

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА



Серия
«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ»

№ 1 (14) – 2007

Самара
Самарский государственный технический университет
2007

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Решается задача о возможности появления немонотонного поведения кривых «напряжения - деформации» в эндохронной теории неупругости и возможности расширения понятия меры деформации.

Уже достаточно давно экспериментально были обнаружены факты немонотонного поведения кривых связи напряжений и деформаций при простом (монотонном) деформировании и нагружении. Отметим здесь работы Портевена-ЛеШателье [1], Савара [2], Массона [3], своеобразные кривые деформирования в экспериментах Монтелье [4]. Теоретически в рамках феноменологического подхода указанные явления до сих пор не находят единого удовлетворительного описания. Все упомянутые явления и аналогичные им, начиная с эффекта Пойнтинга [5] и осцилляции напряжений Рубина [6], и заканчивая явлением ретчета [7] и эффектом Малышева [8, 9], могут быть названы, следуя работе [10], эффектами второго порядка. Предложенная авторами в работе [11] эндохронная теория неупругости, учитывающая конечные деформации, качественно описывает ряд перечисленных эффектов [12-14].

1. Используется простейший вариант эндохронной теории неупругости для больших деформаций в виде [12]:

$$\begin{aligned} \tau \dot{\sigma} + \sigma |D| &= 2G (\tau D + k \varepsilon |D|), \quad \dot{\varepsilon} = D, \quad \Omega = \dot{Q} Q^T, \\ \dot{\varepsilon} + \varepsilon \Omega - \Omega \varepsilon &= \dot{\varepsilon}, \quad |D| = \sqrt{D:D}. \end{aligned} \quad (1)$$

В соотношения (1) в безындексной форме входят: τ — аналог деформационного предела текучести; σ , ε — девиаторы тензоров напряжений и деформаций; G — модуль сдвига; k — аналог коэффициента упрочнения; Q — ортогональный тензор поворота; Ω — тензор спина; D — девиатор тензора скоростей деформаций. Кроме того, здесь используются следующие связи:

$$\varepsilon_{ii} = \sigma_{ii} / K, \quad D = (L + L^T) / 2, \quad L = \dot{F} F^{-1}, \quad Q = F u^{-1},$$

где K — объемный модуль; F — тензор градиента деформаций; L — скорость градиента деформаций; u — правый тензор удлинения в полярном разложении тензора $F = Qu$.

Рассмотрим случай, когда градиент деформаций имеет достаточно простой вид

$$F = \begin{pmatrix} a_1 & mb & 0 \\ b & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$F^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_2 & -mb & 0 \\ -b & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta/a_3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = a_1 a_2 - mb^2.$$

Тогда ортогональный тензор поворота Q имеет следующую структуру:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что в этом случае

$$\dot{a}_1 a_2 - mb \dot{b} = \Delta \cdot D_{11}, \quad \dot{a}_2 a_1 - mb \dot{b} = \Delta \cdot D_{22}, \quad \dot{b}(a_2 + ma_1) - b(\dot{a}_2 + ma_1) = 2 \cdot \Delta \cdot D_{12}. \quad (2)$$

Кроме того,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b(m-1)}{a_1 + a_2}, \quad \frac{\dot{a}_3}{a_3} = D_{33}, \quad D_{13} = D_{23} = 0. \quad (3)$$

Изучается задача, когда $D_{11} \neq 0$, $D_{22} \neq 0$, $D_{22} = -D_{11}$, $D_{12} \neq 0$, $D_{13} = D_{23} = 0$. Тогда система определяющих уравнений (1) примет вид:

$$\dot{\varepsilon}_{11} + q \varepsilon_{12} = D_{11}, \quad \dot{\varepsilon}_{12} - q \varepsilon_{11} = D_{12}, \quad (4)$$

$$\dot{\sigma}_{11} + \frac{\sigma_{11}}{\tau} |D| + q \sigma_{12} = 2G \left(D_{11} + \frac{k}{\tau} \varepsilon_{11} |D| \right), \quad \dot{\sigma}_{12} + \frac{\sigma_{12}}{\tau} |D| - q \sigma_{11} = 2G \left(D_{12} + \frac{k}{\tau} \varepsilon_{12} |D| \right),$$

$$2\dot{\beta} = -q. \quad (5)$$

Введем новые обозначения:

$$\sigma = \sigma_{11} + i \sigma_{12}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{11} + i \varepsilon_{12}, \quad D = D_{11} + i D_{12}. \quad (6)$$

