

ВЕСТНИК

Тамбовского Университета

Серия: Естественные и технические науки

Том 15, вып. 3, 2010

Заказ № 18 Пор. №. 100

Журнал/книга имеет: _____ стр. _____

_____ табл. _____ карт.

№ № вып. 2010 г. 15 ~ 3

Примечания:

НЕ ОБРЕЗАТЬ!

Расписка отв. за подготовку в перепл.: _____

УДК 539.3

ИЗОХОРИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ В РАМКАХ ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ НЕУПРУГОСТИ ДЛЯ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ

© Ю.И. Кадашевич, С.П. Помыткин

Технологический университет растительных полимеров, г. Санкт-Петербург, Россия,
e-mail: sppom@yandex.ru

Ключевые слова: неупругость, большие деформации, эндохронная теория, изохорическое нагружение.

Интенсивные пластические деформации – важный способ создания и изменения структуры материала. В рамках эндохронной теории неупругости для больших деформаций рассматривается задача изохорического нагружения с достаточно общим градиентом деформации.

1. Общая система определяющих соотношений теории неупругости эндохронного типа, учитывающая большие деформации и временные эффекты, была предложена авторами в [1] и имела следующий вид:

$$\frac{\alpha \tau}{2G} \dot{\sigma} + \frac{|r|}{2G} \dot{\sigma} = \tau \dot{r} + \frac{|r|}{g + \alpha} \dot{r}, \quad \dot{\varepsilon} = D, \quad (1)$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} + \varepsilon \Omega - \Omega \varepsilon, \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma \Omega - \Omega \sigma, \quad \Omega = \dot{Q} Q^T,$$

$$\dot{r} = \dot{r} - \frac{(1-\alpha)}{2G} \dot{\sigma}, \quad \dot{r} = D - \frac{(1-\alpha)}{2G} \dot{\sigma}, \quad \tau = \tau(|r|, |\dot{r}|).$$

Здесь (в безындексной форме записи для тензоров) используются следующие обозначения: σ – девиатор тензора напряжений, ε – девиатор тензора деформаций, r – девиатор вспомогательного параметрического тензора, τ – аналог деформационного предела текучести, g – аналог коэффициента упрочнения, α – параметр эндохронности ($0 \leq \alpha \leq 1$), G – модуль сдвига. Предполагается, что параметр τ зависит от интенсивности параметрического тензора $|r| = \int dr$ и интенсивности производной параметрического тензора по физическому времени $|\dot{r}| = \sqrt{\frac{dr}{dt} : \frac{dr}{dt}}$.

2. Рассматривается градиент деформации в достаточно общем виде

$$F = \begin{pmatrix} a_1 & 2b & 2b \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Находится обратный ему тензор

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_1 & (-2b)/(a_1 a_2) & (-2b)/(a_1 a_2) \\ 0 & 1/a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_3 \end{pmatrix}$$

и вычисляется градиент скорости $L = \dot{F} F^{-1}$

$$L = \begin{pmatrix} \dot{a}_1/a_1 & (-2b\dot{a}_1 + 2b^*a_1)/(a_1 a_2) & (-2b\dot{a}_1 + 2b^*a_1)/(a_1 a_3) \\ 0 & \dot{a}_2/a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{a}_3/a_3 \end{pmatrix}.$$

Так как тензор скоростей деформации D определяется формулой $D = (L + L^T)/2$, то его компоненты выразятся через компоненты тензора градиента деформации дифференциальными соотношениями:

$$D_{11} = \frac{\dot{a}_1}{a_1}, \quad D_{22} = \frac{\dot{a}_2}{a_2}, \quad D_{33} = \frac{\dot{a}_3}{a_3}, \quad D_{23} = 0, \quad D_{32} = 0.$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{-b\dot{a}_1 + b^*a_1}{a_1 a_2}, \quad (3)$$

$$D_{13} = D_{31} = \frac{-b\dot{a}_1 + b^*a_1}{a_1 a_3}.$$

Если задан тензор скорости деформации изохорического типа

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

то при естественных начальных условиях $t=0$, $b=1$, $a_i=1$, $\forall i=1,2,3$, интегрируя систему (3), получим,

что $a_1=b=e^t$, $a_2=a_3=e^{-\frac{t}{2}}$, т. е.

$$F = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{\frac{t}{2}} & 2e^{\frac{t}{2}} \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Вычислим необходимый для использования в уравнениях (1) ортогональный тензор поворота Q , определяемый через полярное разложение тензора градиента деформации $F = QU$ с правым тензором удлинения U . При этом выполняются очевидные соотношения: $Q = FU^{-1}$, $U^2 = F^T F$, $U = Q^T F$, $U^{-1} = F^{-1} Q$, причем $Q^T = Q^{-1}$ и $\det Q = 1$, а тензоры U и U^{-1} симметричны. Заметим, что при вычислении тензора Q по геометрическим определениям надо находить тензорную функцию «квадратный корень из U^2 ». А такая операция не обеспечивает единственности ортогонального тензора.

Поступим иначе: а) сначала по заданному градиенту деформации F строится кососимметрический тензор $K = (F - F^T)/2$; б) затем на основе формулы $Q = E + mK + nK^2$ [2], где E – единичный тензор,

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$m = \frac{\sin \omega}{\omega}, \quad n = \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2}, \quad \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2},$$

находится структура ортогонального тензора поворота Q ; в) и, наконец, при решении конкретных задач, если нужно, дополнительно вычисляются тензоры U и U^{-1} , и на основе их симметрии определяются необходимые компоненты тензора Q . Для случая градиента вида (5) имеем, что

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}b) & \frac{\sin(\sqrt{2}b)}{\sqrt{2}} & \frac{\sin(\sqrt{2}b)}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sin(\sqrt{2}b)}{\sqrt{2}} & \frac{\cos(\sqrt{2}b)+1}{2} & \frac{\cos(\sqrt{2}b)-1}{2} \\ -\frac{\sin(\sqrt{2}b)}{\sqrt{2}} & \frac{\cos(\sqrt{2}b)-1}{2} & \frac{\cos(\sqrt{2}b)+1}{2} \end{pmatrix}.$$

А условие симметричности U и U^{-1} дает связь

$$\operatorname{tg}(\sqrt{2}b) = \frac{2\sqrt{2}b}{a_1 + a_2}$$

Тензор вихря $\Omega = \dot{Q} Q^T$ получается в форме

$$\Omega = \dot{b} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Для градиента деформации (2) при $\alpha=1$ с заданным тензором скоростей деформации (4) были решены уравнения (1). Результаты оказались близкими к гипотезе Рубина, высказанной им в 1994 г. [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Эндохронная теория ползучести, учитывающая конечные деформации // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2004. № 26. С. 83-85.
2. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1988. 256 с.
3. Rubin M.B. Plasticity theory formulated in terms of physically based microstructural variables. Part II. Examples // International Journal of Solids and Structures. 1994. V. 31. № 19. P. 2635-2652.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-01-00705).

Поступила в редакцию 15 апреля 2010 г.

Kadashevich Yu.I., Pomytkin S.P. Isochoric extension within the framework of endochronic theory of inelasticity of large deformations

Intensive plastic deformations are important method of material structurization. In report within inelastic constitutive equations of endochronic theory at finite deformations the isochoric extension (or pressure) problem with general deformation gradient is studied.

Key words: inelasticity; large deformations; endochronic theory; isochoric loading.