

ИЗВЕСТИЯ
ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ



ВЫПУСК 1

Санкт-Петербург
2011

УДК 539.3

П. В. Кауров, А. А. Тимофеев

**НОВЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТЕРЖНЯ
МАЛОЙ ЖЕСТКОСТИ ПРИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ**

Предложен способ определения перемещений стержня малой жесткости при продольно-поперечном изгибе от равномерно распределенной поперечной нагрузки и продольной силы. Представлено решение полного дифференциального уравнения прогибов стержня. Сделано сравнение результатов расчета при нелинейном и линейном решении.

стержень, малая жесткость, перемещения, распределенная нагрузка, продольно-поперечный изгиб.

Введение

Стержнем малой жесткости принято называть стержень, максимальные перемещения которого являются весьма значительными по сравнению с его длиной [1], [2].

При изгибе стержня малой жесткости для определения перемещений в качестве исходного используется полное дифференциальное уравнение его прогибов [3]:

$$\frac{z''(x)}{\left[1 + [z'(x)]^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-M(x)}{EJ}, \quad (1)$$

где $z(x)$ – прогиб; $M(x)$ – изгибающий момент; EJ – изгибная жесткость. Изгибной жесткостью EJ является произведение модуля Юнга E материала стержня и осевого момента инерции J относительно главной центральной горизонтальной оси его поперечного сечения.

В разные годы для решения уравнения (1) авторами [1]–[7] применялись различные подходы, позволившие рассчитывать конкретные схемы нагружения стержней малой жесткости. Наиболее подробно данный вопрос освещен в работе Е. П. Попова, где получено решение уравнения (1) методами эллиптических и упругих параметров для задач основного класса и сводящихся к нему [4].

Примером задачи основного класса является продольно-поперечный изгиб стержня (рис. 1). Для данной расчетной схемы максимальный относительный прогиб $z_{\max}/L$ был определен следующим выражением [4]:

$$\frac{z_{\max}}{L} = \frac{\eta_0'' \cos(\gamma) - \xi_0'' \sin(\gamma)}{BL},$$

где η_0'' и ξ_0'' – упругие параметры;

$$\gamma = 180^\circ - \arctg\left(\frac{P}{2T}\right);$$

$$B = \sqrt{\frac{L^2 \sqrt{0,25P^2 + T^2}}{EJ}}.$$

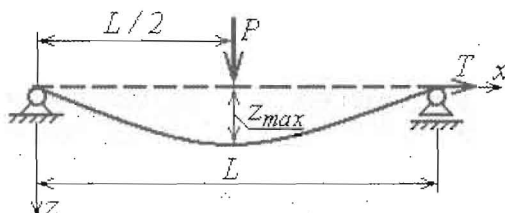


Рис. 1. Расчетная схема продольно-поперечного изгиба стержня, нагруженного сосредоточенной поперечной силой P и продольной силой T

Результаты решения, приведенные в виде зависимости безразмерного максимального относительного прогиба $z_{\max}/L$ от безразмерных параметров PL^2/EJ и TL^2/EJ , показаны на рисунке 2 [4].

