

ISSN 2079-3308

**ВЕСТНИК
САМАРСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА**



№ 1 (20) — 2010

**Самара
2010**

УДК 539.374, 535.422

ФОРМУЛИРОВКА КРИТЕРИЯ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ НЕУПРУГОСТИ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ МИКРОРАЗРУШЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Ю. И. Кадашевич, С. П. Помыткин

Санкт-Петербургский государственный технологический
университет растительных полимеров,
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

E-mail: sprout@yandex.ru

Рассматриваются определяющие соотношения теории вязкопластичности эндохронного типа, распространенные на область больших деформаций и поворотов. Предполагается, что в процессе деформирования микроразрушения возникают как в упругих, так и в неупругих элементах материала. Предложены два определяющих уравнения и два закона дилатации для упругой и неупругой областей. Параметры разрыхления введены в критерий прочности для хрупкого и вязкого разрушения материалов.

Ключевые слова: неупругость, эндохронная теория, большие деформации, определяющие соотношения, микроразрушения, критерий прочности.

Введение. Модель упруговязкопластичности, учитывающая микроразрушения в процессе неупругого деформирования материала, вводится в определяющие соотношения эндохронного типа, обобщённые на область больших деформаций и поворотов. Предполагается аддитивное представление тензора деформаций на упругую и неупругую составляющие. Причём считается, что микроразрушения в материале могут возникать как в упругой, так и в неупругой зонах деформирования, внося свой вклад в разрыхление и разрушение материала.

1. Критерий прочности Новожилова и его развитие. В работах [1, 2] был предложен критерий разрушения материалов, охватывающий как хрупкую, так и вязкую формы разрушения. Ответственность за разрушение материала возлагалась на пластическое разрыхление, мера которого θ и критерий определялись по формулам

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \beta, \quad d\lambda = \sqrt{d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p}, \quad \theta = \epsilon_{ii}^p; \quad (1)$$

$$\theta = \theta^*. \quad (2)$$

где ϵ_{ij}^p — тензор пластической деформации, λ — параметр Одквиста, β — константа материала, θ^* — разрыхление при разрушении.

В дальнейшем [3] выяснилось, что для лучшего согласования расчётов с опытными данными следует считать, что параметр β не постоянен, а зависит от инварианта $\rho = \sqrt{\rho_{ij} \rho_{ij}}$, где ρ_{ij} — тензор остаточных микронапряже-

Юлий Исаакович Кадашевич (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. высшей математики. Сергей Павлович Помыткин (к.-ф.м.н., доц.), доцент, каф. высшей математики.

ний [4]:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \beta(\rho). \quad (3)$$

В работе [5] было предложено более общее определяющее уравнение для параметра θ в форме

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \beta(\rho, \theta). \quad (4)$$

Кроме того, отметим статьи [6, 7], в которых предложены уравнения для разрыхления в виде

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \beta(\lambda)\theta \quad (5)$$

и

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \beta(T_0), \quad T_0 = \sigma_0 - m\theta, \quad \sigma_0 = \sigma_{ii} \quad (6)$$

соответственно. И, наконец, в работе [8] в рамках эндохронного подхода предложено определяющее уравнение для обобщённого параметра разрыхления в форме

$$\frac{dR_0}{dR} = \beta(R_0), \quad (7)$$

где

$$dR = \sqrt{dR'_{ij} dR'_{ij}}, \quad R'_{ij} = \epsilon'_{ij} - \frac{1-\alpha}{2G} \sigma'_{ij},$$

$$R_0 = \epsilon_0 - \frac{k_1}{K} \sigma_0, \quad \sigma_0 = \sigma_{ii}, \quad \epsilon_0 = \epsilon_{ii}.$$

Здесь ϵ_{ij} , σ_{ij} — тензоры деформаций и действующих напряжений, штрихами обозначены их девиаторы, K — объёмный модуль, G — модуль сдвига, α — параметр эндохронности, k_1 — константа материала.

Соотношения (1)–(7) относятся к случаю, когда скорость деформирования не играет роли. Поэтому авторы работ [9–11] рассмотрели более общий случай сложного нагружения, справедливый как для пластичности, так и для ползучести, то есть для достаточно общей теории необратимых процессов. Критерий разрушения, обобщающий формулу (3), выглядел следующим образом:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \rho \beta(\dot{\lambda}), \quad \theta_{kp} = m^2(\dot{\lambda}).$$

2. Учёт микроразрушений в неупругих элементах. В работе [12] при построении критерия прочности был использован простейший вариант эндохронной теории неупругости, учитывающий микроразрушения, когда разрушения наступают в упругих элементах. В данной статье приводится формулировка критерия прочности материалов для общего варианта эндохронной теории неупругости, учитывающей микроразрушения, когда в процессе деформирования микроразрушения происходят как в упругих, так и в неупругих элементах материала в условиях вязкопластичности при больших деформациях.

