

ВЕСТНИК

Санкт-Петербургского УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ 1

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ

ВЫПУСК 4

К 70-летию В. Г. Мазыи



2008

О. В. Сильванович, Н. А. Широков

ГЛАДКОСТЬ ФУНКЦИИ И СКОРОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ

В данной работе устанавливается факт, который в принятой в теории аппроксимации терминологии называется обратной теоремой. Речь идёт о том, что если непрерывная на множестве функция может быть приближена в определённой шкале при помощи некоторого запаса приближающих функций с данной скоростью, то она имеет вполне определённую гладкость. Если известно и о возможности приближения функций обсуждаемой гладкости с требуемой скоростью, то получается конструктивное описание класса гладкости при помощи скорости приближения.

В нашей работе рассматривается новое множество и новая совокупность приближающих функций. Именно, пусть E — подмножество положительной полуоси $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ = [0; \infty)$, состоящее из дизъюнктивных отрезков I_ν , $1 \leq \nu \leq k$, $k \geq 1$, $I_\nu = [a_\nu, b_\nu]$, $a_1 = 0$, и луча $I_{k+1} = [a_{k+1}, \infty)$, $a_{k+1} > b_k$, $\omega(x)$ — возрастающая непрерывная функция типа модуля непрерывности на $\mathbb{R}^+$, удовлетворяющая условиям

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(x+y) \leq \omega(x) + \omega(y), \quad \omega(x) \geq cx, \quad x > 0, \quad c > 0,$$

и

$$\int_0^y \frac{\omega(x)}{x} dx + y \int_y^\infty \frac{\omega(x)}{x^2} dx \leq c_0 \omega(y), \quad y > 0, \quad (1)$$

где c_0 не зависит от y .

Обозначим через $H_\omega^r(E)$ пространство комплекснозначных функций f на множестве E , удовлетворяющих условию

$$|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)| \leq c_f \omega(|x - y|), \quad x, y \in E. \quad (2)$$

Определим в $H_\omega^r(E)$ норму $\|\cdot\|_{r,\omega}$:

$$\|f\|_{r,\omega} = |f(0)| + \sum_{\nu=1}^r |f^{(\nu)}(0)| + \sup_{x,y \in E, x \neq y} \frac{|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)|}{\omega(|x - y|)}. \quad (3)$$

В качестве набора приближающих на множестве E функций рассмотрим совокупности целых функций F_σ порядка $1/2$ и меняющегося типа $\sigma > 0$ с нормой, задаваемой равенством

$$\|F_\sigma\|_{G_\sigma^{(r,\omega)}} = \sup_{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+} \frac{|F_\sigma(z)| \cdot e^{-\sigma |\operatorname{Im} \bar{z}|}}{1 + |z|^r \omega(|z|) + \sigma^{-2r} \omega(\sigma^{-2})}. \quad (4)$$

Для того, чтобы определить шкалу приближения, согласованную с нормами (3), (4), потребуется результат, приведённый в [1].

Лемма 1. Существует единственная гармоническая в $\mathbb{C} \setminus E$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi_E(z) > 0, \quad \varphi_E(z) \rightarrow 0, \quad \text{если } z \rightarrow z_0 \in E,$$

$$\varphi_E(z) \leq c_1 \left(1 + |z|^{\frac{1}{2}}\right) \text{ и } \varphi_E(x)|x|^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow -\infty.$$

Пусть теперь

$$L_h = \{z \in \mathbb{C} \setminus E : \varphi_E(z) = h\}, \quad h > 0, \quad (5)$$

$$\rho_h(z) = \text{dist}(z, L_h), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

В [1] установлено, что если $f \in H_\omega^r(E)$, то для любого $\sigma > 0$ найдётся функция $F_\sigma \in C_\sigma^{(r, \omega)}$ такая, что

$$\|F_\sigma\|_{C_\sigma^{(r, \omega)}} \leq c_2 \|f\|_{r, \omega}$$

и

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \leq c_3 \|f\|_{r, \omega} \rho_{\frac{1}{\sigma}}^r(x) \omega\left(\rho_{\frac{1}{\sigma}}(x)\right), \quad x \in E,$$

то есть для рассматриваемого математического контекста установлена прямая теорема приближения.