Эти величины назовем комплексным напряжением, комплексной деформацией и комплексной скоростью деформации, соответственно. Уравнения (4) и (5) в соответствии с обозначениями (6) принимают вид:

$$\dot{\varepsilon} - i q \varepsilon = D, \quad \dot{\sigma} + \left(\frac{|D|}{\tau} - i q \right) \sigma = 2G \left(D + \frac{k}{\tau} |D| \varepsilon \right). \quad (7)$$

При начальных условиях $\sigma(0) = 0$, $\varepsilon(0) = 0$ и задании тензора D нетрудно получить решение

$$\varepsilon = \int_0^t D(\xi) \cdot \{ \cos[B(t) - B(\xi)] - i \sin[B(t) - B(\xi)] \} d\xi,$$

$$\frac{\sigma}{2G} = \int_0^t \left[D(\xi) + \frac{k}{\tau} |D(\xi)| \varepsilon \right] \cdot \exp(C(\xi) - C(t)) \cdot \{ \cos[B(t) - B(\xi)] - i \sin[B(t) - B(\xi)] \} d\xi.$$

Здесь

$$B(t) = - \int_0^t q(\xi) d\xi, \quad C(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t |D(\xi)| d\xi.$$

Отделяя вещественные и мнимые части решения, получим:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}(t) &= \int_0^t \left\{ D_{11}(\xi) \cdot \cos[B(t) - B(\xi)] + D_{12}(\xi) \cdot \sin[B(t) - B(\xi)] \right\} d\xi, \\ \varepsilon_{12}(t) &= \int_0^t \left\{ D_{12}(\xi) \cdot \cos[B(t) - B(\xi)] - D_{11}(\xi) \cdot \sin[B(t) - B(\xi)] \right\} d\xi, \\ \frac{\sigma_{11}(t)}{2G} &= \int_0^t \exp[C(\xi) - C(t)] \cdot \left\{ \left[D_{11}(\xi) + \frac{k}{\tau} |D(\xi)| \varepsilon_{11} \right] \cdot \cos[B(t) - B(\xi)] + \right. \\ &\quad \left. + \left[D_{12}(\xi) + \frac{k}{\tau} |D(\xi)| \varepsilon_{12} \right] \cdot \sin[B(t) - B(\xi)] \right\} d\xi, \\ \frac{\sigma_{12}(t)}{2G} &= \int_0^t \exp[C(\xi) - C(t)] \cdot \left\{ \left[D_{12}(\xi) + \frac{k}{\tau} |D(\xi)| \varepsilon_{12} \right] \cdot \cos[B(t) - B(\xi)] - \right. \\ &\quad \left. - \left[D_{11}(\xi) + \frac{k}{\tau} |D(\xi)| \varepsilon_{11} \right] \cdot \sin[B(t) - B(\xi)] \right\} d\xi.\end{aligned}$$

2. Рассмотрим важный частный случай, когда

$$D_{11} = 0, \quad D_{12} = D_{12}^0 = \text{const}, \quad k = 0. \quad (8)$$

Предположим, что $q(t)$ локально интегрируема на $[0, +\infty)$, тогда можно показать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{11}(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{12}(t) = D_{12}^0$. Кроме того, если $q(t)$ монотонно убывает, $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0$ и существует $\beta = \int_0^\infty q(t) dt \leq \frac{\pi}{2}$, то $\sigma_{12}(t) > 0$.

Монотонное возрастание σ_{12} возможно и при $\beta > \frac{\pi}{2}$. Приведем характерный пример:

$$m = k_0^2, \quad q = \frac{1 - k_0^2}{k_0^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{(1 + k_0^2)}{2k_0} \cdot \text{sh} \frac{2k}{1 + k_0^2} t \right]^2}.$$

Если $m = 0$, то $q = \frac{1}{1 + t^2}$ и $\int_0^\infty q dt = \pi$. На рис. 1 для этого случая приведено изменение сдвигового и осевого напряжения от времени ($\tau = 1, 2G = 1, k = 0, m = 0$).

