

ИНФОРМАЦИОННО- УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

4(53)/2011

УДК 517.977

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СТРУКТУР ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

А. Н. Кириллов,

доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Предлагается структурный подход к исследованию динамики гибридных систем. Вводятся понятия структурных движений и орбит, соответствующих различному объему информации о начальном состоянии системы. Рассмотрены геометрические методы описания динамики структур.

Ключевые слова — гибридная система, структурное движение, структурная орбита, динамическая система.

Введение

Гибридные системы сочетают непрерывную и дискретную динамику. В последнее время моделирование и управление гибридными системами представляет собой активно развивающееся направление в теории управления. Повышение интереса к ним вызвано расширением области применения этого класса систем. Сюда можно отнести задачи управления коммуникационными сетями, информационными системами, транспортными и производственными потоками. На 16-м (2005 г.) Конгрессе Международной федерации по автоматическому управлению (ИФАК) среди важнейших проблем, стоящих перед научным сообществом, была отмечена необходимость развития теории гибридных систем. Различным вопросам моделирования и управления в этой области посвящены исследования отечественных и зарубежных ученых [1–9].

Несмотря на значительный прогресс, достигнутый в исследовании конкретных задач и моделей, нет единого подхода к их исследованию, общая теория гибридных систем еще находится в стадии становления. В настоящей статье развивается структурный подход к моделированию и анализу сложных систем с переменными связями и составом. Их можно отнести к классу гибридных систем. Понятие структуры было введено и использовалось для моделирования линейных систем с переменным составом в работах [10–12]. В данной статье продолжается исследование структурной динамики систем. Предлагаются различные типы структурных движений и орбит. Развиваемый аппарат позволит моделиро-

вать структурные изменения в различных прикладных задачах, возникающих при исследовании сложных динамических систем. Особенно это касается систем, в состав которых может входить большое количество подсистем со сложными взаимосвязями. В этом случае традиционные подходы к исследованию динамических моделей оказываются малоприменимыми в силу большой переменной размерности и нелинейности систем. Предлагаемые понятия внешней и внутренней структуры позволяют в этом случае дать хотя бы грубое описание динамики, а также прогнозировать и управлять поведением сложных систем.

Структурная полудинамическая система

Рассмотрим сложную динамическую систему S . Пусть в процессе ее функционирования некоторые подсистемы, входящие в S , могут отключаться или вновь подключаться к ней. При этом подсистемы S_i , входящие в S , взаимодействуют между собой. Рассмотрим понятие структуры $\gamma(t) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in R^n$ системы S [10]. В состав S могут входить подсистемы из упорядоченного набора $\{S_1, \dots, S_n\}$. Полагаем, что $\gamma_i(t) = 1$, если подсистема S_i в момент времени t входит в S , $\gamma_i(t) = 0$, если подсистема S_i в момент времени t не входит в S .

Определение [10]. Вектор $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \in R^n$ называется **структурой** системы S в момент времени t .

Пусть Γ — множество всевозможных структур системы S : $\gamma \in \Gamma$. Можно считать, что Γ — подмножество вершин единичного n -мерного куба I^n : $\Gamma \subset I^n$.

На множестве структур Γ введем динамику, используя метрику Хэмминга

$$\rho(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}) = \sum_{i=1}^n |\gamma_i^{(1)} - \gamma_i^{(2)}|,$$

$$\gamma^{(j)} = (\gamma_1^{(j)}, \dots, \gamma_n^{(j)}), \quad j=1,2.$$

Определение. Общей структурной полудинамической системой называется двухпараметрическое семейство преобразований $G(t, t_0)$ множества структур Γ в себя, удовлетворяющее условиям:

1) для любых $\gamma \in \Gamma$, $t_0 \in \mathbb{R}$ определено множество $G(t, t_0)(\gamma) \equiv G(t, t_0, \gamma) \subset \Gamma$ при $t \geq t_0$, $G(t, t_0, \gamma) \neq \emptyset$, $G(t_0, t_0, \gamma) = \gamma$

2) для любого $\eta \in G(t_1, t_0, \gamma)$ определено множество $G(t, t_0, \eta)$ такое, что $\cup_{\eta \in G(t_1, t_0, \gamma)} G(t, t_0, \eta) = G(t, t_0, \gamma)$, где объединение берется по всем $\eta \in G(t_1, t_0, \gamma)$ при $t \geq t_1$;

3) $\lim_{t \rightarrow t_0+0} \rho(G(t, t_0, \gamma), \gamma) = 0$, где $\rho(G(t, t_0, \gamma), \gamma) = \max \rho(\eta, \gamma)$ по всем $\eta \in G(t, t_0, \gamma)$.