Для этого, согласно идеям работы [13], сформулируем эндохронные определяющие соотношения двух типов — для упругих и неупругих составляющих:

$$\varepsilon_{ij}^{'e} + \alpha \rho_1 \frac{d\varepsilon_{ij}^{'e}}{dR_1} = \rho_1 \frac{dR_{ij}^{'(1)}}{dR_1} + \frac{g_1 + 1}{g_1 + \alpha} R_{ij}^{'(1)}, \quad (8)$$

$$R_{ij}^{'(1)} = \varepsilon_{ij}^{'e} - \frac{1 - \alpha}{2G_1} \sigma'_{ij}, \quad dR_1 = \sqrt{dR_{ij}^{'(1)} dR_{ij}^{'(1)}}, \quad \rho_1 = \rho_1(R_1, \dot{R}_1).$$

Уравнения (8) можно записать и в следующем виде:

$$2G_1 \left[\frac{\varepsilon_{ij}^{'e}}{g_1 + \alpha} + \rho_1 \frac{d\varepsilon_{ij}^{'e}}{dR_1} \right] = \rho_1 \frac{d\sigma'_{ij}}{dR_1} + \frac{g_1 + 1}{g_1 + \alpha} \sigma'_{ij}. \quad (9)$$

Здесь обозначены через $\varepsilon_{ij}^{'e}$ — девиатор тензора упругих деформаций, σ'_{ij} — девиатор тензора действующих (внешних) напряжений, $R_{ij}^{'(1)}$ — девиатор вспомогательного параметрического тензора, G_1 — модуль сдвига, α — параметр эндохронности, ρ_1 — аналог предела упругого разрушения, g_1 — постоянный параметр материала.

Поступим аналогичным образом и для неупругих элементов модели:

$$\varepsilon_{ij}^{'p} + \beta \rho_2 \frac{d\varepsilon_{ij}^{'p}}{dR_2} = \rho_2 \frac{dR_{ij}^{'(2)}}{dR_2} + \frac{g_2 + 1}{g_2 + \beta} R_{ij}^{'(2)}, \quad (10)$$

$$R_{ij}^{'(2)} = \varepsilon_{ij}^{'p} - \frac{1 - \beta}{2G_2} s'_{ij}, \quad dR_2 = \sqrt{dR_{ij}^{'(2)} dR_{ij}^{'(2)}}, \quad \rho_2 = \rho_2(R_2, \dot{R}_2)$$

или

$$2G_2 \left[\frac{\varepsilon_{ij}^{'p}}{g_2 + \beta} + \rho_2 \frac{d\varepsilon_{ij}^{'p}}{dR_2} \right] = \rho_2 \frac{ds'_{ij}}{dR_2} + \frac{g_2 + 1}{g_2 + \beta} s'_{ij}. \quad (11)$$

Здесь уже $\varepsilon_{ij}^{'p}$ — девиатор тензора неупругих деформаций, s'_{ij} — девиатор тензора микронапряжений, $R_{ij}^{'(2)}$ — девиатор вспомогательного параметрического тензора, G_2 — модуль упрочнения, β — параметр эндохронности, ρ_2 — аналог предела неупругого разрушения, g_2 — постоянный параметр материала.

При полностью активном нагружении выполняется равенство

$$\varepsilon_{ij}^{'e} + \varepsilon_{ij}^{'p} = \varepsilon'_{ij},$$

где ε'_{ij} — девиатор тензора полных деформаций. Частный случай этих соотношений при $\rho_1 = \rho_1(R_1)$ и $\rho_2 = \rho_2(R_2)$ приведён в [14].

