

Труды

КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№ 5, 2011

transactions.krc.karelia.ru

Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ. Выпуск 2

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Е. С. Берникович. О ЧИСЛЕ ДЕРЕВЬЕВ ЗАДАННОГО ОБЪЕМА В СЛУЧАЙНОМ НЕПОМЕЧЕННОМ НЕКОРНЕВОМ ЛЕСЕ	4
Г. А. Борисов, Т. П. Тихомирова. ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЕДИНИЧНОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ЛИНИИ ТОПЛИВНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ХОЗЯЙСТВА РЕГИОНА	10
Ю. В. Заика. УСТОЙЧИВОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НАБЛЮДЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ	18
А. А. Ивашко, Е. Е. Ивашко. ИГРА N ЛИЦ С ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКОЙ	28
А. Н. Кириллов. ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ	33
А. В. Ласунский. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ	38
П. Ю. Литинский. КЛАССИФИКАЦИЯ СКАНЕРНЫХ СНИМКОВ МЕТОДОМ МОДЕЛИРОВАНИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА	45

УДК 517.977

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ

А. Н. Кириллов

*Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

Рассмотрена многомерная нелинейная динамическая система, описывающая процесс биологической очистки. Построены инвариантные множества системы. Предложен метод стабилизации процесса, основанный на приведении траекторий в эти множества.

Ключевые слова: инвариантное множество, динамическая система, управление, биологическая очистка.

A. N. Kirillov. INVARIANT SETS OF A BIOLOGICAL TREATMENT PROCESS CONTROL SYSTEM

A multidimensional nonlinear dynamic system used to describe the biological treatment process is considered. Invariant sets of the system are built. A process stabilization method based on routing the trajectories into these sets is proposed.

Key words: invariant sets, dynamic system, control, biological treatment.

ВВЕДЕНИЕ

Задача стабилизации процесса биологической очистки сточных вод играет важную роль в проблеме охраны окружающей среды. От ее успешного решения зависит качество питьевой воды, количество которой в расчете на одного человека в период с 1970 по 2002 гг., по данным Центра экологической политики России, уменьшилось вдвое [Данилов-Данильян, 2009]. Сложность процесса биоочистки, ограниченная возможность проведения натурных экспериментов [Евилевич, Брагинский, 1979] приводят к необходимости активно использовать математическое моделирование для управления этим процессом. В 1987 г. была создана так называемая модель ASM1 очистки сточных вод с помощью активного ила [Henze et al., 1987], которая стимулировала использова-

ние математического моделирования в практике инженерных расчетов. Модель ASM1 представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, аналитическое и качественное исследование которой практически невозможно. Имеется достаточно большое количество работ, связанных с упрощением данной модели. При этом используют линеаризацию, декомпозицию, уменьшение размерности [Steffens et al., 1997; Chachuat et al., 2003; Smets et al., 2003]. Следует заметить, что несмотря на сложность, в модели ASM1 не учтена многовидовость состава микроорганизмов активного ила.

Процессы, происходящие в системе биоочистки, до сих пор мало изучены, поэтому построение адекватной модели, учитывающей различные стороны этого процесса, в

настоящее время невозможно. Видимо, следует сосредоточиться на разработке комплекса достаточно простых и приемлемых с инженерной точки зрения моделей, применение которых для повышения эффективности процесса биоочистки не вызывало бы больших затруднений.

В настоящей работе предлагается метод стабилизации процесса биоочистки, основанный на построении инвариантного множества в динамической системе управления. В качестве трофической функции используется функция Моно [Brune, 1985; Вавилин, 1986]. При этом учтен многовидовой состав сообщества микроорганизмов. Управляющим воздействием является скорость возвратного потока ила. Допустимые управления – кусочно-постоянны и принимают всего два значения, что упрощает практическую реализацию алгоритма стабилизации.

МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать процесс биологической очистки, выделив из его технологической схемы аэротенк и вторичный отстойник. Рассмотрим сообщество микроорганизмов, находящееся в аэротенке. Пусть происходит параллельное потребление субстратов [Вавилин, 1986], т. е. i -й микроорганизм потребляет i -й субстрат, $i = 1, \dots, n$. При этом используем трофическую функцию Моно. Таким образом, получаем динамическую систему, описывающую процесс биологической очистки

$$\dot{x}_i = u a_{1i} + f_i(x_i, s_i) - (b + u)x_i, \quad (1)$$

$$\dot{s}_i = b a_{2i} - d_i f_i(x_i, s_i) - (b + u)s_i, \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, n,$$

где

$$f_i(x_i, s_i) = \frac{\mu_i x_i s_i}{k_i + s_i},$$

x_i, s_i – концентрация i -х видов микроорганизма и субстрата, соответственно; $d_i = \frac{1}{Y_i}$, Y_i – коэффициент утилизации i -го вида субстрата в биомассу i -го вида микроорганизмов; k_i, μ_i – константа полунасыщения и максимальная удельная скорость роста, соответственно, микроорганизмов i -го вида; u, a_{1i} – скорость и концентрация, соответственно, i -го вида микроорганизмов в возвратном потоке; b, a_{2i} – скорость и концентрация, соответственно, i -го вида субстрата на входе. Параметры системы, если особо не оговорено, считаем постоянными. Будем полагать, что управлением является скорость возвратного потока u как

наиболее технически просто регулируемый параметр. При этом вводим ограничения

$$u \in [u_1, u_2],$$

где u_1, u_2 – граничные значения скорости u , $0 \leq u_1 < u_2$. Пусть допустимое управление является кусочно-постоянной функцией $u = u(x, s)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$.

Задача стабилизации процесса биологической очистки сточных вод состоит в нахождении такого допустимого управления u , при котором, начиная с некоторого момента времени t^* , выполняются условия

$$x_i(t) \in [0, x_{im}], \quad s_i(t) \in [0, s_{im}], \quad (3)$$

$$t \geq t^*, \quad i = 1, \dots, n,$$

где x_{im}, s_{im} – предельно допустимые концентрации i -го вида микроорганизмов и субстратов.

Множество M является инвариантным для системы управления $\dot{z} = f(z, u)$, если найдется допустимое управление u такое, что соответствующая траектория $x(t, u)$ принадлежит M при всех $t \geq t_0$, если она начинается в точке $x(t_0, u) = x_0 \in M$. Таким образом, получаем задачу нахождения допустимого управления, при котором множество

$$M = \{(x, s) : x_i \in [0, x_{im}], s_i \in [0, s_{im}], i = \overline{1, n}\}$$

будет инвариантным для системы (1), (2). При этом также возникает задача перевода начальных точек в M за конечное время. Дальнейшее изложение посвящено решению этих задач.

Замечание 1. Будем считать, что допустимое управление не только кусочно-постоянно, но принимает лишь граничные значения. Во-первых, такое управление технически проще реализовать, а во-вторых, добавление к граничным значениям точек из интервала (u_1, u_2) не расширит возможностей стабилизации системы, что будет видно из дальнейшего изложения. Таким образом, метод управления обладает свойством релейности, т. е. является управлением типа «bang-bang control».

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА

В работе [Кириллов, 1994] рассматривалась система типа (1), (2) для случая одного вида микроорганизма и субстрата и, в частности, решалась задача стабилизации положений равновесия. Следует отметить, что требование асимптотической устойчивости отдельных состояний сложной экологической системы излишне жестко и в реальности не осуществимо. Достаточно требовать устойчивость по Лагранжу концентраций субстратов и микроорганизмов. Для природных экологических

систем, это впервые отмечено в работе [Сви-режев, Логофет, 1978], где исследовалась динамика взаимодействия популяций. Таким образом, приходим к задаче построения инвариантных множеств системы (1), (2).

Следующая лемма 1 дает достаточное условие инвариантности множества M .

Лемма 1. *Множество*

$$M = \{(x, s) : x_i \in [0, x_{im}], s_i \in [0, s_{im}]\},$$

где $i = \{1, \dots, n\}$, является инвариантным для системы (1), (2) при достаточно больших значениях x_{im}, s_{im} .