Таким образом, $G(t, t_0, \gamma)$ — множество структур, которые S может иметь в момент времени $t \geq t_0$, если в момент времени t_0 система имела структуру γ .

Ниже будет построена реализация общей структурной полудинамической системы. Пусть $S(\gamma)$ — система S , имеющая структуру γ , $M(\gamma)$ — фазовое пространство динамической системы $S(\gamma)$. Предлагается следующая динамическая модель изменения структуры во времени. Пусть $\Omega(\gamma)$ — подмножество соответствующего фазового пространства: $\Omega(\gamma) \subset M(\gamma)$; $\Omega^f(\gamma)$ — граница $\Omega(\gamma)$, т. е. $\Omega^f(\gamma) = \Omega^c(\gamma) \setminus \Omega(\gamma)$, $\Omega^c(\gamma)$ — замыкание $\Omega(\gamma)$.

Определение. Множество $\Omega(\gamma)$ будем называть фазовым подпространством динамической системы $S(\gamma)$.

Произведем разбиение фазового подпространства $\Omega(\gamma)$: $\Omega(\gamma) = \cup_p \Omega_p(\gamma)$, где $\Omega_p(\gamma) \cap \Omega_q(\gamma) = \emptyset$, $p, q \in P(\gamma)$ — множество индексов, соответствующих структуре γ .

Определение. Разбиением $\tau(\gamma)$ фазового подпространства $\Omega(\gamma)$ называется множество $\tau(\gamma) = \{\Omega_p(\gamma): \Omega(\gamma) = \cup_p \Omega_p(\gamma), \Omega_p(\gamma) \cap \Omega_q(\gamma) = \emptyset, p, q \in P(\gamma)\}$.

Определение. Системой S со структурными изменениями (ССИ) называется следующее множество $\{\Gamma, \Omega, F, \tau, \Phi, \Phi^f, \Theta\}$, где:

Γ — структурное пространство системы S , т. е. множество структур γ , которые может иметь система в процессе функционирования: $\gamma \in \Gamma$;

$\Omega = \{\Omega(\gamma): \gamma \in \Gamma\}$ — множество фазовых подпространств;

$F = \{S(\gamma): \gamma \in \Gamma\}$ — множество динамических систем $S(\gamma)$, заданных в фазовых пространствах $\Omega(\gamma)$;

$\tau = \{\tau(\gamma): \gamma \in \Gamma\}$ — множество разбиений фазовых пространств $\Omega(\gamma)$;

$\Phi = \{\phi_{\gamma\gamma^*}^*: P(\gamma) \rightarrow Q(\gamma^*), q(\gamma^*) = \phi_{\gamma\gamma^*}^*(p(\gamma)), p(\gamma) \in P(\gamma), q(\gamma^*) \in Q(\gamma^*)\}$ — множество отображений перехода

от системы $S(\gamma)$ к $S(\gamma^*)$, $P(\gamma)$, $Q(\gamma^*)$ — множества индексов, соответствующих структурам γ, γ^* ;

$\Phi^f = \{\phi_{\gamma\gamma^*}^*: \Omega^f(\gamma) \rightarrow \Omega^f(\gamma^*) \setminus \Omega^f(\gamma^*)\}$ — множество отображений границ $\Omega^f(\gamma)$ фазовых подпространств $\Omega(\gamma)$ во внутренности фазовых подпространств $\Omega(\gamma^*)$;

$\Theta = \{\theta(\gamma, \gamma^*)\}$ — множество функций временных задержек при переходе от структуры γ к γ^* .

Опишем, как происходит функционирование ССИ. Предположим, что в начальный момент времени t_0 система имеет структуру γ .