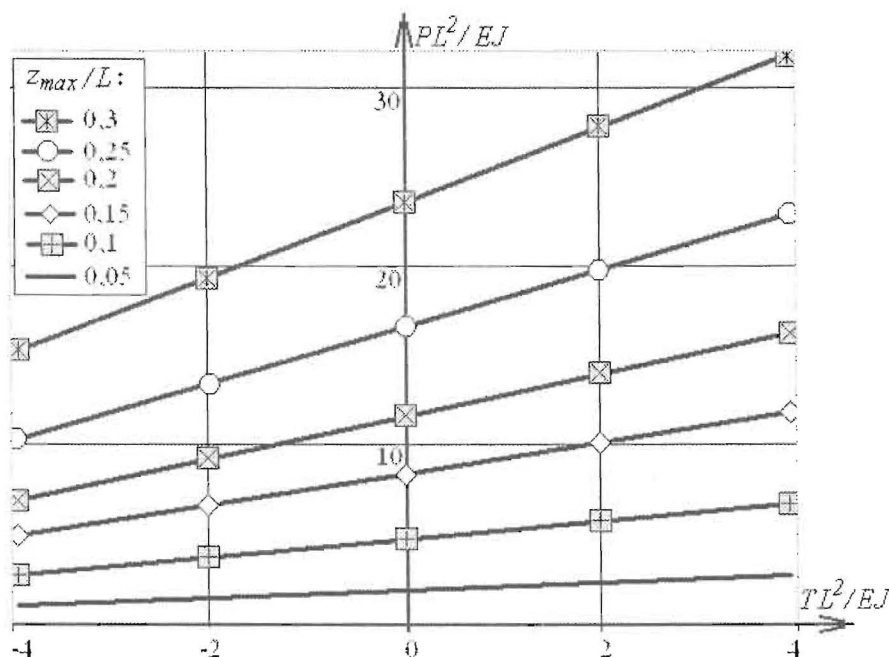


Рис. 2. Зависимость максимального относительного прогиба $z_{\max}/L$ от силы P , длины L , изгибной жесткости EJ и продольной силы T (при $T > 0$ – растяжение, при $T < 0$ – сжатие)

Для случая нагружения стержня малой жесткости равномерно распределенной нагрузкой и продольной силой (рис. 3) решение задачи определения перемещений в литературе не приведено.

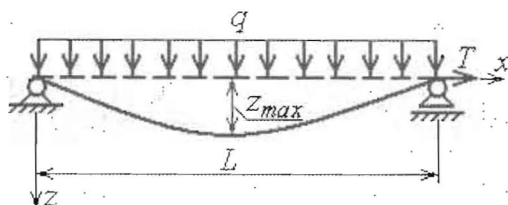


Рис. 3. Расчетная схема продольно-поперечного изгиба стержня, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой q по длине пролета L и продольной силой T

1 Вывод решения полного дифференциального уравнения прогибов стержня

Рассмотрим случай, обобщающий две ранее приведенные схемы продольно-поперечного изгиба стержня малой жесткости (рис. 4).

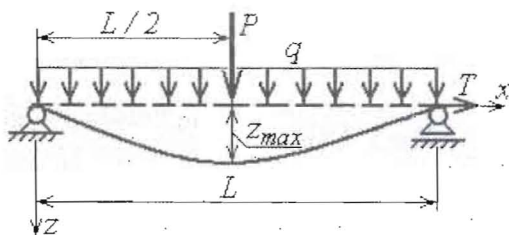


Рис. 4. Расчетная схема продольно-поперечного изгиба стержня, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой q , сосредоточенной поперечной силой P и продольной силой T

Изгибающий момент $M(x)$ в уравнении (1) для половины стержня, изображенного на рисунке 5,

$$M(x) = q \frac{x^2}{2} - Z_A x + X_A z(x) = q \frac{x^2}{2} - \left(\frac{P}{2} + qx_C \right) x + Tz(x), \quad (2)$$

где Z_A , X_A – опорные реакции; x_C – абсцисса максимального прогиба, значительно уменьшающаяся от величины $L/2$ по мере роста прогибов.

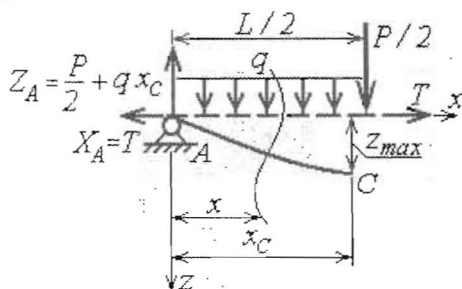


Рис. 5. Расчетная схема половины стержня для определения его прогибов

Для интегрирования (1) с учетом (2) обозначим [2]:

$$f(x) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{qx^2}{2} - \frac{P}{2}x - qx_Cx \right];$$

$$z'(x) = y(x) = \operatorname{tg}[\theta(x)], \quad (3)$$

где $\theta(x)$ – угол наклона поперечного сечения стержня с координатой x , (рис. 6), тогда формула (1) с учетом (2) примет вид:

