



**УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ПЕТРОЗАВОДСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

№4 (117)

ИЮНЬ, 2011

ЕСТЕСТВЕННЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ISSN 1998-1643

АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ КИРИЛЛОВ

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования природно-технических систем Института прикладных математических исследований, Карельский научный центр РАН
 kirillov@krc.karelia.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИКИ ГРУППЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВАРОЧНЫХ РЕАКТОРОВ

Рассматривается задача управления процессом производства целлюлозы периодическим способом. Строится математическая модель динамики группы варочных реакторов. Для согласованного функционирования технологической линии предложен алгоритм управления.

Ключевые слова: управление, целлюлоза, математическая модель, динамика, реактор

ВВЕДЕНИЕ

При производстве целлюлозы периодическим способом варочные котлы объединяются в технологическую линию с последовательным обслуживанием их на стадиях загрузки щепой и химикатами и выгрузки целлюлозной массы. Для того чтобы материальные потоки, входящие в отдел варки и выходящие из него, имели постоянные временные характеристики, составляется циклограмма, то есть график работы котлов, который обеспечивает их последовательный выход на стадии загрузки и выгрузки [2]. Задача системы обслуживания состоит в выдерживании этого графика. Но действие возмущений, таких как падение давления греющего пара, вынужденные задержки процесса варки при отказах оборудования смежных производств, нарушения технологического регламента, изменение характеристик сырья и химикатов, приводит к нарушению графика работы варочных реакторов, что снижает производительность варочного отдела. В [3] для обеспечения инвариантности циклограммы к колебаниям параметров пара строится кусочно-постоянная функция расхода пара. При этом рассматривается частный случай, при котором происходит наложение не более двух стадий варки. Не рассматривается возможность выхода на разгрузку нескольких реакторов одновременно, не учитывается динамика стадии химических превращений. Таким образом, не обеспечивается инвариантность циклограммы по отношению к перечисленным выше возмущениям. В связи с этим предлагается новый подход к моделированию безопасной динамики функционирования технологической линии в процессе варки целлюлозы, основанный на рассмотрении последовательности реакторов как динамической системы с переменной структурой.

© Кириллов А. Н., 2011

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим сначала общую постановку задачи и предложим подход к математическому моделированию системы управления группой реакторов. Пусть n реакторов объединены последовательно в технологическую линию, i – номер реактора, $i = 1, \dots, n$. При этом реакторы загружаются последовательно начиная с первого, в порядке возрастания их номеров, и циклически, то есть после последнего реактора n загружается первый и т. д. Процесс варки для каждого реактора можно разбить на следующие этапы: загрузка, химические превращения, выгрузка, простой с целью осмотра. Последовательное осуществление этих этапов назовем стадией с номером k , $k = 1, \dots, N$. Выделим этап химических превращений как управляемый с помощью изменения параметров температурно-временного режима. Остальные этапы будут полагаться неуправляемыми.

Пусть, $\Delta_{3k}^i = [t_{3k-2}^i; t_{3k-1}^i]$, $\Delta_{nk}^i = [t_{3k-1}^i; t_{3k}^i]$, $\Delta_{pk}^i = [t_{3k}^i; t_{3k+1}^i]$, $\Delta_{ok}^i = [t_{3k+1}^i; t_{3k+2}^i]$ – промежутки времени, в течение которых в i -м реакторе происходят k -е этапы загрузки (з), химических превращений (п), разгрузки (р), простоя (останова) (о), соответственно, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, N$. При этом промежутки Δ_{3k}^i , Δ_{pk}^i , Δ_{ok}^i рассматриваются как независимые от управления и полагаются постоянными. Возникает задача управления этапами химических превращений таким образом, чтобы не происходило выхода на разгрузку более одного реактора одновременно. Иначе говоря, надо так управлять процессом, чтобы выполнялись условия

$$\Delta_{pk}^i \cap \Delta_{pk}^{i+m} = \emptyset, \quad \Delta_{p(k+1)}^i \cap \Delta_{pk}^{i+m} = \emptyset, \quad (1)$$

где $m = 1, 2, \dots, n-i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Первое условие (1) запрещает одновременную разгрузку для реакторов, находящихся на

одной, k -й, стадии, второе – для случая, когда реакторы с меньшими номерами уже вышли на следующую, $(k + 1)$ -ю, стадию, а реакторы с большими номерами еще находятся на предыдущей, k -й, стадии. Фактически надо за счет регулирования допустимого времени варки обеспечить выполнение условий (1). Назовем режим функционирования группы реакторов безопасным, если не происходит одновременная разгрузка более одного реактора.

