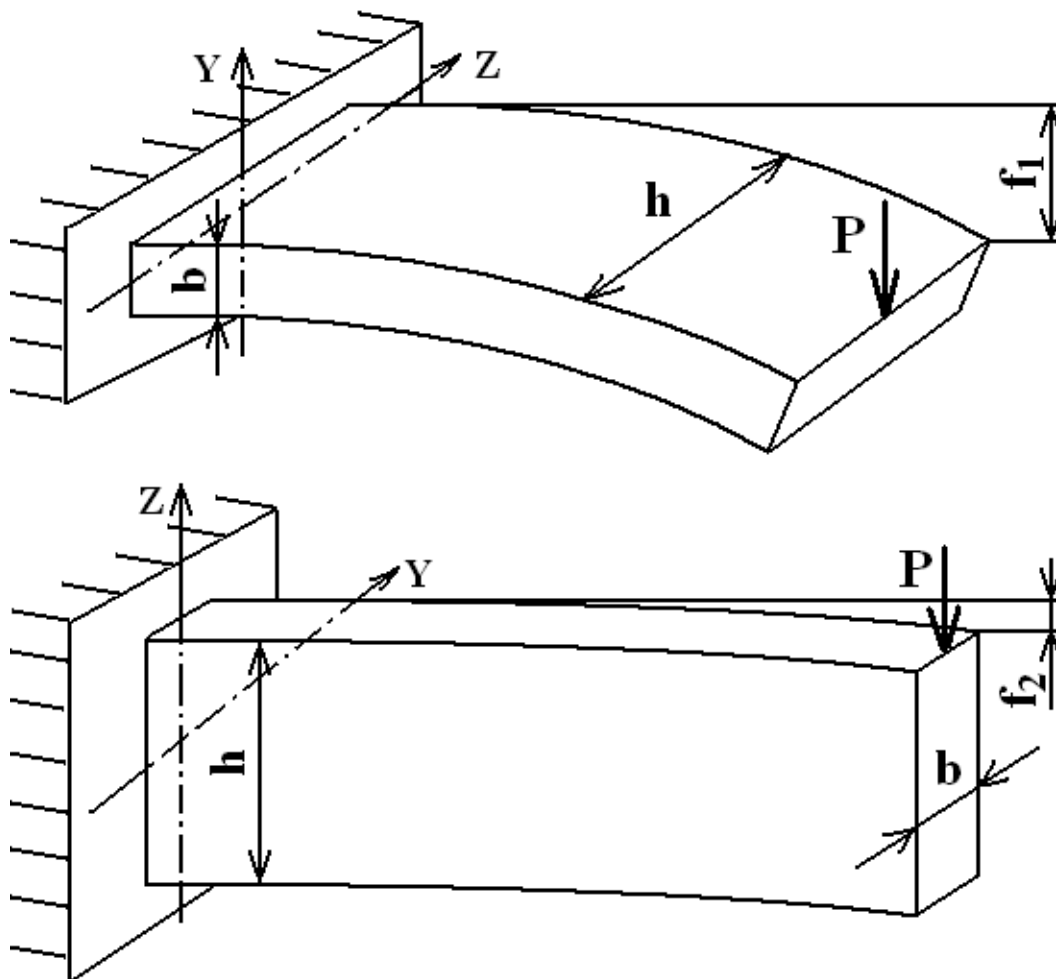


Рисунок 22

Статические моменты площади и центр тяжести сечения

Статические моменты площади сечения относительно осей Z и Y (рис. 23) определяются по следующим формулам:

$$S_Z = \int_A y \cdot dA,$$

$$S_Y = \int_A z \cdot dA,$$

где A – площадь сечения;

dA – элементарная площадка;

z и y – координаты элементарной площадки в осях Z и Y (рис. 23).

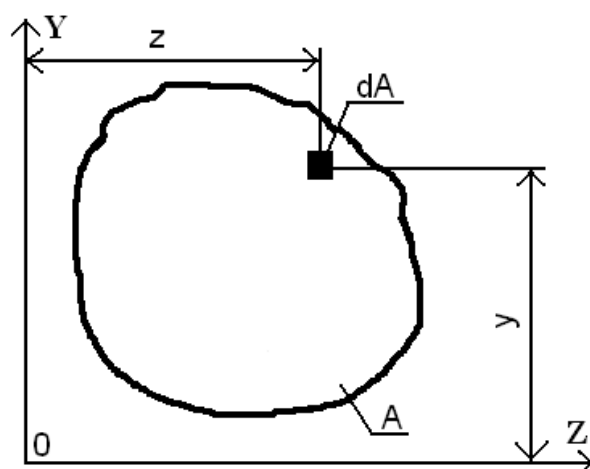


Рисунок 23

Если отождествить каждую элементарную площадку с силой, действующей перпендикулярно плоскости листа, то каждое из выражений для статических моментов площади можно рассматривать как сумму моментов сил относительно осей Z и Y , соответственно. Тогда, следуя известной из теоретической механики теореме Вариньона о моменте равнодействующей, получится:

$$S_Z = \int_A y \cdot dA = A \cdot y_C,$$

$$S_Y = \int_A z \cdot dA = A \cdot z_C.$$

Координаты центра тяжести y_C и z_C сечения площадью A (рис. 24) определяются из выражений:

$$y_C = \frac{S_Z}{A},$$

$$z_C = \frac{S_Y}{A}.$$

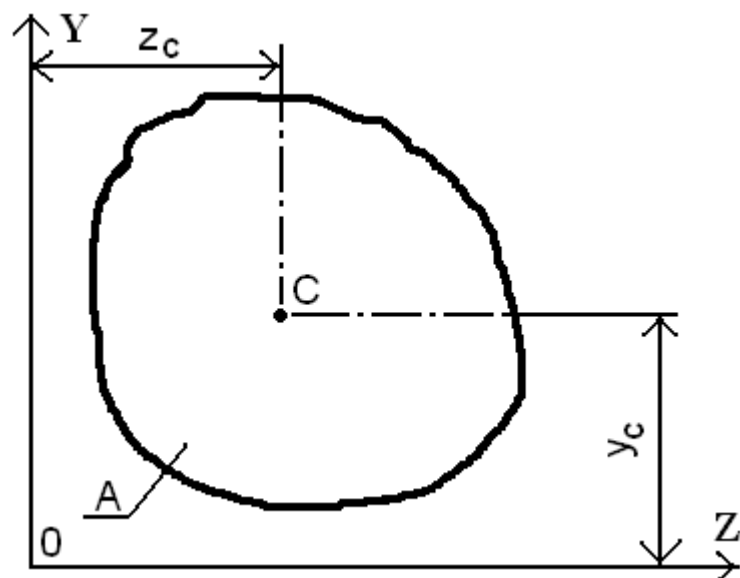


Рисунок 24

Если сечение, например, состоит из простейших фигур с площадями A_1 и A_2 (рис. 25), то статические моменты площади определяются выражениями:

$$S_Z = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{Ci} = A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2},$$

$$S_Y = \sum_{i=1}^n A_i \cdot z_{Ci} = A_1 \cdot z_{C1} + A_2 \cdot z_{C2},$$

где y_{C1} и z_{C1} , y_{C2} и z_{C2} – координаты центров тяжести простейших фигур.

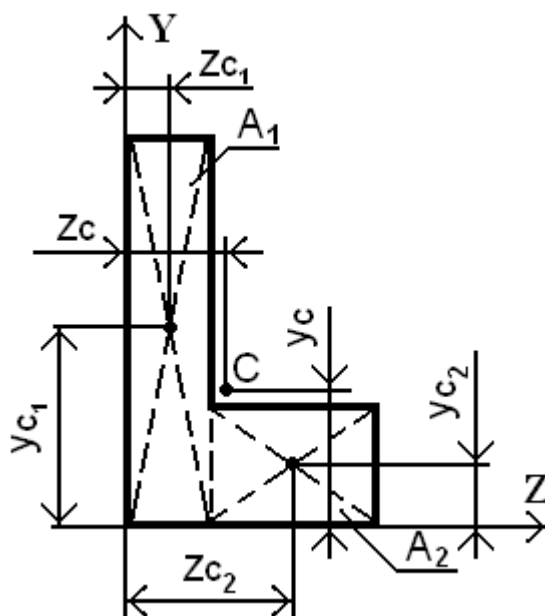


Рисунок 25

Координаты центра тяжести y_C и z_C всего сечения, состоящего из простейших фигур (рис. 25), определяются из выражений:

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot z_{Ci}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_1 \cdot z_{C1} + A_2 \cdot z_{C2}}{A},$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{Ci}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2}}{A},$$

где $A = A_1 + A_2$ – площадь всего сечения.

Статические моменты площади сечения относительно *центральных осей* (осей, проходящих через центр тяжести поперечного сечения) равны нулю, так как координаты центра тяжести в этих осях будут также равны нулю.

Статические моменты площади могут быть положительными и отрицательными в зависимости от выбора осей, относительно которых они определяются. Статические моменты площади имеют размерность m^3 .

Осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения

Осевые моменты инерции сечения относительно осей Z и Y определяются по следующим формулам:

$$I_Z = \int_A y^2 \cdot dA,$$

$$I_Y = \int_A z^2 \cdot dA,$$

где A – площадь сечения;

dA – элементарная площадка;

z и y – координаты элементарной площадки в осях Z и Y (рис. 26).

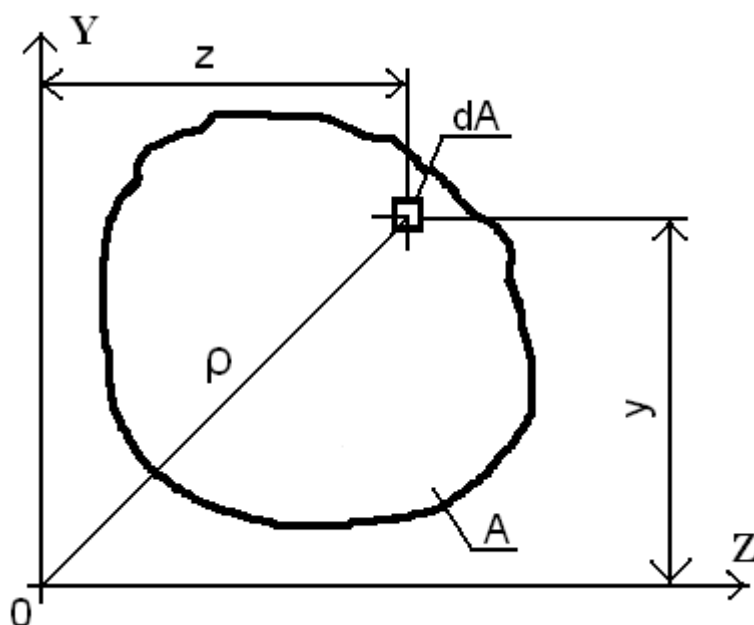


Рисунок 26

В некоторых простых случаях осевые моменты инерции можно вычислить аналитически. Определим, например, осевой момент инерции прямоугольника относительно его центральной горизонтальной оси **Z** (рис. 27).

Выделим на расстоянии **y** от оси **Z** элементарную полоску высотой **dy** и шириной **b**. Площадь элементарной площадки будет равна **dA = b · dy** и

$$I_Z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

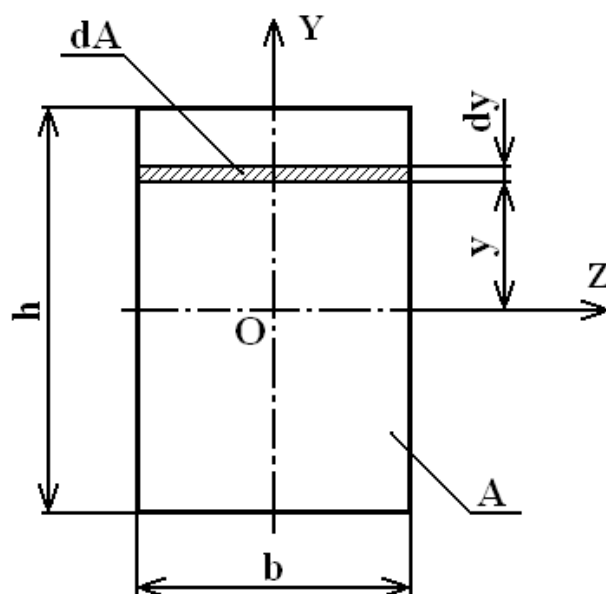


Рисунок 27

Размышляя аналогичным образом, находим, что осевой момент инерции прямоугольника относительно его вертикальной оси **Y** равен:

$$I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12}.$$

Полярный момент инерции сечения относительно данной точки (полюса) определяется по формуле:

$$I_P = \int_A \rho^2 \cdot dA,$$

где **ρ** – расстояние от элементарной площадки **dA** до полюса (рис. 26).

Определим полярный момент инерции круга относительно его центра (рис. 28). Выделим на расстоянии **ρ** от центра круга элементарное кольцо шириной **$d\rho$** . Тогда **$dA = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho$** и

$$I_P = \int_0^R 2 \cdot \pi \cdot \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi \cdot R^4}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32}.$$

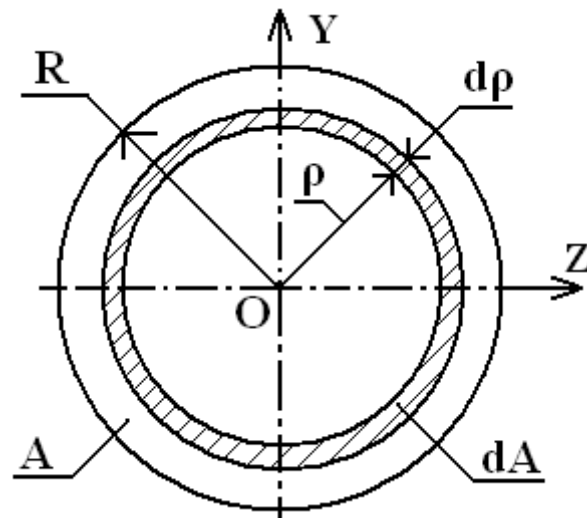


Рисунок 28

В случае, когда полярный момент инерции вычисляется относительно начала системы координат, **$\rho^2 = y^2 + z^2$** и

$$I_P = I_Z + I_Y.$$

Величины полярного и осевых моментов инерции всегда больше нуля.

Центробежный момент инерции сечения относительно осей **Z** и **Y** определяется по формуле:

$$I_{ZY} = \int_A z \cdot y \cdot dA,$$

где A – площадь сечения;

dA – элементарная площадка;

z и y – координаты элементарной площадки в осях Z и Y (рис.26).

Моменты инерции имеют размерность m^4 .

Центробежный момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Центробежный момент инерции всегда равен нулю при его вычислении относительно двух перпендикулярных осей, если хотя бы одна из них является осью симметрии. Например, для симметричной фигуры в виде равнобедренного треугольника всегда можно выделить пару элементарных площадок dA , каждая из которых будет иметь одинаковую по знаку координату $y_1 = y_2 = y$ и равные по величине, но противоположные по знаку координаты $z_1 = -z$ и $z_2 = z$ (рис. 29). Тогда центробежный момент инерции сечения относительно центральных осей Z и Y будет равен 0 .

$$\begin{aligned} I_{ZY} &= \int_A z \cdot y \cdot dA = \int_{\frac{A}{2}} z_1 \cdot y_1 \cdot dA + \int_{\frac{A}{2}} z_2 \cdot y_2 \cdot dA = \\ &= \int_{\frac{A}{2}} (-z) \cdot y \cdot dA + \int_{\frac{A}{2}} z \cdot y \cdot dA = 0. \end{aligned}$$

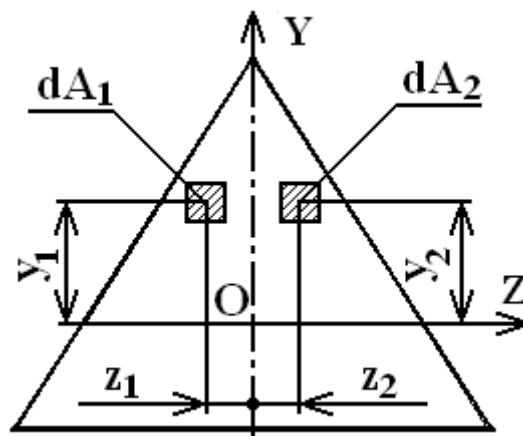


Рисунок 29

В случае, когда сечение не имеет осей симметрии, то можно провести такие две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции будет равен нулю. Оси координат, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются **главными осями инерции**. Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются **главными центральными осями** инерции сечения.

Моменты инерции **сечения, состоящего из простых фигур**, можно определить как сумму соответствующих моментов инерции его составных фигур относительно той же оси.

Зависимости между моментами инерции сечения относительно параллельных осей

Если известны моменты инерции относительно собственных центральных осей Z_1 и Y_1 , то можно определить **моменты инерции сечения относительно параллельных им осей Z и Y** , смещенных от центральных осей Z_1 и Y_1 на расстояния b и c соответственно (рис. 30).