$$\frac{y'(x)}{[1 + y^2(x)]^{3/2}} = f(x) + \frac{T}{EJ} z(x). \quad (4)$$

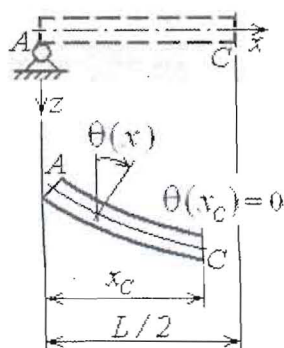


Рис. 6. Расчетная схема углов наклона поперечных сечений стержня

Проинтегрируем выражение (4):

$$\int \frac{dy(x)}{[1+y^2(x)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{y(x)}{\sqrt{1+y^2(x)}} = \sin[\theta(x)] =$$

$$= \int f(x)dx + \frac{T}{EJ} \int z(x)dx + C_1 = \varphi(x), \quad (5)$$

где

$$\int f(x)dx = \frac{1}{EJ} \left[q \frac{x^3}{6} - P \frac{x^2}{4} - qx_c \frac{x^2}{2} \right].$$

Выражение (3) с учетом (5) перепишем в виде

$$y(x) = z'(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}},$$

тогда

$$z(x) = \int \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}} + C_2. \quad (6)$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий. Как показано на рисунке 5, прогиб в начале координат равен нулю, то есть

$$z(0) = 0,$$

тогда по выражению (6)

$$C_2 = 0. \quad (7)$$

При $x = x_c$ угол наклона поперечного сечения стержня и значение функции синуса от него равны нулю (см. рис. 6), то есть

$$\varphi(x_c) = \sin[\theta(x_c)] = 0,$$

тогда по выражению (5)

$$C_1 = \frac{1}{EJ} \left[P \frac{x_c^2}{4} + q \frac{x_c^3}{3} \right] - \frac{T}{EJ} \int_0^{x_c} z(x)dx. \quad (8)$$

Выражения (6) и (5) с учетом (7) и (8) запишем в виде

$$z(x) = \int_0^x \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}; \quad (9)$$

$$\varphi(x) = \frac{3P(x_c^2 - x^2) + 2q(x^3 - 3x_c x^2 + 2x_c^3)}{12 EJ} + \quad (10)$$

$$+\frac{T}{EJ} \int_0^x z(x)dx - \frac{T}{EJ} \int_0^{x_c} z(x)dx.$$

Для решения интеграла в выражении (9) используем замену следующего вида:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}} = a_0 + a_1\varphi(x) + \dots + a_n\varphi^n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i\varphi^i(x), \quad (11)$$

где a_i – коэффициенты аппроксимирующего полинома.

Для подынтегральных выражений в (10) используем значения прогиба, полученные решением приближенного дифференциального уравнения

$$z''(x) = \frac{-M(x)}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{qx^2}{2} - \frac{Px}{2} - \frac{qL}{2}x \right] + \frac{T}{EJ} z(x),$$

которое, согласно [5], выглядит так:

$$z(x) = q \left[\frac{x(L-x)}{2T} - \frac{EJ}{T^2} \left(1 - \operatorname{ch}(kx) - \frac{\operatorname{sh}(kx)[1 - \operatorname{ch}(kL)]}{\operatorname{sh}(kL)} \right) \right] + \\ + \frac{P}{Tk} \left[\frac{kx}{2} - \frac{\operatorname{sh}(kx)\operatorname{sh}(\frac{kL}{2})}{\operatorname{sh}(kL)} \right], \quad k = \sqrt{\frac{T}{EJ}}.$$

Абсцисса максимального прогиба x_c определяется исходя из того, что длина L в деформированном состоянии остается такой же, как и в недеформированном, то есть

$$L = 2 \int_0^{x_c} \sqrt{1 + [z'(x)]^2} dx = 2 \int_0^{x_c} \sqrt{1 + y^2(x)} dx. \quad (12)$$

Сделав преобразование

$$\sqrt{1 + y^2(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2(x)}},$$

можно записать выражение (12) в виде

$$L = 2 \int_0^{x_c} \frac{dx}{\sqrt{1 - \varphi^2(x)}} = 2 \int_0^{x_c} \sum_{i=0}^{i=n} a_i \varphi^i(x) dx. \quad (13)$$