Если реализуется не полностью активное нагружение, то рекомендуем следующее дополнительное условие:

$$s'_{ij} = \sigma'_{ij} - \tau(R_1, \dot{R}_1) \frac{dR_{ij}^{'(1)}}{dR_1}. \quad (12)$$

Если $\alpha = 1$ и $\beta = 1$, то, сохраняя эндохронность уравнений, легко получить более простые для анализа и восприятия определяющие соотношения в следующей форме:

$$\begin{aligned} 2G_1 \left(\frac{\varepsilon'_{ij}}{g_1 + 1} + \rho_1 \frac{d\varepsilon'_{ij}}{d\varepsilon_1^e} \right) &= \rho_1 \frac{d\sigma'_{ij}}{d\varepsilon_1^e} + \sigma'_{ij}, \\ 2G_2 \left(\frac{\varepsilon'_{ij}}{g_2 + 1} + \rho_2 \frac{d\varepsilon'_{ij}}{d\varepsilon_1^p} \right) &= \rho_2 \frac{ds'_{ij}}{d\varepsilon_1^p} + s'_{ij}, \\ dR_1 &= d\varepsilon_1^e = \sqrt{d\varepsilon'_{ij} d\varepsilon'_{ij}}, \quad dR_2 = d\varepsilon_1^p = \sqrt{d\varepsilon'_{ij} d\varepsilon'_{ij}}. \end{aligned}$$

3. Определяющие соотношения и критерий прочности для больших деформаций. Указанные в п. 2 соотношения и уравнения записаны для области малых деформаций. При переходе к большим деформациям и большим поворотам поступим согласно рекомендациям, представленным, например, в работе [15]. Введём приведённые деформации и приведённые напряжения по формулам

$$\begin{aligned} E^e &= Q^\top \varepsilon^e Q; \quad E^p = Q^\top \varepsilon^p Q; \quad T = Q^\top \sigma Q; \\ N^{(1)} &= Q^\top R^{(1)} Q; \quad N^{(2)} = Q^\top R^{(2)} Q; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}^e &= Q^\top D^e Q; \quad \dot{E}^p = Q^\top D^p Q; \quad \dot{T} = \overline{Q^\top \sigma Q}; \\ \dot{N}^{(1)} &= \overline{Q^\top R^{(1)} Q}; \quad \dot{N}^{(2)} = \overline{Q^\top R^{(2)} Q}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь и далее в безындексной форме записи тензоров будут использоваться следующие определения и соотношения: Q — ортогональный тензор поворота, D^e — тензор скоростей упругих деформаций, определяемый как $D^e = (L^e + L^{e\top})/2$, где $L^e = \dot{F}_e F_e^{-1}$, а $F_e = Q u_e$ — полярное разложение градиента упругой деформации F_e и u_e — правый тензор упругого удлинения. Кроме того, введём упругий спин $W_e = (L^e - L^{e\top})/2$ и соотношение $u_e^2 = F_e^\top F_e$.

Аналогично и для неупругих составляющих: D^p — тензор скоростей неупругих деформаций, $D^p = (L^p + L^{p\top})/2$, $L^p = \dot{F}_p F_p^{-1}$, $F_p = Q u_p$ — полярное разложение градиента неупругой деформации F_p , u_p — правый тензор неупругого удлинения, $W_p = (L^p - L^{p\top})/2$ — неупругий спин и $u_p^2 = F_p^\top F_p$.

Фактически соотношения (13) и (14) определяют две меры деформаций — упругой и неупругой соответственно:

$$\varepsilon^e = Q \left(\int (Q^\top D^e Q) dt \right) Q^\top, \quad \varepsilon^p = Q \left(\int (Q^\top D^p Q) dt \right) Q^\top.$$

С использованием определений (13), (14) соотношения (9), (11) примут вид

$$\begin{aligned} |\dot{R}_1| E^e + \alpha \rho_1 \dot{E}^e &= \rho_1 \dot{N}_1 + \frac{g_1 + 1}{g_1 + \alpha} |\dot{R}_1| N_1, \\ |\dot{R}_2| E^p + \beta \rho_2 \dot{E}^p &= \rho_2 \dot{N}_2 + \frac{g_2 + 1}{g_2 + \beta} |\dot{R}_2| N_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Проведём над уравнениями (15) операцию обратного преобразования вида $Q(\cdot)Q^\top$, тогда получим, что

$$\begin{aligned} |\dot{R}_1| \varepsilon^e + \alpha \rho_1 \dot{\varepsilon}^e &= \rho_1 \dot{R}_1 + \frac{|\dot{R}_1| R_1 (g_1 + 1)}{g_1 + \alpha}, \\ |\dot{R}_2| \varepsilon^p + \beta \rho_2 \dot{\varepsilon}^p &= \rho_2 \dot{R}_2 + \frac{|\dot{R}_2| R_2 (g_2 + 1)}{g_2 + \alpha}, \end{aligned} \quad (16)$$