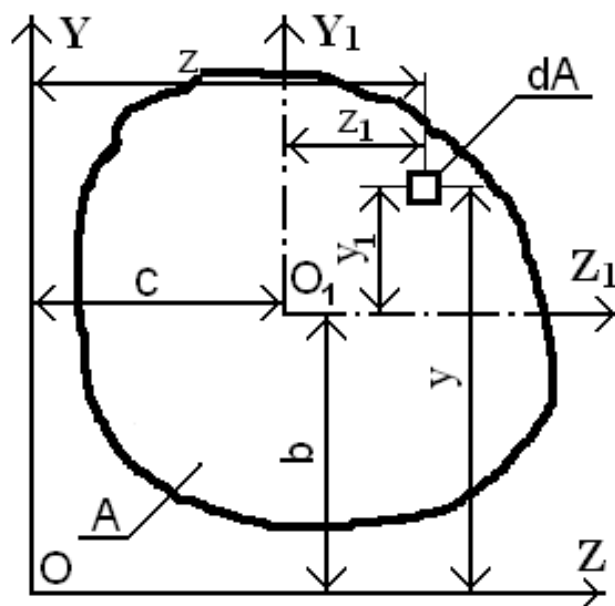


Рисунок 30

Определим осевой момент инерции относительно оси Z . Координаты элементарной площадки dA в новой системе координат будут равны $y = y_1 + b$ и $z = z_1 + c$, тогда

$$I_Z = \int_A y^2 dA = \int_A (y_1 + b)^2 dA = \int_A y_1^2 dA + 2b \int_A y_1 dA + b^2 \int_A dA.$$

В этом выражении первый интеграл равен осевому моменту инерции относительно центральной оси Z_1 , второй интеграл будет равен статическому моменту площади сечения относительно центральной оси Z_1 , и поэтому равному нулю, третий интеграл дает площадь сечения A . Таким образом,

$$I_Z = I_{Z1} + A \cdot b^2,$$

$$I_Y = I_{Y1} + A \cdot c^2,$$

$$I_{ZY} = I_{Z1Y1} + A \cdot b \cdot c.$$

Если известны значения моментов инерции относительно центральных осей составных фигур, то **моменты инерции для сложной фигуры** относительно параллельных им осей Z и Y определяются по формулам:

$$I_Z = \sum_{i=1}^n (I_{Zi} + A_i \cdot b_i^2),$$

$$I_Y = \sum_{i=1}^n (I_{Yi} + A_i \cdot c_i^2),$$

$$I_{ZY} = \sum_{i=1}^n (I_{ZiYi} + A_i \cdot b_i \cdot c_i).$$

Моменты сопротивления и радиусы инерции сечения

Осевыми моментами сопротивления сечения относительно осей **Z** и **Y** называются величины **W_Z** и **W_Y**, определяемые соотношениями:

$$W_Z = \frac{I_Z}{|y_{\text{MAX}}|},$$

$$W_Y = \frac{I_Y}{|z_{\text{MAX}}|}.$$

где **|y_{MAX}|** и **|z_{MAX}|** – соответственно наибольшие расстояния от осей **Z** и **Y** до наиболее удаленных точек сечения (рис. 31).

Полярным моментом сопротивления называется величина, определяемая выражением:

$$W_P = \frac{I_P}{\rho_{\text{MAX}}},$$

где **ρ_{MAX}** – наибольшее расстояние от полюса до наиболее удаленной точки сечения.

Моменты сопротивления имеют размерность **м³**.

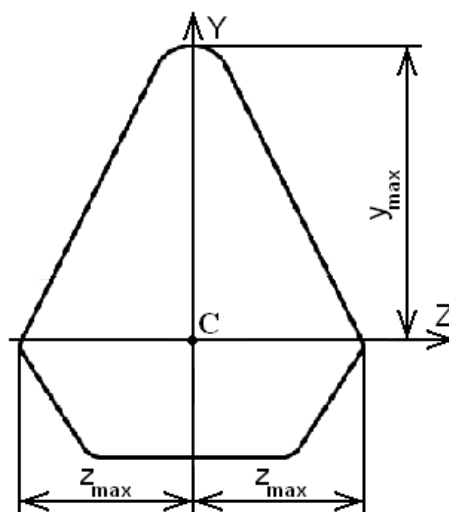


Рисунок 31

Радиусами инерции поперечного сечения относительно осей **Z** и **Y** называются величины, определяемые соответственно из выражений:

$$i_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{A}},$$

$$i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}}.$$

Радиусы инерции имеют размерность длины (**м**).

Моменты сопротивления и радиусы инерции имеют всегда положительные величины.

Эллипсом инерции называется эллипс, полуосями которого являются главные радиусы инерции. Эллипс инерции показывает изменение моментов инерции сечения при повороте осей координат.

Радиус инерции относительно любой центральной оси **V** равен расстоянию от этой оси до касательной к эллипсу инерции, параллельной оси **V** (рис. 32), т. е.:

$$I_V = i_V^2 \cdot A.$$

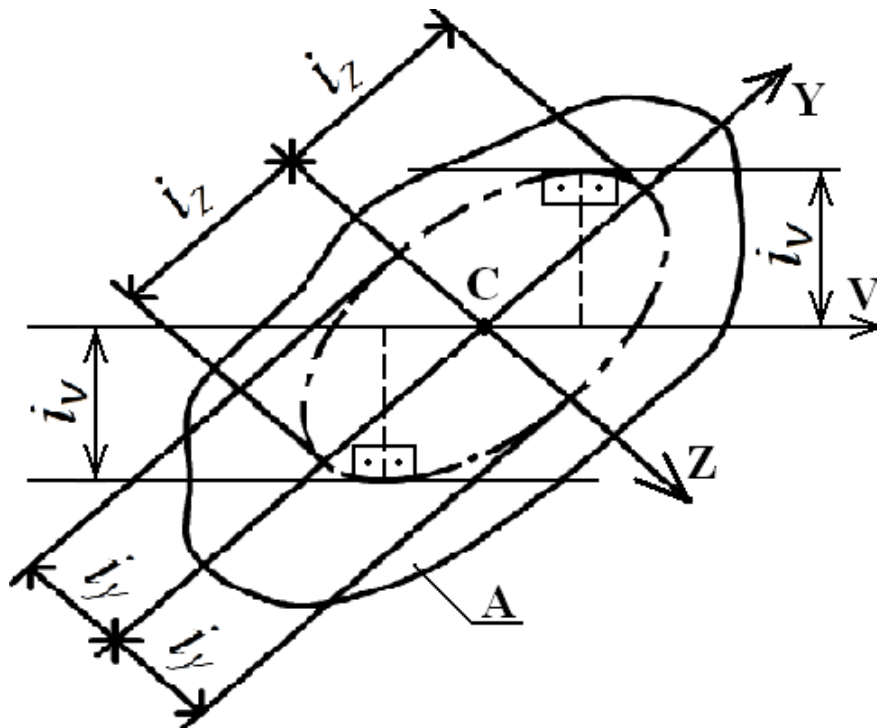


Рисунок 32

Изменение моментов инерции при повороте осей координат

Если известны осевые и центробежный моменты инерции относительно исходных осей **Z** и **Y**, то можно определить моменты инерции относительно осей **U** и **V**, повернутых на угол α (рис. 33).

Зависимости между координатами элементарной площадки **dA** в исходных и повернутых осях будут определяться выражениями:

$$\begin{aligned}u &= y \cdot \sin(\alpha) + z \cdot \cos(\alpha), \\v &= y \cdot \cos(\alpha) - z \cdot \sin(\alpha).\end{aligned}$$

Моменты инерции относительно повернутых осей **U** и **V**:

$$\begin{aligned}I_U &= \int_A v^2 \cdot dA, \\I_V &= \int_A u^2 \cdot dA, \\I_{UV} &= \int_A u \cdot v \cdot dA.\end{aligned}$$

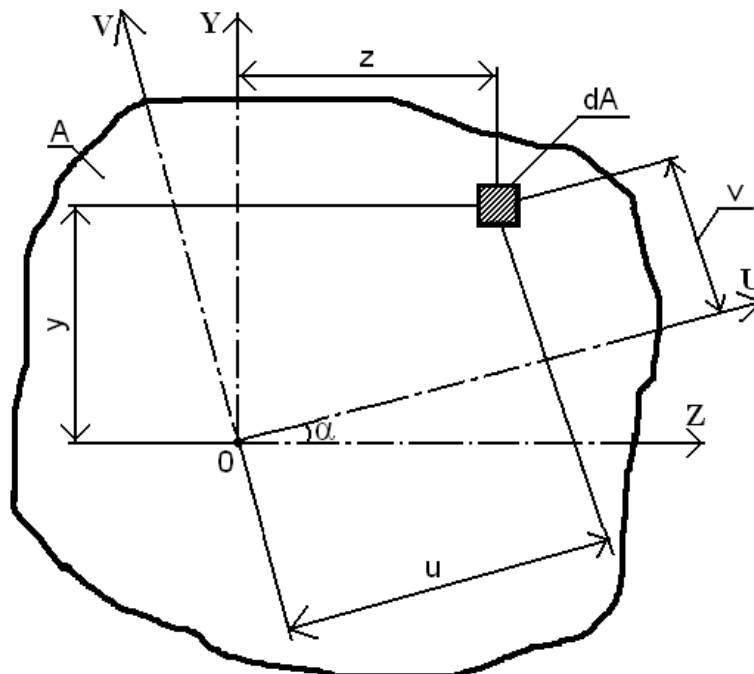


Рисунок 33

Выразим моменты инерции относительно повернутых осей U и V через координаты элементарной площадки dA в исходных осях Z и Y :

$$I_U = \int_A [y \cdot \cos(\alpha) - z \cdot \sin(\alpha)]^2 \cdot dA,$$

$$I_V = \int_A [y \cdot \sin(\alpha) + z \cdot \cos(\alpha)]^2 \cdot dA,$$

$$I_{UV} = \int_A [y \cdot \cos(\alpha) - z \cdot \sin(\alpha)] \cdot [y \cdot \sin(\alpha) + z \cdot \cos(\alpha)] dA.$$

После вычисления интегралов выражения примут вид:

$$I_U = I_Z \cdot \cos^2(\alpha) - I_{ZY} \cdot \sin(2\alpha) + I_Y \cdot \sin^2(2\alpha),$$

$$I_V = I_Z \cdot \sin^2(\alpha) + I_{ZY} \cdot \sin(2\alpha) + I_Y \cdot \cos^2(2\alpha),$$

$$I_{UV} = I_{ZY} \cdot \cos(2\alpha) + \frac{I_Z - I_Y}{2} \cdot \sin(2\alpha),$$

откуда после преобразований получим:

$$I_U + I_V = I_Z + I_Y = \int_A (y^2 + z^2) \cdot dA = I_P.$$

Таким образом, сумма осевых моментов инерции не зависит от угла α и при повороте осей остается постоянной и равной полярному моменту инерции сечения, взятого относительно начала координат.

Главные оси и главные моменты инерции

С изменением угла поворота осей α каждый из осевых моментов инерции меняется, а их сумма остается неизменной. Значит, есть такой угол $\alpha = \alpha_0$, при котором у моментов инерции будут экстремальные значения. Для нахождения значения α_0 возьмем первую производную от I_U и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dI_U}{d\alpha} = & -2 \cdot I_Z \cdot \cos(\alpha_0) \cdot \sin(\alpha_0) - 2 \cdot I_{ZY} \cdot \cos(\alpha_0) - \\ & - 2 \cdot I_Y \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \cos(\alpha_0) = 0, \end{aligned}$$

откуда после преобразований получаем:

$$\operatorname{tg}(2\alpha_0) = -\frac{2 \cdot I_{ZY}}{I_Z - I_Y}.$$

Положительное значение угла α откладывается от оси Z против часовой стрелки (рис. 34), а отрицательное – наоборот, по ходу стрелки часов.

С целью проверки, являются ли повернутые на угол α_0 оси главными, приравняем центробежный момент инерции относительно их к нулю:

$$I_{UV} = I_{ZY} \cdot \cos(2\alpha) + \frac{I_Z - I_Y}{2} \cdot \sin(2\alpha) = 0.$$

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а

осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются **главными осями инерции**. Если эти оси являются также и центральными, то они называются **главными центральными осями**. Осевые моменты инерции относительно главных осей называются **главными моментами инерции**.

Главные моменты инерции сечения, вычисленные относительно главных центральных осей, имеют следующие экстремальные значения:

$$I_{\text{MIN}} = \frac{I_Z + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4 \cdot I_{ZY}^2},$$

$$I_{\text{MAX}} = \frac{I_Z + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4 \cdot I_{ZY}^2}.$$

Для того чтобы определить, относительно какой главной оси получается максимальный осевой момент инерции сечения, а относительно какой минимальный, необходимо определить знак второй производной:

$$\frac{d^2 I_U}{d\alpha^2} = -2 \cdot (I_Z - I_Y) \cdot \sin(2\alpha) + 4 \cdot I_{ZY} \cdot \cos(2\alpha).$$

Если знак второй производной при $\alpha = \alpha_0$ отрицателен, то относительно главной оси, наклоненной к оси **Z** на угол α_0 , осевой момент инерции максимален. Если знак второй производной при $\alpha = \alpha_0$ положителен, то относительно главной оси, наклоненной к оси **Z** на угол α_0 , осевой момент инерции минимален.

В качестве проверки проведенных вычислений можно использовать следующее правило: если $I_{ZY} < 0$, то главная ось, относительно которой момент инерции максимален, проходит через первый и третий квадранты (**I и III**). Если $I_{ZY} > 0$, то главная ось, относительно которой момент инерции максимален, проходит через второй и четвертый квадранты (**II и IV**) (рис. 34).

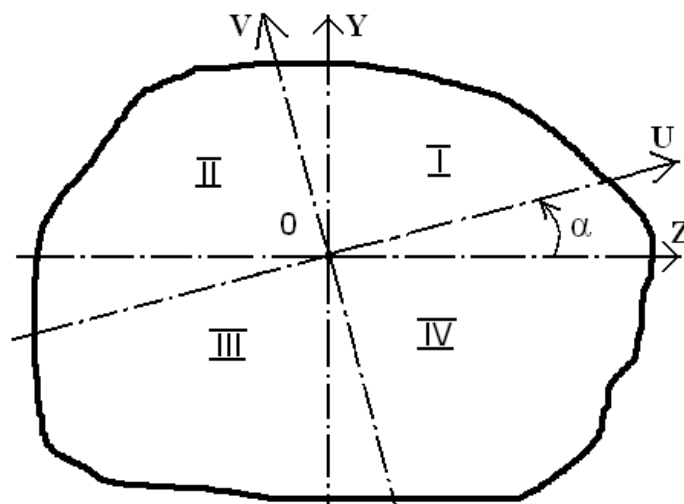


Рисунок 34

В случае $I_Z \neq I_Y$ получается следующая формула:

$$\frac{d^2 I_U}{d\alpha^2} = -\frac{2 \cdot (I_Z - I_Y)}{\cos(2\alpha)}.$$

Геометрические характеристики простейших фигур

Геометрические характеристики прямоугольника

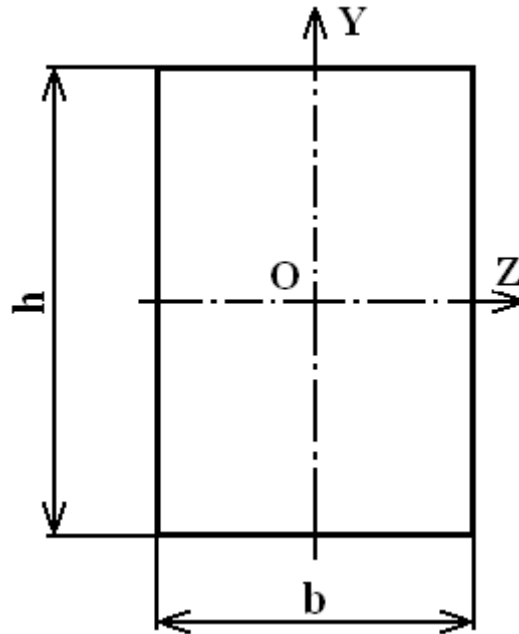


Рисунок 35

Осевые моменты инерции относительно главных центральных осей Z и Y :

$$I_Z = \frac{b \cdot h^3}{12},$$

$$I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12},$$

Моменты сопротивления (при $|y_{\text{MAX}}| = h/2$ и $|z_{\text{MAX}}| = b/2$):

$$W_Z = \frac{I_Z}{|y_{\text{MAX}}|} = \frac{b \cdot h^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{b \cdot h^2}{6},$$

$$W_Y = \frac{I_Y}{|z_{\text{MAX}}|} = \frac{h \cdot b^3 \cdot 2}{12 \cdot b} = \frac{h \cdot b^2}{6}.$$

Геометрические характеристики коробчатого сечения

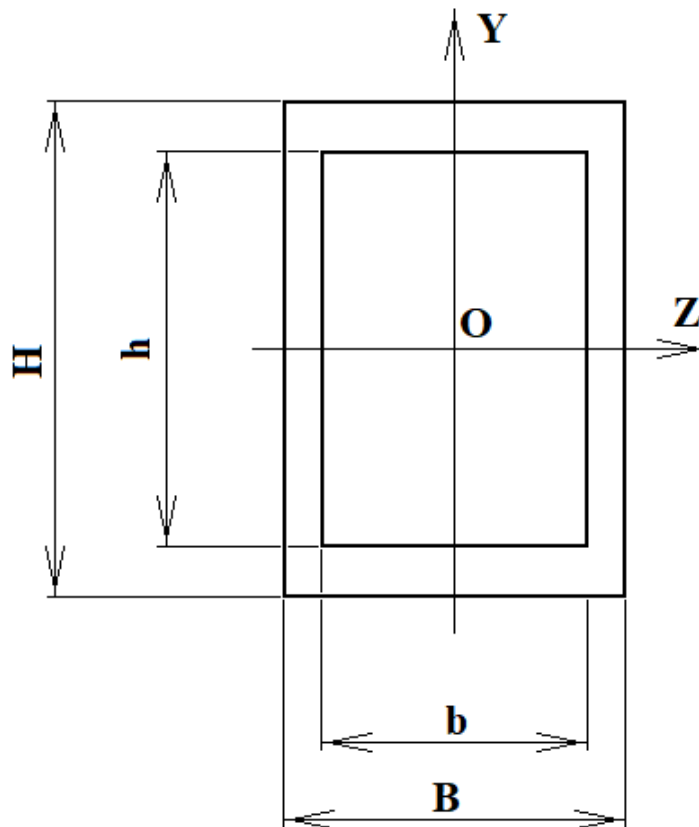


Рисунок 36

Осевые моменты инерции относительно главных центральных осей Z и Y :

$$I_Z = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12},$$

$$I_Y = \frac{H \cdot B^3 - h \cdot b^3}{12},$$

Моменты сопротивления (при $|y_{\text{MAX}}| = H/2$ и $|z_{\text{MAX}}| = B/2$):

$$W_Z = \frac{I_Z}{|y_{\text{MAX}}|} = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6 \cdot H},$$

$$W_Y = \frac{I_Y}{|z_{\text{MAX}}|} = \frac{H \cdot B^3 - h \cdot b^3}{6 \cdot B}.$$