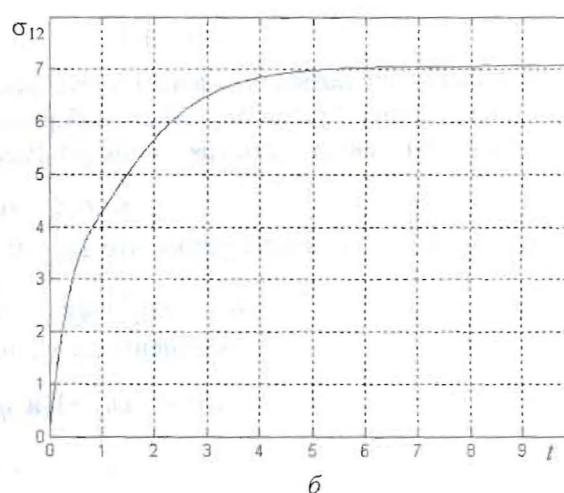
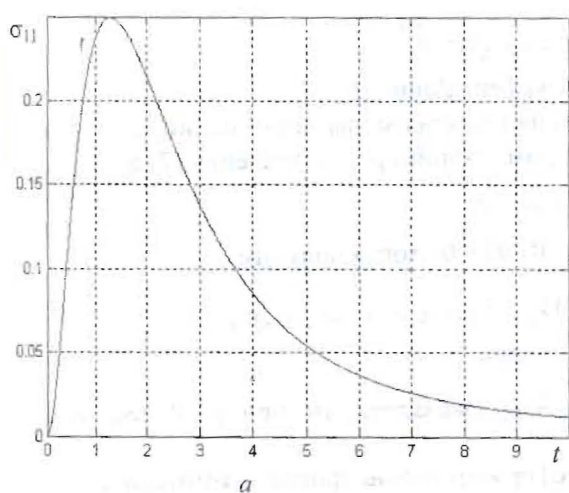
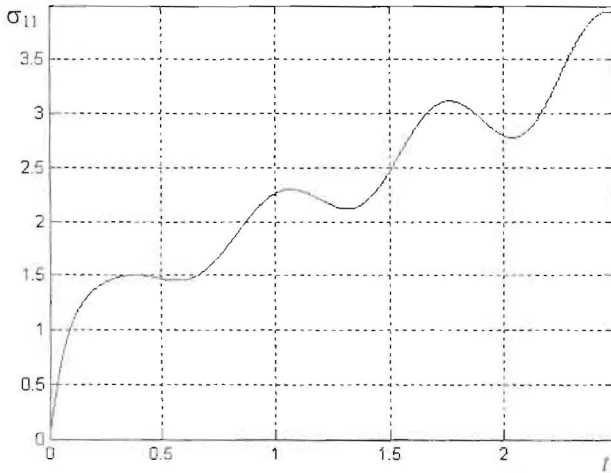


Рис. 1. Изменение осевого (а) и сдвигового (б) напряжений от времени: $\tau = 1, 2G = 1, k = 0, m = 0$

3. Рассмотрим случай, когда помимо (8) выполняется условие $q = q_\infty = \text{const}$. Тогда, если $q = 0$, то система (4)–(5) имеет единственную точку покоя $Q(0, 1)$, являющуюся центром, и решение $\sigma(t)$, начинающееся в точке $(0, 0)$, идет в эту точку по мнимой оси. Если же $q_\infty \neq 0$,

то у системы будет единственная точка покоя $Q_\infty = \left(\frac{-q_\infty}{1+q_\infty^2}, \frac{1}{1+q_\infty^2} \right)$, являющаяся фокусом и решение, начинающееся в точке $(0, 0)$ при $q_\infty > 0$, располагается в левой полуплоскости комплексной переменной, наматываясь на точку Q_∞ против часовой стрелки. При $q_\infty \neq 0$ решение целиком располагается выше оси σ_{11} и ниже прямой $\sigma_{12} = D_{12}^0$. Отметим, что скорость изменения напряжений при этом условии не остается знакопостоянной, то есть процесс решения оказывается осциллирующим по скорости напряжений.

4. Рассмотренные авторами другие примеры также показали, что и при переменном q , не удовлетворяющем условиям пункта 3, возникают осциллирующие изменения скоростей напряжений.



Р и с. 2. Изменение σ_{12} от времени: $\tau = \frac{1}{q}$, $k = 1$,

$$l = 0,8, \quad 2G = 2q(1+\lambda), \quad d\lambda = \sqrt{d\varepsilon : d\varepsilon}$$

как следствие, могут возникать как монотонные, так и колебательные изменения напряжений.

5. Как известно, например, согласно [12], мера деформации может определяться формулой $\varepsilon = D$. Анализ экспериментальных данных показал, что столь простая форма связи ε и D может сужать возможности теории. Поэтому в работе [15] было предложено использовать более общее определение меры деформации

$$\dot{\varepsilon} = K(|D|, \lambda) \cdot D, \quad d\lambda = \sqrt{d\varepsilon : d\varepsilon}.$$

Такое расширение позволило, в частности, описать эффект Рони [16].