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть значения знаков $\dot{x}_i, \dot{s}_i$ из системы (1), (2) для конкретного значения i на границах множества (3), откуда получаем утверждение для конкретного значения i . Осталось заметить, что $M = M_1 \times \dots \times M_n$. $\square$

Пусть $z_i = d_i x_i + s_i$, $D_i = d_i a_{1i} u + b a_{2i}$, $z = z_1 + \dots + z_n$, $D = D_1 + \dots + D_n$. Рассмотрим систему

$$\dot{z}_i = D_i - (b + u)z_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Лемма 2. *Множества*

$$M_{iz} = \{(x, s) : z_i = \frac{D_i}{b+u}\}, \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

$$M_z = \{(x, s) : z = \frac{D}{b+u}\}$$

являются инвариантными и асимптотически устойчивыми для системы (4).

Доказательство. Понятие асимптотической устойчивости инвариантных множеств рассматривалось в [Зубов, 1982]. Умножив уравнение (1) на d_i и прибавив его к уравнению (2), получим линейную систему (4), из вида которой следует утверждение леммы для множества M_{iz} . Сложив уравнения системы (4), получим уравнение $\dot{z} = D - (b + u)z$, откуда следует утверждение леммы для множества M_z . $\square$

Пусть $A(u_j) = (z_1(u_j), \dots, z_n(u_j))$ – положение равновесия системы (1), (2), соответствующее управлению $u_j, j = 1, 2$. Рассмотрим параллелепипед

$$P = \{z : z_i \in [c_{1i}, c_{2i}], i = 1, \dots, n\} \in R^n,$$

где c_{1i}, c_{2i} – заданные постоянные, $P^0 = \{z : z_i \in (c_{1i}, c_{2i}), i = 1, \dots, n\}$ – соответствующий открытый параллелепипед. Пусть $[A(u_1), A(u_2)] = \{z : z = \alpha A(u_1) + (1 - \alpha)A(u_2), \alpha \in [0, 1]\}$ – отрезок в R^n , с концами $A(u_1), A(u_2)$, $(A(u_1), A(u_2)) = [A(u_1), A(u_2)] \setminus \{A(u_1), A(u_2)\}$ – внутренность

отрезка $[A(u_1), A(u_2)]$. Пусть R_+^n – множество точек $z \in R^n$ с неотрицательными координатами.

Теорема 1. *Пусть*

$$P^0 \cap [A(u_1), A(u_2)] = [B_1, B_2],$$

где $B_1 \neq B_2, [B_1, B_2] \in (A(u_1), A(u_2))$.

Тогда любую точку $z_0 \in R_+^n$ с помощью допустимого управления можно за конечное время перевести вдоль траекторий системы (4) в параллелепипед P , который является инвариантным множеством системы (4). При этом отрезок $[B_1, B_2]$ будет инвариантным асимптотически устойчивым множеством.

Доказательство. Обозначим $A(u_1) \equiv A_1, A(u_2) \equiv A_2$. Для любой начальной точки z_0 положим $u = u_1$ (или $u = u_2$) до тех пор, пока траектория, начинающаяся в этой точке, не попадет в достаточно малую окрестность $U(A_1)$ точки A_1 (или A_2). Последнее очевидно в силу глобальной асимптотической устойчивости положения равновесия A_1 системы (4) [Кириллов, 1994]. Траектории системы (4) – прямые. Действительно, из (4) следует, что

$$z_i(t) = w_{i0} \exp(-(b + u)(t - t_0)) + \frac{D_i}{b + u},$$

где $w_{i0} = z_i(t_0) - \frac{D_i}{b+u}$. Тогда любая траектория является прямой (лучом) $z = w_0 + D\tau$, где $w_0 = (w_{10}, \dots, w_{n0}), D = (\frac{D_1}{b+u_j}, \dots, \frac{D_n}{b+u_j}), \tau = \exp(-(b + u_j)(t - t_0))$. Очевидно, отрезок $[A_1, A_2]$ принадлежит траекториям, проходящим через точку A_1 при $u = u_2$ и через точку A_2 при $u = u_1$, соответственно. Пусть l – прямая, которой принадлежит отрезок $[A_1, A_2]$. Расстояние от точки z до прямой l обозначим через $\rho(z, l) = \min \|z - y\|$, где минимум нормы берется по всем точкам $y \in l$. Рассмотрим цилиндр $\bar{C}(\varepsilon) = \{z : \rho(z, l) \leq \varepsilon\}$ с осью l . Поскольку отрезок $[A_1, A_2]$ пересекает внутренность P^0 параллелепипеда P , то цилиндр $\bar{C}(\varepsilon)$ при достаточно малом ε также пересекает P^0 . Пусть окрестность $U(A_1)$ настолько мала, что $U(A_1) \subset \bar{C}(\varepsilon)$.