Геометрические характеристики круга

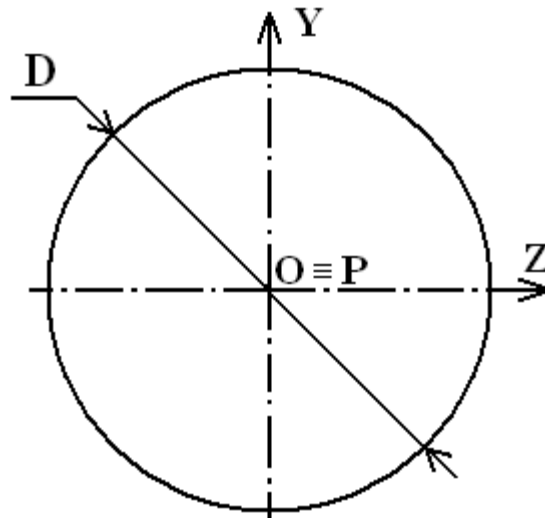


Рисунок 37

Полярный момент инерции относительно центра **O** (полюса **P**):

$$I_P = \frac{\pi \cdot D^4}{32}.$$

Осевые моменты инерции относительно главных центральных осей **Z** и **Y**:

$$I_Z = I_Y = \frac{I_P}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}.$$

Моменты сопротивления (в силу симметрии $|y_{\text{MAX}}| = |z_{\text{MAX}}| = D/2$):

$$W_Z = W_Y = \frac{I_Y}{|z_{\text{MAX}}|} = \frac{\pi \cdot D^4 \cdot 2}{64 \cdot D} = \frac{\pi \cdot D^3}{32}.$$

Полярный момент сопротивления ($\rho_{\text{MAX}} = D/2$):

$$W_P = \frac{I_P}{\rho_{\text{MAX}}} = \frac{\pi \cdot D^4 \cdot 2}{32 \cdot D} = \frac{\pi \cdot D^3}{16}.$$

Радиусы инерции относительно осей **Z** и **Y**:

$$i_Z = i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot D^4 \cdot 4}{64 \cdot \pi \cdot D^2}} = \frac{D}{4}.$$

Геометрические характеристики кольца

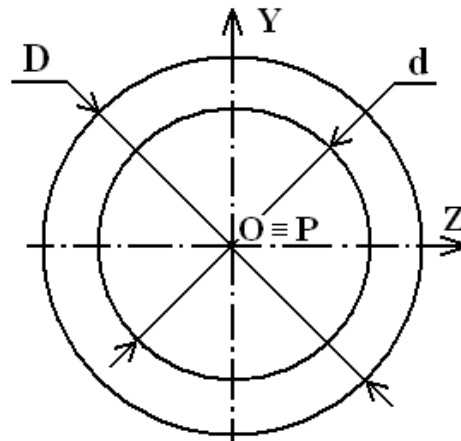


Рисунок 38

Осевые моменты инерции относительно главных центральных осей **Z** и **Y** (при $\beta = d / D$):

$$I_Z = I_Y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot (1 - \beta^4).$$

Полярный момент инерции относительно центра **O** (полюса **P**):

$$I_P = I_Z + I_Y = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot (1 - \beta^4).$$

Моменты сопротивления (в силу симметрии $|y_{\max}| = |z_{\max}| = D/2$):

$$W_Z = W_Y = \frac{I_Y}{|z_{\max}|} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - \beta^4).$$

Полярный момент сопротивления ($\rho_{\max} = D/2$):

$$W_P = \frac{I_P}{\rho_{\max}} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot (1 - \beta^4).$$

Радиусы инерции относительно осей **Z** и **Y**:

$$i_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{A}} = i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \frac{D}{4} \cdot \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Стандартные прокатные профили

Промышленностью выпускаются стандартные прокатные профили (двутавры, швеллеры, уголки (рис. 39), которые могут быть использованы как готовые элементы конструкций (балки, стойки, элементы ферм и др.)).

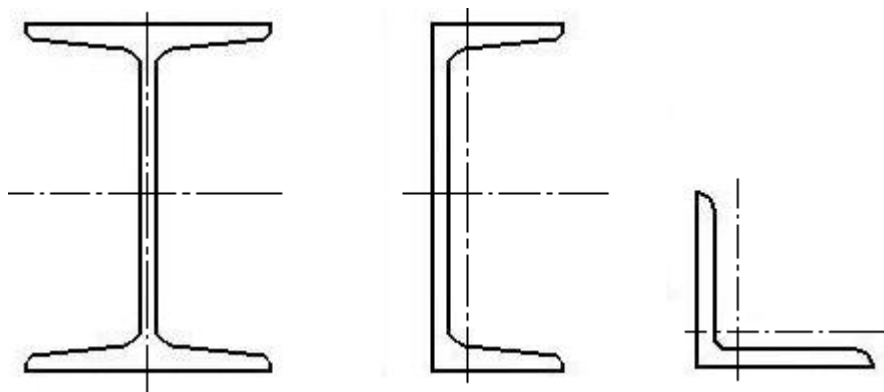


Рисунок 39

Размеры прокатных профилей стандартизованы и даны в таблицах сортаментов прокатной стали, которые приводятся в приложениях почти всех учебников и сборников задач по сопротивлению материалов. В этих таблицах приводятся все размеры сечений и основные геометрические характеристики прокатных профилей в соответствии с их номером.

В таблицах 1, 2, 3 приведены выписки из сортаментов прокатной стали, содержащие необходимые основные размеры и геометрические характеристики профилей сечения.

Центробежные моменты инерции двутавра и швеллера относительно их главных центральных осей равны нулю.

В табл. 1 и 2 значения осевых моментов инерции для двутавра и швеллера приведены относительно осей z и y , показанных на рис. 40 и 41, соответственно. Если двутавр или швеллер повернуть относительно этих осей на 90° , то значения осевых моментов инерции I_z и I_y поменяются местами.

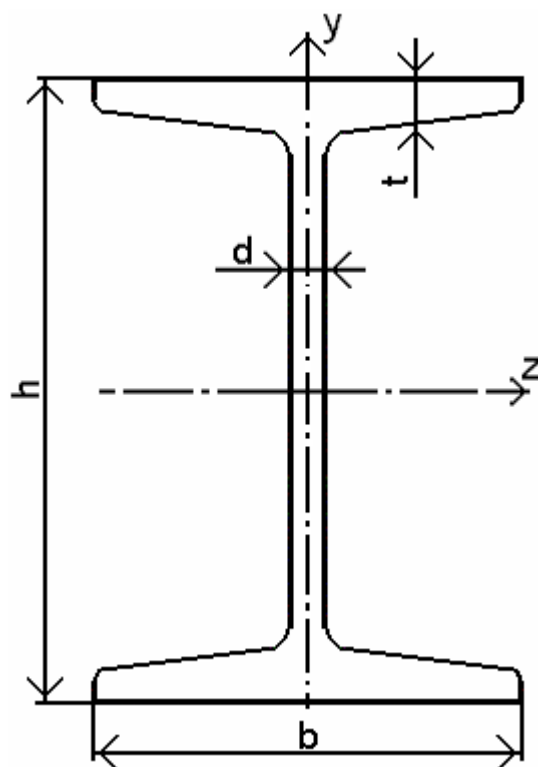


Рисунок 40

Таблица 1 – Двутавры (в соответствии с ГОСТ 8239-93)

№ двутавра	h , см	b , см	t , см	d , см	A , см ²	I_z , см ⁴	I_y , см ⁴
16	16	8,1	0,78	0,5	20,2	873	58,6
18	18	9	0,81	0,51	23,4	1290	82,6
20	20	10	0,84	0,52	26,8	1840	115
22	22	11	0,87	0,54	30,6	2550	157
24	24	11,5	0,95	0,56	34,8	3460	198
27	27	12,5	0,98	0,6	40,2	5010	260
30	30	13,5	1,02	0,65	46,5	7080	337
33	33	14	1,12	0,7	53,8	9840	419
36	36	14,5	1,23	0,75	61,9	13380	516
40	40	15,5	1,3	0,83	72,6	19062	667

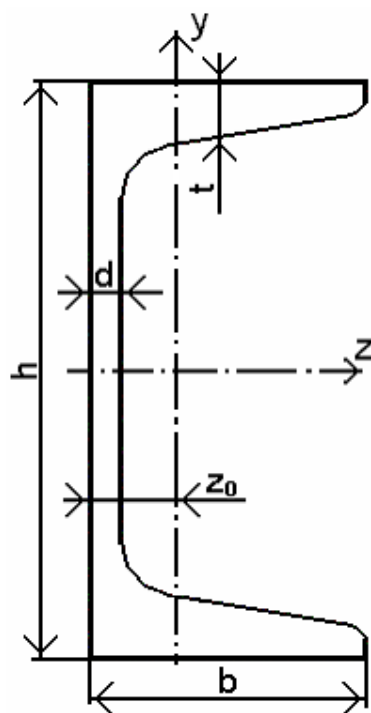


Рисунок 41

Таблица 2 – Швеллеры (в соответствии с ГОСТ 8240-97)

№ швеллера	h, см	b, см	d, см	t, см	A, см ²	I _z , см ⁴	I _y , см ⁴	z ₀ , см
16	16	6,4	0,5	0,84	18,1	747	63,3	1,8
18	18	7	0,51	0,87	20,7	1090	86	1,94
20	20	7,6	0,52	0,9	23,4	1520	113	2,07
24	24	9	0,56	1	30,6	2900	208	2,42
27	27	9,5	0,6	1,05	35,2	4160	262	2,47
30	30	10	0,65	1,1	40,5	5810	327	2,52
33	33	10,5	0,7	1,17	46,5	7980	410	2,59
36	36	11	0,75	1,26	53,4	10820	513	2,68

Центробежный момент инерции равнобокого уголка относительно его центральных осей **z** и **y** (рис. 42) определяется по формуле:

$$I_{zy} = \frac{I_{\text{MAX}} - I_{\text{MIN}}}{2} \cdot \sin(2\alpha),$$

где **I_{MAX} = I_{z0}** – максимальный момент инерции уголка;

I_{MIN} = I_{y0} – минимальный момент инерции уголка; эти величины известны из таблиц сортамента согласно номеру уголка.

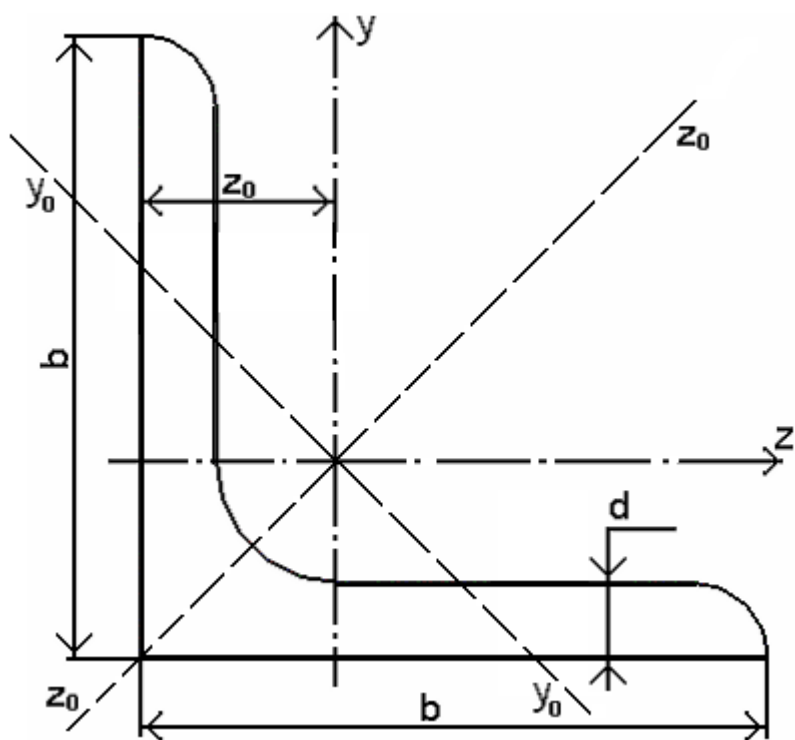


Рисунок 42

Таблица 3 – Уголки равнобокие (в соответствии с ГОСТ 8509-93)

№ уголка	b , см	d , см	A , см ²	I_z = I_y , см ⁴	I_{MAX} , см ⁴	I_{MIN} , см ⁴	z₀ , см
63 × 6	6,3	0,6	7,28	27,1	42,9	11,2	1,78
75 × 6	7,5	0,6	8,78	46,6	73,9	19,3	2,06
75 × 8	7,5	0,8	11,5	59,8	94,6	24,8	2,15
80 × 6	8	0,6	9,38	57	90,4	23,5	2,19
90 × 6	9	0,6	10,6	82,1	130	34	2,43
90 × 8	9	0,8	13,9	106	168	43,8	2,51
100 × 8	10	0,8	15,6	147	233	60,9	2,75
100 × 10	10	1	19,2	179	284	74,1	2,83
110 × 8	11	0,8	17,2	198	315	81,8	3
125 × 10	12,5	1	24,3	360	571	149	3,45

Центробежный момент инерции равнобокого уголка относительно его центральных осей **z** и **y** (рис. 43) будет иметь положительную или отрицательную величину в зависимости от значения угла α , определяемого расположением уголка относительно координатных осей **z** и **y**.

Если для совмещения оси **z₀** с осью **z** надо повернуть ось **z₀** по часовой стрелке, то $\alpha = -45^\circ$ и $I_{zy} < 0$, а если для совмещения оси **z₀** с осью **z** надо повернуть ось **z₀** против часовой стрелки, то $\alpha = 45^\circ$ и $I_{zy} > 0$.

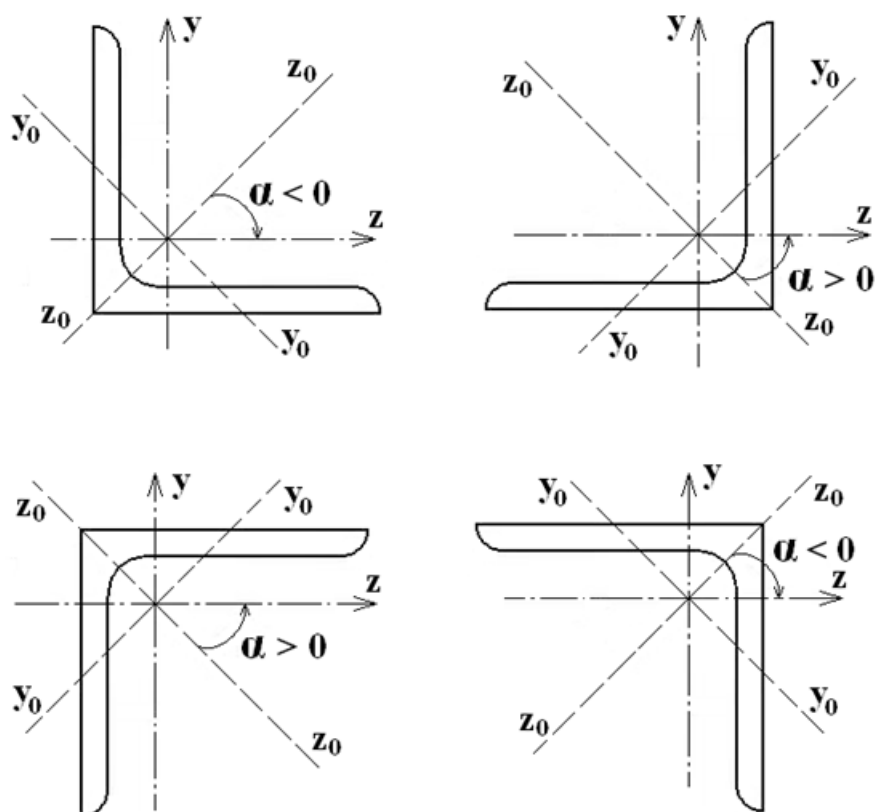


Рисунок 43

Также знак центробежного момента инерции наиболее просто можно определить следующим образом: если при выбранном направлении осей координат (рис. 44) заштрихованная область поперечного сечения уголка попадает в положительный или отрицательный квадрат, то $I_{zy} < 0$, в противном случае $I_{zy} > 0$.

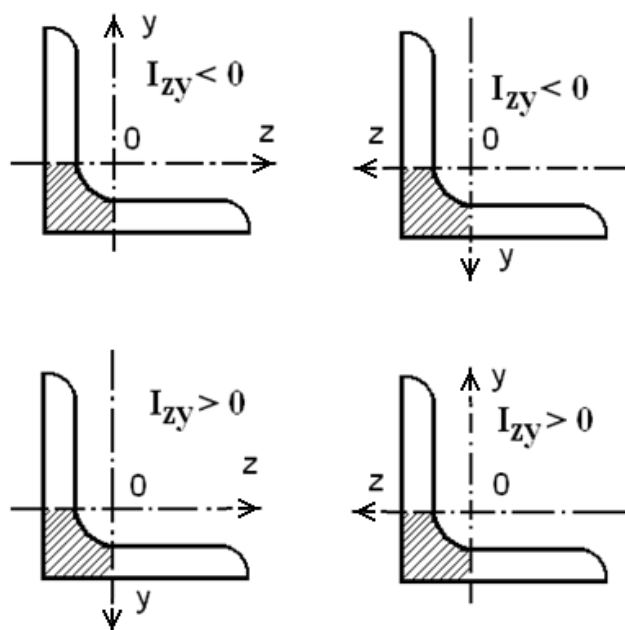


Рисунок 44

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Геометрические характеристики поперечных сечений»

1. Как формулируется понятие статического момента площади фигуры относительно заданной оси?
2. Какие оси называют центральными осями?
3. Как определить координаты центра тяжести простой и сложной плоской фигуры?
4. Как определить положение центра тяжести составной фигуры?
5. Что называется осевым, полярным и центробежным моментом инерции сечения? Каковы их единицы измерения? Какой знак они могут иметь?
6. Как вычислить осевые и полярный моменты инерции круга?
7. Как вычислить осевые моменты инерции прямоугольника?
8. Чему равна сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
9. Какая зависимость существует между полярными и осевыми моментами инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
10. Что такое центробежный момент инерции?
11. Какова зависимость между осевыми и полярными моментами инерции?
12. Изменяется ли сумма осевых моментов инерции при повороте осей координат?
13. Какова зависимость между осевыми моментами инерции относительно параллельных осей?
14. Относительно каких осей, параллельных центральным, осевые и центробежный моменты инерции будут наименьшими?
15. Для каких сечений центробежный момент инерции равен нулю?
16. Как установить знак центробежного момента инерции уголка?
17. Что представляют собой радиусы инерции, их размерность?
18. Какими свойствами обладает эллипс инерции?
19. Какие оси, проведенные в плоскости сечения, называются главными и какие главными центральными осями?