Однако существует и другой способ расширения понятия меры деформации, если ввести нелинейность в левую часть уравнения (4). Рассмотрим, например, соотношения (7) в форме

$$\dot{\varepsilon} - i q \varepsilon + (\alpha + \gamma i) \varepsilon^3 = D.$$

Для простейшего случая допустим, что $D_{11} = 0$, $\alpha = 0$, $D \neq 0$, тогда получим

$$\dot{\varepsilon}_{11} = 3\gamma \varepsilon_{12} \varepsilon_{11}^2 - \gamma \varepsilon_{12}^3 - q \varepsilon_{12}, \quad \dot{\varepsilon}_{12} = D_{11} + 3\gamma \varepsilon_{11} \varepsilon_{12}^2 - \gamma \varepsilon_{11}^3 + q \varepsilon_{11}.$$

Авторами данной работы решены следующие задачи.

а. Простой монотонный сдвиг: $D_{12} = 1$ и $q = \frac{1}{1+q^2}$. Оказалось, что при $\gamma = 0$ деформации

ε_{11} и ε_{12} изменяются монотонно, а при $\gamma \neq 0$ все деформационные кривые асимптотически выходят на предельные значения, что и проиллюстрировано на рис. 3.

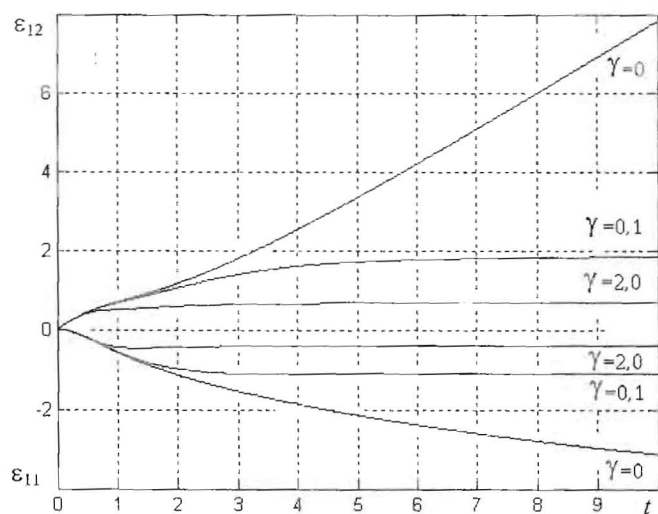
б. Простой циклический сдвиг, когда $D_{12} = \pm 1$. В этом случае, как видно на рис. 4, при $\gamma = 0$ деформации ε_{11} и ε_{12} имеют периодический симметричный характер развития. Если же $\gamma \neq 0$, то развитие деформаций носит неустановившийся характер и без четких предельных значений (см. рис. 5).

Пример. Пусть $m = -l^2$, тогда

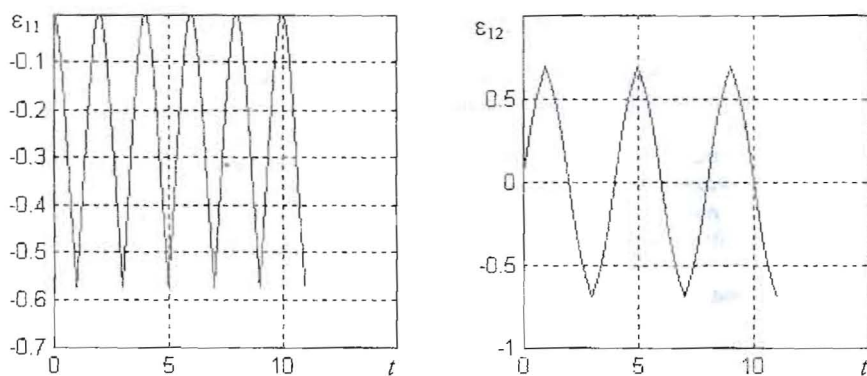
$$q = \frac{l^2 + 1}{1 - l^2} \frac{1}{1 + \left[\frac{(1 - l^2)}{2l} \cdot \sin \frac{2l}{1 - l^2} t \right]^2}.$$

При $m \rightarrow -1$ значение q велико и практически его величина постоянная, а кривые $\sigma_{12}(t)$ и $\sigma_{11}(t)$ имеют колебательный характер. На рис. 2 приведен типичный пример поведения $\sigma_{12}(t)$ при условии, что $\tau = \frac{1}{q}$, $k = 1$, $l = 0,8$, $2G = 2q(1+\lambda)$, $d\lambda = \sqrt{d\varepsilon : d\varepsilon}$.