Пусть $X_0(\gamma)$ — вектор начального состояния системы $S(\gamma)$, $X_0(\gamma) \in \Omega_p(\gamma)$, а $X(t, t_0, X_0(\gamma))$ — движение динамической системы $S(\gamma)$, причем $X(t_0, t_0, X_0(\gamma)) = X_0(\gamma)$.

Если найдется первый момент времени $t_{pq} \geq t_0$ такой, что состояние $X_{pq} = X(t_{pq}, t_0, X_0(\gamma)) \in \Omega^f(\gamma)$, то отображение перехода $\phi_{\gamma\gamma^*}^*$ переводит состояние X_{pq} в точку $\phi_{\gamma\gamma^*}^*(X_{pq}) \in \Omega_q(\gamma^*) \setminus \Omega^f(\gamma^*)$, где $q = q(\gamma^*) = \phi_{\gamma\gamma^*}^*(p(\gamma))$. Далее, спустя время $\theta(p(\gamma), q(\gamma^*)) = \theta(X(t_q, t_0, X_0(\gamma)), X(t_q, t_0, X_0(\gamma)))$ динамической системы $S(\gamma^*)$ в подпространстве $\Omega(\gamma^*)$ и процесс повторяется. Таким образом, происходит переход от структуры γ к γ^* .

Если движение динамической системы $S(\gamma)$ не попадает на границу $\Omega^f(\gamma)$, то переключение структуры не происходит.

Определенная выше ССИ обладает как непрерывной, так и дискретной динамикой, поэтому ее можно отнести к классу гибридных систем. Предложенное понятие наиболее близко к определению гибридной системы, приведенному в работе [8].

Структурные движения и орбиты

Качественное исследование в общем случае функционирования ССИ представляется неразрешимой задачей в силу сложности поведения динамических систем $S(\gamma)$, их состыковки с помощью переходных отображений и т. д. Из определения ССИ следует, что процесс функционирования системы S порождает конечную или бесконечную последовательность структур $\{\gamma^k\}$, каждый член которой характеризует состав системы. В связи с этим более перспективным представляется изучение последовательностей структур, выделение классов систем с одинаковым в некоторых смыслах поведением этих последовательностей. Исследование динамики структур может сыграть важную роль при математическом моделировании сложных динамических информационных, эколого-экономических, производственных, энергетических систем.

Начальная структура, как следует из определения, не устанавливает однозначно последователь-

ность структур $\{\gamma^k\}$. Действительно, структура γ^{k+1} зависит не только от γ^k , но и от $\Omega_p(\gamma^k)$ — элемента разбиения $\tau(\gamma^k)$, которому принадлежит начальное для динамической системы $S(\gamma^k)$ состояние $X_0(\gamma^k)$. В связи с этим предлагается рассмотреть следующие последовательности структур, различающиеся способом задания начальной структуры. В начальный момент времени можно задать один из трех элементов включения $X_0(\gamma^0) \in \Omega_p(\gamma^0) \subset \Omega(\gamma^0)$.

1. Пусть задано $\Omega(\gamma^0)$ или γ^0 , а само начальное состояние $X_0(\gamma^0)$ и элемент $\Omega_p(\gamma^0)$ разбиения неизвестны. Тогда процессу функционирования будет соответствовать последовательность множеств структур $\{\Gamma^k(\gamma^0)\}$ такая, что $\Gamma^0(\gamma^0) = \gamma^0$, т. е. $\Gamma^k(\gamma^0)$ — множество всех структур, которые может иметь система S на тот момент времени, когда произошло k переключений структур, если задана ее начальная структура γ^0 . Пусть $\Gamma(t, t_0, \gamma^0)$ — множество всех структур, которые может иметь система S в момент времени $t \geq t_0$, если в начальный момент времени $t = t_0$ задана лишь ее начальная структура γ^0 .

Определение. Последовательность структур $\{\Gamma^k(\gamma^0)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, для которой $\Gamma^0(\gamma^0) = \gamma^0$, будем называть **структурной орбитой**.

Множество $\Gamma(t, t_0, \gamma^0)$, где $\Gamma(t_0, t_0, \gamma^0) = \gamma^0$, будем называть **структурным движением**.