Таким образом, система уравнений, описывающая перемещения стержня малой жесткости, показанного на рисунке 4, имеет вид:

$$z(x) = \int_0^x \sum_{i=0}^{i=n} a_i \varphi^{i+1}(x);$$

$$\varphi(x) = \frac{3P(x_c^2 - x^2) + 2q(x^3 - 3x_c x^2 + 2x_c^3)}{12EJ} +$$

$$+ \frac{T}{EJ} \int_0^x z_1(x) dx - \frac{T}{EJ} \int_0^{x_c} z_1(x) dx;$$

$$L = 2 \int_0^{x_c} \sum_{i=0}^{i=n} a_i \varphi^i(x) dx;$$

$$z_1(x) = q \left[\frac{x(L-x)}{2T} - \frac{EJ}{T^2} \left(1 - \operatorname{ch}(kx) - \frac{\operatorname{sh}(kx)[1 - \operatorname{ch}(kL)]}{\operatorname{sh}(kL)} \right) \right] +$$

$$+ \frac{P}{Tk} \left[\frac{kx}{2} - \frac{\operatorname{sh}(kx)\operatorname{sh}\left(\frac{kL}{2}\right)}{\operatorname{sh}(kL)} \right], \quad k = \sqrt{\frac{T}{EJ}}.$$

Для решения данной системы уравнений была составлена программа расчета.

2 Полученные результаты расчета

Результаты решения по разработанной программе для случая $q = 0$ (см. рис. 1) совпадают с данными, представленными на рисунке 2. Результаты решения для случая $P = 0$ (рис. 3) представлены на рисунке 7.

На рисунке 8 представлены результаты линейного и нелинейного решения дифференциального уравнения прогибов, которые совпадают друг с другом только до значений $z_{\max}/L$, не превышающих 0,1.

По мере роста прогиба происходит смещение влево правой шарнирно подвижной опоры (рис. 3), что не учитывается в линейной теории изгиба и расчет по ней ведется как для балки большей длины, прогибы которой также больше, чем при расчете по нелинейной теории.

Рисунок 8 показывает, что для балок с максимальным относительным прогибом $z_{\max}/L > 0,1$ безразмерный параметр нагрузки qL^3/EJ при линейном решении будет меньше, чем при нелинейном, так как прогиб балки большей длины произойдет раньше при меньшем нагружении.

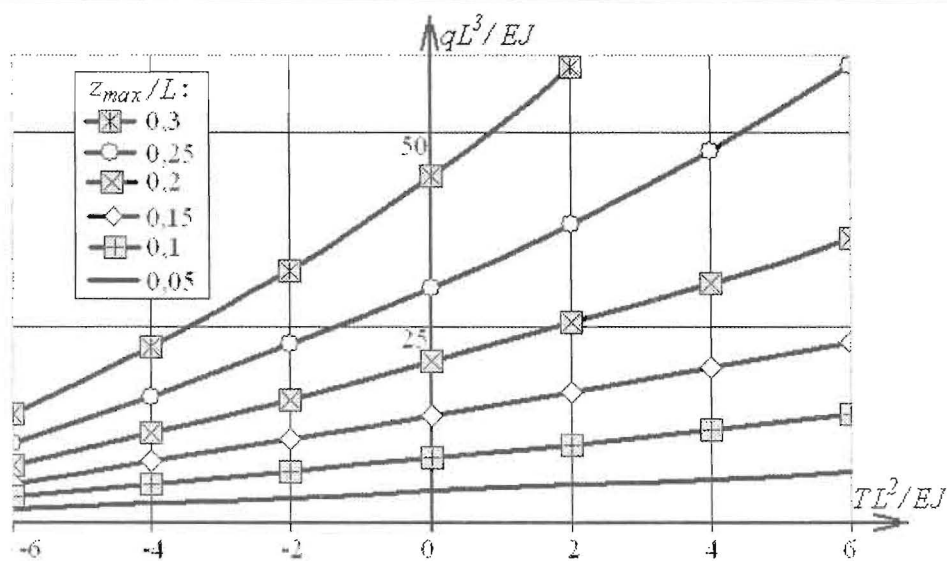


Рис. 7. Зависимость максимального относительного прогиба $z_{\max}/L$ от величины распределенной поперечной нагрузки q , длины L , продольной силы T и изгибной жесткости EJ