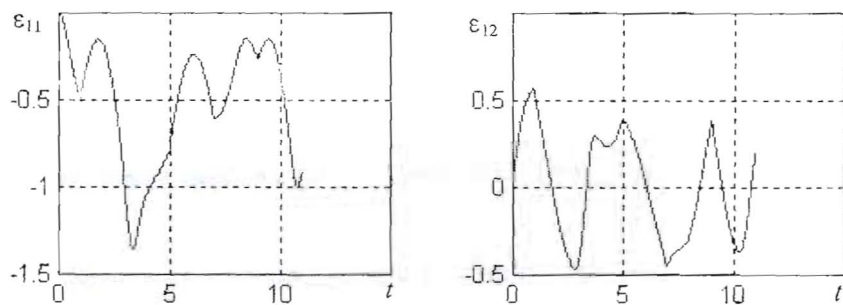
Таким образом, видно, что в зависимости от значения m величина параметра эндохронной неупругости q может иметь различный характер изменения и,



Р и с. 3. Деформационные кривые для ϵ_{11} и ϵ_{12}
для задачи а



Р и с. 4. Деформационные кривые для задачи б ($\gamma = 0$)



Р и с. 5. Деформационные кривые для задачи б ($\gamma \neq 0$)

Таким образом, введение кубического члена в соотношения для меры деформации резко меняет вид решения (в зависимости от значения параметра γ), что открывает новые возможности описания реального поведения деформаций.

1. *Porteven A., LeChatelier F.* Sur un phenomene observe lors de l'essai de traction d'alliages en cours de transformation // *Comp. Rend. Acad. Sci. Paris*, 1923. Vol. 176. P.507–510.
2. *Savart F.* Recherches sur les vibration longitudinales // *Annales de Chimie et de Physique. Deuxieme serie*, 1837. Vol. 65. P. 337–402.
3. *Masson A.* Sur elasticite des corps solides // *Annales de Chimie et de Physique. Troisieme serie*, 1841. Vol. 3. P. 451–462.
4. *Montheillet F., Cohen M., Jonas J. J.* Axial stresses and texture development during the torsion testing of Al, Cu, α -Fe // *Acta Metallurgica*, 1984. Vol. 32. P. 2077–2089.
5. *Poynting J. H.* On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening of loaded wires when twisted // *Proceedings of Royal Society. London. A*, 1909. Vol. 82. P. 546–559.
6. *Rubin M. B.* Plasticity theory formulated in terms of physically based microstructural variables. Part II. Examples // *International Journal of Solids and Structures*, 1994. Vol. 31, № 19. P. 2635–2652.
7. *Delobelle P., Robinet P., Bocher L.* Experimental study and phenomenological modelization of ratchet under uniaxial and biaxial loading on an austenitic steel // *International Journal of Plasticity*, 1995. Vol. 11. № 4. P. 397–421.
8. *Мальшиев Б. М.* Пластическое течение при совместном непрерывном растяжении и кручении под действием малых крутящих моментов // *Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, астрономия. физика, химия*, 1958. № 1. С. 55–68.
9. *Мальшиев Б. М.* Пластическое течение при совместном непрерывном растяжении и кручении под действием малых крутящих моментов // *Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, астрономия, физика, химия*, 1958. № 2. С. 33–46.
10. *Георгиевский Д. В.* Тензорно–нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // *Успехи механики*, 2002. Т. 1, № 2. С. 150–176.
11. *Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П.* Новые принципы составления определяющих уравнений эндохронной теории пластичности при конечных деформациях // *Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства: межвузовский сборник научных трудов*. СПб: Издательство Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 1996. С. 124–127.
12. *Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П.* Анализ сложного нагружения при конечных деформациях по эндохронной теории неупругости // *Прикладные проблемы прочности и пластичности*. Москва: КМК, 1998. Вып. 59. С. 72–76.
13. *Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П.* Новый взгляд на построение эндохронной теории пластичности при учете конечных деформаций // *Научно-технические ведомости СПбГТУ*. СПб:СПбГТУ, 2003. № 3. С. 96–103.
14. *Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П.* О расширении возможностей эндохронной теории неупругости, учитывающей конечные деформации // *Проблемы прочности и пластичности*, 2004. Вып. 66. С. 31–34.
15. *Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П.* Исследование поведения циклически нестабильных материалов при учете конечных деформаций // *Современные проблемы пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела. Тез. докл. VI междунаро. научн. симп.* Тверь, 1–3 марта 2006. Тверь: Изд-во Твер. гос. техн. ун-та. С. 27–28.
16. *Ronay M.* On second-order strain accumulation in aluminum in reversed cyclic torsion at elevated temperatures // *International Journal of Solids and Structures*, 1967. Vol. 3. P. 167–176.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-01-00169).

Поступила 14.10.2006 г.