2. Пусть задано множество $\Omega_p(\gamma^0)$ или индекс $p(\gamma^0) \in P(\gamma^0)$. При этом начальное состояние $X_0(\gamma^0) \in \Omega_p(\gamma^0)$ неизвестно. Тогда, как следует из определения ССИ, процессу функционирования системы будет соответствовать однозначно определенная последовательность структур $\{\gamma^k(p(\gamma^0))\}$. Пусть $\gamma(t, t_0, p(\gamma^0))$ — множество структур, которые может иметь система S в момент времени $t \geq t_0$, причем $\gamma(t_0, t_0, p(\gamma^0)) = \gamma^0$. В этом случае $\gamma(t, t_0, p(\gamma^0))$ — не единственная структура, поскольку от значения $X_0(\gamma^0) \in \Omega_p(\gamma^0)$ зависит момент переключения, временная задержка и начальное состояние следующей структуры. Следовательно, несмотря на то, что последовательность структур определена однозначно, в некоторый момент времени $\gamma(t, t_0, p(\gamma^0))$ может иметь различные значения: $\gamma(t, t_0, p(\gamma^0)) \in \{\gamma^k(p(\gamma^0))\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Определение. Последовательность структур $\{\gamma^k(p(\gamma^0))\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, для которой $\gamma^0(p(\gamma^0)) = \gamma^0$, будем называть **p -структурной орбитой**.

Структура $\gamma(t, t_0, p(\gamma^0))$ называется **p -структурным движением**.

3. Пусть задано начальное состояние $X_0(\gamma^0) \in \Omega_p(\gamma^0)$ в начальный момент времени t_0 . Тогда процессу функционирования системы будет соответствовать однозначно определенная последовательность структур $\{\gamma^k(X_0(\gamma^0))\}$. Пусть $\gamma(t^0, t_0, X_0(\gamma^0))$ — структура, которую имеет система в момент времени $t \geq t_0$, причем $\gamma(t^0, t_0, X_0(\gamma^0)) = \gamma^0$.

Определение. Последовательность структур $\{\gamma^k(X_0(\gamma^0))\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, для которой $\gamma^0(X_0(\gamma^0)) = \gamma^0$, будем называть **X -структурной орбитой**.

Структура $\gamma(t, t_0, X_0(\gamma^0))$ называется **X -структурным движением**.

Остановимся на различиях между введенными понятиями. Очевидно, p - и X -структурные орбиты совпадают, если у них совпадают индексы $p(\gamma^0)$ начальных элементов разбиений. Далее отметим, что $\gamma(t, t_0, X_0(\gamma^0)) \in \gamma(t, t_0, p(\gamma^0))$. При этом, очевидно, $\gamma(t, t_0, X_0(\gamma^0))$ — однозначно определенная структура. Начальное состояние $X_0(\gamma^0)$ однозначно определяет не только последовательность структур, но и промежутки Δt_k существования каждой из них.

Построенная ССИ задает динамику структур и дает возможность развития общей теории путем переноса с соответствующими изменениями понятий теории динамических систем. Для примера рассмотрим понятие инвариантного множества. Множество структур $\Gamma^* \subset \Gamma$ можно назвать **инвариантным** по отношению к структурному движению $\Gamma(t, t_0, \gamma^0)$, если из включения $\gamma^0 \in \Gamma^*$ следует, что $\Gamma(t, t_0, \gamma^0) \subset \Gamma^*$ при всех $t \geq t_0$. Аналогично можно ввести понятия инвариантных множеств по отношению к X - и p -структурным движениям и орбитам. Таким образом, определенная выше ССИ позволяет реализовать структурную полудинамическую систему $G(t, t_0)$ и развить для нее соответствующую качественную теорию.