где кружок над тензором обозначает объективные производные типа Грина—Нахгди:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^e &= \dot{\varepsilon}^e + \varepsilon^e \Omega - \Omega \varepsilon^e, \quad \dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}^p + \varepsilon^p \Omega - \Omega \varepsilon^p, \\ \dot{R}_1 &= \dot{R}_1 + R_1 \Omega - \Omega R_1, \quad \dot{R}_2 = \dot{R}_2 + R_2 \Omega - \Omega R_2 \end{aligned}$$

и

$$\Omega = \dot{Q} Q^T, \quad \rho_1 = \rho_1(R_1, \dot{R}_1), \quad \rho_2 = \rho_2(R_2, \dot{R}_2).$$

Если воспользоваться соотношениями (8), (10), то уравнения (15) и (16) можно записать так:

$$\begin{aligned} 2G_1 \left(\frac{|\dot{R}_1| E^e}{g_1 + \alpha} + \rho_1 \dot{E}^e \right) &= \rho_1 \dot{\sigma} + \frac{g_1 + 1}{g_1 + \alpha} |\dot{R}_1| \sigma, \\ 2G_2 \left(\frac{|\dot{R}_2| E^p}{g_2 + \beta} + \rho_2 \dot{E}^p \right) &= \rho_2 \dot{s} + \frac{g_2 + 1}{g_2 + \beta} |\dot{R}_2| s \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 2G_1 \left(\frac{|\dot{R}_1| \varepsilon^e}{g_1 + \alpha} + \rho_1 \dot{\varepsilon}^e \right) &= \rho_1 \dot{\sigma} + \frac{g_1 + 1}{g_1 + \alpha} |\dot{R}_1| \sigma, \\ 2G_2 \left(\frac{|\dot{R}_2| \varepsilon^p}{g_2 + \beta} + \rho_2 \dot{\varepsilon}^p \right) &= \rho_2 \dot{s} + \frac{g_2 + 1}{g_2 + \beta} |\dot{R}_2| s. \end{aligned} \quad (17)$$

Эти соотношения — аналог уравнений (9) и (11), но уже для области больших деформаций и поворотов.

Если $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$, то в одноосном случае из уравнений (17) реализуются следующие решения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2G_1}{g_1 + 1} [\varepsilon_1^e + g_1 \rho_1 (1 - \exp(-\varepsilon_1^e / \rho_1))], \\ s_1 &= \frac{2G_2}{g_2 + 1} [\varepsilon_1^p + g_2 \rho_2 (1 - \exp(-\varepsilon_1^p / \rho_2))], \\ dR_1 &= d\varepsilon_1^e, \quad dR_2 = d\varepsilon_1^p, \end{aligned}$$

а связь σ_1 с s_1 определяется формулой (13), а именно $s_1 = \sigma_1 - \tau_1(R_1, R_2)$.

Как было указано в п. 1, один из основных законов дилатации имеет вид

$$\frac{dR_0}{dR} = \beta(R_0), \quad R_0 = \varepsilon_0 - \frac{k_1}{K} \sigma_0.$$

В настоящей работе авторами рекомендуются, следуя идеям работ [9, 10], следующие законы дилатации и критерий:

$$\frac{dR_0^{(1)}}{dR_1} = \beta_1(R_0^{(1)}, \sigma_*, \dot{R}_1), \quad \sigma_* = \sqrt{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}},$$

$$\frac{dR_0^{(2)}}{dR_2} = \beta_2(R_0^{(2)}, s_*, \dot{R}_2), \quad s_* = \sqrt{s'_{ij}s'_{ij}},$$

$$R_0 = R_0^{(1)} + R_0^{(2)} = R_0^*(\dot{R}_1, \dot{R}_2).$$

4. Оценка критерия. В качестве примера рассмотрим ступенчатое нагружение при ползучести. Многочисленные экспериментальные наблюдения (см., например, [16–18]) показали, что принцип линейного суммирования не выполняется. Наиболее интересный закон остаточной долговечности был предложен Вудфордом [17]:

$$\sum_{i=1}^n \Psi_i(t_i/t_i^*) = 1,$$

где t_i — время действия нагружения на i -той ступени, t_i^* — время до разрушения при нагружении на i -той ступени, а функции Ψ_i находились экспериментально, причём при низких напряжениях эти функции выпуклы, а при больших напряжениях — вогнуты. Общий вывод из анализа экспериментальных данных таков: понижение напряжений увеличивает долговечность, а повышение напряжений ведёт к уменьшению долговечности. Критерий разрушения, предложенный в [9, 10], хорошо описывал отклонение от принципа линейного суммирования. Расчёты, проведённые по предлагаемому в данной работе варианту теории, оказались близкими к результатам работ [9, 10].