ЧИСТЫЙ СДВИГ

Напряженное состояние, при котором по граням выделенного элемента действуют только касательные напряжения, называется **чистым сдвигом**, а площадки – площадками чистого сдвига.

Экспериментально установлено, что существует линейная зависимость между углом сдвига γ и касательными напряжениями τ (рис. 45), являющейся **законом Гука при сдвиге**

$$\tau = G \cdot \gamma,$$

где **G** – **модуль сдвига**, характеризующий способность материала сопротивляться сдвиговой деформации, т. е. характеризующая жесткость материала при сдвиге.

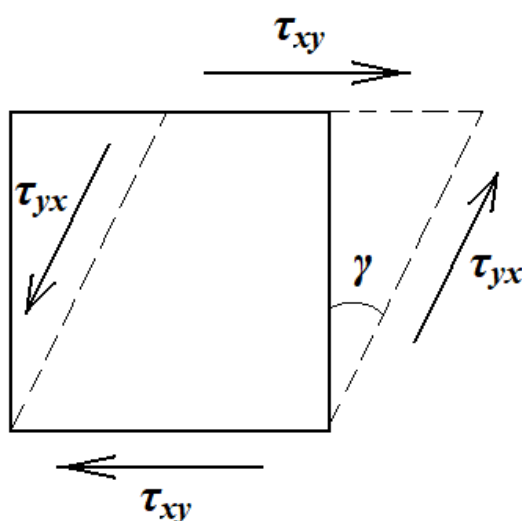


Рисунок 45

Величина модуля **G** сдвига связана с модулем упругости при растяжении **E** и коэффициентом Пуассона **ν** соотношением:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Чистый сдвиг»

1. Что называется деформацией чистого сдвига?
2. Какой случай плоского напряженного состояния называют чистым сдвигом?
3. Как деформируется при чистом сдвиге элементарный объем?
4. Что называют абсолютным сдвигом, относительным сдвигом, углом сдвига?
5. Как записывается закон Гука при сдвиге?
6. В каких единицах измеряется модуль сдвига?
7. Какая зависимость связывает модуль сдвига и модуль Юнга?

КРУЧЕНИЕ

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении стержня возникает лишь один внутренний силовой фактор – крутящий момент T .

Численно крутящий момент равен сумме моментов внешних сил, приложенных к отсеченной части стержня, взятых относительно продольной оси x . Нормальные силы, параллельные продольной оси x вклада в крутящий момент не вносят. С силами, лежащими в плоскости поперечного сечения стержня (интенсивности этих сил – касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy}), крутящий момент связывает вытекающее из его определения уравнение равновесия статики (рис. 46):

$$T = \int_A (\tau_{zx}y - \tau_{zy}z) dA.$$

Стержни, передающие крутящий момент называются **валами**. Внешние скручивающие моменты, как правило, передаются на вал в местах посадки на него шкивов, зубчатых колес и т. п. В большинстве случаев бывают заданы мощность, передаваемая валом, и числом оборотов, а величины скручивающих моментов определяются исходя из этих данных.

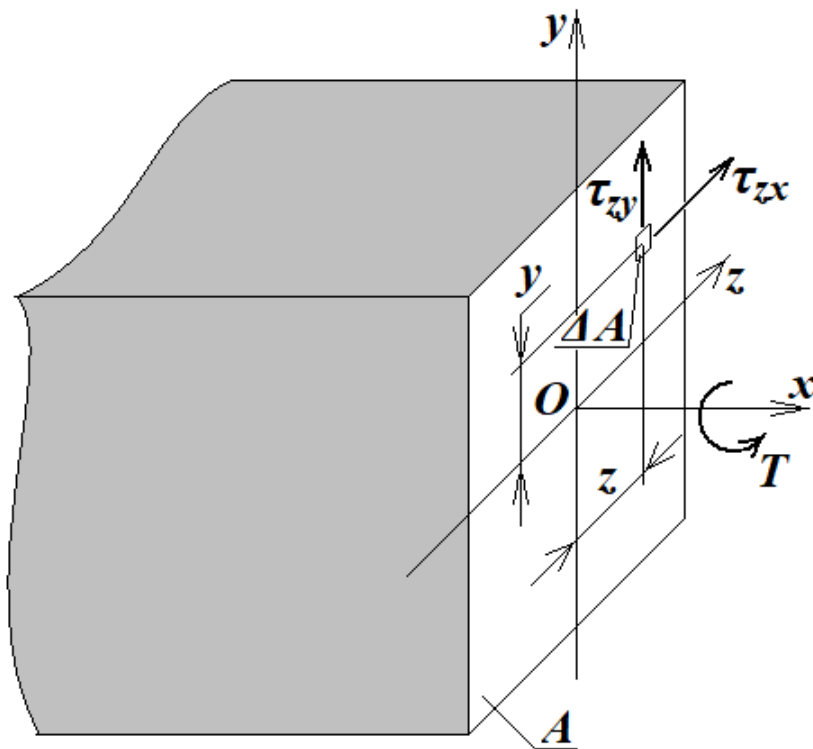


Рисунок 46

Крутящий момент в поперечном сечении вала считается положительным, когда внешний крутящий момент T действует по часовой стрелке при взгляде на соответствующий торец вала (рис. 47).

Эпюра крутящего момента – это график, показывающий изменение величины внутреннего крутящего момента в поперечных сечениях вала в зависимости от координаты x .

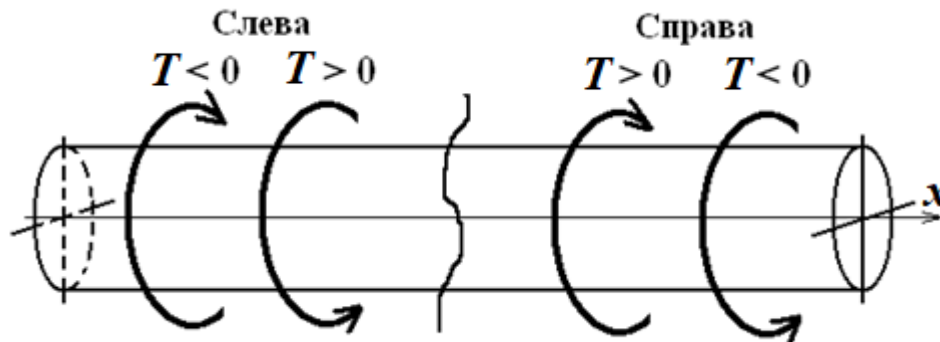


Рисунок 47

Напряжения в поперечном сечении при кручении

Опыты показывают, что если на поверхности стержня круглого сечения нанести прямоугольную сетку, а на торцевой поверхности нанести радиальные линии (рис. 48), то после деформации кручения окажется что:

- 1) все образующие поворачиваются на один и тот же угол γ , а прямоугольники, нанесенные на поверхности, превращаются в параллелограммы;
- 2) торцевые сечения остаются круглыми, плоскими, расстояния между ними не меняются;
- 3) каждое сечение поворачивается относительно другого на некоторый угол φ , называемый углом закручивания;
- 4) радиальные линии на торцевой поверхности остаются прямыми.

На основании этих наблюдений можно заключить, что может быть принята гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений), а в стержне возникают условия чистого сдвига, в поперечных сечениях действуют только касательные напряжения τ , нормальные напряжения равны нулю.

Рассмотрим поперечное сечение вала, расположенное на некотором расстоянии x от торцевого (рис. 48). На элементарной площадке dA будет действовать элементарная сила $\tau \cdot dA$, момент которой относительно оси вала равен $(\tau dA) \cdot \rho$. Крутящий момент T в сечении равен

$$T = \int_A \tau \rho dA.$$

Для того чтобы проинтегрировать это выражение, необходимо знать закон распределения напряжений в сечении. Выделим из вала элементарное кольцо длиной dx и толщиной $d\rho$ (рис. 49).

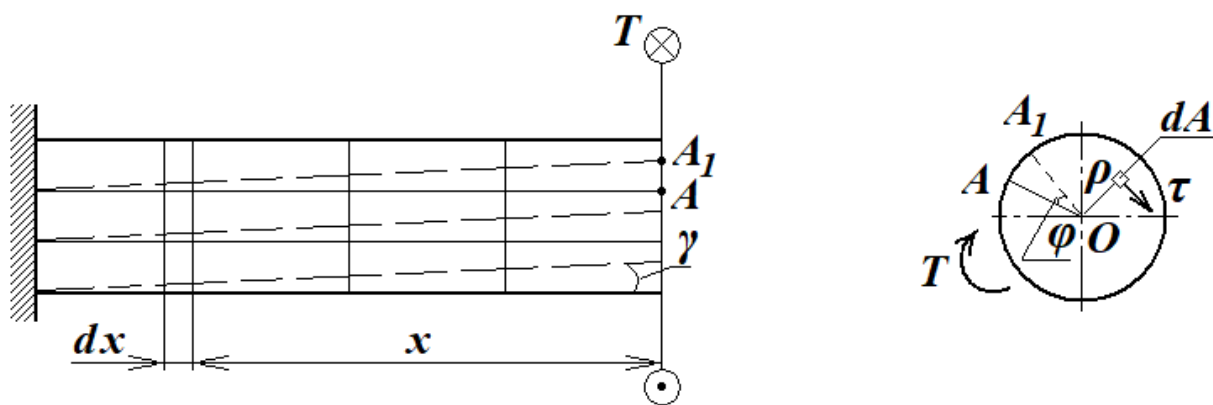


Рисунок 48

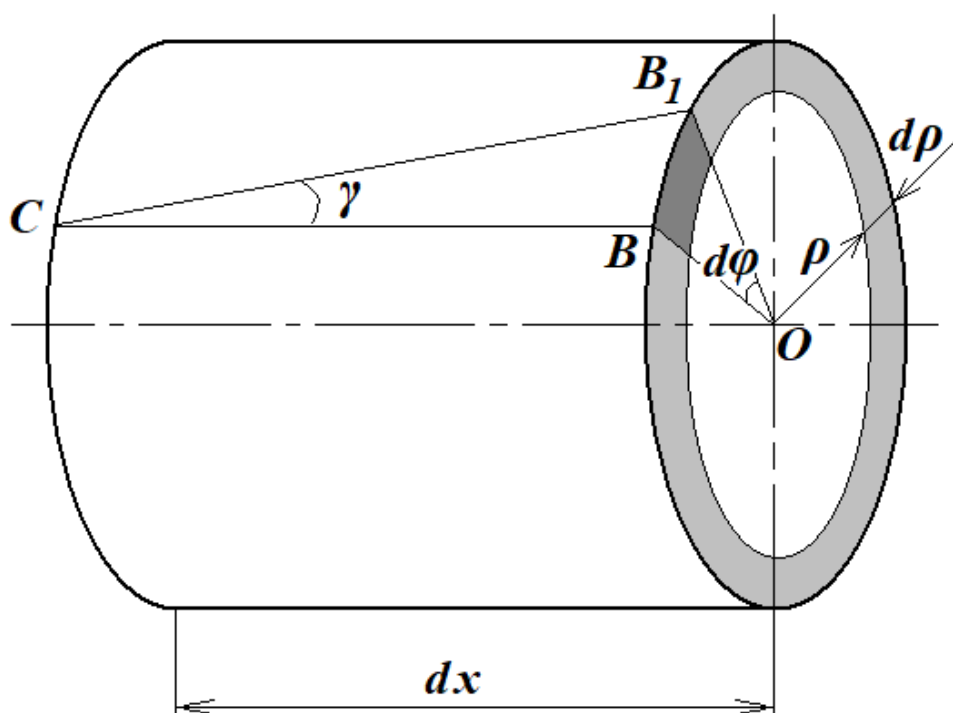


Рисунок 49

Правый торец элемента повернется относительно левого на угол $d\phi$, образующая CB повернется на угол γ и займет положение CB_1 . Угол γ – относительный сдвиг.

Из треугольника OBV_1 найдем:

$$BB_1 = (\rho + d\rho)d\phi \approx \rho d\phi.$$

Из треугольника CBV_1 :

$$BB_1 = \gamma dx,$$

откуда, приравнявая правые части, получим:

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}.$$

На основании закона Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dx}.$$

Тогда

$$T = \int_A \tau \rho dA = \int_A G\rho \frac{d\varphi}{dx} \rho dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA = GI_p \frac{d\varphi}{dx},$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p},$$

откуда, после интегрирования, найдем:

$$\varphi = \frac{TL}{GI_p},$$

где L – длина вала;

G – модуль сдвига материала вала;

I_p – полярный момент инерции сечения.

Величина наибольшего относительного угла закручивания (рад/м) на участке вала длиной L определяется по формуле:

$$\Delta\varphi = \frac{|\varphi_{\max}|}{L}.$$

Касательные напряжения будут равны:

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dx} = G\rho \frac{T}{GI_p} \Rightarrow \tau = \frac{T}{I_p} \rho.$$

Таким образом, касательные напряжения при кручении прямо пропорциональны расстоянию от центра тяжести сечения до рассматриваемой точки и одинаковы в точках, одинаково удаленных от центра тяжести сечения (рис. 50).

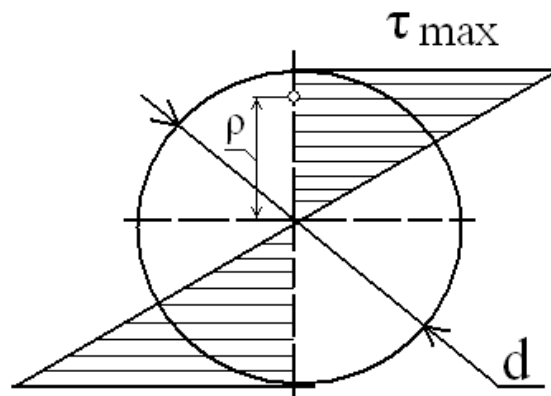


Рисунок 50

При $\rho = 0$ получим $\tau = 0$. Наибольшие напряжения возникают в точках контура сечения при $\rho = d/2$:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{T}{W_p},$$

где W_p – полярный момент сопротивления.

Для круглого сплошного сечения W_p определяется по формуле:

$$W_p = \frac{I_p \cdot 2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}.$$

Условие прочности при кручении вала

Условие прочности при кручении формулируется следующим образом: *максимальные касательные напряжения, возникающие в опасном сечении вала, не должны превышать допускаемых напряжений* и записывается в виде:

$$\tau_{\max} = \frac{|T_{\max}|}{W_p} \leq [\tau].$$

Из условия прочности можно определить диаметр вала сплошного сечения:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |T_{\max}|}{\pi \cdot [\tau]}}.$$

Рациональная форма сечения вала

Анализируя эпюру касательных напряжений (рис. 50) можно отметить, что наибольшие напряжения возникают на поверхности вала, в центральной части они значительно меньше и на продольной оси равны нулю. Следовательно, в сплошном валу материал, находящийся в центральной части в значительной степени недогружен, его вклад в прочность вала мал. Поэтому *рациональным* для валов считается *кольцевое сечение*.

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Кручение»

1. Какой вид нагружения (деформации) называют кручением?
2. Что называется валом?
3. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении вала и как они вычисляются?
4. Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого стержня при кручении?
5. Какие гипотезы положены в основу теории кручения стержня круглого поперечного сечения?
6. Возникают ли в поперечном сечении нормальные напряжения при кручении стержня круглого поперечного сечения?
7. Чему равен полярный момент инерции круглого сечения и в каких единицах он измеряется?
8. Чему равен полярный момент сопротивления для кольцевого сечения?
9. Что называется моментом сопротивления при кручении? В каких единицах он измеряется?
10. Чем объясняется, что стержень кольцевого поперечного сечения при кручении более экономичен по весу, чем сплошной?
11. Какой вид будет иметь закон Гука для скручиваемого стержня?
12. Как производится расчет на прочность при кручении?
13. В чем заключается расчет вала на прочность?
14. По какому закону распределяются напряжения в поперечном сечении круглого бруса при кручении?
15. Какой величиной характеризуется величина деформации при кручении?
16. Как вычисляют относительный угол закручивания вала?
17. Как вычислить абсолютный угол закручивания сечения вала?
18. Как записывают условие жесткости вала при кручении?

ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

Плоским изгибом называется вид деформации, при котором все нагрузки, перпендикулярные к оси балки, лежат в одной плоскости, называемой **силовой**. Эта плоскость совпадает с одной из главных плоскостей инерции поперечного сечения. В этом случае в поперечных сечениях стержня возникает два внутренних силовых фактора – поперечная сила Q и изгибающий момент M .

Прямой чистый изгиб

При **прямом чистом изгибе** в поперечном сечении стержня возникает только один внутренний силовой фактор – изгибающий момент M (рис. 51), а поперечные силы $Q = 0$. Чистый прямой изгиб может быть реализован при загрузении стержня парами сил, приложенными в торцевых сечениях стержня.

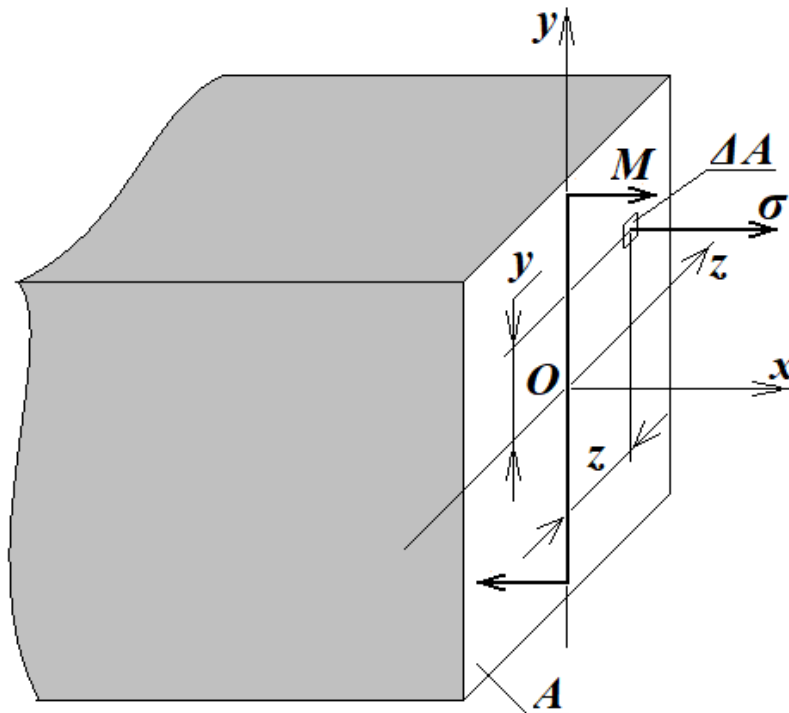


Рисунок 51

Поскольку изгибающий момент M по определению равен сумме моментов внутренних сил относительно продольной оси x , то с нормальными напряжениями σ его связывает вытекающее из этого определения уравнение:

$$M = \int_A \sigma y dA,$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

Сформулируем предпосылки теории чистого прямого изгиба (призматического) стержня. Для этого проанализируем деформации модели стержня из низкомодульного материала, на боковой поверхности которого нанесена сетка продольных и поперечных рисок (рис. 52). Поскольку поперечные риски при изгибе стержня парами сил, приложенными в торцевых сечениях, остаются прямыми и перпендикулярными к искривленным продольным рискам, это позволяет сделать вывод о выполнении *гипотезы плоских сечений*.

