

ВЕСТНИК

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ОСНОВАН В 1724 ГОДУ. 1824 – ГОД ВЫХОДА В СВЕТ ПЕРВОГО ИЗДАНИЯ УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1

2012

Выпуск 2

МЕХАНИКА

УДК 517.977:531.36:521.1

**ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ
ПРОГРАММНОГО ВРАЩЕНИЯ ИСЗ
В ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ**А. Ю. Александров¹, А. А. Тихонов²¹ С.-Петербургский государственный университет,
фр физ.-мат. наук, профессор, alex43102006@yandex.ru² С.-Петербургский государственный университет,
фр физ.-мат. наук, профессор, aatikhonov@rambler.ru

1. Введение. Электродинамическое взаимодействие искусственного спутника Земли (ИСЗ) с магнитным полем Земли оказывает существенное влияние на динамику вращательного движения спутника относительно его центра масс и может использоваться при построении систем управления ориентацией ИСЗ. Основанные на указанном взаимодействии магнитные системы управления, их преимущества, особенности и недостатки описаны, например, в работах [1] и [2]. Метод стабилизации ИСЗ, основанный на использовании момента лоренцевых сил, предложен в работе [3], где показано, что создание управляющего лоренцева момента, значительно превышающего по величине гравитационный и другие возмущающие моменты, не вызывает технических трудностей.

Электродинамический метод стабилизации ИСЗ, использующий одновременно возможности магнитного и лоренцева моментов и снимающий некоторые ограничения (как по постановке задачи, так и по методике решения), наложенные в [3], описан в работе [4]. В этой же работе был предложен механизм демпфирования собственных колебаний ИСЗ, не выходящий за рамки тех функциональных возможностей, которые содержатся в самой электродинамической системе управления. Рассмотрен вопрос о стабилизации ИСЗ в прямом положении равновесия в орбитальной системе координат. Математическое обоснование метода опирается на рассмотрение дифференциальных уравнений линейного приближения. С использованием результатов численного анализа корней характеристического полинома доказано существование области значений параметров ИСЗ и его орбиты, обеспечивающих устойчивость прямого положения равновесия при постоянно действующих возмущениях.

В данной работе также рассматривается ИСЗ с электродинамической системой управления ориентацией. Решается задача стабилизации программного движения, при котором ось динамической симметрии ИСЗ стабилизируется по местной вертикали, а сам спутник совершает медленное вращение вокруг этой оси. Такой режим движения, называемый согласно [5] режимом двухосной закрутки, имеет важное прикладное значение. Например, он используется для обеспечения более равномерного освещения ИСЗ солнечными лучами и снижения нежелательных эффектов, вызванных градиентом температуры ИСЗ. На основе метода функций Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости стабилизируемого программного движения при наличии возмущающего воздействия гравитационного момента. Эти условия позволяют обеспечить рациональный выбор коэффициентов параметрического управления в зависимости от параметров ИСЗ и его орбиты.

2. Системы координат. Рассматривается динамически симметричный ИСЗ, центр масс которого движется по круговой орбите радиуса R . Предполагается, что ИСЗ снабжен управляемым электростатическим зарядом $Q = \int_V \sigma dV$, распределенным по некоторому объему V с плотностью σ , и управляемым собственным магнитным моментом $\mathbf{I}$. Так же как и в [4], исследуется вращательное движение ИСЗ относительно его центра масс в орбитальной системе координат (в данной статье используются правые декартовы прямоугольные системы координат) $C\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс ИСЗ, ось $C\xi(\xi_0)$ которой направлена по касательной к орбите в сторону движения, ось $C\eta(\eta_0)$ — по нормали к плоскости орбиты, ось $C\zeta(\zeta_0)$ — вдоль радиус-вектора $\mathbf{R} = \overrightarrow{O_E C} = R\zeta_0$ центра масс ИСЗ относительно центра Земли O_E . Исследование проводится с учетом вращения орбитальной системы координат относительно инерциальной системы с угловой скоростью ω_0 . С самим ИСЗ жестко связана система его главных центральных осей инерции $Cxyz$ (орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$). В системе координат $Cxyz$, где ось Cz является по предположению осью динамической симметрии, тензор инерции ИСЗ имеет вид $\mathbf{J} = \text{diag}(A, A, C)$. Ориентация осей $Cxyz$ относительно осей $C\xi\eta\zeta$ определяется матрицей $\mathbf{A}$ направляющих косинусов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) так, что справедливы равенства

$$\xi_0 = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}, \quad \eta_0 = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}, \quad \zeta_0 = \gamma_1 \mathbf{i} + \gamma_2 \mathbf{j} + \gamma_3 \mathbf{k}.$$

В орбитальной системе координат орты ξ_0, η_0, ζ_0 заданы равенствами

$$\xi_0 = (1, 0, 0)^T, \quad \eta_0 = (0, 1, 0)^T, \quad \zeta_0 = (0, 0, 1)^T.$$

Те же самые орты в системе координат $Cxyz$ обозначим через $\mathbf{s}_i$:

$$\mathbf{A}^T \xi_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T = \mathbf{s}_1, \quad \mathbf{A}^T \eta_0 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T = \mathbf{s}_2, \quad \mathbf{A}^T \zeta_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T = \mathbf{s}_3. \quad (1)$$