Авторами подробно была рассмотрена и задача простого сдвига. Эта задача представляет особый интерес, так как по классическим линейным теориям неупругости и по предложениям работы [9] осевые деформации не возникают, и использование критерия прочности, связанного с разрыхлением, бессмысленно. А по предлагаемой в данной работе теории при сдвиговых нагружениях возникают осевые деформации (небольшие по величине), а следовательно, имеет место и разрыхление материала. Результаты оказались вполне приемлемыми для практики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00036-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новожиллов В. В. О пластическом разрыхлении // *ПММ*, 1965. — Т. 29, № 4. — С. 681–689.
2. Новожиллов В. В., Рыбакина О. Г. Перспективы построения критерия прочности при сложном нагружении // *Инженерный журнал. МТТ*, 1966. — № 5. — С. 103–111.
3. Рыбакина О. Г. Феноменологическое описание разрушения металлов при некоторых видах асимметричного деформирования // *Извест. АН СССР. МТТ*, 1969. — № 6. — С. 61–66.
4. Кадашев Ю. И., Новожиллов В. В. Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера // *ДАН СССР*, 1957. — Т. 117, № 4. — С. 586–588.
5. Батзвалова Н. А. Об учёте влияния накопления повреждённости на процесс разрушения в области малоциклового усталости // *Извест. АН СССР. МТТ*, 1973. — № 2. — С. 143–147.
6. Арутюнян Р. А. Об учёте эффекта Баушингера и объёмной пластической деформации в теории пластичности // *Исследования по упругости и пластичности*, 1968. — № 7. — С. 53–61.
7. Кадашев Ю. И. Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера и влияние среднего нормального напряжения на границу текучести // *Тр. Ленинград. технолог. ин-та целлюлозно-бумажной пром-ти*, 1965. — № 18. — С. 234–235.
8. Кадашев Ю. И., Помыткин С. П. Описание трёхосного простого нагружения в рамках эндохронной теории неупругости, учитывающей дилатацию материалов / В сб.: *Машины и аппараты целлюлозно-бумажной промышленности*, 2008. — С. 68–74.

9. Новожиллов В. В., Кадашев Ю. И., Рыбакина О. Г. Разрыхление и критерий разрушения в условиях ползучести // *ДАН СССР*, 1983. — Т. 270, № 4. — С. 831–836.
10. Новожиллов В. В., Кадашев Ю. И., Рыбакина О. Г. Разрыхление и перспективы построения критерия прочности при сложном нагружении с учетом ползучести // *Извест. АН СССР. МТТ*, 1988. — № 5. — С. 108–114.
11. Кадашев Ю. И., Новожиллов В. В. Теория пластичности и ползучести металлов, учитывающая микронапряжения // *Извест. АН СССР. МТТ*, 1981. — № 5. — С. 100–110.
12. Кадашев Ю. И., Помыткин С. П. О построении критерия прочности при сложном нагружении / В сб.: *Материалы 46-й международн. конф-ции*. Ч. I. (Витебск, 15–17 октября, 2007) / Актуальные проблемы прочности, 2007. — С. 68–74.
13. Кадашев Ю. И., Помыткин С. П. О взаимосвязи теории пластичности, учитывающей микронапряжения, с эндохронной теорией пластичности // *Извест. РАН. МТТ*, 1997. — № 4. — С. 99–105.
14. Кадашев Ю. И., Помыткин С. П. Эндохронная теория неупругости, учитывающая микроразрушения (общий случай) / В сб.: *Тр. 47-й международн. конф-ции*. Ч. I. (Нижний Новгород, 1–5 июля, 2008) / Актуальные проблемы прочности, 2008. — С. 323–324.
15. Кадашев Ю. И., Помыткин С. П. Анализ сложного нагружения при конечных деформациях по эндохронной теории неупругости // *Прикладные проблемы прочности и пластичности*, 1998. — № 59. — С. 72–76.
16. Greenwood G. W. Fracture under creep conditions // *Materials Science and Engineering*, 1976. — Vol. 25. — P. 241–243.
17. Woodford D. A. Creep Damage and the Remaining Life Concept // *ASME J. Eng. Mat. Technol.*, 1979. — Vol. 101, No. 4. — P. 311–316; русск. пер.: Вудфорд Д. А. Повреждение при ползучести и концепция остаточной долговечности // *Теоретические основы инженерных расчётов*, 1979. — Т. 101, № 4. — С. 1–8.
18. Dyson B. F., McLean D. A New Method of Predicting Creep Life // *Metal Science*, 1972. — Vol. 6, No. 1. — P. 220–223(4).