

Том 45, Номер 3

ISSN 0374-0641

Март 2009



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



<http://www.maik.ru>



МАИК "НАУКА/ИНТЕРПЕРИОДИКА"

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.4

ОБОБЩЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И ФОРМАЛЬНАЯ
ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ
С НУЛЕВЫМ КВАДРАТИЧНЫМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ. IV

© 2009 г. В. В. Басов, Е. В. Федорова

Продолжено изучение обратимых формальных преобразований двумерных автономных систем дифференциальных уравнений с нулевым приближением, представленным однородными полиномами второго порядка, и возмущениями в виде формальных степенных рядов, не содержащих членов ниже третьего порядка. В регулярном случае рассмотрены системы, имеющие каноническую форму вида $(\alpha x_1^2 - \text{sign } \alpha x_2^2, x_1 x_2)$ с $\alpha \neq 0$ в качестве нулевого приближения.

Для таких систем в явном виде получены резонансные уравнения, на основании которых доказаны теоремы о формальной эквивалентности систем и установлен вид обобщенной нормальной формы, к которой любая исходная система может быть сведена обратимой заменой переменных.

Настоящая работа является непосредственным продолжением работ [1–3], поэтому в ней сохраняются обозначения и продолжается нумерация пунктов, формул, теорем, замечаний, следствий и примеров.

12. Системы с нулевым приближением $(\alpha x_1^2 - \text{sign } \alpha x_2^2, x_1 x_2)$.

0^0 . Рассмотрим систему (1), невозмущенная часть которой относится к регулярному случаю и имеет вид $(a_1, 0, c_1)(0, 2b_2, 0)$, где $a_1 c_1 < 0$, $b_2 \neq 0$. Тогда линейной заменой (12₁)

$$((2b_2)^{-1}, 0)(0, (2|b_2 c_1|)^{-1/2})$$

ее можно привести к системе с невозмущенной частью $(\alpha, 0, -\text{sign } \alpha)(0, 1, 0)$ – канонической форме (15₂), при этом $\alpha = a_1/(2b_2) \neq 0$. Поэтому исследуем систему

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1^2 - \tilde{\alpha} x_2^2 + X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = x_1 x_2 + X_2(x_1, x_2) \quad (\alpha \neq 0, \tilde{\alpha} = \text{sign } \alpha). \quad (151)$$

Пусть замена (2) $x_i = y_i + h_i(y_1, y_2)$ с $h_i = \sum_{p=2}^{\infty} h_i^{(p)}(y_1, y_2)$ ($i = 1, 2$) переводит (151) в систему (3) вида $\dot{y}_1 = \alpha y_1^2 - \tilde{\alpha} y_2^2 + Y_1(y_1, y_2)$, $\dot{y}_2 = y_1 y_2 + Y_2(y_1, y_2)$, где $Y_i = \sum_{p=2}^{\infty} Y_i^{(p+1)}(y_1, y_2)$, а форма $Z_i^{(q)}(z_1, z_2) = \sum_{s=0}^q Z_i^{(s, q-s)} z_1^s z_2^{q-s}$.

Дифференцируя (2) в силу (151) и (3), приравнявая коэффициенты при $y_1^s y_2^{p+1-s}$ ($0 \leq s \leq p+1$, $p \geq 2$) и используя обозначения (4) $\hat{Y}_i^{(s, p+1-s)} = \tilde{Y}_i^{(s, p+1-s)} - Y_i^{(s, p+1-s)}$ ($\tilde{Y}_i^{(s, p+1-s)}$ известны), получаем систему вида (5):

$$(\alpha(s-3) + p - s + 1)h_1^{(s-1, p-s+1)} - \tilde{\alpha}(s+1)h_1^{(s+1, p-s-1)} + 2\tilde{\alpha}h_2^{(s, p-s)} = \hat{Y}_1^{(s, p-s+1)}, \quad (152)$$

$$(\alpha(s-1) + p - s)h_2^{(s-1, p-s+1)} - \tilde{\alpha}(s+1)h_2^{(s+1, p-s-1)} - h_1^{(s, p-s)} = \hat{Y}_2^{(s, p-s+1)}.$$

При $p = 2$ система (152) совместна, когда выполняются уравнения

$$2(\alpha - 1)Y_2^{(0,3)} + 2\tilde{\alpha}Y_2^{(2,1)} - Y_1^{(1,2)} = \tilde{c}, \quad Y_1^{(3,0)} = \tilde{c},$$

$$\tilde{\alpha}(1 - \alpha)Y_1^{(0,3)} - Y_1^{(2,1)} - 2(1 - \alpha)Y_2^{(1,2)} + 2\tilde{\alpha}Y_2^{(3,0)} = \tilde{c}; \quad (153)$$

если $\alpha = 1/2$, то $Y_2^{(3,0)} = \tilde{c}$ ($h_1^{(1,1)}$ любой).

Аналогично при $p = 3$ должны выполняться резонансные уравнения

$$\begin{aligned} & \alpha^2 Y_1^{(0,4)} - Y_1^{(4,0)} - \tilde{\alpha} \alpha^2 Y_2^{(1,3)} - \alpha Y_2^{(3,1)} = \tilde{c}, \\ & (\alpha + 1)(3\alpha - 1)Y_1^{(1,3)} + 3\tilde{\alpha}(3\alpha - 1)Y_1^{(3,1)} - 3(2\alpha + 1)Y_2^{(4,0)} + \\ & + \tilde{\alpha}(1 - 2\alpha)(3\alpha - 1)Y_2^{(2,2)} + (\alpha + 1)(3\alpha - 1)(3 - 2\alpha)Y_2^{(0,4)} = \tilde{c}; \\ & \text{если } \alpha = 2, \text{ то } 4Y_1^{(2,2)} + 5Y_1^{(4,0)} - 2Y_2^{(3,1)} = \tilde{c} \quad (h_2^{(0,3)} \text{ любой}). \end{aligned} \quad (154)$$

В уравнениях (153), (154) и во всех последующих резонансных уравнениях вида $(a, Y) = \tilde{c}$ константа $\tilde{c}$ известна и, согласно (7), равна $(a, \hat{Y})$.

Теперь для индексов $p \geq 4$ и s удобно ввести следующие разложения:

$$p = 2r + \mu \quad (r \geq 2, \mu \in \{0, 1\}), \quad s = 2\tau + \mu + \nu \quad (-(\nu + \mu)/2 \leq \tau \leq r, \nu \in \{0, 1\}).$$

Тогда для любых $r \geq 2$ система (152) распадается на две системы:

$$\begin{aligned} & (\alpha(2\tau + \mu + \nu - 3) + 2(r - \tau) + 1 - \nu)h_1^{(2\tau + \mu + \nu - 1, 2(r - \tau) - \nu + 1)} - \\ & - \tilde{\alpha}(2\tau + \mu + \nu + 1)h_1^{(2\tau + \mu + \nu + 1, 2(r - \tau) - \nu - 1)} + 2\tilde{\alpha}h_2^{(2\tau + \mu + \nu, 2(r - \tau) - \nu)} = \\ & = \hat{Y}_1^{(2\tau + \mu + \nu, 2(r - \tau) - \nu + 1)}, \\ & (\alpha(2\tau + \mu + \nu - 1) + 2(r - \tau) - \nu)h_2^{(2\tau + \mu + \nu - 1, 2(r - \tau) - \nu + 1)} - \\ & - \tilde{\alpha}(2\tau + \mu + \nu + 1)h_2^{(2\tau + \mu + \nu + 1, 2(r - \tau) - \nu - 1)} - h_1^{(2\tau + \mu + \nu, 2(r - \tau) - \nu)} = \\ & = \hat{Y}_2^{(2\tau + \mu + \nu, 2(r - \tau) - \nu + 1)} \end{aligned} \quad (155^\mu)$$

(коэффициенты равны нулю, если один из верхних индексов меньше нуля).

Положив в (155₁^μ) $\nu = 1$ и в (155₂^μ) $\nu = 0$, а затем наоборот, для любого $p = 2r + \mu$ из системы (155^μ) получаем две независимые системы:

$$\begin{aligned} & (\alpha(2\tau + \mu - 2) + 2(r - \tau))h_1^{(2\tau + \mu, 2(r - \tau))} - \tilde{\alpha}(2\tau + \mu + 2)h_1^{(2\tau + \mu + 2, 2(r - \tau) - 2)} + \\ & + 2\tilde{\alpha}h_2^{(2\tau + \mu + 1, 2(r - \tau) - 1)} = \hat{Y}_1^{(2\tau + \mu + 1, 2(r - \tau))} \quad (-(1 + \mu)/2 \leq \tau \leq r), \\ & (\alpha(2\tau + \mu - 1) + 2(r - \tau))h_2^{(2\tau + \mu - 1, 2(r - \tau) + 1)} - \tilde{\alpha}(2\tau + \mu + 1)h_2^{(2\tau + \mu + 1, 2(r - \tau) - 1)} - \\ & - h_1^{(2\tau + \mu, 2(r - \tau))} = \hat{Y}_2^{(2\tau + \mu, 2(r - \tau) + 1)} \quad (0 \leq \tau \leq r); \\ & (\alpha(2\tau + \mu - 3) + 2(r - \tau) + 1)h_1^{(2\tau + \mu - 1, 2(r - \tau) + 1)} - \tilde{\alpha}(2\tau + \mu + 1)h_1^{(2\tau + \mu + 1, 2(r - \tau) - 1)} + \\ & + 2\tilde{\alpha}h_2^{(2\tau + \mu, 2(r - \tau))} = \hat{Y}_1^{(2\tau + \mu, 2(r - \tau) + 1)} \quad (0 \leq \tau \leq r), \\ & (\alpha(2\tau + \mu) + 2(r - \tau) - 1)h_2^{(2\tau + \mu, 2(r - \tau))} - \tilde{\alpha}(2\tau + \mu + 2)h_2^{(2\tau + \mu + 2, 2(r - \tau) - 2)} - \\ & - h_1^{(2\tau + \mu + 1, 2(r - \tau) - 1)} = \hat{Y}_2^{(2\tau + \mu + 1, 2(r - \tau))} \quad (-(1 + \mu)/2 \leq \tau \leq r). \end{aligned} \quad (156^\mu)$$

В системах (156⁰), (156¹) положим $\hat{Y}_{i,\tau}^r = \hat{Y}_i^{(2\tau + 2 - i + \mu, 2(r - \tau) - 1 + i)}$, $\hat{Y}_i^r = (\hat{Y}_{i,(i-2)\mu}^r, \dots, \hat{Y}_{i,r}^r)$, $h_{i,\tau}^r = h_i^{(2\tau + 1 - i + \mu, 2(r - \tau) - 1 + i)}$, $h_i^r = (h_{i,(i-1)(1-\mu)}^r, \dots, h_{i,r}^r)$ ($i = 1, 2$; $\mu = 0, 1$). Переходя к новым обозначениям и подставляя $h_{1,\tau}^r$ из второй подсистемы (156^μ) в первую, получаем систему

$$c_\tau h_{2,\tau}^r + a_\tau h_{2,\tau+1}^r + b_\tau h_{2,\tau+2}^r = Y_{0,\tau}^r \quad (\tau = \overline{-\mu, r}),$$

где

$$a_\tau = -\tilde{\alpha}(2\alpha(4\tau^2 + 2\tau + (4\tau + 2)\mu) + (2r - 2\tau - 1)(4\tau + 3 + 2\mu) - 3),$$

$$b_\tau = (2\tau + 2 + \mu)(2\tau + 3 + \mu), \quad c_\tau = (\alpha(2\tau - 2 + \mu) + 2(r - \tau))(\alpha(2\tau - 1 + \mu) + 2(r - \tau)),$$

$$Y_{0,\tau}^r = \hat{Y}_{1,\tau}^r + (\alpha(2\tau - 2 + \mu) + 2(r - \tau))\hat{Y}_{2,\tau}^r - \tilde{\alpha}(2\tau + 2 + \mu)\hat{Y}_{2,\tau+1}^r,$$

или систему

$$\Theta^r h_2^r = Y_0^r, \quad (158^\mu)$$

где Θ^r – трехдиагональная $(r+1+\mu) \times (r+\mu)$ -матрица с элементами $\theta_{\tau,\tau} = a_\tau$ ($\tau = \overline{-\mu, r-1}$), $\theta_{\tau,\tau+1} = b_\tau$ ($\tau = \overline{-\mu, r-2}$), $\theta_{\tau,\tau-1} = c_\tau$ ($\tau = \overline{1-\mu, r}$), а вектор $Y_0^r = (Y_{0,-\mu}^r, \dots, Y_{0,r}^r)$, считая, что $\hat{Y}_{2,-1}^r, \hat{Y}_{2,r+1}^r = 0$.