После попадания траектории в описанную окрестность $U(A_1)$, что возможно в силу асимптотической устойчивости положения равновесия A_1 при $u = u_1$, переключаем управление на значение $u = u_2$. Тогда траектория, оставаясь в цилиндре $\bar{C}(\varepsilon)$, также пересечет P^0 . Пусть $\hat{P} \equiv \bar{C}(\varepsilon) \cap P, \bar{B} \equiv \hat{P} \setminus P^0$. Траектория входит в параллелепипед P , точнее в область $\hat{P}$, пересекая ее границу $\bar{B}$. Переключим

управление на значение $u = u_1$ в момент выхода траектории из области $\hat{P}$ через границу $\bar{B}$. Далее вторично переключаем управление при попадании траектории на границу $\bar{B}$. Получаем последовательность управлений и соответствующих отрезков траекторий $[R_k, R_{k+1}]$, где $R_k \in \bar{B}$. При этом $[R_k, R_{k+1}] \rightarrow [B_1, B_2]$ в том смысле, что $\rho([R_k, R_{k+1}], [B_1, B_2]) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, где $\rho([R_k, R_{k+1}], [B_1, B_2]) \equiv \min \|z - y\|$ по всем $z \in [R_k, R_{k+1}]$, $y \in [B_1, B_2]$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Действительно, если $z(t, t_0, z_0, u_j) \equiv z(t)$, $\tilde{z}(t, t_0, \tilde{z}_0, u_j) \equiv \tilde{z}(t)$, то

$$\begin{aligned} & \rho([R_k, R_{k+1}], [B_1, B_2]) \\ & \leq \|z(t) - \tilde{z}(t)\| = \|z(t_{0k}) - \tilde{z}(t_{0k})\| \\ & \times \exp(-(b + u_j)(t - t_{0k})), \end{aligned}$$

где $t \in [t_{0k}, t_{0(k+1)}]$, t_{0k} – момент переключения управления, $z(t, t_0, z_0, u_j)$ – траектория системы (4), соответствующая управлению u_j и удовлетворяющая начальному условию $z(t_0, t_0, z_0, u_j) = z_0$. Таким образом, отрезок $[B_1, B_2]$ – инвариантное асимптотически устойчивое множество системы (4). $\square$

Замечание 2. Как следует из доказательства теоремы 1, конкретный вид функций $f_i(x_i, s_i)$ не влияет на метод стабилизации, поэтому можно сформулировать утверждение, аналогичное теореме 1, но без конкретизации этих функций.

Замечание 3. В силу линейности системы (4), несложно получить оценку времени попадания траектории из любой начальной точки в $\hat{P}$.

Замечание 4. Построенный алгоритм стабилизации очевидным образом применим в случае, когда концентрации субстратов a_{2i} на входе в очистную систему точно неизвестны, но известны промежутки, которым они принадлежат $a_{2i} \in [a_{2imin}, a_{2imax}]$. Для этого требуется соответствующим образом скорректировать построение цилиндра $\bar{C}(\varepsilon)$. При этом при небольших изменениях полученный результат можно использовать и в случае кусочно-постоянных a_{2i} .

Замечание 5. В теореме 1 доказана асимптотическая устойчивость множества $[B_1, B_2]$. Это означает, что при соответствующем управлении в системе (4), а вместе с тем и в системе (1), (2), возникает асимптотический периодический устойчивый режим. В работе [Матрос, 1987] исследовался вопрос о повышении эффективности химико-технологических

процессов в результате искусственного введения периодических режимов их функционирования. Предложенный метод управления позволяет исследовать этот вопрос для процессов биологической очистки.

СТАБИЛИЗАЦИЯ

Вернемся к задаче стабилизации процесса биологической очистки, состоящей в приведении траектории системы (1), (2) за конечное время в область (3). Нижеледующее утверждение дает достаточные условия разрешимости этой задачи.