Замеряя изменение расстояний между продольными рисками, приходим к выводу о ненадавливании продольных волокон друг на друга.

Ортогональность продольных и поперечных рисок до и после деформации (как отражение действия закона плоских сечений) указывает также на отсутствие сдвигов и касательных напряжений в поперечных и продольных сечениях стержня.

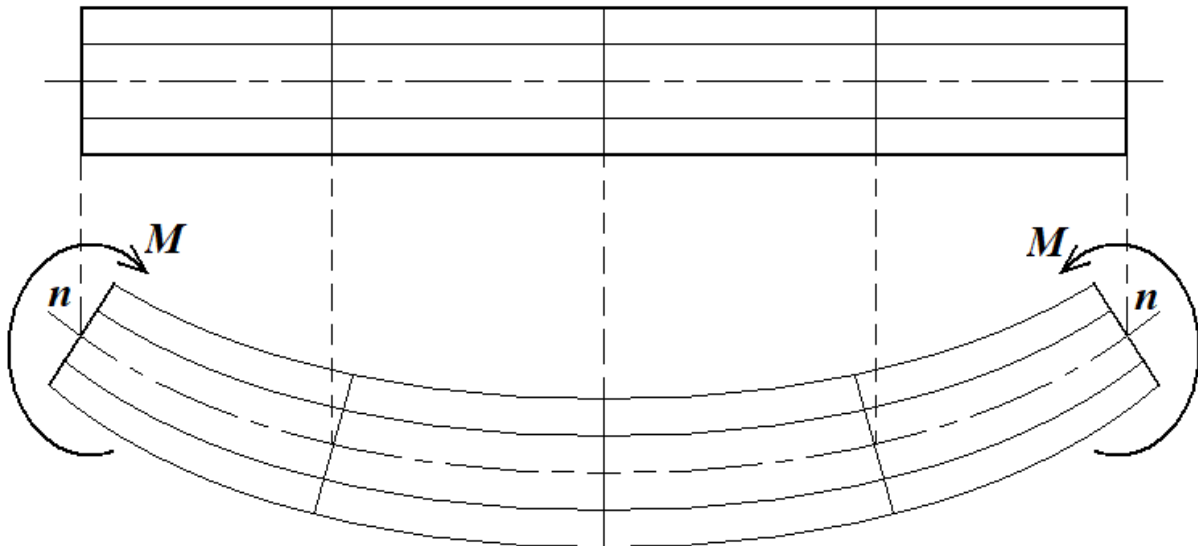


Рисунок 52

Чистый прямой изгиб призматического стержня сводится к одноосному растяжению или сжатию продольных волокон напряжениями σ . При этом часть волокон находится в зоне растяжения (на рис. 52 это нижние волокна), а другая часть – в зоне сжатия (верхние волокна). Эти зоны разделены нейтральным слоем ($n-n$), не меняющим своей длины, напряжения в котором равны нулю. Учитывая сформулированные выше предпосылки и полагая, что материал стержня линейно-упругий, то закон Гука в этом случае имеет вид:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon,$$

где E – модуль Юнга;

ε – относительная продольная деформация.

Напряжение при чистом изгибе

Определим нормальные напряжения, возникающие при чистом изгибе балки, находящейся под действием изгибающего момента M . Постоянство поперечного сечения призматического стержня и изгибающего момента M , обеспечивают постоянство радиуса кривизны ρ нейтрального слоя по длине стержня (рис. 53), нейтральный слой ($n-n$) описывается дугой окружности.

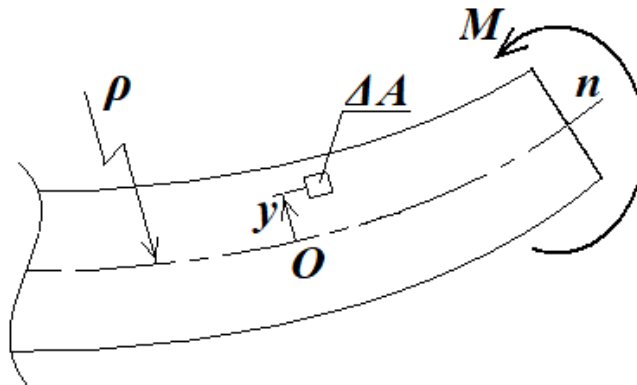


Рисунок 53

В произвольной точке балки возникают нормальные напряжения σ , действующие вдоль продольной оси x . Материал балки находится в линейном напряженном состоянии и деформации подчиняются закону Гука, то есть нормальные напряжения при изгибе можно определить из формулы $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Установим закон изменения деформаций при изгибе балки. Экспериментально получено, что в деформируемой балке поперечные сечения плоские до деформации остаются плоскими и поперечными после деформации, то есть имеет место *гипотеза плоских сечений*. При этом верхние волокна удлиняются, нижние укорачиваются, а продольная линия не меняет своей длины. Слой балки, не испытывающий при изгибе ни растяжения, ни сжатия, называется **нейтральным слоем**. Линия пересечения нейтрального слоя и плоскости поперечного сечения называется **нейтральной линией**.

Определим относительную деформацию волокна:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho},$$

где ρ – радиус кривизны нейтрального слоя;

y – расстояние от нейтрального слоя до рассматриваемого волокна балки. Подставляя это соотношение в закон Гука, получим:

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y,$$

т. е. напряжения σ линейно зависят от координаты y .

Используя интегральную связь между напряжениями и изгибающим моментом:

$$M = \int_A \sigma y dA,$$

подставляя в него соотношение для нормального напряжения σ , получим:

$$M = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E \cdot I_z}{\rho},$$

где I_z – осевой момент инерции сечения.

Тогда

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M}{I_z}$$

и выражение для нормального напряжения σ примет вид:

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y = \frac{M}{I_z} y.$$

Эпюра нормальных напряжений σ показана на рис. 54. Как видно, на нейтральной линии они равны нулю, максимального значения напряжения достигают в крайних верхних и нижних волокнах балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} y_{\max},$$

где $y_{\max}$ – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутого и сжатого волокон.

Обозначая

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}},$$

получим формулу для максимальных напряжений в произвольном сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z},$$

где W_z – осевой момент сопротивления при изгибе.

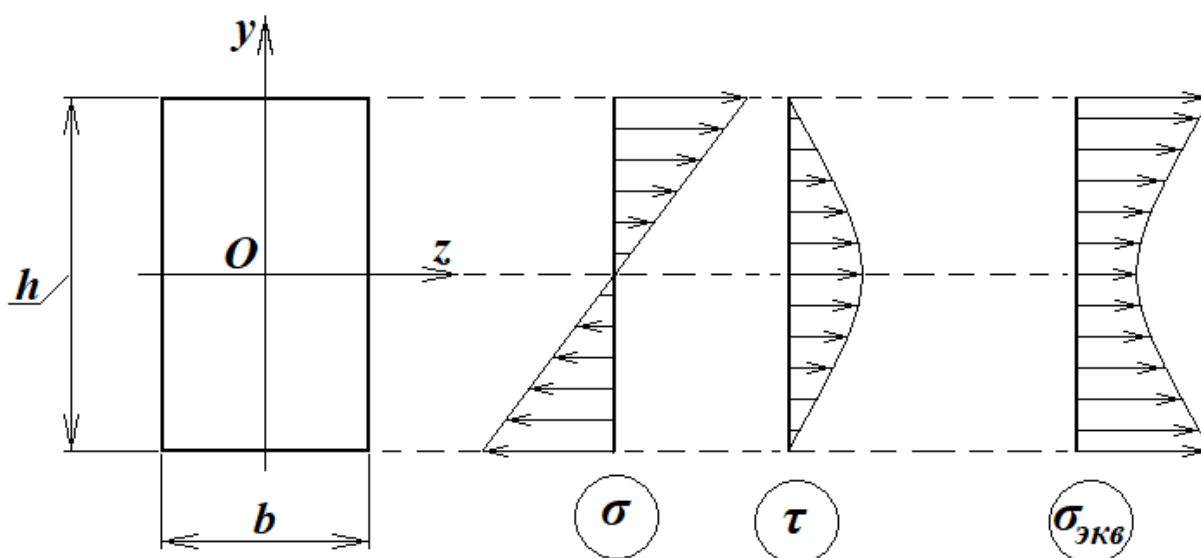


Рисунок 54

Условие прочности при чистом изгибе

Максимальное нормальное напряжение в балке возникает в сечении, где изгибающий момент M достигает наибольшей по модулю величины $M_{\max}$, то есть в опасном сечении:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z}.$$

Условие прочности при изгибе формулируется следующим образом: балка будет прочной, если максимальные нормальные напряжения не превысят допускаемых напряжений:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} \leq [\sigma].$$

Величина допускаемых напряжений $[\sigma]$ назначается в зависимости от условий эксплуатации и материала, из которого изготовлена балка.

Напряжения при поперечном изгибе

При *плоском поперечном изгибе* стержня в его поперечных сечениях действуют два внутренних силовых фактора – поперечная сила Q и изгибающий момент M . Изгибающий момент M свидетельствует о наличии нормальных напряжений σ в поперечных сечениях, которые с достаточной для практических целей точностью могут определяться по формулам чистого изгиба. Поэтому условия прочности по нормальным напряжениям имеют тот же вид, что и для чистого изгиба.

Касательные напряжения τ в поперечных сечениях балки появляются при нагружении балки сосредоточенными и распределенными силами. Величина их определяется *формулой Журавского*:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z}{b \cdot I_z},$$

где Q – поперечная сила,

b – ширина сечения,

I_z – осевой момент инерции сечения,

S_z – статический момент отсеченной части сечения относительно нейтральной оси.

Отсеченная площадь – часть площади поперечного сечения, отсеченная прямой линией, проведенной через рассматриваемую точку параллельно нейтральной оси.

Эпюра касательных напряжений τ показана на рис. 54.

Касательные напряжения τ в любой точке поперечного сечения имеют направление поперечной силы Q . Касательные напряжения постоянны по ширине поперечного сечения.

Короткие балки при расчете на прочность рассчитываются и по наибольшим касательным напряжениям. При этом условие прочности по нормальным напряжениям дополняют условием прочности по касательным напряжениям.

Условие прочности по касательным напряжениям будет иметь вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{z0}}{b \cdot I_z} \leq [\tau],$$

где $Q_{\max}$ – наибольшая по модулю поперечная сила,

S_{z0} – статический момент площади верхней половины сечения.

Величина **поперечной силы** Q в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на ось y всех внешних сил, действующих по одну сторону (справа или слева) от рассматриваемого сечения. Поперечная сила считается положительной, если она направлена слева вверх и справа вниз. При противоположных направлениях поперечная сила считается отрицательной (рис. 55а).

Величина **изгибающего момента** M в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме моментов внешних нагрузок, действующих по одну сторону (справа или слева) от рассматриваемого сечения. Изгибающий момент считается положительным, если он направлен слева от сечения по часовой стрелке, а справа – против часовой стрелки. При противоположных направлениях считается отрицательным (рис. 55б).

Энурой поперечных сил Q и изгибающих моментов M называется график, показывающий изменение соответствующих величин в зависимости от координаты x .

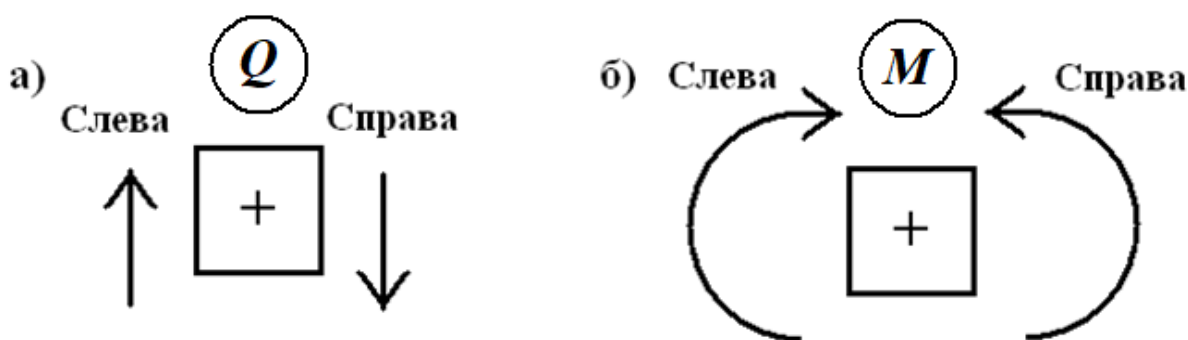


Рисунок 55

При изгибе балки существуют дифференциальные зависимости:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x), \quad \frac{dQ(x)}{dx} = q(x).$$

Из них следуют правила проверки построенных эпюр Q и M :

1. В тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные силы, включая опорные реакции, на эпюре Q будут скачки на их величину, а на эпюре M – излом эпюры.

2. В тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные моменты, включая опорные в заделках, на эпюре M будут скачки на их величину, а на эпюре Q особенностей не будет.

3. На участке, где действует равномерно распределенная нагрузка q , на эпюре Q будет наклонная линия, а на эпюре M – парабола, выпуклостью направленная навстречу нагрузке q .

4. Если эпюра Q проходит через ноль и меняет знак, то в этом сечении эпюра M будет иметь экстремум.

5. На участке, где отсутствует равномерно распределенная нагрузка q , эпюра Q будет представлена горизонтальной линией, а эпюра M – наклонной к оси x прямой.

6. На участке, где поперечная сила Q положительна, изгибающий момент M возрастает, а если сила Q отрицательна, то момент M убывает.

Полная проверка прочности балки

При поперечном изгибе в произвольной точке балки одновременно действуют как нормальные напряжения σ , так и касательные τ . Материал балки находится в плоском напряженном состоянии, поэтому для оценки прочности следует воспользоваться теориями прочности, например, третьей:

$$\sigma_{\text{экв}}^m = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Эпюра эквивалентных напряжений, построенная для прямоугольного сечения, показана на рис. 54.

Для обеспечения прочности балки при совместном действии как нормальных, так и касательных напряжений должно выполняться условие:

$$\sigma_{\text{экв}}^m = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

Рациональные формы сечений балок

Рациональным можно считать сечение балки, которое при равной с другими сечениями площади имеет наименьшие напряжения.

Максимальные напряжения σ_{max} , возникающие в балке при действии заданной нагрузки, тем меньше, чем больше осевой момент сопротивления сечения изгибу:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{|M_{\text{max}}|}{W_z}.$$

Поэтому, сечения с большим осевым моментом сопротивления W_z будут

более рациональными. Так, например, прямоугольное сечение, показанное на рис. 56, предпочтительнее использовать при изгибе под действием **вертикальной** нагрузки, так как осевой момент сопротивления сечения изгибу:

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

для него будет **больше**, чем для этого же сечения, но повернутого на 90° (так как $h > b$):

$$W_z = \frac{h \cdot b^2}{6}.$$

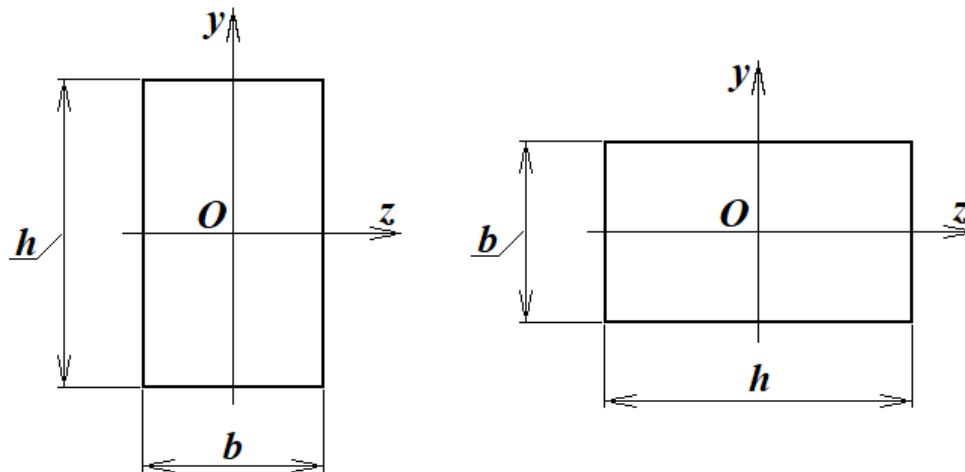


Рисунок 56

Анализируя эпюры напряжений (рис. 54), можно отметить следующее:

- на нейтральной линии нормальные напряжения σ равны нулю, а касательные напряжения τ достигают максимума;
- в крайних волокнах, наиболее удаленных от нейтральной линии, наоборот, нормальные напряжения σ достигают наибольших по модулю значений, а касательные напряжения τ равны нулю.

Расчетная практика показала, что нормальные напряжения σ для стержней, как правило, в несколько раз больше касательных τ . Поэтому имеет смысл проектировать сечения так, чтобы в зоне действия максимальных нормальных напряжений σ находилось бы большее количество материала, т. е. целесообразными будут сечения, показанные на рис. 57.