В системах (157^0) , (157^1) положим $\hat{Y}_{i,\tau}^r = \hat{Y}_i^{(2\tau-1+i+\mu, 2(r-\tau)+2-i)}$, $\hat{Y}_i^r = (\hat{Y}_{i,(1-i)\mu}^r, \dots, \hat{Y}_{i,r}^r)$, $h_{i,\tau}^r = h_i^{(2\tau-2+i+\mu, 2(r-\tau)+2-i)}$, $h_i^r = (h_{i,(2-i)(1-\mu)}^r, \dots, h_{i,r}^r)$.

Подставляя $2\tilde{\alpha}h_{2,\tau}^r$ из первой подсистемы (157^μ) во вторую, получаем

$$c_\tau h_{1,\tau}^r + a_\tau h_{1,\tau+1}^r + b_\tau h_{1,\tau+2}^r = Y_{0,\tau}^r \quad (\tau = \overline{-\mu, r}),$$

где

$$a_\tau = -\tilde{\alpha}(2\alpha(4\tau^2 + 2\tau - 1 + (4\tau + 2)\mu) + (2r - 2\tau - 1)(4\tau + 3 + 2\mu) - 2),$$

$$b_\tau = (2\tau + 2 + \mu)(2\tau + 3 + \mu), \quad c_\tau = (\alpha(2\tau - 3 + \mu) + 2(r - \tau) + 1)(\alpha(2\tau + \mu) + 2(r - \tau) - 1),$$

$$Y_{0,\tau}^r = (\alpha(2\tau + \mu) + 2(r - \tau) - 1)\hat{Y}_{1,\tau}^r - \tilde{\alpha}(2\tau + 2 + \mu)\hat{Y}_{1,\tau+1}^r - 2\tilde{\alpha}\hat{Y}_{2,\tau}^r,$$

или систему

$$\Theta^r h_1^r = Y_0^r, \quad (159^\mu)$$

где Θ^r, Y_0^r структурно такие же, как в системе (158^μ) , и $\hat{Y}_{1,-1}^r, \hat{Y}_{1,r+1}^r = 0$.

1⁰. Исследуем систему (158^0) . Для аннулирования $c_1, \dots, c_r$ введем числа d_τ :

$$d_0 = a_0 \neq 0, \quad d_\tau = a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/d_{\tau-1} \quad \text{при} \quad d_{\tau-1} \neq 0 \quad (1 \leq \tau \leq r-1). \quad (160_1)$$

Возможны два случая: 1) существует $\check{\tau}$ ($1 \leq \check{\tau} \leq r-1$) такое, что $d_0, \dots, d_{\check{\tau}-1} \neq 0$, $d_{\check{\tau}} = 0$; 2) $d_0, \dots, d_{r-1} \neq 0$, в этом случае положим $\check{\tau} = r$.

Лемма 3. Для элементов d_τ из (160_1) справедлива прямая формула

$$d_\tau = -\tilde{\alpha}(2\tau + 3)(2\alpha\tau + 2(r - \tau) - 2), \quad (161_1)$$

где $\tau = \overline{0, \check{\tau}}$ в случае 1) и $\tau = \overline{0, r-1}$ в случае 2).

Разобьем множество пар (α, r) с $\alpha \neq 0$ и $r \geq 2$ на два семейства:

$$\{\alpha, r\}_1^1 = \{-k/l, (k+l)n+1\}_{k,l,n \in \mathbb{N}}, \quad \tau_1 = ln; \quad \{\alpha, r\}_1^0 = \{(\alpha, r) \notin \{\alpha, r\}_1^1\}.$$

Лемма 4. Если пара $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^1$, то для d_τ из (161_1) реализуется случай 1) с $\check{\tau} = \tau_1$; если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^0$, то – случай 2) и $\check{\tau} = \tau_0 = r$.

Система (158^0) методом Гаусса может быть преобразована в систему

$$\Theta_d^r h_2^r = Y_d^r, \quad (162_1)$$

где

$$\Theta_d^r = \begin{pmatrix} d_0 & b_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{\check{\tau}-1} & b_{\check{\tau}-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{\check{\tau}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{\check{\tau}+1} & a_{\check{\tau}+1} & b_{\check{\tau}+1} & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{\check{\tau}+2} & a_{\check{\tau}+2} & \ddots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{r-2} & b_{r-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & c_{r-1} & a_{r-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_r \end{pmatrix},$$

Y_d^r имеет компоненты $Y_{d,0}^r = Y_{0,0}^r$, $Y_{d,\tau}^r = Y_{0,\tau}^r - (c_\tau/d_{\tau-1})Y_{d,\tau-1}^r$ ($\tau = \overline{1, \check{\tau}}$), $Y_{d,\tau}^r = Y_{0,\tau}^r$ ($\tau = \overline{\check{\tau}+1, r}$); $a_\tau, b_\tau, c_\tau, d_\tau$ описаны в (158^0) , (161_1) . Очевидно, что $Y_{d,\tau}^r = \sum_{j=0}^{\tau} (-1)^{\tau-j} Y_{0,j}^r \prod_{\nu=j+1}^{\tau} c_\nu/d_{\nu-1}$ ($\tau = \overline{0, \check{\tau}}$).

Первые $\check{\tau}$ уравнений системы (162_1) однозначно разрешимы относительно $h_{2,1}^r, \dots, h_{2,\check{\tau}}^r$, а уравнение с номером $\check{\tau}$ имеет вид

$$0 \cdot h_{2,\check{\tau}}^r + 0 \cdot h_{2,\check{\tau}+1}^r + b_{\check{\tau}} h_{2,\check{\tau}+2}^r = Y_{d,\check{\tau}}^r \quad (h_{2,r+1}^r, h_{2,r+2}^r = 0). \tag{163_1}$$

В случае 2) $\check{\tau} = r$, Θ_d^r – двухдиагональная матрица с нулевой нижней строкой, уравнение (163_1) , последнее в (162_1) , имеет вид $0 \cdot h_{2,r}^r = Y_{d,r}^r$.

В случае 1) выделим последние $r - \check{\tau} = kn + 1 \geq 2$ уравнений (162_1) :

$$\Theta_d^{r+} h_2^{r+} = Y_d^{r+}, \tag{164_1}$$

где Θ_d^{r+} – трехдиагональная верхнетреугольная матрица с главной диагональю $c_{\check{\tau}+1}, \dots, c_r$, $h_2^{r+} = (h_{2,\check{\tau}+1}^r, \dots, h_{2,r}^r)$, $Y_d^{r+} = (Y_{0,\check{\tau}+1}^r, \dots, Y_{0,r}^r)$.

Разобьем пары (α, r) на три непересекающихся семейства другим образом:

$$\{\alpha, r\}_1^{1c} = \{\alpha, r\}_1^1, \quad \tau_1^c = ln + 1;$$

$$\{\alpha, r\}_1^{2c} = \{-2k/(2l - 1), (2n - 1)(k + l) - n + 1\}_{k,l,n \in \mathbb{N}},$$

$$\tau_2^c = 2ln - l - n + 1; \quad \{\alpha, r\}_1^{0c} = \{(\alpha, r) \notin \{\alpha, r\}_1^{1c} \cup \{\alpha, r\}_1^{2c}\}.$$

Положим $c_\tau = c'_\tau c''_\tau$, где $c'_\tau = \alpha(2\tau - 2) + 2(r - \tau)$, $c''_\tau = \alpha(2\tau - 1) + 2(r - \tau)$.

Лемма 5. Если пара $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^{\nu c}$ ($\nu = 1, 2$), то в (158^0) $c_\tau = 0$ только при $\tau = \tau_\nu^c$, а если пара $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^{0c}$, то $c_1, \dots, c_r \neq 0$.

Следствие 19. В системе (158^0) $c_1, \dots, c_r \neq 0$, за исключением $c'_{\tau_1+1} = 0$, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^1$; $c''_{2ln-l-n+1} = 0$, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^{2c} \subset \{\alpha, r\}_1^0$.

Следовательно, в случае 1) можно ввести матрицу $G = \{g_{\tau j}\}_{\tau,j=\check{\tau}+1}^r$ с элементами

$$g_{\tau j} = 0 \quad \forall \tau = \overline{\check{\tau}+1, r} \quad (\check{\tau} + 1 \leq j \leq \tau - 1) \quad (g_{\check{\tau}+1\check{\tau}} = 0), \tag{165_1}$$

$$g_{\tau\tau} = 1, \quad g_{\tau j} = -(g_{\tau j-1} a_{j-1} + g_{\tau j-2} b_{j-2})/c_j \quad (\tau + 1 \leq j \leq r).$$

Тогда $G\Theta_d^{r+} = \{g_{\tau j-2} b_{j-2} + g_{\tau j-1} a_{j-1} + g_{\tau j} c_j\}_{\tau,j=\check{\tau}+1}^r = \text{diag}\{c_{\check{\tau}+1}, \dots, c_r\}$ и система (164_1) , умноженная слева на матрицу G , равносильна системе

$$c_\tau h_{2,\tau}^r = \sum_{j=\tau}^r g_{\tau j} Y_{0,j}^r \quad (\tau = \overline{\check{\tau}+1, r}). \tag{166_1}$$

Возвращаясь к уравнению (163₁), подставим в него прямую формулу для $Y_{d,\check{\tau}}^r$ из (162₁), а в случае 1) также $h_{2,\check{\tau}+2}^r$ из (166₁) ($c_{\check{\tau}+2} \neq 0$), тогда

$$0 \cdot h_{2,\check{\tau}+1}^r = \sum_{j=0}^{\check{\tau}} (-1)^{\check{\tau}-j} \prod_{\nu=j+1}^{\check{\tau}} \frac{c_{\nu}}{d_{\nu-1}} Y_{0,j}^r - \frac{b_{\check{\tau}}}{c_{\check{\tau}+2}} \sum_{j=\check{\tau}+2}^r g_{\check{\tau}+2,j} Y_{0,j}^r. \quad (167_1)$$

Выразим в (167₁) $Y_{0,j}^r$ через $\hat{Y}_{i,j}^r$ ($i = 1, 2$), для чего введем константы

$$u_j = \tilde{\alpha}^{\check{\tau}-j} \prod_{\nu=j+1}^{\check{\tau}} (\alpha(2\nu-1) + 2(r-\nu))/(2\nu+1),$$

$$v_j = (-2\alpha + 2(r-j))u_j/(2j+1) \quad (j = \overline{0, \check{\tau}}), \quad (168_1)$$

$$u_{\check{\tau}+1} = 0, \quad v_{\check{\tau}+1} = -2\tilde{\alpha}(\check{\tau}+1), \quad u_j = -b_{\check{\tau}}g_{\check{\tau}+2,j}/c_{\check{\tau}+2},$$

$$v_j = -b_{\check{\tau}}((\alpha(2j-2) + 2(r-j))g_{\check{\tau}+2,j} - 2\tilde{\alpha}jg_{\check{\tau}+2,j-1})/c_{\check{\tau}+2} \quad (j = \overline{\check{\tau}+2, r}),$$

тогда в силу (158⁰), (161₁) $u_j = (-1)^{\check{\tau}-j} \prod_{\nu=j+1}^{\check{\tau}} c_{\nu}/d_{\nu-1}$, $v_j = ((2j-2)\alpha + 2(r-j))u_j - 2j\tilde{\alpha}u_{j-1}$ ($j = \overline{0, \check{\tau}}$) и $u_{\check{\tau}} = 1$, $v_{\check{\tau}} = (-2\alpha + 2(r-\check{\tau}))/(2\check{\tau}+1)$.