Геометрия структур

Структуру γ можно назвать внешней, поскольку она характеризует состав системы S . Введем понятие внутренней структуры для описания взаимосвязей подсистем, входящих в состав S . Положим $b_{ij} = 1$ ($b_{ij} = 0$), если подсистема S_i воздействует (не воздействует) на подсистему S_j в то время, когда они обе находятся в составе S . Введем матрицу внутренней структуры $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, n$. Процесс функционирования системы S порождает последовательность $\{\mathbf{B}^k\} = \{\gamma_i^k \gamma_j^k b_{ij}^k\}$, где $(\gamma_1^k, \dots, \gamma_n^k) = \gamma^k$. Далее, сопоставим каждой структуре два комплекса. Пусть в состав первого (R) входят симплексы, вершинам которых соответствуют подсистемы, воздействующие на какую-то одну подсистему. В составе второго (R^k) — симплексы, вершины которых соответствуют подсистемам, на которые воздействует какая-либо одна подсистема. Эти комплексы можно назвать двойственными. Номера вершин считаем совпадающими с номерами подсистем. Тогда любой симплекс первого комплекса имеет номера вершин, равные номерам ненулевых элементов соответствующих столбцов матрицы $\mathbf{B}$. Для второго ком-

плекса аналогичную роль играют номера ненулевых элементов строк. Зададим на каждом из введенных комплексов неотрицательные функции H и H^* , принимающие на отдельных симплексах положительные значения. Смысл этих функций — плата за установление связей между подсистемами. Процессу функционирования соответствует последовательность двойственных комплексов, симплексы которых задаются матрицами B^k . Пусть $H_i^k(p(\gamma^0))$ (или $H_i^{k*}(p(\gamma^0))$) — значение функции H (или H^*) на симплексе i , соответствующем структуре $\gamma^k(p(\gamma^0))$. Пусть $H^k(p(\gamma^0)) = \sum_i H_i^k(p(\gamma^0))$, где сумма берется по всем симплексам, входящим в комплекс R ($\gamma^k(p(\gamma^0))$), соответствующий $\gamma^k(p(\gamma^0))$. Аналогично определяем функцию $H^{k*}(p(\gamma^0)) = \sum_i H_i^{k*}(p(\gamma^0))$. Можно высказать гипотезу, что естественные системы со структурными изменениями (экологические, биологические) функционируют так, чтобы функции $H^k(p(\gamma^0))$, $H^{k*}(p(\gamma^0))$ принимали по возможности меньшие значения. Для искусственных систем можно ставить задачу оптимального управления в смысле введенных плат за установление связей между подсистемами.

Можно рассмотреть случай, когда B зависит не только от конфигурации, но и от времени или от очередности вхождения подсистем S_i в систему S .

Рассмотрим последовательность структур $\{\gamma^k(p(\gamma^0))\}$, т. е. p -структурную орбиту. Это наиболее информативная об изменении структуры последовательность при наименьшей возможной информации о начальных данных. Действительно, последовательность $\{\gamma^k(X_0(\gamma^0))\}$, т. е. X -структурная траектория, также однозначно определяет последовательность структур, но при этом она требует знания начального состояния $X_0(\gamma^0)$.

На основе определенной ССИ можно ввести оператор $G: \Gamma \rightarrow \Gamma$ такой, что $G(\gamma^k(p(\gamma^0))) = \gamma^{k+1}(p(\gamma^0))$. Оператор G однозначно определяет последовательность структур, если задан начальный индекс $p(\gamma^0)$. Каждому индексу $p(\gamma)$ поставим в соответствие вершину $Ap(\gamma)$ графа. Пусть из вершины $Ap(\gamma)$ ведет дуга в вершину $Aq(\gamma^*)$, если $q(\gamma^*) = \varphi_{\gamma^*}^*(p(\gamma))$. При этом $\gamma = \gamma^k(p(\gamma^0))$, $\gamma^* = \gamma^{k+1}(p(\gamma^0))$ при $k \in \{1, \dots, n\}$. Таким образом, каждой p -структурной орбите $\{\gamma^k(p(\gamma^0))\}$ системы S можно однозначно сопоставить ориентированный граф, отражающий ее структурную динамику. Итак, системе S сопоставлен ориентированный граф. Такое представление ССИ позволяет применять теорию графов к исследованию структурных орбит, сводя их исследование к исследованию геометрических свойств графов. В частности, можно использовать изоморфизм графов для реализации подхода к определению эквивалентности ССИ. Возникают следующие задачи: выделить класс операторов, для ко-

торых можно провести классификацию соответствующих им графов; по данному оператору построить ССИ, принадлежащую определенному классу (задача синтеза). Отметим, что в работе [13] с помощью графов представлялись разностные операторы для определения сложности конечной двоичной последовательности.