Целью настоящей работы является доказательство обратной теоремы приближения на введённом ранее множестве E , которая согласуется с приведённой выше прямой теоремой.

Теорема. Пусть пространство целых функций $C_\sigma^{(r, \omega)}$ определено в (4), где $\omega(x)$ удовлетворяет условию (1), шкала функций $\rho_h(z)$ определена в (5) и (6). Пусть $f \in C(E)$ и предположим, что существуют постоянные c_4 и c_5 такие, что для всякого $\sigma > 0$ найдётся функция $F_\sigma \in C_\sigma^{(r, \omega)}$ такая, что

$$\|F_\sigma\|_{C_\sigma^{(r, \omega)}} \leq c_4 \quad (7)$$

и

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \leq c_5 \rho_{\frac{1}{\sigma}}^r(x) \omega\left(\rho_{\frac{1}{\sigma}}(x)\right), \quad x \in E, \quad r \geq 0. \quad (8)$$

Тогда $f \in H_\omega^r(E)$ и $\|f\|_{r, \omega} \leq c_6$, $c_6 = c_6(c_4, c_5, E, r)$.

Доказательство. Доказательство теоремы будем проводить, используя подход, впервые применённый в обратных теоремах Е. М. Дынькиным [2]. Рассматриваемая в теореме ситуация потребует при этом ряда существенных модификаций.

Прежде всего, используя предположение (8), продолжим функцию f с множества E на всю комплексную плоскость. Пусть

$$G_n = \{z \in \mathbb{C} \setminus E : 2^{-n-1} < \varphi_E(z) \leq 2^{-n}\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$Q_0 = \left\{z : |z + 1| < \frac{1}{2}\right\}.$$

Положим

$$b_0(z) = \begin{cases} F_{2^n}(z)(z+1)^{-r-1}, & z \in G_n \setminus K, \\ 0, & z \in K. \end{cases} \quad (9)$$

Следуя Е. М. Дынькину [2, 3], определим

$$\delta(z) = \frac{1}{4} \text{dist}(z, E), \quad K(z) = \{\zeta : |\zeta - z| < \delta(z)\}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E,$$

$$b_1(z) = \frac{1}{\pi \delta^2(z)} \int_{K(z)} b_0(\zeta) dm_2(\zeta), \quad (10)$$

m_2 — плоская мера Лебега.

Соотношения (7) и (8) дают, что

$$b_1(z) \rightarrow f(x)(x+1)^{-r-1}, \quad z \rightarrow x \in E.$$

Далее, если $z \in Q_1 = \left\{ z : |z+1| < \frac{1}{6} \right\}$, то $b_1(z) = 0$.

Если же $z \in G_n \setminus Q_1$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_1(z)}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial b_1(z)}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial(F_{2^n}(z)(z+1)^{-r-1})}{\partial \bar{z}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{\pi \delta^2(z)} \int_{K(z)} (b_0(\zeta) - F_{2^n}(\zeta)(\zeta+1)^{-r-1}) dm_2(\zeta) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{\pi \delta^2(z)} \int_{K(z)} (\zeta+1)^{-r-1} ((\zeta+1)^{r+1} b_0(\zeta) - F_{2^n}(\zeta)) dm_2(\zeta) \right), \end{aligned}$$

поэтому можно получить следующие оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{\pi \delta^2(z)} \int_{K(z)} (\zeta+1)^{-r-1} ((\zeta+1)^{r+1} b_0(\zeta) - F_{2^n}(\zeta)) dm_2(\zeta) \right) \right| &\leq \\ &\leq \left| \text{grad} \left(\frac{1}{\pi \delta^2(z)} \int_{K(z)} (\zeta+1)^{-r-1} ((\zeta+1)^{r+1} b_0(\zeta) - F_{2^n}(\zeta)) dm_2(\zeta) \right) \right| \leq \\ &\leq \tilde{c}_0 \sup_{\zeta \in K(z)} |(\zeta+1)^{-r-1} ((\zeta+1)^{r+1} b_0(\zeta) - F_{2^n}(\zeta))| \cdot \frac{1}{\delta(z)}, \quad (11) \end{aligned}$$

где $\tilde{c}_0$ — абсолютная постоянная.