Теорема 2. Пусть для всех $i = 1, \dots, n$, $j = 1, 2$

$$a_{1i} - Y_i a_{2i} \neq 0,$$

$$\frac{D_i}{(b + u_j)d_i} \leq x_{im}, \quad \frac{D_i}{b + u_j} \leq s_{im}.$$

Тогда для любого начального состояния $(x_0, s_0) \in R_+^{2n}$ через конечное время будут выполняться условия (3).

Доказательство. Рассмотрим какую-либо одну подсистему (1), (2) при конкретном значении i , $(x_i, s_i) \in R_+^2$. Если выполняется первое условие теоремы, то две прямые $d_i x_i + s_i = \frac{D_i}{b + u_j}$, соответствующие $j = 1, 2$, не совпадают [Кириллов, 1994]. Второе и третье условия гарантируют, что отрезки обеих прямых, принадлежащие R_+^2 , принадлежат прямоугольнику $\{(x_i, s_i) : x_i \in [0, x_{im}], s_i \in [0, s_{im}]\}$. Отсюда с использованием теоремы 1 следует заключение теоремы 2. $\square$

Замечание 6. Условие теоремы 2 слишком жесткое. Его можно заменить условием, вытекающим из того факта, что траектории системы (4) с течением времени локализуются в сколь угодно малой окрестности отрезка $[B_1, B_2]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получен метод решения задачи стабилизации процесса биологической очистки сточных вод. В его основе лежит приведение траекторий системы в инвариантное множество с помощью кусочно-постоянного управления, принимающего только два граничных значения. При этом структура системы (1), (2) позволяет свести решение задачи стабилизации к ее решению для линейной относительно $z \in R_+^n$ системы (4). Представляется перспективным применение предложенного метода для системы (1), (2) с переменной размерностью, что соответствует переменному видовому составу

сообщества микроорганизмов. Соответствующая математическая модель разработана в работе [Кириллов, 2010], где размерность системы зависит от значения управляющего воздействия. Ранее такая зависимость была использована для управления системой «хищник-жертва» [Kirillov, 1997].

ЛИТЕРАТУРА

Вавилин В. А. Время оборота биомассы и деградация биомассы органического вещества в системах биологической очистки. М.: Наука, 1986. 144 с.

Данилов-Данильян В. И. Водные ресурсы мира и перспективы водохозяйственного комплекса России. М.: Институт устойчивого развития; Центр экологической политики России, 2009. 88 с.

Евилевич М. А., Брагинский Л. Н. Оптимизация биохимической очистки сточных вод. Л.: Стройиздат, 1979. 159 с.

Зубов В. И. Динамика управляемых систем. М.: Наука, 1982. 286 с.

Кириллов А. Н. Задача стабилизации экологических систем // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1994. № 6. С. 883–892.

Кириллов А. Н. Метод динамической декомпозиции в моделировании процесса биологической

очистки сточных вод // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2010. № 4. С. 496–505.

Матрос Ю. Ш. Каталитические процессы в нестационарных условиях. Новосибирск: Наука, 1987. 232 с.

Свирижев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

Brune D. Optimal control of the complete-mix activated sludge process // Environmental Technology Letters. 1985. Vol. 6. P. 467–476.

Chachuat B., Roche N., Latifi M. A. Reduction of the asm1 model for optimal control of small-size activated sludge treatment plants // Journal of water science. 2003. Vol. 16. P. 5–26.

Henze M., Grady C., Gujer W. et al. A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems // Water research. 1987. Vol. 6. P. 505–515.

Kirillov A. N. The stabilization problem for certain class of ecological systems // International Journal of Software Engineering and Knowledge Engineering. 1997. Vol. 7. N. 2. P. 247–251.

Smets I. Y., Hagebart J. V., Carrette R., Van Impe J. F. Linearization of the activated sludge model ASM1 for fast and reliable predictions // Water research. 2003. Vol. 37. P. 1831–1851.

Steffens M. A., Lant P. A., Newell R. B. A systematic approach for reducing complex biological wastewater treatment model // Water science and technology. 1997. Vol. 31. P. 590–606.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Кириллов Александр Николаевич
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика
Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Kirillov, Alexandr
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian
Research Centre, Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia,
Russia
e-mail: kirillov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370