Теперь в (167₁), согласно (158⁰),

$$\sum_{j=0}^{\check{\tau}} u_j Y_{0,j}^r = \sum_{j=0}^{\check{\tau}} u_j \hat{Y}_{1,j}^r + \sum_{j=0}^{\check{\tau}+1} v_j \hat{Y}_{2,j}^r,$$

а

$$\sum_{j=\check{\tau}+2}^r g_{\check{\tau}+2,j} Y_{0,j}^r = \sum_{j=\check{\tau}+2}^r g_{\check{\tau}+2,j} (\hat{Y}_{1,j}^r + (\alpha(2j-2) + 2(r-j))\hat{Y}_{2,j}^r) - \sum_{j=\check{\tau}+3}^{r+1} 2\tilde{\alpha}jg_{\check{\tau}+2,j-1}\hat{Y}_{2,j}^r.$$

В результате связь (167₁) принимает вид

$$\sum_{j=0}^{\check{\tau}} (u_j \hat{Y}_{1,j}^r + v_j \hat{Y}_{2,j}^r) + v_{\check{\tau}+1} \hat{Y}_{2,\check{\tau}+1}^r + \sum_{j=\check{\tau}+2}^r (u_j \hat{Y}_{1,j}^r + v_j \hat{Y}_{2,j}^r) = 0. \quad (169_1)$$

Если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^1$, то по лемме 4 и следствию 19 $\check{\tau} = \tau_1$ и $c_{\tau_1+1} = 0$, поэтому (166₁) при $\tau = \tau_1 + 1$ дает дополнительную резонансную связь $0 \cdot h_{2,\tau_1+1}^r = \sum_{j=\tau_1+1}^{\tau} g_{\tau_1+1,j} Y_{0,j}^r$, аналогично (169₁) представимую в виде

$$\sum_{j=\tau_1+1}^{\tau} (u_j^1 \hat{Y}_{1,j}^r + v_j^1 \hat{Y}_{2,j}^r) = 0, \quad (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^1 \quad (h_{2,\tau_1+1}^r \text{ любой}), \quad (170_1)$$

где $u_j^1 = g_{\tau_1+1,j}$, $v_j^1 = 2(\alpha(j-1) + r-j)g_{\tau_1+1,j} - 2\tilde{\alpha}jg_{\tau_1+1,j-1}$, g_{τ_j} из (165₁).

Запишем связи (169₁), (170₁) через коэффициенты системы (3).

Согласно определению (168₁), при $0 \leq j \leq \check{\tau} - 1$ множители $u_j, v_j = 0$, если

$$\prod_{\nu=j+1}^{\check{\tau}} (\alpha(2\nu-1) + 2(r-\nu)) = 0,$$

т.е. $c_{j+1}'' \cdots c_{\check{\tau}}'' = 0$. Кроме того, $v_j = 0$ ($0 \leq j \leq \check{\tau}$), если $-2\alpha + 2(r-j) = 0$, т.е. $j = r - \alpha$.

Введем семейство $\{\alpha, r\}_1^v = \{n, m\}_{m, n \in \mathbb{N}, m \geq 2} \subset (\{\alpha, r\}_1^0 \setminus \{\alpha, r\}_1^{2c})$. Тогда $v_j = 0 \Leftrightarrow (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^v$ и $j = m - n$. Используя следствие 19, можно сразу преобразовать уравнение (169₁) в случае 2), когда $\check{r} = r$.

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^{2c} \subset \{\alpha, r\}_1^0$, т.е. $\alpha = -2k/(2l-1)$, $r = (2n-1)(k+l) - n + 1$ ($k, l, n \in \mathbb{N}$). Тогда $\tau_2^c = 2ln - l - n + 1$ ($1 \leq \tau_2^c \leq r - 1$), поэтому $u_j, v_j \neq 0$ ($j = \overline{\tau_2^c, r}$), так как не содержат $c_{\tau_2^c}'' = 0$, и (169₁) имеет вид

$$\sum_{j=\tau_2^c}^r (u_j Y_1^{(2j+1, 2(r-j))} + v_j Y_2^{(2j, 2(r-j)+1)}) = \tilde{c}. \quad (169_1^{2c})$$

Если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^0 \setminus \{\alpha, r\}_1^{2c}$, то уравнение (169₁) принимает вид

$$\sum_{j=0}^r (u_j Y_1^{(2j+1, 2(r-j))} + v_j Y_2^{(2j, 2(r-j)+1)}) = \tilde{c} \quad (r \geq 2), \quad (169_1^0)$$

и все $u_j, v_j \neq 0$, кроме $v_{m-n} = 0$ при $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^v$.

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^1 = \{\alpha, r\}_1^{1c}$ ($\check{r} = \tau_1$). Оценим u_j, v_j в (169₁) и (170₁), введя для $\tau = \overline{\tau_1 + 1, r - 1}$ рекуррентную последовательность

$$f_{\tau\tau} = -a_\tau, \quad f_{\tau j} = -a_j - b_{j-1}c_j/f_{\tau j-1} \quad (\tau + 1 \leq j \leq r - 1) \quad \text{при} \quad f_{\tau j-1} \neq 0. \quad (171_1)$$

Индукцией по j можно показать, что в (165₁) при $\check{r} = \tau_1$

$$g_{\tau j} = g_{\tau j-1}f_{\tau j-1}/c_j \quad (j = \overline{\tau + 1, r}, \quad g_{\tau\tau} = 1). \quad (172_1)$$

Поскольку $\alpha = -k/l$, $r = (k+l)n + 1$ и $\tau_1 = ln$, то в (158⁰)

$$c_\tau = (2n(k+l) + 2 - 2\tau - k(2\tau - 2)/l)(2n(k+l) + 2 - 2\tau - k(2\tau - 1)/l)$$

и $c_\tau = 0$ при $\tau = ln + (k+2l)/(2k+2l)$, $ln + 1$, поэтому $c_\tau > 0$ при $\tau \geq \tau_1 + 2$.

Для оценки снизу чисел $f_{\tau j}$ введем $\xi_j = -2(j+1)(\alpha(2j+1) + 2(r-j) - 2)$ ($j = \overline{\tau_1 + 1, r - 1}$). Поскольку $\xi_j = 0$ при $j = -1, ln - k/(2k+2l)$, то $\xi_j > 0$ при $j \geq ln$. По индукции $f_{\tau j} > \xi_j$ ($\tau = \tau_1 + 1, \tau_1 + 2, j = \overline{\tau, r - 1}$). Согласно (165₁), (172₁), при таких τ имеем $g_{\tau j} > g_{\tau j-1}\xi_{j-1}/c_j > 0$ ($j = \overline{\tau + 1, r}$), поэтому $u_j < 0$, $u_j^1 > 0$.

Поскольку $c_j' = 0$ при $j = \tau_1 + 1$, то в (170₁) $v_{\tau_1+1}^1 = 0$, и $c_j', \alpha(2j-1) + 2(r-j) < 0$ при $j \geq \tau_1 + 2$, поэтому входящее в v_j из (168₁) и в v_j^1 из (170₁) выражение

$$(\alpha(2j-2) + 2(r-j))g_{\tau j} - 2\tilde{\alpha}jg_{\tau j-1} < 0.$$

В результате если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^1$, то уравнение (170₁) принимает вид

$$u_{\tau_1+1}^1 Y_1^{(2\tau_1+3, 2(r-\tau_1)-2)} + \sum_{j=\tau_1+2}^r (u_j^1 Y_1^{(2j+1, 2(r-j))} + v_j^1 Y_2^{(2j, 2(r-j)+1)}) = \tilde{c}, \quad (170_1^1)$$

где все $u_j^1 > 0$, $v_j^1 < 0$, а в уравнении (169₁) $u_j < 0$, $v_j > 0$ при $j = \overline{\tau_1 + 2, r}$, и (169₁) принимает вид

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\tau_1} (u_j Y_1^{(2j+1, 2(r-j))} + v_j Y_2^{(2j, 2(r-j)+1)}) + v_{\tau_1+1} Y_2^{(2(\tau_1+1), 2(r-\tau_1)-1)} + \\ & + \sum_{j=\tau_1+2}^r (u_j Y_1^{(2j+1, 2(r-j))} + v_j Y_2^{(2j, 2(r-j)+1)}) = \tilde{c}. \end{aligned} \quad (169_1^1)$$

2⁰. Исследуем систему (158¹). Разобьем пары (α, r) ($\alpha \neq 0$, $r \geq 2$) на три непересекающихся семейства и введем отвечающие каждому константы τ_ν :

$$\{\alpha, r\}_2^1 = \{-2k/(2l-1), (2n-1)(k+l) - n + 1\}_{k,l,n \in M_2^0 \cup M_2^1},$$

$$M_2^0 = \{k \geq 2, l = 0, n = 1\}, \quad M_2^1 = \{k, l, n \in \mathbb{N}\}, \quad \tau_1 = 2ln - l - n + 1;$$

$$\{\alpha, r\}_2^2 = \{-k/l, (k+l)n\}_{k,l,n \in \mathbb{N}}, \quad \tau_2 = ln;$$

$$\{\alpha, r\}_2^0 = \{(\alpha, r) \notin \{\alpha, r\}_2^1 \cup \{\alpha, r\}_2^2\}, \quad \tau_0 = -1.$$

Лемма 6. Если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^\nu$ ($\nu = 1, 2$), то в Θ^r из (158¹) $c_{\tau_\nu} = 0$, $c_\tau \neq 0$ ($0 \leq \tau \leq r$, $\tau \neq \tau_\nu$); если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^0$, то $c_0, \dots, c_r \neq 0$.

Следствие 20. Если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^2$, то $c_\tau > 0$ ($0 \leq \tau \leq \tau_2 - 1$).

Выделим последние $r - \tau_\nu + 1$ уравнений (158¹) в отдельную подсистему

$$\Theta_\nu^{r+} h_2^{r+} = Y_0^{r+} \quad (\nu = 0, 1, 2), \quad (164_2)$$

где Θ_ν^{r+} – трехдиагональная верхнетреугольная матрица с главной диагональю $c_{\tau_\nu}, \dots, c_r$, векторы $h_2^{r+} = (h_{2,\tau_\nu}^r, \dots, h_{2,r}^r)$, $Y_0^{r+} = (Y_{0,\tau_\nu}^r, \dots, Y_{0,r}^r)$.

При $\nu = 0$ система (164₂) совпадает с системой (158¹), только матрица Θ_0^{r+} имеет дополнительный нулевой первый столбец, порождающий псевдоэлементы $c_{-1} = 0$, которому отвечает $\tau_0 = -1$, и $h_{2,-1}^r$.

Умножим систему (164₂) слева на матрицу G , определенную в (165₁), в которой $\bar{\tau} = \tau_\nu - 1$. Тогда $c_\tau h_{2,\tau}^r = \sum_{j=\tau}^r g_{\tau j} Y_{0,j}^r$ ($\tau = \bar{\tau}_\nu, \bar{r}$).