Положим

$$Q_2 = \left\{ z = x + iy : -\frac{7}{4} \leq x \leq -\frac{1}{4}, |y| \leq 2 \right\}.$$

Если $z \in Q_2 \setminus Q_1$, то из (11), (7) и (8) следует, что с некоторой постоянной c_7 , зависящей от c_4, c_5, r и ω , имеем

$$\left| \frac{\partial b_1(z)}{\partial \bar{z}} \right| \leq c_7 |z+1|^{-r-1} \text{dist}^{r-1}(z, E) \omega(\text{dist}(z, E)), \quad (12)$$

поскольку при $z \in Q_2 \setminus Q_1 : |z+1| \asymp 1, \text{dist}(z, E) \asymp 1$.

Если же $z \in G_n \setminus Q_2$, то $K(z)$ не пересекается с Q_0 и существует ν_0 , зависящее только от множества E и не зависящее от n такое, что $K(z)$ пересекается лишь с теми $G_{n+\nu}$, для которых $|\nu| \leq \nu_0$.

Это свойство аналогично соответствующему свойству линий уровня, отмеченному при изучении полиномиальных приближений — см. [2, 3], в нашем случае будет следовать из Леммы 2.

В таком случае (11) влечёт

$$\left| \frac{\partial b_1(z)}{\partial \bar{z}} \right| \leq \tilde{c}_1 |z+1|^{-r-1} \frac{1}{\text{dist}(z, E)} \max_{\zeta \in K(z)} \sum_{\mu=-\nu_0}^{\nu_0} |F_{2^{n+\mu}}(\zeta) - F_{2^n}(\zeta)|. \quad (13)$$

Из леммы 2 будет следовать, что с постоянной c_8 , зависящей лишь от c_4, c_5 и E , при $|\mu| \leq \nu_0$ выполняема

$$\max_{\zeta \in K(z)} |F_{2^{n+\mu}}(z) - F_{2^n}(z)| \leq c_8 |F_{2^{n+\mu}}(z) - F_{2^n}(z)|, \quad (14)$$

тогда (13) и (14) дадут

$$\left| \frac{\partial b_1(z)}{\partial \bar{z}} \right| \leq c_9 |z+1|^{-r-1} \frac{1}{\text{dist}(z, E)} \sum_{\mu=-\nu_0}^{\nu_0} |F_{2^{n+\mu}}(z) - F_{2^n}(z)|. \quad (15)$$

Лемма 2. Пусть $E' = \bigcup_{\nu=1}^{k+1} \{a_\nu\} \cup \bigcup_{\nu=1}^k \{b_\nu\}$, $\Delta(z) = \text{dist}(z, E')$. Тогда при $x \in E$ выполнено

$$\rho_h(x) \asymp h \sqrt{\Delta(x) + h^2}. \quad (16)$$

Применяя лемму П. М. Тамразова [5, гл. 1] аналогично [5, 6], мы устанавливаем следующий факт.

Лемма 3. Пусть $V(z)$ — функция, гармоническая в $\mathbb{C} \setminus E$ и удовлетворяющая условиям

$$V(z) \rightarrow \log \left(\left(h \sqrt{\Delta(x) + h^2} \right)^r \omega \left(h \sqrt{\Delta(x) + h^2} \right) \right), \quad z \rightarrow x \in E, \quad h > 0, \quad (17)$$

$$V(z) = O(\log(|z| + 1)), \quad z \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Тогда существуют постоянные $c_1^* > 0$ и $c_2^* > 0$, не зависящие от z и h такие, что при $z \in \mathbb{C} \setminus E$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \log \left(\left(h \sqrt{\Delta(x) + h^2} \right)^r \omega \left(h \sqrt{\Delta(x) + h^2} \right) \right) - c_1^* &\leq V(z) \leq \\ &\leq \log \left(\left(h \sqrt{\Delta(x) + h^2} \right)^r \omega \left(h \sqrt{\Delta(x) + h^2} \right) \right) + c_2^*. \end{aligned} \quad (19)$$