Моделируемый процесс имеет циклический характер. Введем вектор структуры $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ следующим образом [4]: $\gamma_i(t) = 1$, если i -й реактор находится в стадиях осмотра, загрузки и химических превращений; $\gamma_i(t) = 0$, если i -й реактор находится в стадии разгрузки. Тогда безопасному режиму соответствует вектор структуры, имеющий в каждый момент времени не более одной нулевой компоненты. При этом происходит последовательный переход от структуры, у которой $\gamma_i = 0$, к структуре с $\gamma_{i+1} = 0$ и от $\gamma_n = 0$ к $\gamma_1 = 0$. Данную систему можно отнести к классу циклических гибридных систем [5], [6].

Перейдем к конкретизации модели. Будем полагать, что динамика химических превращений в i -м неизотермическом реакторе периодического действия в безразмерных переменных на k -й стадии задается уравнениями [1]

$$\dot{x}_i = -x_i e^{\frac{1}{y_i}}, \dot{y}_i = x_i e^{\frac{1}{y_i}} + \mu_i (y_{i0} - y_i), \quad (2)$$

где x_i, y_i, μ_i, y_{i0} – концентрация реагента, температура, коэффициент теплопередачи, температура стенки соответственно в i -м реакторе. Процесс варки в i -м реакторе продолжается до тех пор, пока концентрация реагента не станет меньше некоторой пороговой величины $c_i > 0$. Но условие $x_i - c_i = 0$ может оказаться «ложным» сигналом окончания процесса варки вследствие неточности измерений, неопределенности параметров, возмущающих воздействий. Учитывая эти обстоятельства, предлагается придать решению об окончании процесса варки инерционный, позволяющий избежать поспешности характер. Для этого введем переменные z_i , удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{z}_i = x_i - c_i. \quad (3)$$

Процесс варки в i -м реакторе предлагается прекращать в тот момент времени, когда выполнится условие $z_i = d_i$, где d_i – заданная постоянная, то есть в момент времени t_i такой, что

$$z_i(t_i) = z_{i0} + \int_{t_{i0}}^{t_i} (x_i - c_i) dt = d_i, \quad (4)$$

где $z_{i0} = z_i(t_{i0})$, t_{i0} – начальный момент времени для этапа химических превращений. Полагаем, что $z_{i0} > d_i > 0$. При достижении переменной z_i значения d_i процесс варки прекращается, и реактор выходит на разгрузку. Смысл этого условия состоит в следующем. В начальный момент времени t_{i0} полагаем $z_{i0} = z_i(t_{i0}) > d_i$. Далее в силу пер-

вого уравнения системы (2) переменная $x_i(t)$ убывает к нулю, и с некоторого момента времени разность $x_i - c_i$ станет и останется отрицательной. Тогда переменная z_i также будет убывать (к $-\infty$) и достигнет значения d_i . Наличие интеграла обеспечивает инерционность при принятии решения о завершении стадии химических превращений. Таким образом, уравнения (2) задают динамику химических превращений в i -м реакторе при условии $z_i > d_i$. В тот момент времени, когда $z_i = d_i$, эта стадия заканчивается и начинается разгрузка.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ БЕЗОПАСНОГО РЕЖИМА

Рассмотрим i -й реактор, то есть систему (2), (3), на некоторой стадии k . Найдем границы промежутка Δ_{nk}^i , которые можно обеспечить за счет регулирования температурного режима на k -стадии. Пусть температура в реакторе постоянна: $y_i = \bar{y}_i$. Тогда из (2) получаем $x_i(t) = x_{i0} e^{-a_i(t-t_{i0})}$,

где $x_{i0} = x_i(t_{i0})$, $a_i = e^{\frac{1}{\bar{y}_i}}$. При этом закон изменения хладоагента имеет вид $y_{i0} = y_1 - \frac{a_i x_i(t)}{\mu_i}$. Далее из (3) получаем:

$$z_i(t) = z_{i0} - \frac{x_{i0}}{a_i} \cdot (e^{-a_i(t-t_{i0})} - 1) - c_i(t - t_{i0}).$$

Пусть t_i – первый момент времени, в который $z_i(t_i) = d_i$. В этот момент заканчивается процесс варки и начинается разгрузка котла. Найдем границы изменения t_i при условии, что температура в реакторе удовлетворяет технологическим ограничениям: $\bar{y} \in [y_{imin}; y_{imax}]$.