Выражая компоненты $Y_{0,j}^r$ через $\hat{Y}_{i,j}^r$ согласно (158¹), получаем равенства

$$c_\tau h_{2,\tau}^r = \sum_{j=\tau}^r (g_{\tau j} \hat{Y}_{1,j}^r + ((\alpha(2j-1) + 2(r-j))g_{\tau j} - \tilde{\alpha}(2j+1)g_{\tau j-1}) \hat{Y}_{2,j}^r).$$

По лемме 6 в них только $c_{\tau_\nu} = 0$, поэтому только при $\tau = \tau_\nu$ имеем связь

$$\sum_{j=\tau_\nu}^r (u_j^\nu \hat{Y}_{1,j}^r + v_j^\nu \hat{Y}_{2,j}^r) = 0, \quad (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^\nu \quad (\nu = 0, 1, 2), \quad (169_2)$$

где $u_j^\nu = g_{\tau_\nu j}$, $v_j^\nu = (\alpha(2j-1) + 2(r-j))g_{\tau_\nu j} - \tilde{\alpha}(2j+1)g_{\tau_\nu j-1}$ ($j = \bar{\tau}_\nu, \bar{r}$), $g_{\tau j}$ из (165₁) с $\bar{\tau} = \tau_\nu - 1$ и h_{2,τ_ν}^r при $\nu = 1, 2$ не имеют ограничений.

При $\nu = 0$ ($\tau_0 = -1$) отсутствуют $h_{2,-1}^r, \hat{Y}_{2,-1}^r$, связь (169₂) имеет вид $\sum_{j=-1}^r u_j^0 \hat{Y}_{1,j}^r + \sum_{j=0}^r v_j^0 \hat{Y}_{2,j}^r = 0$ и гарантирует разрешимость системы (158¹).

Пусть $\nu = 1, 2$. Тогда в системе (158¹) остались неразрешенными первые $\tau_\nu + 1$ уравнений с $\tau_\nu + 1$ неизвестными $h_{2,0}^r, \dots, h_{2,\tau_\nu}^r$ ($0 \leq \tau_\nu \leq r$). Для их разрешимости достаточно доказать, что $\det \Theta_\nu^{r-} \neq 0$, где Θ_ν^{r-} – трехдиагональная матрица с главной диагональю $a_{-1}, \dots, a_{\tau_\nu-1}$, поддиагональю $c_0, \dots, c_{\tau_\nu-1}$ и наддиагональю $b_{-1}, \dots, b_{\tau_\nu-2}$ ($\nu = 1, 2$).

Методом Гаусса матрица Θ_ν^{r-} преобразуется в двухдиагональную матрицу $\check{\Theta}_\nu^{r-}$ с главной диагональю $e_{-1}, \dots, e_{\tau_\nu-1}$ и поддиагональю $c_0, \dots, c_{\tau_\nu-1}$ по рекуррентным формулам

$$e_{\tau_\nu-1} = a_{\tau_\nu-1}, \quad e_\tau = a_\tau - b_\tau c_{\tau+1}/e_{\tau+1} \quad (\tau = \bar{\tau}_\nu - 2, -1), \quad (160_2)$$

если $e_{\tau_\nu-1}, \dots, e_0 \neq 0$, где элементы a_τ, b_τ, c_τ определены в (158¹).

Лемма 7. В матрице $\check{\Theta}_\nu^{r-}$ ($\nu = 1, 2$) определяемые по формулам (160₂) диагональные элементы $e_{\tau_\nu-1}, \dots, e_{-1}$ отличны от нуля.

Доказательство. Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^1$. Если $k, l, n \in M_2^0$, то $(\alpha, r) \in \{2k, k\}_{k \geq 2}$, $\tau_1 = 0$, $\check{\Theta}_1^{r-} = a_{-1}$. Поэтому $e_{-1} = a_{-1} = -2k + 2 \neq 0$.

Если $k, l, n \in M_2^1$, то $\alpha < 0$, и для e_τ из (160₂) верна прямая формула

$$e_\tau = (2\tau + 1)(2\alpha\tau + 2(r - \tau)) \quad (\tau = \overline{\tau_1 - 1, -1}). \quad (161_2)$$

Из равенства $e_\tau = 0$ следует, что $\tau = r/(1 - \alpha) = 2ln - l - n + (k + l - 1)/(2k + 2l - 1) \notin \mathbb{Z}$ при $k, l, n \in \mathbb{Z}$. Поэтому в (161₂) $e_{\tau_1-1}, \dots, e_{-1} \neq 0$.

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^2$. Тогда $\alpha < 0$. Покажем, что $e_{\tau_2-1}, \dots, e_0 > 0$. Введем

$$\zeta_\tau = (2\tau + 1)(\alpha(2\tau - 1) + 2(r - \tau)).$$

Тогда при $\tau \geq 0$ имеем $\zeta_\tau > 0 \Leftrightarrow \tau < \tau_2 + k/(2l + 2k)$ и по индукции $e_\tau > \zeta_\tau$ ($\tau = \overline{\tau_2 - 1, 0}$).

Для e_{-1} введем $\eta_\tau = (2\tau + 2)(\alpha(2\tau - 1) + 2(r - \tau))$. Тогда $\eta_\tau > \zeta_\tau > 0$ при $0 \leq \tau \leq \tau_2 - 1$ и $\eta_{-1} = 0$. По индукции $e_\tau < \eta_\tau$ ($\tau = \overline{\tau_2 - 1, -1}$). Лемма доказана.

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^1$, $k, l, n \in M_2^0$. Оценим u_j^1, v_j^1 в (169₂) ($j = \overline{\tau_1, r}$). В (158¹) $c_\tau = (4k\tau - 2\tau)(4k\tau + 2(k - \tau))$, т.е. $c_\tau = 0$ при $\tau = -k/(2k - 1), 0$, поэтому $c_\tau > 0$ при $\tau \geq 1 = \tau_1 + 1$. Согласно (171₁), для тех $j = \overline{\tau_1 + 1, r}$, при которых $f_{\tau_1 j-1} \neq 0$, верна формула (172₁) $g_{\tau_1 j} = g_{\tau_1 j-1} f_{\tau_1 j-1} / c_j$.

Для оценки $f_{\tau_1 j}$ введем

$$\xi_j = (2j + 3)(\alpha(2j + 1) + 2(r - j) - 2) > 0 \quad \text{и} \quad \eta_j = (2j + 3)(\alpha(2j + 2) + 2(r - j) - 2) > 0$$

при $j \geq 0$. По индукции $\xi_j < f_{\tau_1 j} < \eta_j$ ($j = \overline{\tau_1, r - 1}$). Тогда $g_{\tau_1 \tau_1} = 1$, $0 < g_{\tau_1 j-1} \xi_{j-1} / c_j < g_{\tau_1 j} < g_{\tau_1 j-1} \eta_{j-1} / c_j$ ($j = \overline{\tau_1 + 1, r}$). Поэтому, во-первых, $u_j^1 > 0$, а во-вторых, поскольку $\kappa_2 = \alpha(2j - 1) + 2(r - j) = 0$ при $j = \tau_1$, то в (169₂) $v_{\tau_1}^1 = 0$. При $j \geq 1 = \tau_1 + 1$ $\kappa_2 > 0$ и $v_j^1 < g_{\tau_1 j-1}(\kappa_2 \eta_{j-1} / c_j - 2j - 1) = 0$. Поэтому если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^1$, $k, l, n \in M_2^0$, то все $u_j^1 > 0$, $v_j^1 < 0$, кроме $v_{\tau_1}^1 = 0$, и (169₂) имеет вид

$$u_{\tau_1}^1 Y_1^{(2\tau_1+2, 2(r-\tau_1))} + \sum_{j=\tau_1+1}^r (u_j^1 Y_1^{(2j+2, 2(r-j))} + v_j^1 Y_2^{(2j+1, 2(r-j)+1)}) = \tilde{c}. \quad (169_2^1)$$

Покажем, что равенство (169₂¹) имеет место и для $k, l, n \in M_2^1$. Поскольку $\tau_1 = 2ln - l - n + 1$, то $c_\tau > 0$ при $\tau \geq \tau_1 + 1$.

Для оценки $f_{\tau_1 j}$ введем $\zeta_j = -(2j + 3)(\alpha(2j + 2) + 2(r - j) - 2) > 0$ при $j \geq \tau_1 - 1$. По индукции $f_{\tau_1 j} > \zeta_j$ ($j = \overline{\tau_1, r - 1}$). Тогда $u_j^1 > 0$, поскольку $g_{\tau_1 \tau_1} = 1$, $g_{\tau_1 j} > g_{\tau_1 j-1} \zeta_{j-1} / c_j > 0$ ($j = \overline{\tau_1 + 1, r}$). Так как $\kappa_2 = 0$ при $j = \tau_1$, то $v_{\tau_1}^1 = 0$. При $j \geq \tau_1 + 1$ имеем $\kappa_2 < 0$ и $v_j^1 < g_{\tau_1 j-1}(\kappa_2 \zeta_{j-1} / c_j + 2j + 1) = 0$.

Пусть теперь $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^2$ ($\tau_2 = ln$). Оценим u_j^2, v_j^2 в (169₂) при $j = \overline{\tau_2, r}$. В (158¹) $c_\tau = 2((1 - 2\tau)k/l + 2n(k + l) - 2\tau)(-k\tau/l + n(k + l) - \tau) > 0$ при $\tau \geq \tau_2 + 1$, так как $c_\tau = 0$ при $\tau = ln, ln + k/(2l + 2k)$.

По индукции для $f_{\tau j}$ из (171₁) при $\tau = \tau_2$ верна формула $f_{\tau_2 j} = -(2j + 4)(\alpha(2j + 1) + 2(r - j) - 2)$ ($j = \overline{\tau_2, r}$). Поскольку $f_{\tau_2 j} = 0$ при $j = -2, ln - (2l + k)/(2l + 2k)$, то $f_{\tau_2 j} > 0$ при $j \geq ln = \tau_2$.

Согласно (172₁), в (169₂) $u_j^2 > 0$ ($j = \overline{\tau_2, r}$), $v_{\tau_2}^2 = \alpha(2\tau_2 - 1) + 2(r - \tau_2) = k/l > 0$, а $2\alpha - 2r + 2j$, $2\alpha j + 2(r - j) < 0$ при $j = \overline{\tau_2 + 1, r}$, поэтому $v_j^2 = g_{\tau_2 j-1}(2\alpha - 2r + 2j)/(2\alpha j + 2(r - j)) > 0$. В результате если пара $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^2$, то все $u_j^2, v_j^2 > 0$ и (169₂) принимает вид

$$\sum_{j=\tau_2}^r (u_j^2 Y_1^{(2j+2, 2(r-j))} + v_j^2 Y_2^{(2j+1, 2(r-j)+1)}) = \tilde{c}. \quad (169_2^2)$$

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^0$. Тогда в (169₂) $u_{-1}^0 = 1$, но $v_{-1}^0 = 2r - 3\alpha + 2 = 0$ при $\alpha = (2r + 2)/3$. При $j = 1$, согласно (165₁),

$$u_1^0 = g_{-11} = -(g_{-10}a_0 + b_{-1})/c_1 =$$

$$= (-2\alpha + 3\alpha r + 3r^2 - 9r + 4)/(r(2r - \alpha)(\alpha + 2r - 2)(\alpha + r - 1)) = 0$$

при $\alpha = -(3r^2 - 9r + 4)/(3r - 2)$, т.е. множители u_j^0, v_j^0 могут обращаться в нуль. В результате уравнение (169₂) имеет вид

$$Y_1^{(0,2r+2)} + \sum_{j=0}^r (u_j^0 Y_1^{(2j+2,2(r-j))} + v_j^0 Y_2^{(2j+1,2(r-j)+1)}) = \tilde{c}. \quad (169_2^0)$$

3⁰. Исследуем систему (159⁰). Разобьем пары (α, r) ($\alpha \neq 0, r \geq 2$) на три непересекающихся семейства и введем отвечающую каждому константу τ :

$$\{\alpha, r\}_3^1 = \{-(2k - 1)/(2l - 1), (2n - 1)(k + l - 1) + 1\}_{k,l,n \in M_3^0 \cup M_3^1},$$

$$\tau_1 = 2ln - l - n + 2, \quad \text{где } M_3^0 = \{k \geq 2, l = 0, n = 1\}, \quad M_3^1 = \{k, l, n \in \mathbb{N}\};$$

$$\{\alpha, r\}_3^2 = \{-(2k - 1)/(2l), (2n - 1)(k + l) - n + 1\}_{k,l,n \in M_3^1 \cup M_3^2},$$

$$\tau_2 = l(2n - 1), \quad \text{где } M_3^2 = \{k = 0, l \geq 2, n = 1\};$$

$$\{\alpha, r\}_3^0 = \{(\alpha, r) \notin \{\alpha, r\}_3^1 \cup \{\alpha, r\}_3^2\}, \quad \tau_0 = 0.$$

Лемма 8. Если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^\nu$ ($\nu = 1, 2$), то в матрице Θ^r из (159⁰) $c_{\tau_\nu} = 0, c_\tau \neq 0$ ($1 \leq \tau \leq r, \tau \neq \tau_\nu$); если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^0$, то $c_1, \dots, c_r \neq 0$.