Закончим теперь доказательство теоремы. Положим $w_{n,\nu} = F_{2^n} - F_{2^{n+\nu}}$, $\nu \neq 0$. Тогда $w_{n,\nu}$ — целая функция порядка $1/2$ и типа 2^n или $2^{n+|\nu|}$, при этом при $x \leq -1$ в силу соотношений (4), (7) с некоторой постоянной A_0 , не зависящей от x и n , при $|\nu| \leq \nu_0$ выполняется неравенство

$$|w_{n,\nu}(x)| \leq A_0 \left(|x| + 2^{2(n+\nu_0)} \right)^{r+1} e^{2^{n+\nu_0} \sqrt{|x|}}. \quad (20)$$

Пусть $s_n = 2^{n+\nu_0}$. Тогда соотношения (13)–(15) и леммы 2 и 3 влекут

$$|w_{n,\nu}(x)| \leq A_1 \left(s_n \sqrt{\Delta(x) + s_n^2} \right)^r \omega \left(s_n \sqrt{\Delta(x) + s_n^2} \right), \quad (21)$$

где $x \in E$, $|\nu| \leq \nu_0$. Далее, функция

$$\gamma_{n,\nu}(z) = \log |w_{n,\nu}(z)| - V_{s_n}(z) - s_n \varphi_E(z) \quad (22)$$

субгармонична в $\mathbb{C} \setminus E$ и обладает в силу (20) и лемм 1 и 3 свойствами

$$\gamma_{n,\nu}(z) \leq b'_{n,\nu} \sqrt{|z|} + 1, \quad (23)$$

$$\gamma_{n,\nu}(x) \leq c_3^*, \quad x \in E, \quad (24)$$

постоянная c_3^* не зависит от n, ν и x ,

$$\gamma_{n,\nu}(x) \leq b'_{n,\nu} \log(|x| + 1), \quad x \leq 0. \quad (25)$$

В таком случае (23)–(25) влекут соотношение

$$\gamma_{n,\nu}(z) \leq c_3^*, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E; \quad (26)$$

таким образом, (22) и (26) влекут оценку

$$|w_{n,\nu}(z)| \leq c_4^* \exp(V_{s_n}(z) + s_n \varphi_E(z)),$$

которая при $z \in L_n$ при учёте лемм 2 и 3 даёт неравенство

$$|w_{n,\nu}(z)| \leq c_5^* \left(2^{-n} (\Delta(z) + 2^{-2n})^{1/2} \right)^r \omega \left(2^{-n} (\Delta(z) + 2^{-2n})^{1/2} \right), \quad (27)$$

постоянная c_5^* не зависит от $n, z \in L_n$ и ν при $|\nu| \leq \nu_0$. Ещё одно применение лемм 2 и 3 показывает, что при $z \in L_n$ имеем

$$2^{-n} (\Delta(z) + 2^{-2n})^{1/2} \asymp \text{dist}(z, E). \quad (28)$$

Собирая вместе оценки (19), (27) и (28), находим, что при $z \in \mathbb{C} \setminus E$ с постоянной c_8^* , не зависящей от z , выполнено соотношение

$$\left| \frac{\partial b_1(z)}{\partial \bar{z}} \right| \leq c_8^* \text{dist}^{r-1}(z, E) \omega(\text{dist}(z, E)) \cdot |z + 1|^{-r-1}. \quad (29)$$

Пусть $\lambda(z) = \text{dist}^{r-1}(z, E) \omega(\text{dist}(z, E))$. Если Q — квадрат со сторонами I_Q , параллельными осям координат, и $Q \cap E \neq \emptyset$, то свойства (1)–(3) функции $\omega(x)$, как показал Е.М. Дынькин [7] даже для множеств гораздо более общего вида, чем рассматриваемые в данной статье, влечёт оценку

$$\int_Q \lambda(z) dm_2(z) \leq c_9 I_Q^{r+1} \omega(I_Q). \quad (30)$$

Фиксируем $x_0 \in E$; пусть $I_0 = 2(a_{k+1} + x_0 + 1)$, Q_0 — квадрат $\{(x, y) : |x - x_0| \leq I_0, |y| \leq I_0\}$. Вновь используя (1)–(3) (см. аналогичные выкладки в [7]), получаем