Приведем некоторые примеры процессов, при моделировании которых возникает ССИ и динамика структуры.

Пример 1. В работах [9, 14] рассмотрена динамическая сеть, представляющая информационную систему с переменными взаимосвязями и составом. В состав сети входят узлы трех типов: источники информации, трансляторы, потребители. В дискретные моменты времени t_i , $i = 0, \dots, k$ происходит изменение состава и параметров сети. Задается динамическая система, определяющая изменение состояния узлов и моменты t_i . При этом $\gamma_i = 1$, если i -й узел функционирует, $\gamma_i = 0$ в противном случае. Таким образом, имеем пример ССИ, задающей динамику структуры γ .

Пример 2. Рассмотрим процесс биологической очистки сточных вод активным илом. Переменными величинами, задающими состояние системы, являются плотности различных субстратов-загрязнителей и видов микроорганизмов, окисляющих соответствующие типы субстратов. Динамика задается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. При этом количество уравнений изменяется в процессе функционирования системы, поскольку количество видов, которые успевают закрепиться в аэротенке, зависит от скорости подачи ила в аэротенк. Скорость рециркуляции ила u — управляющий параметр — подстраивается под нагрузку на входе в систему биоочистки. Можно положить $\gamma_i = 1$, если i -й вид присутствует в системе, что соответствует определенному значению u , $\gamma_i = 0$ в противном случае. В работе [15] представлена математическая модель стабилизации этого процесса с использованием ССИ.

Предлагаемый аппарат можно использовать при моделировании динамики больших групп роботов (динамика стаи), крупных производственных комплексов, транспортных сетей и т. д.

Заключение

Предложен структурный подход к математическому моделированию гибридных систем. Развивается понятийный аппарат, который может быть применен при построении конкретных моделей сложных динамических информационных, производственных, транспортных, энергетических систем с изменяющейся структурой.

Литература

1. Branicky M. C. Topology of hybrid systems // Proc. 32nd IEEE CDC. San Antonio, 1993. P. 2309–2314.
2. Куржанский А. Б., Точилин П. А. Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1523–1533.
3. Matveev A., Savkin A. Qualitative theory of hybrid dynamical systems. — Boston: Birkhauser, 2000. — 348 p.
4. Travernini L. Differential Automata and Their Discrete Simulators // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1987. Vol. 11. N 6. P. 665–683.
5. Branicky M. S., Borkar V. S., Mitter S. K. A Unified Framework for Hybrid Control: Model and Optimal Control Theory // IEEE Transactions on Automatic Control. 1998. Vol. 43. N 4. P. 475–482.
6. Nerode A., Kohn W. Models for Hybrid Systems: Automata, Topologies, Controllability, Observability // Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 1993. N 736. P. 317–356.
7. Collins P. Chaotic Dynamics in Hybrid Systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2008. Vol. 8. N 2. P. 169–194.
8. Brockett R. W. Hybrid models for motion control systems // Essays in control. H. L. Trentelmañ, J. C. Willems, eds. Boston: Birkhauser, 1993. P. 29–53.
9. Охтилев М. Ю., Соколов Б. В., Юсупов Р. М. Интеллектуальные технологии мониторинга и управления структурной динамикой сложных динамических объектов. — М.: Наука, 2006. — 410 с.
10. Кириллов А. Н. Управление многостадийными технологическими процессами // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2006. Вып. 4. С. 127–131.
11. Кириллов А. Н. Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52. № 3. С. 23–28.
12. Кириллов А. Н. Метод динамической декомпозиции в моделировании систем со структурными изменениями // Информационно-управляющие системы. 2009. № 1. С. 20–24.
13. Арнольд В. И. Экспериментальное наблюдение математических фактов / МЦНМО. — М., 2006. — 120 с.
14. Москвин Б. В., Михайлов Е. П., Павлов А. Н., Соколов Б. В. Комбинированные модели управления структурной динамикой информационных систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2006. Т. 49. № 11. С. 7–12.
15. Кириллов А. Н. Моделирование динамики аэротенка // Устойчивость и процессы управления: Тез. докл. Всерос. конф. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2010. С. 71–72.