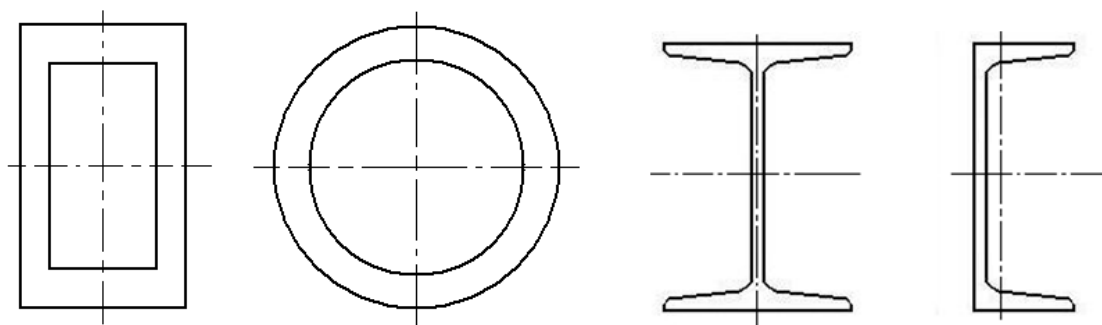


Рисунок 57

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Плоский изгиб»

1. Что называется балкой?
2. Какой вид нагружения называется изгибом?
3. Какие основные типы опор применяются для закрепления балок?
4. Какие внутренние усилия возникают в поперечном сечении балки при прямом изгибе?
5. Какие внутренние силовые факторы возникают в сечении балки при поперечном изгибе и как они вычисляются?
6. Каков физический смысл понятий «поперечная сила» и «изгибающий момент» в произвольном сечении балки?
7. Какие основные допущения положены в основу вывода формулы для нормальных напряжений, возникающих в балке при чистом изгибе?
8. Как распределяются нормальные напряжения по поперечному сечению балки?
9. Как записывается закон Гука при изгибе балки?
10. Что называется нейтральной осью поперечного сечения при изгибе и как она расположена?
11. Что называется осевым моментом сопротивления при изгибе? В каких единицах он измеряется?
12. Когда в поперечных сечениях балки возникают касательные напряжения?
13. По какой формуле вычисляются касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении балки при изгибе?
14. Как проводится расчет на прочность балки по нормальным напряжениям, как формулируется условие прочности?
15. Какие напряжения возникают в поперечном сечении балки при чистом изгибе, как они направлены, как они изменяются по высоте балки и как вычисляются?
16. Как распределяются нормальные напряжения по высоте сечения балки?
17. Что такое нейтральная ось сечения балки и где она расположена?
18. Чему равняется статический момент сечения балки относительно нейтральной оси?
19. По какой формуле определяются нормальные напряжения в сечениях балки при чистом и поперечном изгибах?

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Под статически неопределимой системой понимается та, для которой определение внешних реакций и всех внутренних силовых факторов не может быть произведено при помощи уравнений равновесия статики.

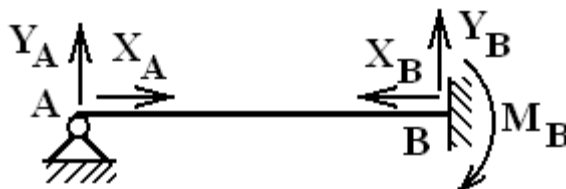


Рисунок 58

По сравнению со статически определимыми системами они имеют дополнительные связи, которые называют «лишними» или избыточными. В балке, показанной на рис. 58, две «лишние» связи.

Усилия в «лишних» связях называются «лишними» неизвестными; их число совпадает с числом «лишних» связей, которое определяет степень статической неопределимости системы.

Степень статической неопределимости

Степень статической неопределимости можно найти как разность между числом искомых усилий и числом независимых уравнений равновесия статики, которые можно составить для их нахождения. Для балки, показанной на рис. 58, число неизвестных реакций, возникающих под действием внешних нагрузок, равно пяти (Y_A , X_A , Y_B , X_B , M_B), а число уравнений равновесия статики – трем. Следовательно, балка является дважды статически неопределимой системой.

Степень статической неопределимости C_n плоской рамы:

$$C_n = O_n - 3 + 3 \cdot K - Ш,$$

где O_n – число опорных связей;

K – число замкнутых контуров;

$Ш$ – число простых шарниров.

Число опорных связей O_n напрямую зависит от типа опорных закреплений в рассматриваемой системе.

При наличии заделки число опорных связей равно трем ($O_n = 3$), так как в заделке могут возникать две реакции (вертикальная и горизонтальная) и один реактивный момент.

При наличии шарнирно-неподвижной опоры число опорных связей равно

двум ($O_{\Pi} = 2$), так как в шарнирно-неподвижной опоре могут возникать две реакции (вертикальная и горизонтальная).

При наличии шарнирно-подвижной опоры число опорных связей равно единице ($O_{\Pi} = 1$), так как в шарнирно-подвижной опоре может возникнуть только одна реакция, направленная перпендикулярно плоскости, по которой может перемещаться подвижный шарнир.

Следовательно, для рамы, изображенной на рис. 59, при любой внешней нагрузке, общее число опорных связей:

$$O_{\Pi} = 3 + 2 + 1 = 6,$$

а степень статической неопределимости:

$$C_{\Pi} = O_{\Pi} - 3 = 6 - 3 = 3.$$

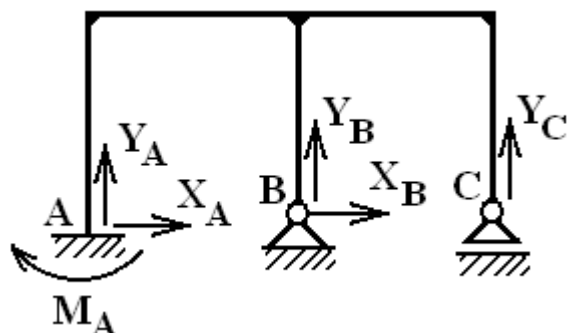


Рисунок 59

Наличие одного простого шарнира понижает степень статической неопределимости на единицу, так как в месте шарнирного соединения стержни могут свободно поворачиваться относительно друг друга, при этом не изгибаясь, т. е. ограничения связью нет, и изгибающий момент на шарнире равен нулю.

Таким образом, при наличии простого шарнира в раме определение внешних реакций сводится не только к решению трех уравнений системы статического равновесия тела на плоскости, но и к непосредственному решению составленных уравнений изгибающих моментов на участках, границей которых является простой шарнир, относительно неизвестных реакций, входящих в эти выражения.

Наличие замкнутого контура увеличивает степень статической неопределимости на три, так как при определении в нем внутренних усилий методом сечений необходимо снять дополнительные связи, т. е. позволить сечениям поворачиваться и смещаться в двух направлениях.

Следовательно, для рамы, изображенной на рис. 60, при любой внешней нагрузке, общее число опорных связей $O_{\Pi} = 4$ (Y_A, X_A, Y_B, X_B), число замкнутых контуров $K = 1$ (контур **DEFG**), число простых шарниров $\Pi = 1$ (шарнир **C**), степень статической неопределимости:

$$C_{\Pi} = O_{\Pi} - 3 + 3 \cdot K - \Pi = 4 - 3 + 3 \cdot 1 - 1 = 3.$$

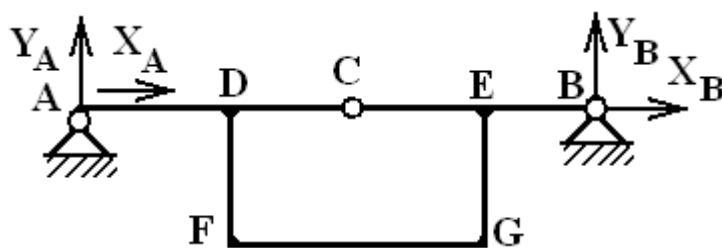


Рисунок 60

Основная система метода сил

В заданной системе отбрасываются «лишние» связи, а вместо них прикладываются «лишние» неизвестные $X_1, X_2, \dots, X_n$. При отбрасывании «лишних» связей нужно следить за тем, чтобы новая система была геометрически неизменяемой и статически определимой. Геометрически неизменяемой называется такая система, в которой перемещения точек или элементов возможны только за счет деформации стержней. Полученная таким образом статически определимая и геометрически неизменяемая система носит название основной системы метода сил. Для каждой статически неопределимой системы можно получить несколько различных вариантов основной системы.

На рис. 61б, в, г представлены возможные варианты основной системы для статически неопределимой рамы, изображенной на рис. 61а.

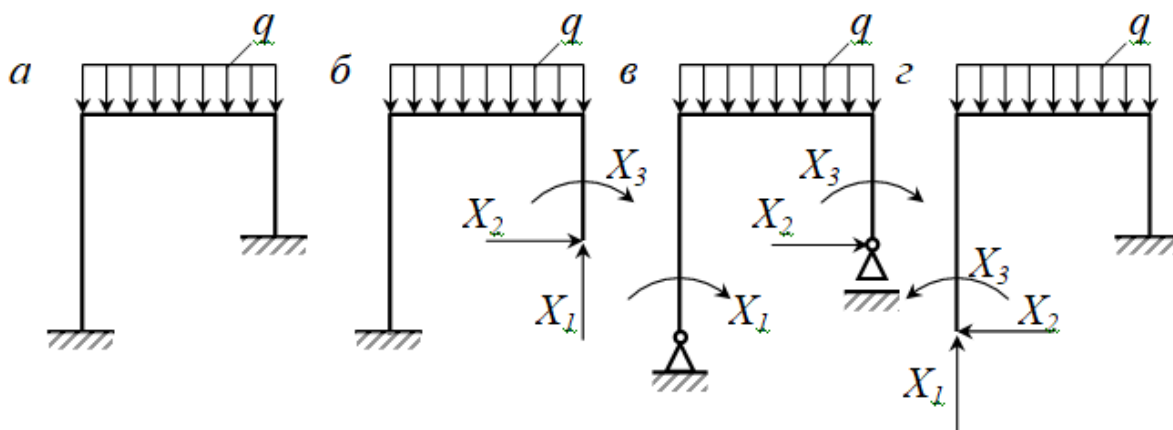


Рисунок 61

Для рам, имеющих жесткие закрепления, можно рекомендовать основную систему в виде консоли, рассматривая остальные опорные закрепления как лишние (рис. 61б, г). Исключения составляют симметричные рамы с защемленными концами. Здесь выбор основной системы удобно производить, разрезая раму на две симметричные консоли (рис. 62).

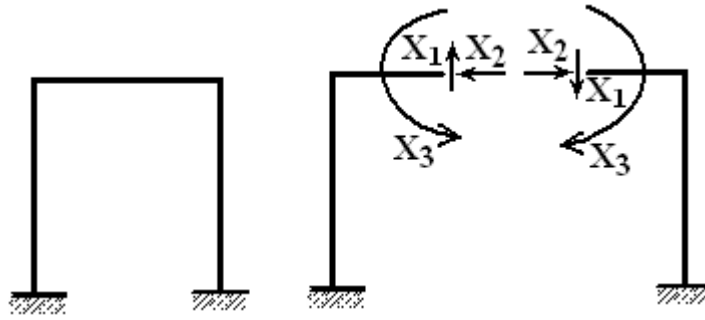


Рисунок 62

Канонические уравнения метода сил

Для нахождения «лишних» неизвестных составляются дополнительные уравнения, которые носят название уравнений совместности деформаций. Смысл их заключается в том, что перемещения в основной системе, вызванные внешними нагрузками и «лишними» неизвестными, должны быть такими же, как и в заданной системе.

Суммарные перемещения в основной системе, вызванные внешней нагрузкой и «лишними» неизвестными, по направлению самих неизвестных должны быть равны нулю.

На основании принципа независимости действия сил, в соответствии с которым перемещение, вызванное несколькими воздействиями, равно алгебраической сумме перемещений от каждого из этих воздействий в отдельности, уравнение деформаций для один раз статически неопределимой системы можно записать следующим образом:

$$\Delta_1 = \Delta_1(X_1) + \Delta_1(P) = 0.$$

Первое слагаемое представляет собой перемещение по направлению неизвестного, вызванное этим же неизвестным, а второе слагаемое $\Delta_1(P) \equiv \Delta_{1P}$ — перемещение по тому же направлению, вызванное внешней нагрузкой. Величину $\Delta_1(X_1)$ удобно представить в следующем виде:

$$\Delta_1(X_1) = \delta_{11} X_1,$$

где δ_{11} — перемещение по направлению неизвестного X_1 от $X_1 = 1$.

Тогда

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Данное выражение, записанное для один раз статически неопределимой системы, легко обобщается для случая более сложных статически неопределимых систем. Например, для n — раз статически неопределимой системы уравнения деформаций могут быть записаны в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + ... + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + ... + \Delta_{2P} = 0; \\ . \\ . \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + ... + \Delta_{nP} = 0. \end{cases}$$

Система линейных алгебраических уравнений носит название системы канонических уравнений метода сил (уравнения записываются по одному правилу или канону). Число уравнений совпадает со степенью статической неопределимости системы. Каждый член уравнения имеет размерность перемещения (линейного или углового).

Построение расчетных эпюр

Необходимо построить эпюры изгибающих моментов от единичных сил $\overline{X_i} = 1$. Эти эпюры называются единичными и обозначаются $\overline{M_i}$. Также необходимо построить эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки. Эта эпюра называется грузовой и обозначается **M**_р.

Определение перемещений

Перемещения δ_{ij} и Δ_{1P} проще всего определяются по методу Максвелла-Мора с использованием способа Верещагина:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\overline{M}_j \overline{M}_i}{EI} dx,$$

$$\Delta_{ip} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\overline{M}_i M_p}{EI} dx$$

где $\overline{M}_i$, $\overline{M}_j$, M_p – алгебраические выражения изгибающих моментов на k-м участке основной системы, вызванных, соответственно, действием только одной единичной силы $\overline{X}_i = 1$ или $\overline{X}_j = 1$, или внешней нагрузкой, EI – изгибная жесткость стержня.

Для стержневых систем интегралы Мора удобно вычислять по способу Верещагина. При этом операция интегрирования аналитических выражений изгибающих моментов заменяется перемножением эпюр.

Способ Верещагина применяется в случае, когда эпюры от единичных силовых факторов на прямолинейных участках оказываются линейными, а

грузовая эпюра имеет следующие очертания: прямоугольник, трапеция или парабола. В связи с этим, согласно способу Верещагина, интеграл вида:

$$\int \bar{M}_i M_p dx$$

равен произведению площади криволинейной эпюры Ω (рис. 63а) на ординату линейной эпюры $\bar{M}_i$, расположенную под центром тяжести криволинейной эпюры (рис. 63б). Следовательно, величины δ_{ij} и Δ_{ip} можно определить по формулам:

$$\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_i \bar{M}_{ci}}{EJ},$$

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_p \bar{M}_{ci}}{EJ},$$

где Ω_p – площадь грузовой эпюры момента на участке;

$\bar{M}_{ci}$ – ордината прямолинейной (единичной) эпюры, взятая под центром тяжести с грузовой эпюры M_p .

Если обе эпюры (единичная и грузовая) линейные, то безразлично, площадь какой из эпюр подсчитывается, но ордината момента обязательно берется с другой эпюры.

Далее приведены площади и координаты центров тяжести некоторых фигур (рис. 64).

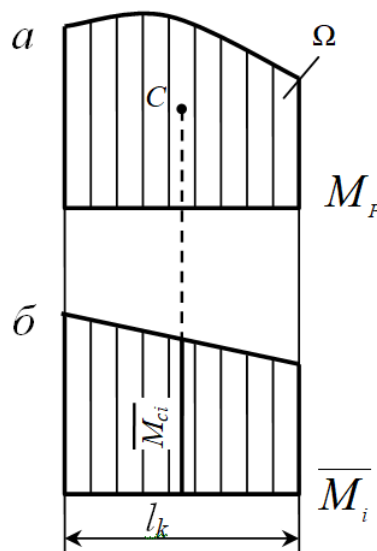


Рисунок 63

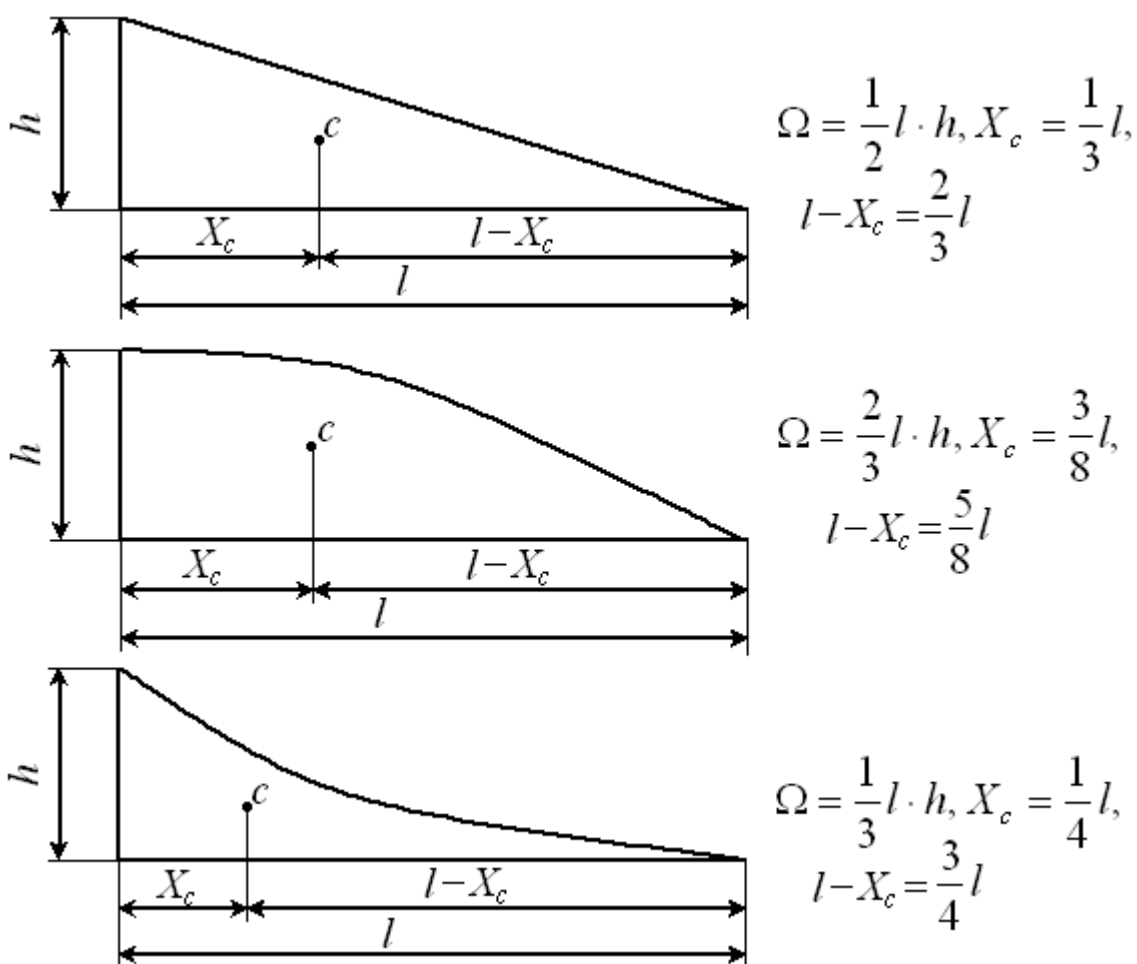


Рисунок 64

В тех случаях, когда перемножаются две эпюры, имеющие вид трапеций, или, когда одна эпюра имеет вид трапеции, а другая – квадратичной параболы, можно использовать формулу Симпсона. Знаки определяются следующим образом: если эпюры направлены в одну сторону, то ставится знак «+», а если в разные, – то «-». Результатом перемножения будут следующие выражения, приведенные на рис. 65.