Следствие 21. Если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^1$ и $k, l, n \in M_3^1$, то $c_\tau > 0$ при $\tau = \overline{1, \tau_1 - 2}$, $c_{\tau_1 - 1} < 0$; если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^2$, то $c_\tau > 0$ при $\tau = \overline{1, \tau_2 - 1}$.

Выделим последние $r - \tau_\nu + 1$ уравнений (159⁰) в отдельную подсистему

$$\Theta_\nu^{r+} h_1^{r+} = Y_0^{r+} \quad (\nu = 0, 1, 2), \quad (164_3)$$

где Θ_ν^{r+} – трехдиагональная верхнетреугольная матрица с главной диагональю $c_{\tau_\nu}, \dots, c_r$, векторы $h_1^{r+} = (h_{1,\tau_\nu}^r, \dots, h_{1,r}^r)$, $Y_0^{r+} = (Y_{0,\tau_\nu}^r, \dots, Y_{0,r}^r)$. При $\nu = 0$ система (164₃) фактически совпадает с системой (159⁰).

Поступая с (164₃) так же, как с системой (164₂), получаем равенства

$$c_\tau h_{1,\tau}^r = \sum_{j=\tau}^r (((2\alpha j + 2(r - j) - 1)g_{\tau j} - 2\tilde{\alpha} j g_{\tau j - 1})\hat{Y}_{1,j}^r - 2\tilde{\alpha} g_{\tau j} \hat{Y}_{2,j}^r),$$

откуда следуют равенства

$$\sum_{j=\tau_\nu}^r (u_j^\nu \hat{Y}_{1,j}^r + v_j^\nu \hat{Y}_{2,j}^r) = 0, \quad (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^\nu \quad (\nu = 0, 1, 2), \quad (169_3)$$

где $u_j^\nu = (2\alpha j + 2(r - j) - 1)g_{\tau_\nu j} - 2\tilde{\alpha} j g_{\tau_\nu j - 1}$, $v_j^\nu = -2\tilde{\alpha} g_{\tau_\nu j}$ ($j = \overline{\tau_\nu, r}$), $g_{\tau j}$ из (165₁) с $\tilde{\tau} = \tau_\nu - 1$ и h_{1,τ_ν}^r при $\nu = 1, 2$ не имеют ограничений.

При $\nu = 0$ ($\tau_0 = 0$) отсутствует $h_{1,0}^r$, связь (169₃) принимает вид

$$\sum_{j=0}^r u_j^0 \hat{Y}_{1,j}^r + \sum_{j=0}^r v_j^0 \hat{Y}_{2,j}^r = 0$$

и гарантирует разрешимость системы (158₃).

Пусть $\nu = 1, 2$. Тогда в системе (158₃) остались неразрешенными первые τ_ν уравнений с τ_ν неизвестными $h_{1,1}^r, \dots, h_{1,\tau_\nu}^r$ ($1 \leq \tau_\nu \leq r$).

Покажем, что $\det \Theta_\nu^{r-} \neq 0$, где Θ_ν^{r-} – матрица с главной диагональю $a_0, \dots, a_{\tau_\nu - 1}$, поддиагональю $c_1, \dots, c_{\tau_\nu - 1}$ и наддиагональю $b_0, \dots, b_{\tau_\nu - 2}$.

Методом Гаусса матрица Θ_ν^{r-} преобразуется в двухдиагональную матрицу $\check{\Theta}_\nu^{r-}$ с диагоналями $d_0, \dots, d_{\tau_\nu-1}$ и $b_0, \dots, b_{\tau_\nu-2}$ по рекуррентным формулам

$$d_0 = a_0, \quad d_\tau = a_\tau - b_{\tau-1}c_\tau/d_{\tau-1} \quad (\tau = \overline{1, \tau_\nu-1}), \quad (160_3)$$

если $d_0, \dots, d_{\tau_\nu-2} \neq 0$, где элементы a_τ, b_τ, c_τ определены в (159⁰).

Лемма 9. В матрице $\check{\Theta}_\nu^{r-}$ ($\nu = 1, 2$) определяемые по формулам (160₃) диагональные элементы $d_0, \dots, d_{\tau_\nu-1}$ отличны от нуля.

Доказательство. Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^1$. Если $k, l, n \in M_3^0$, то $(\alpha, r) \in \{2k-1, k\}_{k \geq 2}$, $\tau_1 = 1$, $\check{\Theta}_1^{r-} = a_0$. Поэтому $d_0 = a_0 = 3-2k \neq 0$.

Пусть $k, l, n \in M_3^1$. Введем

$$\zeta_\tau = (2\tau+2)(\alpha(2\tau-1) + 2(r-\tau)-1)(2r-2\tau-2\alpha-3)/(2r-2\tau-2\alpha-1) > 0$$

при $0 \leq \tau \leq \tau_1-2$ и покажем, что $d_\tau > \zeta_\tau$. Поскольку

$$d_0 - \zeta_0 = (4r^2 - 2\alpha(2r-1) - 1)/(2r-2\alpha-1) > 0,$$

то имеется база индукции. Предположим, что $d_{\tau-1} > \zeta_{\tau-1}$. В силу (160₃) $d_\tau > a_\tau - b_{\tau-1}c_\tau/\zeta_{\tau-1}$, так как, согласно следствию 21, $b_{\tau-1}c_\tau > 0$ ($\tau = \overline{1, \tau_1-2}$). Но

$$\begin{aligned} a_\tau - b_{\tau-1}c_\tau/\zeta_{\tau-1} &= \zeta_\tau \Leftrightarrow 8\alpha\tau^2 + 4\alpha\tau - 2\alpha + 8r\tau + 6r - 8\tau^2 - 10\tau - 5 - \\ &\quad - ((2\tau+1)(2\alpha\tau + 2(r-\tau)-1)(2r-2\tau-2\alpha+1) + \\ &\quad + (2\tau+2)(2r-2\tau-2\alpha-3)(\alpha(2\tau-1) + 2(r-\tau)-1))/(2r-2\tau-2\alpha-1) = \\ &= 0 \Leftrightarrow -2 + (4r-4\tau-4\alpha-2)/(2r-2\tau-2\alpha-1) = 0, \end{aligned}$$

т.е. $d_\tau > \zeta_\tau > 0$ при $0 \leq \tau \leq \tau_1-2$.

Поскольку $b_{\tau_1-2}c_{\tau_1-1} < 0$, то $d_{\tau_1-1} = a_{\tau_1-1} - b_{\tau_1-2}c_{\tau_1-1}/d_{\tau_1-2} < a_{\tau_1-1} - b_{\tau_1-2}c_{\tau_1-1}/\zeta_{\tau_1-2} = 4\alpha(\tau_1-1)^2 + 2\alpha\tau_1 - 4\alpha + 4r\tau_1 - 4(\tau_1-1)^2 - 10\tau_1 + 4 - (8\alpha(\tau_1-1)^2 + 12\alpha\tau_1 - 8\alpha)/(2r-2\tau_1-2\alpha+1) = 0$ при подстановке α и r .

В итоге если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^1$ и $k, l, n \in M_3^1$, то $d_\tau \neq 0$ ($\tau = \overline{0, \tau_1-1}$).

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^2$. Для $k, l, n \in M_3^1$ введем $\eta_\tau = (2\tau+3)(2\tau\alpha + 2(r-\tau)-2) > 0$ при $0 \leq \tau \leq 2ln-l-1 = \tau_2-1$. По индукции $d_\tau > \eta_\tau$. А для $k, l, n \in M_3^2$ введем $\xi_\tau = -(2\tau+3)(2\tau\alpha + 2\alpha + 2(r-\tau)-3) \leq 0$ при $0 \leq \tau \leq l-1 = \tau_2-1$. По индукции $d_\tau < \xi_\tau$. Лемма доказана.

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^1$, $k, l, n \in M_3^0$ ($\tau_1 = 1$). Оценим u_j^r, v_j^r в (169₃) ($j = \overline{\tau_1, r}$). В (159⁰) $c_\tau = ((2k-1)(2\tau-3) + 2k-2\tau+1)(2\tau(2k-1) + 2k-2\tau-1) > 0$ при $\tau \geq 2$. Согласно (171₁), для тех $j = \tau_1+1, r$, при которых $f_{\tau_1 j-1} \neq 0$, верна формула (172₁) $g_{\tau_1 j} = g_{\tau_1 j-1}f_{\tau_1 j-1}/c_j$.

Для оценки $f_{\tau_1 j}$ введем $\xi_j = (2j+3)(\alpha(2j-1) + 2(r-j)-1) > 0$ при $j \geq 1$. По индукции $f_{\tau_1 j} > \xi_j$ ($j = \tau_1, r-1$). Тогда $g_{\tau_1 \tau_1} = 1$, $g_{\tau_1 j} > g_{\tau_1 j-1}\xi_{j-1}/c_j > 0$ ($j = \tau_1+1, r$). Поскольку $2\alpha j + 2(r-j)-1 > 0$ при $j \geq 0$, то в (169₃) $u_j^1 > g_{\tau_1 j-1}((2\alpha j + 2(r-j)-1)\xi_{j-1}/c_j - 2j) = g_{\tau_1 j-1}$.

Поэтому если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^1$, $k, l, n \in M_3^0$, т.е. $\alpha = 2r-1$, то в уравнении (169₃) все множители $u_j^1 > 0$, $v_j^1 < 0$ и (169₃) принимает вид

$$\sum_{j=\tau_1}^r (u_j^1 Y_1^{(2j, 2(r-j)+1)} + v_j^1 Y_2^{(2j+1, 2(r-j))}) = \tilde{c}. \quad (169_3^1)$$

Покажем, что это уравнение получается для $k, l, n \in M_3^1$, только $u_j^1 < 0$, а $v_j^1 > 0$. Поскольку $\tau_1 = 2ln-l-n+2$, то $c_\tau = 0$ при $\tau = \tau_1-2 + (2k+4l-3)/(4k+4l-4)$, τ_1 , поэтому $c_\tau > 0$ при $\tau \geq \tau_1+1$. Для оценки $f_{\tau_1 j}$ введем $\zeta_j = -(2j+2)(\alpha(2j-1) + 2(r-j)-1) > 0$ при $j \geq \tau_1$. По индукции $f_{\tau_1 j} > \zeta_j$ ($j = \tau_1, r-1$) и $g_{\tau_1 j} > 0$ ($j = \tau_1, r$). Поскольку $2\alpha j + 2(r-j)-1 < 0$ при $j \geq \tau_1$, то в (169₃) $u_j^1 < g_{\tau_1 j-1}(\zeta_{j-1}(2\alpha j + 2(r-j)-1)/c_j + 2j) = 0$.