Пусть $t_i(a_i)$ – функция, определяемая уравнением

$$z_{i0} - \frac{x_{i0}}{a_i} \cdot (e^{-a_i(t_i-t_{i0})} - 1) - c_i(t_i - t_{i0}) = d_i. \quad (5)$$

Лемма. Решение t_i уравнения (5) единственно при всех допустимых значениях параметров. При этом $t_i = t_i(a_i)$ – убывающая функция.

Доказательство. Для простоты обозначим $a_i = a$, $d_i = d$, $c_i = c$, $z_{i0} = z_0$, $x_{i0} = x_0$, $t_i - t_{i0} = t$. Тогда (5) можно записать в виде

$$h(t) \equiv z_0 - d - ct - \frac{x_0}{a} (e^{-at} - 1) = 0. \quad (6)$$

Докажем единственность решения t уравнения (6). Имеем: $\dot{h}(t) = -c + x_0 e^{-at}$. Тогда если $c \geq x_0$, то $\dot{h}(t) < 0$ при $t \geq 0$, и функция $h(t)$ убывает. Если $c < x_0$, то $\dot{h}(t)$ возрастает до максимума в точке $t^* = \frac{1}{a} \ln \frac{c}{x_0}$, а затем убывает. В обоих случаях, поскольку $h(0) = z_0 - d > 0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = -\infty$, уравнение $h(t) = 0$ имеет единственное решение.

Докажем убывание решения $t(a)$ уравнения (6) как функции параметра a . Запишем (6) в виде $z_0 - d - ct = \frac{x_0}{a} (e^{-at} - 1) \equiv q(t, a)$. (7)

Пусть $t(a_1)$, $t(a_2)$ – решения уравнения (6) при $a = a_1$, $a = a_2$, $a_1 > a_2$. Легко показать, что $\frac{dg}{da} > 0$ при $t > 0$. Тогда из (7) следует

$$z_0 - d - ct(a_1) = g(t(a_1), a_1) > \\ > g(t(a_2), a_2) = z_0 - d - ct(a_2),$$

откуда получаем, что $t(a_1) < t(a_2)$. Лемма доказана.

Поскольку $\bar{y}_i \in [y_{imin}; y_{imax}]$, $a_i \in [a_{imin}; a_{imax}]$, где a_{imin} , a_{imax} – значения параметра a , соответствующие y_{imin} , y_{imax} . Тогда решение $t_i(a_i)$ уравнения (5) в силу леммы удовлетворяет условию

$$t_i(a_{imax}) \leq t_i(a_i) \leq t_i(a_{imin}). \quad (8)$$

Пусть t_{i0}^k – время начала стадии химических превращений в i -м реакторе на k -й стадии; Δ^+ – время, затрачиваемое на осмотр и загрузку реактора; Δ^- – время, затрачиваемое на разгрузку реактора. Полагаем, что Δ^+ , Δ^- одинаковы для всех реакторов на всех стадиях, что не уменьшает общности дальнейших рассуждений. Пусть k -я стадия для i -го реактора начинается в момент времени $t_{i0}^k - \Delta^+$, а заканчивается в момент времени $t_{i0}^k + \Delta^-$, где t_{i0}^k – время окончания этапа химических превращений. Для безопасного функционирования системы реакторов, то есть для отсутствия ситуации одновременной разгрузки более одного реактора, достаточно, чтобы на k -й стадии реакторы с меньшими номерами разгрузались раньше, то есть чтобы выполнялись условия $t_{i0}^k + \Delta^- < t_{j+1}^k$, $i = 1, \dots, n-1$, а реакторы с меньшими номерами, вышедшие на $(k+1)$ -стадию, должны разгружаться позже реакторов, находящихся на k -й стадии, что равносильно условиям $t_{j+1}^k + \Delta^- < t_j^{k+1}$, $j = 1, \dots, n-1$.