$$\int_Q \frac{\lambda(z)}{|z - x_0|} dm_2(z) < \infty. \quad (31)$$

Обозначим через $Q_n, n = 1, 2, \dots$, квадрат

$$\{(x, y) : |x - x_0| \leq 2^n I_0, |y| \leq 2^n I_0\}.$$

Используя (30), находим, что

$$\int_{Q_n \setminus Q_{n-1}} \frac{|z+1|^{-r-1} \lambda(z)}{|z-x_0|} dm_2(z) \leq c_{10} (2^n I_0)^{r+1} \omega(2^n I_0) \cdot (2^n I_0)^{-r-2} = \\ = c_{10} (2^n I_0)^{-1} \omega(2^n I_0). \quad (32)$$

Условие (3) влечёт сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n I_0)^{-1} \omega(2^n I_0) < \infty. \quad (33)$$

В таком случае (29)–(33) дают, что при всяком $x_0 \in E$ выполняется

$$\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial b_1(z)}{\partial \bar{z}} \right| \frac{dm_2(z)}{|z-x_0|} < \infty,$$

тогда стандартные рассуждения с применением формулы Грина влекут равенство

$$(x+1)^{-r-1} f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial b_1(z)}{\partial \bar{z}} \frac{dm_2(z)}{z-x},$$

то есть

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial b_1(z)}{\partial \bar{z}} \frac{(x+1)^{r+1}}{z-x} dm_2(z). \quad (34)$$

Проверка возможности дифференцирования равенства (34) проходит с использованием соотношений (29) и (30). Заметим, что

$$\frac{(x+1)^{r+1}}{z-x} = \frac{(x-z+z+1)^{r+1}}{z-x} = \pi_r(x, z) + \frac{(z+1)^{r+1}}{z-x},$$

$\pi_r(x, z)$ — полином от x степени r , поэтому при $x_1 \neq x_2$

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r} \frac{(x+1)^{r+1}}{z-x} \Big|_{x=x_2} - \frac{\partial^r}{\partial x^r} \frac{(x+1)^{r+1}}{z-x} = r!(z+1)^{r+1} \left(\frac{1}{(z-x_2)^{r+1}} - \frac{1}{(z-x_1)^{r+1}} \right). \quad (35)$$

Следовательно, (34) и (35) дают

$$f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1) = -\frac{1}{\pi} r! \int_{\mathbb{C}} (z+1)^{r+1} \frac{\partial b_1(z)}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{(z-x_2)^{r+1}} - \frac{1}{(z-x_1)^{r+1}} \right) dm_2(z),$$

таким образом, при $x_1, x_2 \in E$

$$\left| f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1) \right| \leq c_{10} \int_{\mathbb{C}} \lambda(z) \left| \frac{1}{(z-x_2)^{r+1}} - \frac{1}{(z-x_1)^{r+1}} \right| dm_2(z). \quad (36)$$

Интеграл, появляющийся в правой части (36) в полиномиальном случае при предположениях (3) оценивал Е. М. Дынькин [2, 3, 7]. Его рассуждения практически без изменений переносятся на данный некомпактный случай, и мы получаем

$$\left| f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1) \right| \leq c_{11}^* \omega(|x_2 - x_1|).$$

Теорема доказана.

Литература

1. Сильванович О. В., Широков Н. А. Приближение целыми функциями на подмножествах полуоси // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2006. Т. 337. С. 233–237.
2. Dyn'kin E. M. The rate of polynomial approximation in the complex domain // Springer Lecture Notes in Math. 1981. Vol. 864. P. 90–142.
3. Дынькин Е. М. Оценки аналитических функций в жордановых областях // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1977. Т. 73. С. 70–90.
4. Дынькин Е. М. Гладкости интегралов типа Коши // ДАН СССР. 1980. С. 199–202.
5. Тамразов И. М. Гладкости и полиномиальные приближения. Киев, 1975. 255 с.
6. Shirokov N. A. Analytic functions smooth up to the boundary // Springer Lecture Notes in Math. 1988. Vol. 1312. 220 p.
7. Дынькин Е. М. Конструктивная характеристика классов Соболева и Бесова // Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1983. Т. 155. С. 39–74.

Статья поступила в редакцию 18 мая 2008 г.