Пусть теперь $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^2$, $k, l, n \in M_3^1$. Тогда $\tau_2 = l(2n - 1)$ и в (169₃) $v_{\tau_2}^2 = 2$, а при $j = \tau_2 + 1$, согласно (165₁), $v_{\tau_2+1}^2 = 2g_{\tau_2 \tau_2+1} = -2a_{\tau_2}/c_{\tau_2+1} = 0$ при $k, l, n = 1$, т.е. u_j^2, v_j^2 могут обращаться в нуль. При этом уравнение (169₃) имеет вид

$$\sum_{j=\tau_2}^r (u_j^2 Y_1^{(2j, 2(r-j)+1)} + v_j^2 Y_2^{(2j+1, 2(r-j))}) = \tilde{c}. \quad (169_3^{21})$$

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^2$, $k, l, n \in M_3^2$, т.е. $\alpha = 1/(2r)$. Тогда $\tau_2 = r$, $u_r^2 = 2\alpha r - 1 = 0$, $v_r^2 = -2\tilde{\alpha}g_{rr} = -2$ и уравнение (169₃) принимает вид

$$-2Y_2^{(2r+1, 0)} = \tilde{c}. \quad (169_3^{22})$$

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^0$. Тогда в (169₃) $u_0^0, v_0^0 \neq 0$. Но, согласно (165₁), $v_1^0 = -2\tilde{\alpha}g_{01} = -2\tilde{\alpha}a_0/c_1 = 0$ при $\alpha = (6r - 5)/2$. Уравнение (169₃) имеет вид

$$\sum_{j=0}^r (u_j^0 Y_1^{(2j, 2(r-j)+1)} + v_j^0 Y_2^{(2j+1, 2(r-j))}) = \tilde{c}. \quad (169_3^0)$$

4⁰. Исследуем систему (159¹). Введем рекуррентную последовательность d_τ :

$$d_{-1} = a_{-1}, \quad d_\tau = a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/d_{\tau-1} \quad \text{при} \quad d_{\tau-1} \neq 0 \quad (0 \leq \tau \leq r-1). \quad (160_4)$$

Возможны два случая: 1) существует $\check{\tau}$ ($-1 \leq \check{\tau} \leq r-1$) такое, что $d_{-1}, \dots, d_{\check{\tau}-1} \neq 0$, $d_{\check{\tau}} = 0$; 2) $d_{-1}, \dots, d_{r-1} \neq 0$, в этом случае положим $\check{\tau} = r$.

Лемма 10. Для элементов d_τ из (160₄) справедлива прямая формула

$$d_\tau = -\tilde{\alpha}(2\tau + 3) \frac{(2\alpha\tau + 2(r - \tau) - 1)(-2\alpha + 2(r - \tau) - 3)}{-2\alpha + 2(r - \tau) - 1}, \quad (161_4)$$

где $\tau = \overline{-1, \check{\tau}}$ в случае 1) и $\tau = \overline{-1, r-1}$ в случае 2).

Разобьем множество пар (α, r) с $\alpha \neq 0$ и $r \geq 2$ на три семейства:

$$\{\alpha, r\}_4^1 = \{-(2k - 1)/(2l), (k + l)(2n - 1) - n + 1\}_{k, l, n \in \mathbb{N}}, \quad \tau_1 = l(2n - 1);$$

$$\{\alpha, r\}_4^2 = \{(2\ell - 1)/2, m\}_{\ell, m \in \mathbb{Z}_+, m \geq \max\{\ell, 2\}}, \quad \tau_2 = m - \ell - 1;$$

$$\{\alpha, r\}_4^0 = \{(\alpha, r) \notin \{\alpha, r\}_4^1 \cup \{\alpha, r\}_4^2\}, \quad \tau_0 = r.$$

Учитывая, что $\{\alpha, r\}_4^1 \cap \{\alpha, r\}_4^2 \neq \emptyset$, введем еще два семейства:

$$\{\alpha, r\}_4^{21} = \{\alpha, r\}_4^1 \cap \{\alpha, r\}_4^2, \quad \{\alpha, r\}_4^{22} = \{\alpha, r\}_4^2 \setminus \{\alpha, r\}_4^{21}.$$

Лемма 11. Справедливы равенства $\{\alpha, r\}_4^{21} = \{-1/2, (3k - 1)(2n - 1) - n + 1\}_{k, n \in \mathbb{N}}$ и $\tau_{21} = (3k - 1)(2n - 1) - n$; $\{\alpha, r\}_4^{22} = \{-1/2, m\}_{m \in M_4} \cup \{(2\ell - 1)/2, m\}_{\ell, m \in \mathbb{N}, m \geq \max\{\ell, 2\}}$, где $M_4 = \mathbb{N} \setminus (\{1\} \cup \{(3k - 1)(2n - 1) - n + 1\}_{k, n \in \mathbb{N}})$.

Лемма 12. Если пара $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^1$, то для элементов d_τ из (161₄) реализуется случай 1) с $\check{\tau} = \tau_1$; если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^{22}$, то - случай 1) с $\check{\tau} = \tau_2$; если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^0$, то реализуется случай 2) и $\check{\tau} = \tau_0 = r$.

Система (159¹) методом Гаусса может быть преобразована в систему

$$\Theta_d^r h_1^r = Y_d^r, \quad (162_4)$$

в которой Θ_d^r - матрица из (162₁) размерности, на единицу большей за счет первой строки, начинающейся с элементов d_{-1}, b_{-1} , а вектор Y_d^r имеет компоненты $Y_{d,-1}^r = Y_{0,-1}^r$, $Y_{d,\tau}^r =$

$= Y_{0,\tau}^r - (c_\tau/d_{\tau-1})Y_{d,\tau-1}^r$ ($\tau = \overline{0, \check{\tau}}$), $Y_{d,\tau}^r = Y_{0,\tau}^r$ ($\tau = \overline{\check{\tau}+1, r}$); элементы $a_\tau, b_\tau, c_\tau, d_\tau$ описаны в (159¹) и (161₄); очевидно, что $Y_{d,\tau}^r = \sum_{j=-1}^{\check{\tau}} (-1)^{\check{\tau}-j} Y_{0,j}^r \prod_{\nu=j+1}^{\tau} c_\nu/d_{\nu-1}$ ($\tau = \overline{-1, \check{\tau}}$).

Первые $\check{\tau}+1$ уравнений системы (162₄) однозначно разрешимы относительно $h_{1,0}^r, \dots, h_{1,\check{\tau}}^r$, а уравнение с номером $\check{\tau}$ имеет вид

$$0 \cdot h_{1,\check{\tau}}^r + 0 \cdot h_{1,\check{\tau}+1}^r + b_{\check{\tau}} h_{1,\check{\tau}+2}^r = Y_{d,\check{\tau}}^r \quad (h_{1,r+1}^r, h_{1,r+2}^r = 0). \quad (163_4)$$

В случае 2) $\check{\tau} = r$, Θ_d^r — двухдиагональная матрица с нулевой нижней строкой, уравнение (163₄), последнее в (162₄), имеет вид $0 \cdot h_{1,r}^r = Y_{d,r}^r$.

В случае 1) выделим последние $r - \check{\tau} \geq 1$ уравнений (162₄) в систему

$$\Theta_d^{r+} h_1^{r+} = Y_d^{r+}, \quad (164_4)$$

аналогичную системе (164₁).

Разобьем пары (α, r) на пять непересекающихся семейств другим способом:

$$\{\alpha, r\}_4^{1c} = \{(2k+1)/2, k\}_{k \geq 2}, \quad \tau_1^c = 0; \quad \{\alpha, r\}_4^{2c} = \{\alpha, r\}_4^1, \quad \tau_2^c = 2ln - l + 1;$$

$$\{\alpha, r\}_4^{3c} = \{(1-2k)/(2l-1), (k+l-1)(2n-1)\}_{k,l,n \in \mathbb{N}}, \quad \tau_3^c = 2ln - l - n;$$

$$\{\alpha, r\}_4^{4c} = \{1/(2l+1), l\}_{l \geq 2}, \quad \tau_4^c = r; \quad \{\alpha, r\}_4^{0c} = \{(\alpha, r) \notin \bigcup_{\nu=1}^4 \{\alpha, r\}_4^{\nu c}\}.$$

Лемма 13. Если пара $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^{\nu c}$ ($\nu = \overline{1, 4}$), то в (159¹) $c_\tau = 0$ только при $\tau = \tau_\nu^c$, а если пара $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^{0c}$, то $c_0, \dots, c_r \neq 0$.

Следствие 22. В (159¹) $c_0, \dots, c_r \neq 0$, за исключением следующих случаев: $c'_{\tau_1+1} = 0$, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^1$; $c'_0 = 0$, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^{1c} \subset \{\alpha, r\}_4^{0c}$; $c'_{2ln-l-n} = 0$, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^{3c} \subset \{\alpha, r\}_4^{0c}$; $c''_\tau = 0$, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^{4c} \subset \{\alpha, r\}_4^{0c}$, где $c_\tau = c'_\tau c''_\tau$, $c'_\tau = \alpha(2\tau - 2) + 2(r - \tau) + 1$, $c''_\tau = \alpha(2\tau + 1) + 2(r - \tau) - 1$.

Умножив (164₄) слева на матрицу G из (165₁), получим систему

$$c_\tau h_{1,\tau}^r = \sum_{j=\tau}^r g_{\tau j} Y_{0,j}^r \quad (\tau = \overline{\check{\tau}+1, r}). \quad (166_4)$$

Подставив в (163₄) прямую формулу для $Y_{d,\check{\tau}}^r$ из (162₄), а в случае 1) при $\check{\tau} \leq r-2$ также $h_{1,\check{\tau}+2}^r$ из (166₄) ($c_{\check{\tau}+2} \neq 0$), получим связь

$$0 \cdot h_{1,\check{\tau}+1}^r = \sum_{j=-1}^{\check{\tau}} (-1)^{\check{\tau}-j} \prod_{\nu=j+1}^{\check{\tau}} \frac{c_\nu}{d_{\nu-1}} Y_{0,j}^r - \frac{b_{\check{\tau}}}{c_{\check{\tau}+2}} \sum_{j=\check{\tau}+2}^r g_{\check{\tau}+2,j} Y_{0,j}^r. \quad (167_4)$$

Выразим в (167₄) $Y_{0,j}^r$ через $\hat{Y}_{i,j}^r$ ($i = 1, 2$), для чего введем константы

$$v_j = -2\tilde{\alpha}^{\check{\tau}-j+1} \frac{2\alpha - 2(r-j) + 1}{2\alpha - 2(r-\check{\tau}) + 1} \prod_{\nu=j+1}^{\check{\tau}} \frac{\alpha(2\nu+1) + 2(r-\nu) - 1}{2\nu+1},$$

$$u_j = \tilde{\alpha}(\alpha(2j+1) + 2(r-j) - 1)(-2\alpha + 2(r-j) - 1)^{-1} v_j \quad (j = \overline{-1, \check{\tau}}); \quad (168_4)$$

$$u_{\check{\tau}+1} = -\tilde{\alpha}(2\check{\tau}+3); \quad v_j = 2\tilde{\alpha}b_{\check{\tau}}g_{\check{\tau}+2,j}/c_{\check{\tau}+2} \quad (j = \overline{\check{\tau}+2, r}),$$

$$u_j = -b_{\check{\tau}}(\alpha(2j+1) + 2(r-j) - 1)g_{\check{\tau}+2,j} - \tilde{\alpha}(2j+1)g_{\check{\tau}+2,j-1}/c_{\check{\tau}+2}.$$

Тогда в силу (159¹) и (161₄)

$$(-1)^{\check{\tau}-j} \prod_{\nu=j+1}^{\check{\tau}} \frac{c_\nu}{d_{\nu-1}} = -\frac{\tilde{\alpha}v_j}{2},$$

$$u_j = \tilde{\alpha}(-\alpha(2j+1) - 2(r-j) + 1)v_j/2 + (2j+1)v_{j-1}/2 \quad (\tau = \overline{-1, \check{\tau}});$$

$$v_{\check{\tau}} = -2\tilde{\alpha}, \quad u_{\check{\tau}} = 2(\alpha(2\check{\tau}+1) + 2(r-\check{\tau}) - 1)/(2\alpha - 2(r-\check{\tau}) + 1),$$