Будем обозначать через x_{i0}^k , y_{i0}^k , $\bar{y}_i^k$, x_{i0}^k , x_i^k , a_i^k значения величин через x_{i0} , y_{i0} , $\bar{y}_i$, x_{i0} , x_i , a_i соответственно на k -й стадии. Тогда из предыдущих рассуждений получаем следующий результат.

Теорема. Пусть система неравенств

$$t_i^k(a_{imax}) \leq t_i^k \leq t_i^k(a_{imin}), \quad t_j^k + \Delta^- < t_{j+1}^k, \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ t_{j+1}^k + \Delta^- < t_j^{k+1}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

имеет решение $t_1^k, \dots, t_n^k$. Тогда группа периодических реакторов, объединенных в технологическую линию, будет иметь безопасный режим функционирования, который можно поддержи-

вать с помощью управления $y_{i0}^k = \bar{y}_i^k - \frac{a_i^k x_i^k(t)}{\mu_i}$.

Устойчивость. Найдем условия устойчивости решения $\bar{x}_i = x_i(t) = x_{i0} e^{-a_i(t-t_{i0})}$, $y_i = \bar{y}_i$ системы (2). В соответствии с [1], где в качестве функции Ляпунова была взята квадратичная форма, достаточные условия асимптотической устойчивости решения, реализующего изотермический режим в реакторе, состоят в существовании таких постоянных α, β , что

$$p\alpha^2 + 2qa\beta + r\beta^2 < 0, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad (9)$$

$$\text{где } p = \frac{a_i \bar{x}_i^2}{\bar{y}_i^2}, \quad q = \frac{a_i \bar{x}_i}{\bar{y}_i^2} - 2\mu_i, \quad r = \frac{a_i}{\bar{y}_i^2}.$$

При этом неясно, могут ли условия (9) выполняться одновременно, поэтому продолжим исследование устойчивости. Для выполнения первого условия (9) достаточно, чтобы одновременно были справедливы неравенства

$$q^2 - pr \geq 0, \quad -q + \sqrt{q^2 - pr} > 0,$$

что равносильно выполнению неравенств $q < 0$, $q^2 - pr \geq 0$.

Отсюда получаем, что $\mu_i \geq x_{i0} \bar{y}_i^2 \cdot e^{-\frac{1}{y_i}}$. Поскольку, как нетрудно показать, правая часть последнего неравенства, как функция от $\bar{y}_i$, имеет глобальный максимум при $\bar{y}_i = 1$, достаточным условием для выполнения последнего неравенства является $\mu_i > x_{i0} \cdot e^{-1}$.

ВЫВОДЫ

Предложен подход к решению задачи управления группой варочных реакторов. Предложена соответствующая математическая модель, основанная на системе с переменной структурой. При этом учитывается динамика процесса варки, для описания которой использованы простейшие уравнения. В дальнейшем следует разработать алгоритм управления, включающий в динамическую систему большее число параметров процесса варки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольтер Б. В., Сальников И. Е. Устойчивость режимов работы химических реакторов. М.: Химия, 1981. 200 с.
2. Зорин И. Ф., Петров В. П., Рогульская С. А. Управление процессами целлюлозно-бумажного производства. М.: Лесн. пром-сть, 1981. 272 с.
3. Казанский В. Н., Зорин И. Ф., Петров В. П. Централизованное управление группой периодических варочных реакторов // Автоматизация, механизация, приборное и аппаратное оформление процессов целлюлозно-бумажного производства: Сб. тр. ВНИИБ. Вып. 71. Л., 1977. С. 18–24.
4. Кириллов А. Н. Метод динамической декомпозиции в моделировании систем со структурными изменениями // Информационно-управляющие системы. 2009. № 1. С. 20–24.
5. Branicky M. S., Borkar V. S., Mitter S. K. A Unified Framework for Hybrid Control: Model and Optimal Control Theory // IEEE Transactions on Automatic Control. 1998. Vol. 43. № 4. P. 475–482.
6. Nerode A., Kohn W. Models for Hybrid Systems: Automata, Topologies, Controllability, Observability // Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer. 1993. № 736. P. 317–356.