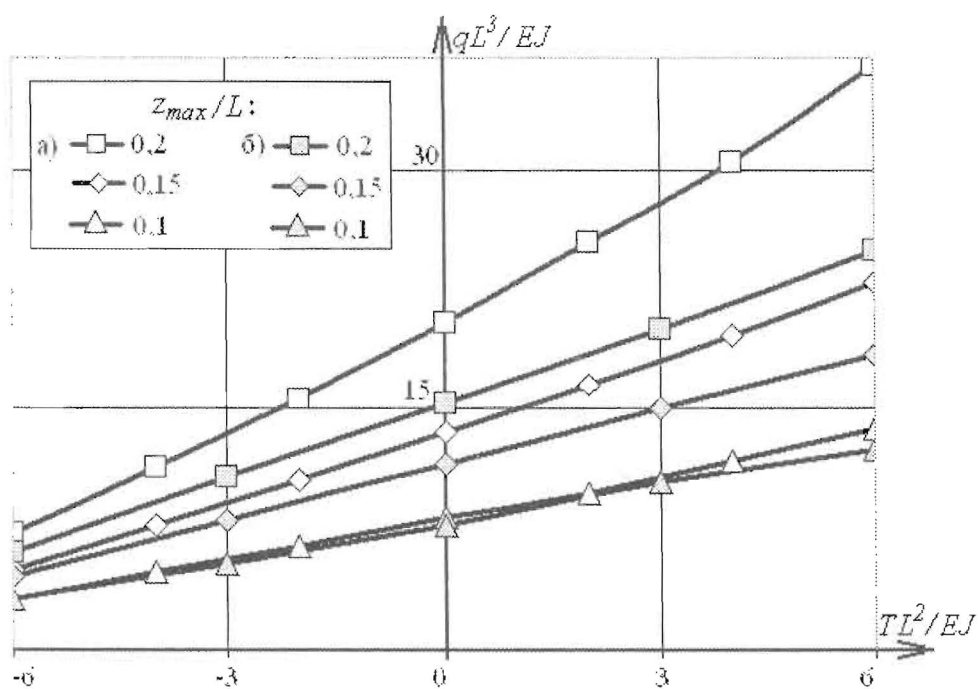


Рис. 8. Сравнение результатов нелинейного (а) и линейного (б) решения дифференциального уравнения прогибов

Заключение

Получена зависимость максимального относительного прогиба от величины нагрузки, длины, продольной силы и изгибной жесткости. Проведено сравнение решения по линейной и нелинейной теории продольно-поперечного изгиба стержня.

Библиографический список

1. **О прямом** изгибе бруса малой жесткости / Е. Н. Тихомиров // Расчеты на прочность. – М. : Машгиз, 1962. – Вып. 8. – С. 3–35.
2. **О расчете** на изгиб стержней малой жесткости / Н. И. Долгов // Расчеты на прочность. – М. : Машгиз, 1963. – Вып. 9. – С. 56–81.
3. **Механика** материалов / С. П. Тимошенко, Дж. Гере. – М. : Мир, 1976. – 672 с.
4. **Теория** и расчет гибких упругих стержней / Е. П. Попов. – М. : Наука, 1986. – 296 с.
5. **Строительная** механика корабля. Ч. 2. / П. Ф. Папкович. – Л. : ГСИСП, 1941. – 960 с.
6. **Large deflections** of a cantilever beam with uniformly distributed load / F. V. Rohde // Quarterly of Applied Mathematics. – 1953. – Vol. 11, № 3. – Pp. 337–338.
7. **Large deflections** of cantilever beams / K. E. Bisshopp, D. C. Drucker // Quarterly of Applied Mathematics. – 1945. – Vol. 3, № 3 – Pp. 272–275.

Статья поступила в редакцию 08.11.2010;

представлена к публикации членом редколлегии А. В. Индейкиным.