теперь в (167₄)

$$\begin{aligned} & -\tilde{\alpha} \sum_{j=-1}^{\check{\tau}} \frac{v_j Y_{0,j}^r}{2} = \\ & = \sum_{j=-1}^{\check{\tau}} (\tilde{\alpha}(-\alpha(2j+1) - 2(r-j) + 1)v_j/2 + v_{j-1}(2j+1)/2) \hat{Y}_{1,j}^r + v_{\check{\tau}}(2\check{\tau}+3) \hat{Y}_{1,\check{\tau}+1}/2 + \sum_{j=-1}^{\check{\tau}} v_j \hat{Y}_{2,j}^r = \\ & = \sum_{j=0}^{\check{\tau}+1} u_j \hat{Y}_{1,j}^r + \sum_{j=-1}^{\check{\tau}} v_j \hat{Y}_{2,j}^r, \end{aligned}$$

а

$$\sum_{j=\check{\tau}+2}^r g_{\check{\tau}+2j} Y_{0,j}^r = \sum_{j=\check{\tau}+2}^r g_{\check{\tau}+2j} ((\alpha(2j+1) + 2(r-j) - 1) \hat{Y}_{1,j}^r - 2\tilde{\alpha} \hat{Y}_{2,j}^r) - \sum_{j=\check{\tau}+3}^{\tau+1} g_{\check{\tau}+2j-1} \tilde{\alpha}(2j+1) \hat{Y}_{1,j}^r.$$

В результате уравнение (167₄) принимает вид

$$v_{-1} \hat{Y}_{2,-1}^r + \sum_{j=0}^{\check{\tau}} (u_j \hat{Y}_{1,j}^r + v_j \hat{Y}_{2,j}^r) + u_{\check{\tau}+1} \hat{Y}_{1,\check{\tau}+1}^r + \sum_{j=\check{\tau}+2}^r (u_j \hat{Y}_{1,j}^r + v_j \hat{Y}_{2,j}^r) = 0. \quad (169_4)$$

Если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^1$, то по лемме 12 и следствию 22 $\check{\tau} = \tau_1$ и $c_{\tau_1+1} = 0$, поэтому (166₄) при $\tau = \tau_1+1$ дает дополнительную связь $0 \cdot h_{1,\tau_1+1}^r = \sum_{j=\tau_1+1}^r g_{\tau_1+1j} Y_{0,j}^r$, которую аналогично (169₄) можно записать в виде

$$\sum_{j=\tau_1+1}^r (u_j^1 \hat{Y}_{1,j}^r + v_j^1 \hat{Y}_{2,j}^r) = 0, \quad (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^1 \quad (h_{1,\tau_1+1}^r \text{ любая}), \quad (170_4)$$

где $u_j^1 = (\alpha(2j+1) + 2(r-j) - 1)g_{\tau_1+1j} - \tilde{\alpha}(2j+1)g_{\tau_1+1j-1}$, $v_j^1 = -2\tilde{\alpha}g_{\tau_1+1j}$.

Запишем связи (169₄), (170₄) через коэффициенты системы (3).

По формуле (168₄) $v_j = 0$, если $\prod_{\nu=j+1}^{\check{\tau}} (\alpha(2\nu+1) + 2(r-\nu) - 1) = 0$, т.е. $c_{j+1}'' \cdots c_{\check{\tau}}'' = 0$ ($-1 \leq j \leq \check{\tau}-1$), а $u_j = 0$, если $c_j'' \cdots c_{\check{\tau}}'' = 0$ ($-1 \leq j \leq \check{\tau}$). Используя следствие 22, сразу преобразуем (169₄) в случае 2) с $\check{\tau} = r$.

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^{3c} \subset \{\alpha, r\}_4^0$, тогда $\tau_3^c = 2ln-l-n$. Поэтому $v_{\tau_3^c}, \dots, v_r, u_{\tau_3^c+1}, \dots, u_r \neq 0$, ибо не содержат $c_{\tau_3^c}'' = 0$, и (169₄) имеет вид

$$v_{\tau_3^c} Y_2^{(2\tau_3^c+2, 2(r-\tau_3^c))} + \sum_{j=\tau_3^c+1}^r (u_j Y_1^{(2j+1, 2(r-j)+1)} + v_j Y_2^{(2j+2, 2(r-j))}) = \tilde{c}. \quad (169_4^{3c})$$

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^{4c} \subset \{\alpha, r\}_4^0$, т.е. $\alpha = 1/(2r+1)$. Тогда $\tau_4^c = r$, а значит, только $v_r \neq 0$, и уравнение (169₄) принимает вид

$$-2Y_2^{(2r+2, 0)} = \tilde{c} \quad (r \geq 2). \quad (169_4^{4c})$$

Если теперь $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^0 \setminus (\{\alpha, r\}_4^{3c} \cup \{\alpha, r\}_4^{4c})$, в частности, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^{1c} \subset \{\alpha, r\}_4^0$, то все $u_j, v_j \neq 0$ и (169₄) принимает вид

$$v_{-1} Y_2^{(0, 2r+2)} + \sum_{j=0}^r (u_j Y_1^{(2j+1, 2(r-j)+1)} + v_j Y_2^{(2j+2, 2(r-j))}) = \tilde{c}. \quad (169_4^0)$$

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^{2c} = \{-1/2, m\}_{m \in M_4} \cup \{(2\ell - 1)/2, m\}_{\ell, m \in \mathbb{N}, m \geq \max\{\ell, 2\}}$. Если $(\alpha, r) \in \{-1/2, m\}_{m \in M_4}$, то $\tau_2 = r - 1$, все $u_j, v_j \neq 0$ и

$$v_{-1}Y_2^{(0, 2r+2)} + \sum_{j=0}^{r-1} (u_j Y_1^{(2j+1, 2(r-j)+1)} + v_j Y_2^{(2j+2, 2(r-j))}) + u_r Y_1^{(2r+1, 1)} = \tilde{c}. \quad (169_4^{21})$$

Пусть теперь $(\alpha, r) \in \{(2\ell - 1)/2, m\}_{\ell, m \in \mathbb{N}, m \geq \max\{\ell, 2\}}$ ($\check{\tau} = \tau_2 = m - \ell - 1$). Оценим u_j, v_j при $j = \overline{\tau_2 + 2, r}$ в (169₄), учитывая, что $b_j > 0$ ($j \geq -1$).

Если $\ell = 1$, то $j = r = m$, $\alpha = 1/2$ и в (159¹) $c_m = m(m - 1/2) > 0$. Тогда $v_m = 2b_{m-2}g_{mm}/c_m > 0$, а $u_m = -b_{m-2}(m - 1/2)/c_m < 0$.

Пусть $\ell \geq 2$. При $\alpha = (2\ell - 1)/2$, $r = m$ в (159¹)

$$c_\tau = ((2\ell - 1)(\tau - 1) + 2m - 2\tau + 1)((\ell - 1/2)(2\tau + 1) + 2m - 2\tau - 1) > 0 \quad \text{при } \tau \geq 0.$$

Если $\ell = 2$, то $j = m - 1, m$. Тогда

$$v_{m-1} = 2b_{m-3}g_{m-1, m-1}/c_{m-1} > 0, \quad u_{m-1} = -b_{m-3}(3m - 1/2)/c_{m-1} < 0.$$

Согласно формуле (165₁),

$$v_m = 2b_{m-3}g_{m-1, m}/c_{m-1} = -2b_{m-3}a_{m-1}/(c_{m-1}c_m) = 2b_{m-3}(12m^2 - 2m - 4)/(c_{m-1}c_m) > 0.$$

Множитель $u_m = -b_{m-3}(12m^2 - 2m - 4)(3m + 1/2)/(c_{m-1}c_m) - 2m - 1 < 0$.

Пусть теперь $\ell \geq 3$. Согласно (172₁), $g_{\tau_2+2j} = g_{\tau_2+2j-1}f_{\tau_2+2j-1}/c_j$ для тех $j = \overline{\tau_2 + 3, r}$, при которых $f_{\tau_2+2j-1} \neq 0$.

Для оценки снизу f_{τ_2+2j} введем $\zeta_j = (2j+4)(2\alpha j + 2(r-j) - 1) > 0$ при $j \geq -1$. По индукции $f_{\tau_2+2j} > \zeta_j$ при $j = \tau_2 + 2, r - 1$. Поэтому $g_{\tau_2+2, \tau_2+2} = 1$, $g_{\tau_2+2j} > g_{\tau_2+2j-1}\zeta_{j-1}/c_j > 0$ при $j = \tau_2 + 3, r$.

Поскольку $\varkappa_4 = \alpha(2j+1) + 2(r-j) - 1 > 0$ ($j \geq 0$), то для u_j из (168₄)

$$\varkappa_4 g_{\tau_2+2j} - (2j+1)g_{\tau_2+2j-1} > g_{\tau_2+2j-1}(\varkappa_4 \zeta_{j-1}/c_j - 2j - 1) = g_{\tau_2+2j-1} > 0.$$

Итак, если $(\alpha, r) \in \{(2\ell - 1)/2, m\}_{\ell, m \in \mathbb{N}, m \geq \max\{\ell, 2\}}$, то все $u_j < 0$, $v_j > 0$, и уравнение (169₄) принимает вид

$$\begin{aligned} v_{-1}Y_2^{(0, 2r+2)} + \sum_{j=0}^{\tau_2} (u_j Y_1^{(2j+1, 2(r-j)+1)} + v_j Y_2^{(2j+2, 2(r-j))}) + u_{\tau_2+1} Y_1^{(2\tau_2+3, 2(r-\tau_2)-1)} + \\ + \sum_{j=\tau_2+2}^r (u_j Y_1^{(2j+1, 2(r-j)+1)} + v_j Y_2^{(2j+2, 2(r-j))}) = \tilde{c}. \end{aligned} \quad (169_4^{22})$$

Пусть, наконец, $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^1 = \{\alpha, r\}_4^{2c}$ ($\check{\tau} = \tau_1 = l(2n - 1)$). Оценим u_j, v_j при $j = \overline{\tau_1 + 2, r}$ в (169₄) и u_j^1, v_j^1 при $j = \overline{\tau_1 + 1, r}$ в (170₄).

В (159¹) $c_\tau = (2(k+l)(2n-1) - 2n - 2\tau + 3 - (2k-1)(\tau-1)/l)(2(k+l)(2n-1) - 2n - 2\tau + 1 - (2k-1)(2\tau+1)/(2l)) > 0$ при $\tau \geq \tau_1 + 2$. Согласно (172₁), $g_{\tau j} = g_{\tau j-1}f_{\tau j-1}/c_j$ при $f_{\tau j-1} \neq 0$ ($\tau = \tau_1 + 1, \tau_1 + 2$).

Для оценки снизу $f_{\tau j}$ введем $\xi_j = -(2j+3)(2\alpha j + 2(r-j) - 1) > 0$ при $j \geq \tau_1 + 1$. По индукции $f_{\tau j-1} > \xi_{j-1}$ ($\tau = \tau_1 + 1, \tau_1 + 2$, $j = \overline{\tau + 1, r}$), поэтому $g_{\tau \tau} = 1$, $g_{\tau j} > g_{\tau j-1}\xi_{j-1}/c_j > 0$ при тех же τ, j .

Поскольку $\varkappa_4 < 0$ при $j \geq \tau_1$, то при $\tau = \tau_1 + 1, \tau_1 + 2$, $j = \overline{\tau, r}$ для u_j из (168₄) и u_j^1 из (170₄) имеем $\varkappa_4 g_{\tau j} - \tilde{\alpha}(2j+1)g_{\tau j-1} < g_{\tau j-1}(\xi_{j-1}(\varkappa_4/c_j + 2j - 1)) = 0$.