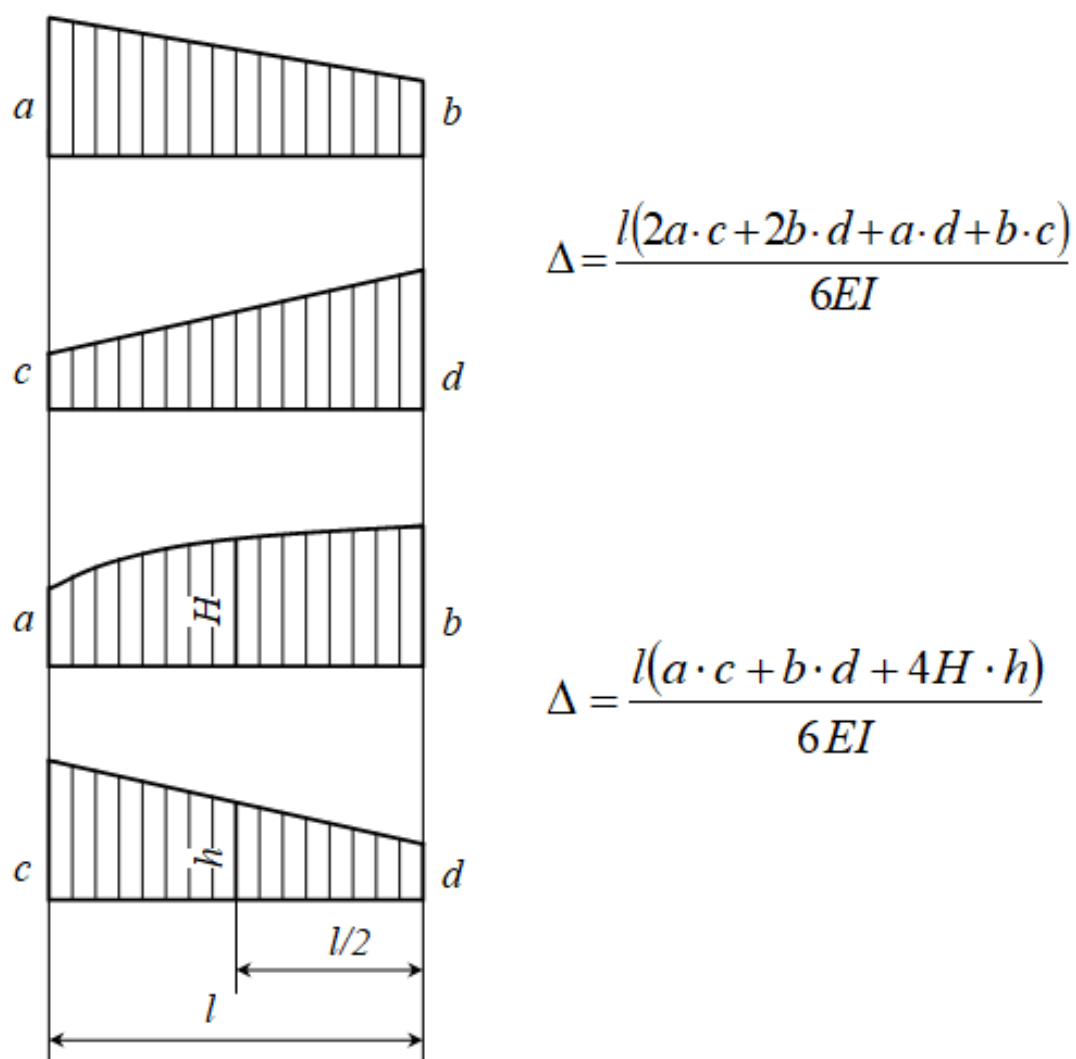


Рисунок 65

Определение величин «лишних» неизвестных и построение эпюр внутренних силовых факторов

Подставив величины найденных перемещений в систему канонических уравнений и решив ее, находим значения неизвестных X_i . Положительные значения «лишних» неизвестных X_i свидетельствует о том, что направление реакций совпадает с их направлением, принятым в единичном состоянии. К основной системе прикладываем заданную нагрузку и найденные «лишние» неизвестные X_i , после чего строим эпюры внутренних усилий. В общем случае нагружения в поперечных сечениях элементов рамы будут возникать три внутренних силовых фактора: изгибающий момент M , поперечная сила Q и продольная сила N .

Учет симметрии при расчете статически неопределимых рам

При учете свойства симметрии расчет статически неопределимой рамы существенно упрощается, так как количество «лишних» уменьшается. На рис. 66а изображена геометрически симметричная рама. Геометрически симметричная рама может быть также симметрично нагружена (рис. 66б). Нагрузка на симметричной раме также может иметь свойство так называемой кососимметрии (рис. 66в). Аналогичным образом свойства симметрии и кососимметрии относятся к внутренним силовым факторам в поперечных сечениях рамы, которые становятся лишними неизвестными при рассечении рамы по линии симметрии (рис. 66г). Так, поперечные силы X_1 называются кососимметричными силовыми факторами, а продольные силы X_2 и изгибающие моменты X_3 называются симметричными силовыми факторами. При расчете симметричной рамы можно руководствоваться следующим: при симметричной внешней нагрузке кососимметричные силовые факторы равны нулю, а при кососимметричной внешней нагрузке симметричные силовые факторы равны нулю. Это происходит потому, что если перемножать симметричную и кососимметричную эпюры, то в ответе будет получаться ноль, так как результат перемножения эпюр на левой половине рамы равен результату перемножения эпюр на правой половине, только с обратным знаком, что в сумме дает ноль.

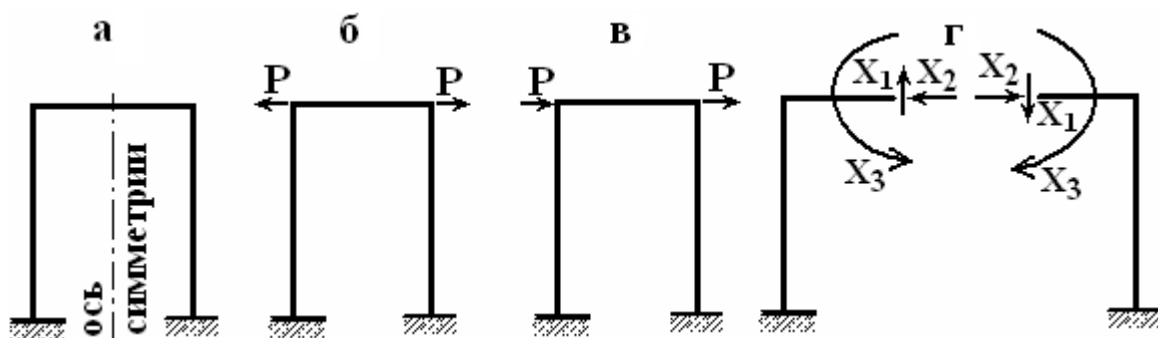


Рисунок 66

**Контрольные вопросы для самопроверки по разделу
«Статически неопределимые системы»**

1. Какие системы называются статически неопределимыми?
2. Что такое степень статической неопределимости и как она вычисляется?
3. Каков общий план решения статически неопределимых задач?
4. В чем заключается идея метода сил?
5. Какие неизвестные усилия могут рассматриваться как «лишние»?
6. Что выражает каждое из уравнений метода сил?
7. Какая система называется основной, какая – эквивалентной?
8. В чем заключается выбор основной системы?
9. Сколько канонических уравнений метода сил необходимо записать для статически неопределимой системы?
10. Что означает каноническое уравнение метода сил?

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Деталь испытывает сложное сопротивление тогда, когда она испытывает одновременно несколько простейших видов деформации.

В общем случае нагружения в поперечном сечении стержня действуют шесть усилий (продольная сила N , два изгибающих момента M_y и M_z , две поперечные силы Q_y и Q_z , крутящий момент M_k).

Таким образом, стержень может испытывать следующие виды деформации: поперечные изгибы в горизонтальной и вертикальной плоскостях, продольную деформацию и кручение.

Совместное действие изгиба в главных плоскостях инерции XOY и XOZ называется сложным (косым) изгибом (рис. 67).

Стержень испытывает внецентренное действие нагрузки, когда продольная сила (сжимающая или растягивающая) приложена эксцентрично, т. е. есть направление ее действия не совпадает с продольной осью стержня (рис. 68).

При совместном действии изгибающих моментов и продольных сил стержень испытывает сложный изгиб с продольной деформацией (рис. 69).

Изгиб с кручением также является одним из видов сложного сопротивления.

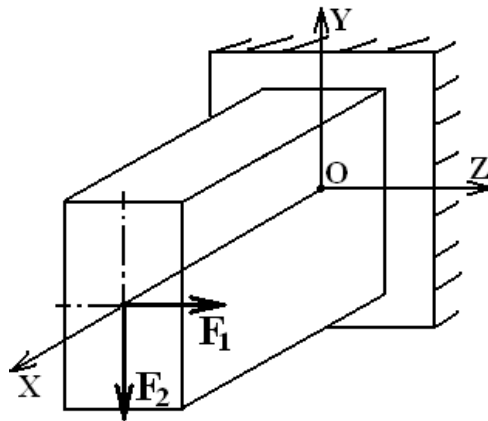


Рисунок 67

В машиностроительных конструкциях характерным примером деталей, работающих на изгиб и кручение, являются валы различных машин.

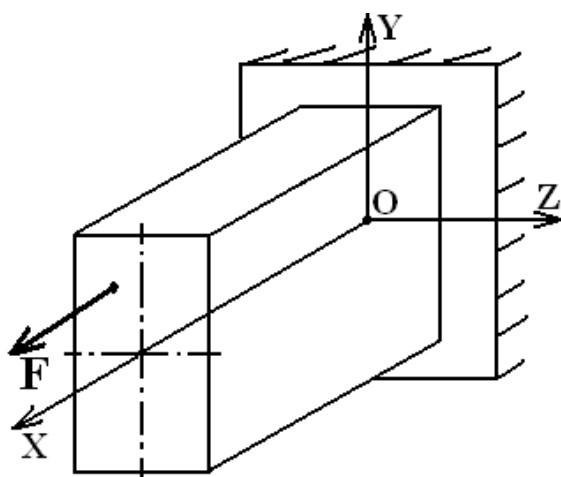


Рисунок 68

Если стержень достаточно жесткий, то расчет можно вести по недеформированной схеме и при определении нормальных и касательных напряжений применить принцип суперпозиции:

$$\sigma = \sigma(N) + \sigma(M_z) + \sigma(M_y) + \sigma(M_k),$$

$$\tau = \tau(Q_y) + \tau(Q_z) + \tau(M_k).$$

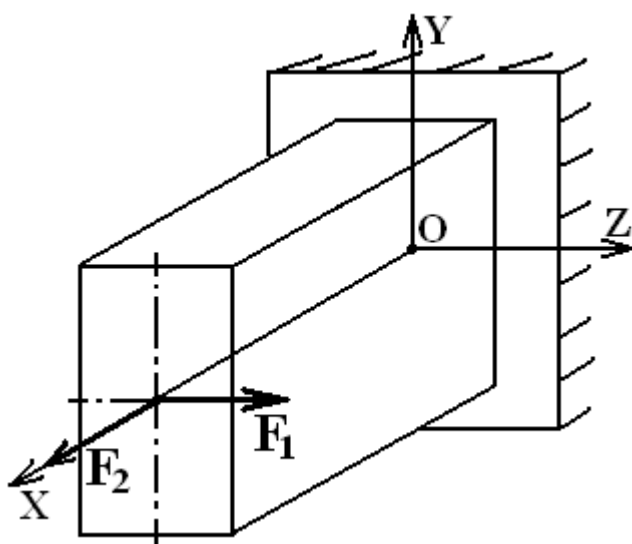


Рисунок 69

При работе вала в его поперечных сечениях преобладающими являются

нормальные напряжения $\sigma_{\text{И}}$ от изгиба (если нет продольной деформации) и касательные напряжения $\tau_{\text{КР}}$ от кручения.

Проверку прочности валов, изготовленных из пластичных материалов, следует производить по третьей или четвертой теории прочности, так как они используются для пластичных материалов.

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{И}}^2 + 4\tau_{\text{КР}}^2} \leq [\sigma],$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_{\text{И}}^2 + 3\tau_{\text{КР}}^2} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

Эти неравенства являются условиями прочности валов при одновременном их изгибе с кручением. Они должны выполняться во всех сечениях вала.

Для круглых поперечных сечений полярный момент сопротивления равен удвоенному моменту сопротивления относительно любой центральной оси ($W_{\text{Р}} = 2 \cdot W_{\text{Z}} = 2 \cdot W_{\text{Y}}$).

Наибольшие значения нормального и касательного напряжений для круглого сплошного вала достигаются в точках на его контуре, и они определяются, соответственно, следующими формулами (рис. 70):

$$\sigma_{\text{И}} = \frac{M_{\text{И}}}{W_{\text{Z}}},$$

$$\tau_{\text{КР}} = \frac{M_{\text{К}}}{W_{\text{Р}}} = \frac{M_{\text{К}}}{2 \cdot W_{\text{Z}}}.$$

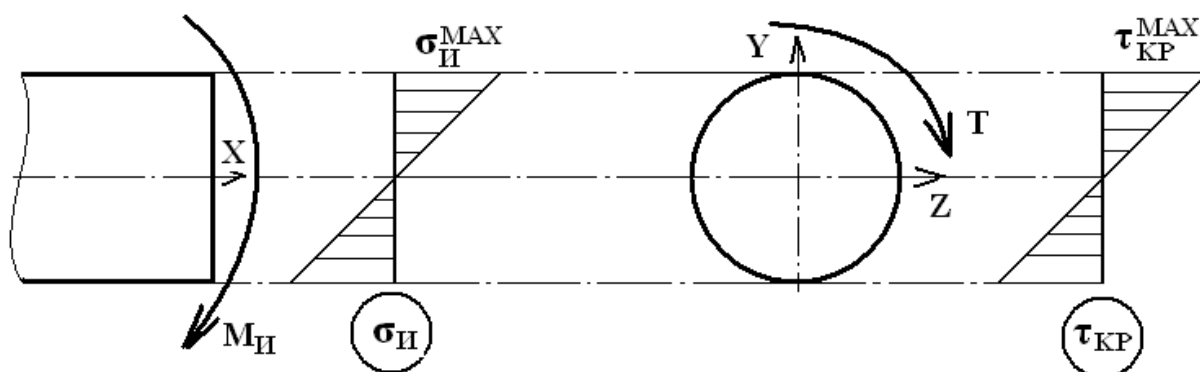


Рисунок 70

При расчете элементов, работающих одновременно на изгиб и кручение, в первую очередь необходимо выяснять расчетные значения изгибающих $M_{\text{И}}$ и крутящих моментов $M_{\text{К}}$.

Подставив выражения для напряжений в условия прочности, получим:

$$\sigma^{\text{III}}_{\text{ЭКВ}} = \frac{\sqrt{M_{\text{И}}^2 + M_{\text{К}}^2}}{W_Z} \leq [\sigma],$$

$$\sigma^{\text{IV}}_{\text{ЭКВ}} = \frac{\sqrt{M_{\text{И}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{К}}^2}}{W_Z} \leq [\sigma].$$

Выражения, стоящие в числителе, назовем эквивалентными моментами:

$$M^{\text{III}}_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M_{\text{И}}^2 + M_{\text{К}}^2},$$

$$M^{\text{IV}}_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M_{\text{И}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{К}}^2}.$$

Вал изгибается в горизонтальной и вертикальной плоскостях, но так как поперечное сечение круглое, то результирующий изгибающий момент определяется по формуле:

$$M_{\text{И}} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2},$$

т. е.
$$M^{\text{III}}_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2 + M_{\text{К}}^2},$$

$$M^{\text{IV}}_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2 + 0,75 \cdot M_{\text{К}}^2}.$$

В общем случае M_Y , M_Z и $M_{\text{К}}$, а следовательно, и эквивалентные моменты изменяются по длине вала. Для проверки прочности вала необходимо знать максимальную величину эквивалентного момента $M_{\text{ЭКВ, max}}$.

Часто по виду эпюр M_Y , M_Z и $M_{\text{К}}$ можно сразу определить наиболее опасное сечение, т. е. сечение, где эквивалентный момент максимален. В некоторых случаях приходится рассматривать два-три сечения, определять в них значение эквивалентного момента и таким образом найти $M_{\text{ЭКВ, max}}$.

Подбор сечения сплошного вала, т. е. определение его диаметра, осуществляется из условия прочности:

$$\frac{M_{\text{ЭКВ, MAX}}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Для круглых поперечных сечений:

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32},$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{ЭКВ, MAX}}}{\pi \cdot [\sigma]}}.$$

Полученное значение диаметра следует округлить до ближайшего большего из нормального ряда чисел.

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Сложное сопротивление»

1. Что называется сложным сопротивлением?
2. Что называется сложным изгибом?
3. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях балки при действии сложного изгиба?
4. Какой случай изгиба называется косым изгибом?
5. Возможен ли косой изгиб при чистом изгибе?
6. Как вычисляются нормальные напряжения в точках поперечного сечения при косом изгибе с помощью принципа сложения действия сил?
7. В каких точках поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при косом изгибе?
8. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях вала при совместном действии изгиба и кручения?
9. Какие напряжения возникают при совместной деформации кручения и изгиба и как они вычисляются?
10. Где находится опасное сечение вала и как оно определяется?
11. В каких точках круглого поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при изгибе с кручением?
12. Как находится величина расчетного момента при изгибе с кручением стержня круглого поперечного сечения?

ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА

Напряжения при ударе

Под ударной понимается нагрузка, действующая в течение короткого времени. Продолжительность действия ударной нагрузки должна быть значительно меньше периода собственных колебаний системы. За время действия такой нагрузки не произойдет сколько-нибудь заметных перемещений масс системы, но массы приобретут за это время конечные скорости.

Отношение динамического значения некоторого фактора к соответствующему статическому значению этого фактора называется динамическим коэффициентом. Например, если речь идет о напряжении, то

$$K_{дин} = \frac{\sigma_{дин}}{\sigma_{ст}}.$$

Все факторы в рассматриваемой системе при ударе возрастают в одно и то же число раз по сравнению со статическим нагружением. Это число и есть динамический коэффициент.

При поперечном ударе (рис. 71) динамический коэффициент можно вычислить по следующей формуле:

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}} \cdot \frac{1}{1 + m/M}},$$

где h – высота падения груза;

$\Delta l_{ст}$ – перемещение, вызванное падающим грузом, но приложенным статически;

m – масса ударяемого тела;

M – масса ударяющего тела.

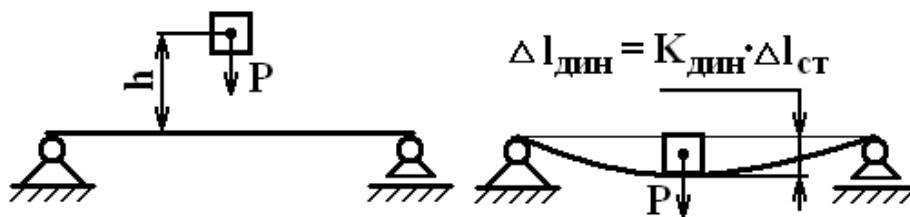


Рисунок 71

Формула для динамического коэффициента выведена на основании закона сохранения энергии при следующих допущениях:

- 1) тела после удара движутся совместно и друг от друга не отделяются;
- 2) выполняется закон Гука, т. е. напряжение при ударе меньше, чем предел пропорциональности;

3) та часть энергии, которая переходит в теплоту и в энергию колебательного движения, считается пренебрежимо малой.

Если масса балки, подвергающейся удару, значительно меньше массы падающего на нее груза, то динамический коэффициент можно вычислить по следующей формуле:

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}}.$$

Динамическое значение напряжения при ударном действии нагрузки можно вычислить по формуле:

$$\sigma_{дин} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}} \right) \cdot \sigma_{ст}.$$

Значение динамического напряжения зависит от величины статического перемещения ударяемого тела, т. е. не только от формы и размеров поперечного сечения стержня, но и от его длины и модуля упругости материала.

При горизонтальном ударе формула для динамического коэффициента будет выглядеть так:

$$K_{дин} = \sqrt{\frac{V^2}{g \cdot \Delta l_{ст}} \cdot \frac{1}{1 + m/M}},$$

где V – скорость движения груза;

g – ускорение силы тяжести;

m – масса ударяемого тела;

M – масса ударяющего тела;

$\Delta l_{ст}$ – перемещение, вызванное силой, равной весу ударяющего тела, приложенной статически.

Напряжения в движущихся деталях

Нагрузка, приложенная к системе, называется динамической, если при расчете нельзя пренебречь силами инерции, возникающими в элементах системы. Силы инерции выступают как дополнительная внешняя нагрузка. Их взаимодействие с силами упругости часто порождает возникновение колебаний, которые могут привести к многократному росту внутренних усилий и напряжений.

Известно, что элементарная сила инерции dF , действующая на бесконечно малый объем тела dV , определяется как произведение ускорения a этого объема на его массу dm :

$$dF = a \cdot dm = a \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot dV.$$

где γ – удельный вес материала;

g – ускорение силы тяжести.

Сила инерции всегда направлена противоположно ускорению.

Пусть однородный стержень AB вращается вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω , причем вектор угловой скорости параллелен оси стержня (рис. 72а).

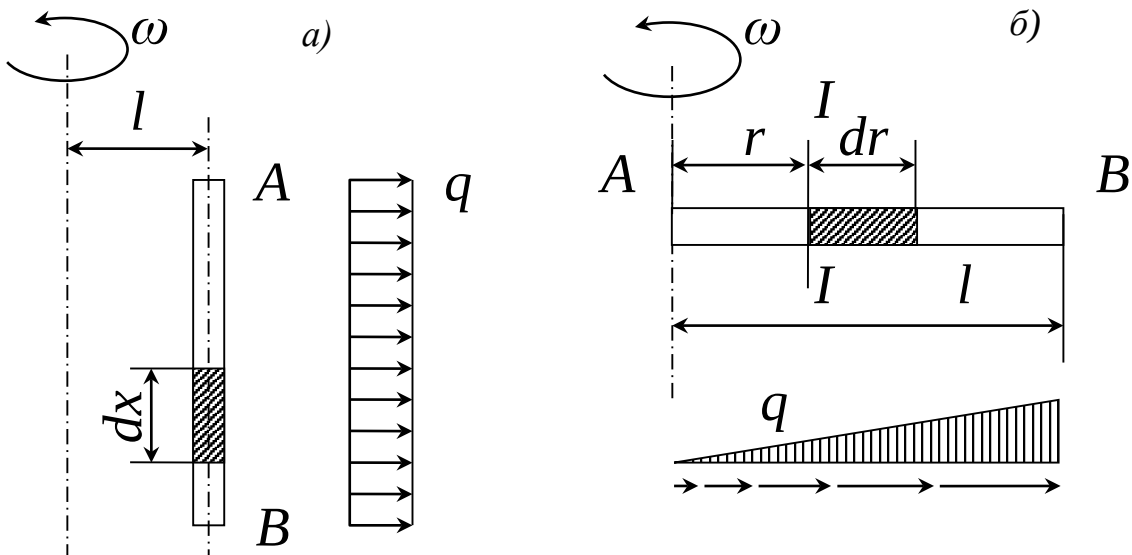


Рисунок 72

Все точки на оси стержня имеют одинаковые ускорения a , равные центростремительному ускорению a_n :

$$a = a_n = \omega^2 \cdot l,$$

где l – расстояние между осями.

Элементарная сила инерции будет равна:

$$dF = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dV = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot l \cdot A \cdot dx,$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

Отсюда найдем интенсивность сил инерции, распределенных по длине стержня:

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{\gamma A}{g} \omega^2 l.$$

Эпюра сил инерции изображена справа на рис. 72а.

Пусть теперь ось стержня перпендикулярна оси вращения (рис. 72б), и торцевое сечение A касается оси. Выберем произвольное сечение $I-I$, удаленное от оси вращения на расстояние r . На элемент dr , расположенный правее этого сечения, действует элементарная сила инерции:

$$dF = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot A \cdot dr.$$

Тогда интенсивность сил инерции в сечении с координатой r будет:

$$q_r = \frac{dF}{dr} = \frac{\gamma A}{g} \omega^2 r.$$

При $r = 0$, $q_r = 0$.

При $r = l$, $q_r = \gamma \cdot A \cdot \omega^2 \cdot l/g$.

На рис. 72б внизу изображена эпюра сил инерции, где стрелками указаны их направления.

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Динамическая нагрузка»

1. Какие нагрузки называются статическими, какие – динамическими?
2. Как определяют величины динамических напряжений?
3. Что такое коэффициент динамичности?
4. Что полагается в основу при выводе формул для определения перемещений при ударе?
5. Как определяется коэффициент динамичности в расчётах на удар при поперечном действии нагрузки?
6. Как определяется величина динамического коэффициента?
7. Как определяется величина динамической силы при ударе?
8. Какие допущения принимаются при ударе?
9. Каким образом определяются величины напряжений и динамического коэффициента при равноускоренном напряжении?
10. Каким образом можно уменьшить значение коэффициента динамичности при ударе?
11. Как влияет высота падения груза на прочность балки?

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Понятие об устойчивости

Под **устойчивостью** понимается свойство системы сохранять свое состояние равновесия при внешних воздействиях. Если система таким свойством не обладает, то она является неустойчивой.

Система при потере устойчивости может вести себя по-разному. Обычно происходит переход к некоторому новому положению равновесия, что в подавляющем большинстве случаев сопровождается большими перемещениями, возникновением пластических деформаций или разрушением.

Приложим к прямолинейному стержню сжимающую силу (рис. 73). Если значение сжимающей силы невелико, то стержень после горизонтального перемещения с колебаниями будет возвращаться к первоначальному прямолинейному состоянию равновесия. Такое положение равновесия считается устойчивым (рис. 73а). Если увеличить значение сжимающей силы, то при определенном ее значении стержень не вернется в первоначальное положение равновесия и такое равновесие считается неустойчивым (рис. 73б).

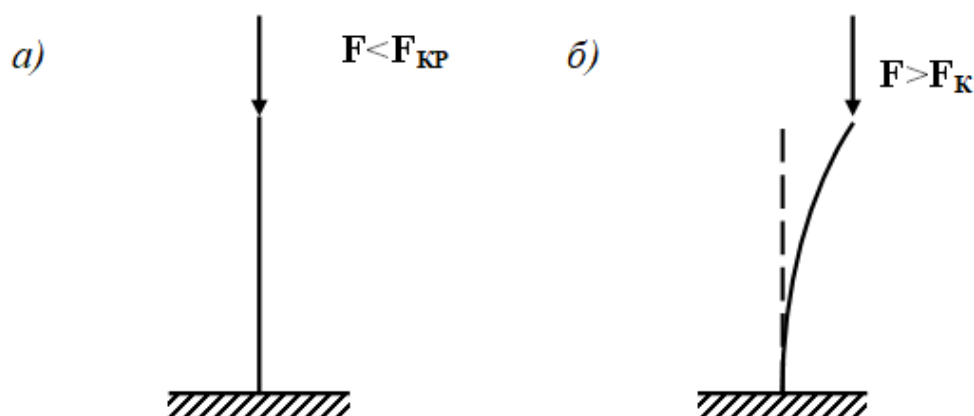


Рисунок 73

Критическая сила

Наименьшее значение сжимающей силы, при котором стержень теряет способность сохранять прямолинейную форму равновесия, называют **критической силой**.

Формула Эйлера для определения критической силы для сжатого стержня при величинах напряжений, меньших предела пропорциональности, имеет вид:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{MIN}}{(\mu l)^2},$$

где E – модуль Юнга материала стержня (для стали $E = 2 \cdot 10^5$ Па);

I_{MIN} – минимальный момент инерции поперечного сечения;

μ – коэффициент приведения длины стержня (зависимость коэффициента μ от способа закрепления концов стержня показана на рис. 74);

L – длина стержня.

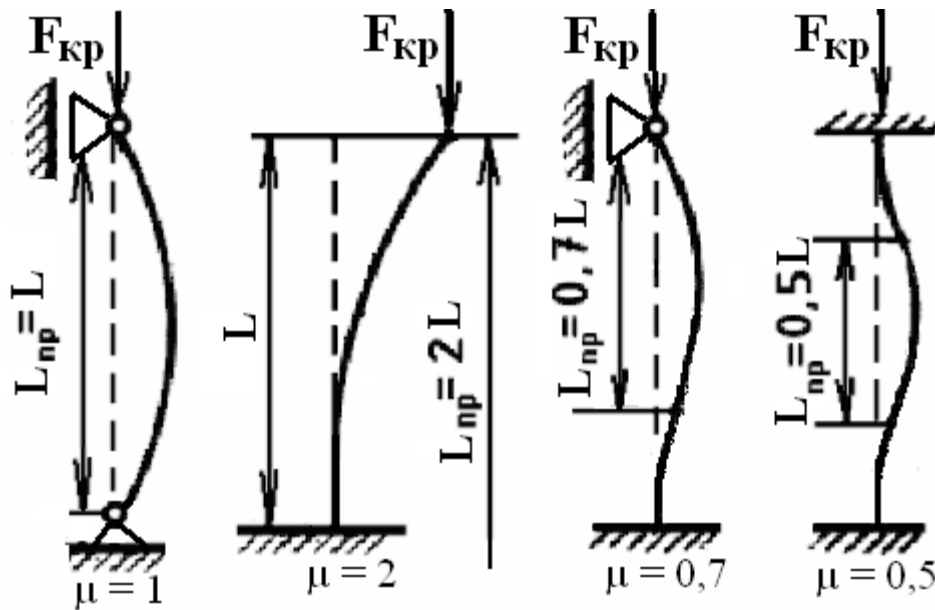


Рисунок 74

Границы применимости формулы Эйлера

Величина λ называется *гибкостью* стержня и определяется по формуле:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{MIN}},$$

где i_{MIN} – минимальный радиус инерции сечения.

Различают стержни большой, средней и малой гибкости.

Стержни большой гибкости ($\lambda \geq \lambda_{ПРЕД}$) рассчитываются на устойчивость по формуле Эйлера.

Стержни средней гибкости ($\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{ПРЕД}$) рассчитываются на устойчивость по **формуле Ясинского**:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = (a - b\lambda) \cdot A,$$

где $\sigma_{кр}$ – критическое напряжение;

A – площадь поперечного сечения стержня;

a, b – коэффициенты, зависящие от свойств материала (для малоуглеродистой стали $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа).

Стержни малой гибкости ($\lambda \leq \lambda_0$) рассчитывают не на устойчивость, а на

прочность.

$\lambda_{\text{ПРЕД}}$, λ_0 – показатели гибкости, при которых критические напряжения, соответственно, равны пределу пропорциональности и пределу текучести материала стержня.

Коэффициент запаса устойчивости

При расчете конструкции эксплуатационная нагрузка F не должна быть больше критической $F_{\text{КР}}$. Отношение критической силы к эксплуатационной называется коэффициентом запаса устойчивости S_y , и он не должен быть меньше допускаемого значения (для стали $[S_y] = 1,8 \div 3$).

$$S_y = \frac{F_{\text{КР}}}{F} \geq [S_y].$$

Практические расчеты на устойчивость

Необходимо выполнение условия устойчивости

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq [\sigma_y],$$

где σ_y – напряжение устойчивости определяется, точно так же, как напряжение сжатия;

$[\sigma_y]$ – допускаемое напряжение на устойчивость,

$$[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma_{\text{СЖ}}],$$

где φ – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения, ($0 \leq \varphi \leq 1$);

$[\sigma_{\text{СЖ}}]$ – допускаемое напряжение на сжатие материала стержня.

Окончательно условие устойчивости имеет вид:

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma_{\text{СЖ}}].$$

Зависимость коэффициента φ от гибкости λ для стали Ст 3 приведена в табл. 4.

Таблица 4 – Зависимость коэффициента φ от гибкости λ для стали Ст 3

λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
φ	1,00	0,99	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69

λ	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
φ	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Устойчивость равновесия деформируемых систем»

1. Что такое устойчивость?
2. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
3. Какая величина называется гибкостью стержня? Размерность этой величины?
4. Какой вид имеет условие устойчивости сжатого стержня?
5. Какую силу называют критической, и как способ закрепления стержня влияет на ее величину?
6. В каких пределах применима формула Эйлера для нахождения критической силы?
7. Как проводится расчет стержня на устойчивость по Эйлеру?
8. В каких случаях сжатый стержень необходимо рассчитать на устойчивость?
9. По какой формуле находится величина критической силы?
10. Что представляет собой коэффициент приведения длины и чему он равен при различных условиях закрепления концов сжатого стержня?
11. Чему равна Эйлерова сила для шарнирно опертого по концам стержня?
12. Какие параметры влияют на величину Эйлеровой нагрузки?
13. Как устанавливается предел применимости формулы Эйлера?
14. Какой момент инерции входит в формулу Эйлера?
15. Что такое коэффициент приведения длины стержня?
16. Как определяется предельная гибкость стержня?
17. По какой зависимости определяют критические напряжения в случае, если напряжения превышают предел пропорциональности?
18. Как находится критическое напряжение для стержней малой и средней гибкости?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Материал, изложенный в учебном пособии, позволит студентам самостоятельно производить расчеты элементов конструкций на прочность и жесткость; а также изучить понятийный аппарат курса «Сопротивление материалов», а именно: внутренние силовые факторы (продольная и поперечная силы, изгибающий и крутящий моменты), напряжения, деформации, перемещения, диаграммы напряжений-деформаций. Обучающиеся узнали основные виды деформаций: центральное растяжение-сжатие, сдвиг, кручение, прямой и сложный изгиб; критерии работоспособности, такие как прочность, жесткость и устойчивость. Изучили методы расчета статически неопределимых систем.

Данное учебное пособие должно помочь студенту не только освоить лекционный материал, но и самостоятельно изучить разделы дисциплины, отвечая на предложенные в конце каждого раздела контрольные вопросы. Самостоятельная подготовка состоит не только в ответах на контрольные вопросы, но и в изучении предлагаемой в настоящем пособии литературы по дисциплине «Сопротивление материалов».

Все эти знания и навыки необходимы будущим техническим специалистам для формирования инженерного и научного мышления. «Сопротивление материалов» представляет собой одну из фундаментальных дисциплин профессионального образования инженера и является основой для изучения последующих общих и специальных курсов инженерного профиля в учебном плане.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Агаханов, М. К. Сопротивление материалов: курс лекций / М. К. Агаханов, В. Г. Богопольский. – Москва: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Ар Медиа, ЭБС АСВ, 2024. – 178 с. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/140516.html> (дата обращения: 08.08.2025). – Текст: электронный.
2. Сопротивление материалов: учебник для вузов / Б. Е. Мельников, Л. К. Паршин, А. С. Семенов, В. А. Шерстнев. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2023. – 576 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/341261> (дата обращения: 29.04.2025). – Текст: электронный.
3. Степин, П. А. Сопротивление материалов: учебник / П. А. Степин. – 13-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 320 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210815> (дата обращения: 19.05.2025). – Текст: электронный.
4. ГОСТ 8239-93. Сталь горячекатаная. Балки двутавровые.
5. ГОСТ 8240-97. Швеллеры стальные горячекатаные.
6. ГОСТ 8509-93. Уголки стальные горячекатаные равнополочные.

Учебное издание

Кауров Павел Викторович

Сопротивление материалов

Учебное пособие

Редактор и корректор А. А. Чернышева
Техн. редактор М. Д. Баранова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 04.12.2025 г. Рег. № 5202/25

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.