Поэтому если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^1$, то все $u_j^1, v_j^1 < 0$ и (170₄) имеет вид

$$\sum_{j=\tau_1+1}^r (u_j^1 Y_1^{(2j+1, 2(r-j)+1)} + v_j^1 Y_2^{(2j+2, 2(r-j))}) = \tilde{c}, \quad (170_4^1)$$

а в (169₄) $u_j, v_j > 0$ при $j = \overline{\tau_1 + 2, r}$ и (169₄) принимает вид

$$\begin{aligned} v_{-1} Y_2^{(0, 2r+2)} + \sum_{j=0}^{\tau_1} (u_j Y_1^{(2j+1, 2(r-j)+1)} + v_j Y_2^{(2j+2, 2(r-j))}) + u_{\tau_1+1} Y_1^{(2\tau_1+3, 2(r-\tau_1)-1)} + \\ + \sum_{j=\tau_1+2}^r (u_j Y_1^{(2j+1, 2(r-j)+1)} + v_j Y_2^{(2j+2, 2(r-j))}) = \tilde{c}. \end{aligned} \quad (169_4^1)$$

5⁰. Сформулируем полученные результаты. При $p = 2r + \mu$ ($r \geq 1$, $\mu \in \{0, 1\}$) коэффициенты форм $Y_1^{(p+1)}$, $Y_2^{(p+1)}$ разобьем на четыре непересекающихся множества $\{Y\}_\lambda^{r, \mu}$ ($\lambda = \overline{1, 4}$):

$$\begin{aligned} \{Y\}_1^{r, 0} &= (Y_1^{(1, 2r)}, Y_1^{(3, 2r-2)}, \dots, Y_1^{(2r+1, 0)}, Y_2^{(0, 2r+1)}, Y_2^{(2, 2r-1)}, \dots, Y_2^{(2r, 1)}), \\ \{Y\}_2^{r, 1} &= (Y_1^{(0, 2r+2)}, Y_1^{(2, 2r)}, \dots, Y_1^{(2r+2, 0)}, Y_2^{(1, 2r+1)}, Y_2^{(3, 2r-1)}, \dots, Y_2^{(2r+1, 1)}), \\ \{Y\}_3^{r, 0} &= (Y_1^{(0, 2r+1)}, Y_1^{(2, 2r-1)}, \dots, Y_1^{(2r, 1)}, Y_2^{(1, 2r)}, Y_2^{(3, 2r-2)}, \dots, Y_2^{(2r+1, 0)}), \\ \{Y\}_4^{r, 1} &= (Y_1^{(1, 2r+1)}, Y_1^{(3, 2r-1)}, \dots, Y_1^{(2r+1, 1)}, Y_2^{(0, 2r+2)}, Y_2^{(2, 2r)}, \dots, Y_2^{(2r+2, 0)}). \end{aligned}$$

Теорема 20. 1) Система (151) формально эквивалентна системе (3) с

$$P = (\alpha y_1^2 - \text{sign } \alpha y_2^2, y_1 y_2) \quad (\alpha \neq 0),$$

если $\forall r \geq 2$ коэффициенты однородных полиномов $Y_i^{(p+1)}$ системы (3) удовлетворяют следующим резонансным уравнениям: а) при $p = 2$ (153); б) при $p = 3$ (154); в) при $p = 2r$ ($r \geq 2$, $\mu = 0$) коэффициенты из $\{Y\}_1^{r, 0}$ в зависимости от α удовлетворяют одному из уравнений (169₁^{2c}), (169₁⁰) или (169₁¹), а при $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^1 = \{-k/l, (k+l)n+1\}_{k, l, n \in \mathbb{N}}$ – также уравнению (170₁¹) и имеют в них ненулевые множители, кроме коэффициента $Y_2^{(2(m-n), 2n+1)}$ из (169₁⁰), когда $(\alpha, r) \in \{n, m\}_{m, n \in \mathbb{N}, m \geq 2}$; коэффициенты из $\{Y\}_3^{r, 0}$ в зависимости от α удовлетворяют одному из уравнений (169₃¹), (169₃²²), (169₃²¹) или (169₃⁰), причем в первых двух уравнениях коэффициенты имеют ненулевые множители, а в последних двух множители могут обращаться в нуль при некоторых (α, r) ; г) при $p = 2r+1$ ($r \geq 2$, $\mu = 1$) коэффициенты из $\{Y\}_2^{r, 1}$ в зависимости от α удовлетворяют одному из уравнений (169₂¹), (169₂²) или (169₂⁰), причем в первых двух коэффициенты имеют ненулевые множители, а в последнем множители могут обращаться в нуль при некоторых (α, r) ; коэффициенты из $\{Y\}_4^{r, 1}$ в зависимости от α удовлетворяют одному из уравнений (169₄^{3c}), (169₄^{4c}), (169₄⁰), (169₄²¹), (169₄²²) или (169₄¹), а при $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^1 = \{-(2k-1)/(2l), (k+l)(2n-1)-n+1\}_{k, l, n \in \mathbb{N}}$ – также уравнению (170₄¹) и имеют в них ненулевые множители.

2) Для любого $p \geq 2$ коэффициенты форм $Y_i^{(p+1)}$, не входящие в перечисленные выше резонансные уравнения или имеющие в них только нулевые множители, нерезонансные и могут принимать любые значения.

3) В замене (2), связывающей (151) и (3), если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^1$, то не имеют ограничений резонансные коэффициенты $h_2^{(2\tau_1+1, 2(r-\tau_1)-1)}$, где $\tau_1 = ln$ ($l, n \in \mathbb{N}$), а если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^1$, то не имеют ограничений резонансные коэффициенты $h_1^{(2\tau_1+2, 2(r-\tau_1)-1)}$, где $\tau_1 = l(2n-1)$.

$$\text{Пусть } n_p = \begin{cases} 2, & \text{если } p=3, \quad \alpha \neq 2, \quad p=2r, \quad (\alpha, r) \notin \{\alpha, r\}_1^1, \\ & p=2r+1, \quad (\alpha, r) \notin \{\alpha, r\}_4^1, \\ 3, & \text{если } p=2, \quad \alpha \neq 1/2, \quad p=3, \quad \alpha=2, \\ & p=2r, \quad (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^1, \quad p=2r+1, \quad (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^1, \\ 4, & \text{если } p=2, \quad \alpha=1/2. \end{cases}$$

Следствие 23. В системе (3) n_p различных резонансных коэффициентов форм $Y_i^{(p+1)}$ образуют резонансный набор, если это коэффициенты:

при $p=2$ 1) любой из (153^1) , 2) $Y_1^{(3,0)}$, 3) любой из (153^3) , кроме $Y_2^{(3,0)}$ при $\alpha=1/2$, 4) если $\alpha=1/2$, то $Y_2^{(3,0)}$;

при $p=3$ 1) любой из (154^1) , 2) любой из (154^2) , 3) если $\alpha=2$, то любой из (154^3) , отличный от выбранного в (154^1) ;

при $p=2r$ ($r \geq 2$) 1) любой коэффициент из $\{Y\}_3^{r,0}$, входящий в соответствующее уравнение (169_3^1) , (169_3^{21}) , (169_3^{22}) или (169_3^0) с ненулевым множителем; 2) любой коэффициент из $\{Y\}_1^{r,0}$, входящий в соответствующее уравнение (169_1^{2c}) , (169_1^0) или (169_1^1) с ненулевым множителем; 3) если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^1$, то любой коэффициент из (170_1^1) , отличный от выбранного в (169_1^1) , но такой, чтобы относительно них эти уравнения были разрешимы;

при $p=2r+1$ ($r \geq 2$) 1) любой коэффициент из $\{Y\}_2^{r,1}$, входящий в соответствующее уравнение (169_2^1) , (169_2^2) или (169_2^0) с ненулевым множителем; 2) любой коэффициент из $\{Y\}_4^{r,1}$, входящий в соответствующее уравнение (169_4^{3c}) , (169_4^{4c}) , (169_4^0) , (169_4^{21}) , (169_4^{22}) или (169_4^1) с ненулевым множителем; 3) если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^1$, то любой коэффициент из (170_4^1) , отличный от выбранного в (169_4^1) , но такой, чтобы относительно них эти уравнения были разрешимы.

Следствие 24. Система (3) с невозмущенной частью (15_2) является ОНФ, если $\forall p \geq 2$ формы $Y_i^{(p+1)}$ содержат не более n_p членов с произвольными коэффициентами, образующими один из резонансных наборов, описанных в следствии 23, а остальные коэффициенты равны нулю.

Теорема 21. Зафиксируем произвольным образом структуру ОНФ (3), т.е. для всякого $p \geq 2$ зафиксируем порядки тех n_p членов форм $Y_i^{(p+1)}$, коэффициенты которых входят в выбранный для данного p резонансный набор, зафиксируем также в замене (2) коэффициент $h_2^{(2\tau_1+1, 2(r-\tau_1)-1)}$, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^1$, или $h_1^{(2\tau_1+2, 2(r-\tau_1)-1)}$, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_4^1$. Тогда существует и единственна нормализующая замена (2), преобразующая любую систему (151) в ОНФ (3) с выбранной структурой, в которой при каждом $p \geq 2$ коэффициенты из выбранного резонансного набора, описанного в следствии 23, однозначно находятся из тех резонансных уравнений, в которые они входят.

Пример 9. Рассмотрим общую ситуацию, когда α не входит ни в одно из введенных выше семейств $\{\alpha, r\}$, тем самым $\alpha \neq -k/l, 1/l, (2l-1)/2, k$ ($k, l \in \mathbb{N}$). Тогда система (151) может быть приведена к ОНФ (3), имеющей, например, следующие структуры:

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1^2 - \tilde{\alpha} y_2^2 + Y_1^{(3,0)} y_1^3 + \sum_{r=1}^{\infty} (Y_1^{(1,2r)} y_1 y_2^{2r} + Y_1^{(1,2r+1)} y_1 y_2^{2r+1} + Y_1^{(0,2r+1)} y_2^{2r+1} + Y_1^{(0,2r+2)} y_2^{2r+2}),$$

$$\dot{y}_2 = y_1 y_2;$$

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1^2 - \tilde{\alpha} y_2^2 + Y_1^{(3,0)} y_1^3 + \sum_{r=1}^{\infty} (Y_1^{(0,2r+1)} y_2^{2r+1} + Y_1^{(0,2r+2)} y_2^{2r+2}),$$

$$\dot{y}_2 = y_1 y_2 + \sum_{r=1}^{\infty} (Y_2^{(0,2r+1)} y_2^{2r+1} + Y_2^{(0,2r+2)} y_2^{2r+2}).$$

В заключение отметим, что различные методы нормализации систем, матрица линейной части которых имеет нулевые собственные числа, обсуждались в [4, 5]. В работе [6] предложен так называемый метод резонансных уравнений для практического нахождения всех возможных структур обобщенных нормальных форм, которые можно называть обобщенными нормальными формами первого порядка. С помощью этого метода в [5] исследованы системы, имеющие линейно-квадратичную невозмущенную часть. Далее, в [1–3] и в настоящей работе исследованы системы с 11 различными каноническими формами квадратичной невозмущенной части в соответствии со сделанным в [1] разбиением множества двумерных квадратичных систем линейными неособыми заменами на 17 непересекающихся классов по принципу минимизации в получаемых канонических формах числа ненулевых членов. Наконец, в [6, 7] методом резонансных уравнений исследованы системы, в невозмущенные части которых входят кубические члены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басов В.В., Скитович А.В. Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением. I // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 8. С. 1016–1029.
2. Басов В.В., Скитович А.В. Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением. II // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 8. С. 1011–1023.
3. Басов В.В. Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением. III // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 3. С. 308–319.
4. Брюно А.Д., Петрович В.Ю. Нормальные формы системы ОДУ. М., 2000 (Препринт / ИПМ РАН: 18).
5. Басов В.В., Федотов А.А. Обобщенная нормальная форма двумерных систем ОДУ с линейно-квадратичной невозмущенной частью // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2007. Вып. 1. С. 13–33.
6. Басов В.В. Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 154–170.
7. Басов В.В. Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевым приближением $(x_2^3, -x_1^3)$ // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 8. С. 1011–1022.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию
16.05.2007 г.