Если определить ориентацию ИСЗ в орбитальной системе координат, принятой за базовую, с помощью параметров Родрига—Гамильтона λ_i ($i = 0, 3$) [6], то элементы матрицы $\mathbf{A}$ примут вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2, & \alpha_2 &= 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3), & \alpha_3 &= 2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2), \\ \beta_1 &= 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3), & \beta_2 &= \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2, & \beta_3 &= 2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1), \\ \gamma_1 &= 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2), & \gamma_2 &= 2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_1), & \gamma_3 &= \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Программная ориентация ИСЗ в орбитальной системе координат задается некоторой матрицей $A_0 = A_0(t)$ направляющих косинусов. Орты, связанные с ИСЗ и неизменные в системе координат $Cxyz$, обозначим через r_i :

$$\begin{aligned} A_0^T \xi_0 &= (\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30})^T = r_1, \\ A_0^T \eta_0 &= (\beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30})^T = r_2, \\ A_0^T \zeta_0 &= (\gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30})^T = r_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее в статье будет рассмотрен случай, когда ось Cz динамической симметрии ИСЗ стабилизируется по местной вертикали $C\zeta$, а сам ИСЗ совершает вокруг этой оси равномерное вращение с угловой скоростью $\omega'_0 = \mu k = (0, 0, \mu)^T$. Для такого режима движения матрица A_0 имеет вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} \cos(\mu t) & -\sin(\mu t) & 0 \\ \sin(\mu t) & \cos(\mu t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Следовательно,

$$r_1 = \begin{pmatrix} \cos(\mu t) \\ -\sin(\mu t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} \sin(\mu t) \\ \cos(\mu t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Дифференциальные уравнения движения. В процессе движения ИСЗ относительно геомагнитного поля с магнитной индукцией B возбуждается лоренцев момент M_L и магнитный момент M_M , соответственно имеющие вид

$$M_L = P \times T, \quad M_M = I \times A^T B,$$

где $P = Q\rho_0$, $\rho_0 = x_0 i + y_0 j + z_0 k = Q^{-1} \int_V \sigma \rho dV$ — радиус-вектор центра заряда ИСЗ относительно его центра масс, v_C — скорость центра масс ИСЗ относительно геомагнитного поля, $T = A^T(v_C \times B)$, значение B в этой формуле совпадает со значением B в центре масс ИСЗ. Кроме того, учитывается гравитационный момент

$$M_G = 3\omega_0^2(A^T \zeta_0) \times (JA^T \zeta_0)$$

как основной из возмущающих моментов, действующих на ИСЗ в околоземном пространстве.

Анализ вопроса о стабилизации программного движения ИСЗ в орбитальной системе координат будем проводить на базе нелинейных дифференциальных уравнений вращательного движения ИСЗ, построенных по схеме Эйлера—Пуассона:

$$\frac{d}{dt}(J\omega) + \omega \times (J\omega) = M_G + M_L + M_M, \quad (5)$$

$$\frac{d\xi_0}{dt} = \xi_0 \times \omega - \omega_0 \zeta_0, \quad \frac{d\eta_0}{dt} = \eta_0 \times \omega, \quad \frac{d\zeta_0}{dt} = \zeta_0 \times \omega + \omega_0 \xi_0. \quad (6)$$

Здесь $\omega = \omega' + \omega_0$ — абсолютная угловая скорость ИСЗ, ω' — угловая скорость ИСЗ относительно орбитальной системы координат, $\omega_0 = \omega_0 \eta_0$ — угловая скорость орбитальной системы координат относительно инерциальной. Для удобства проектирования на оси $Cxyz$, жестко связанные с ИСЗ, перепишем дифференциальные уравнения

Эйлера—Пуассона (5), (6) в векторной форме с учетом обозначений (1), (3):

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}' + \omega_0 \mathbf{s}_2)] + (\boldsymbol{\omega}' + \omega_0 \mathbf{s}_2) \times [\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}' + \omega_0 \mathbf{s}_2)] = 3\omega_0^2 (\mathbf{s}_3) \times (\mathbf{J}\mathbf{s}_3) + \mathbf{M}_L + \mathbf{M}_M, \quad (7)$$

$$\frac{d\mathbf{s}_1}{dt} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{s}_1 = \mathbf{0}, \quad \frac{d\mathbf{s}_2}{dt} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{s}_2 = \mathbf{0}, \quad \frac{d\mathbf{s}_3}{dt} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{s}_3 = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Вид управляющих моментов $\mathbf{M}_L$ и $\mathbf{M}_M$ будет указан в следующем разделе. Эти моменты должны обеспечить существование и асимптотическую устойчивость следующего режима двухосной закрутки ИСЗ:

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}'_0, \quad \mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

4. Параметрическое управление для стабилизации режима двухосной закрутки. В работе [4] показано, что путем программного изменения управляемых электродинамических параметров $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$ можно обеспечить управление угловым положением ИСЗ. Так, в работе [4] для решения задачи стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат было достаточно взять каждый из векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$ в виде суммы двух слагаемых, первое из которых приводило к возникновению восстанавливающего момента, а второе — диссипативного:

$$\mathbf{P} = k_L \mathbf{T}_0 + h_L \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{T}, \quad \mathbf{I} = k_M \mathbf{B}_0 + h_M \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{A}^\top \mathbf{B}. \quad (10)$$

В этих формулах $\mathbf{T}_0 = \mathbf{A}_0^\top (\mathbf{v}_C \times \mathbf{B})$, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0^\top \mathbf{B}$, k_L , k_M , h_L , h_M — коэффициенты пропорциональности, в качестве которых могут выступать скалярные функции времени.

В задаче, рассматриваемой в данной работе, диссипативные слагаемые будут отличаться от соответствующих слагаемых в формулах (10), поскольку погашения требует не угловая скорость ИСЗ относительно орбитальной системы координат, а отклонение угловой скорости от стабилизируемого значения $\boldsymbol{\omega}'_0$, т.е. $\boldsymbol{\omega}'_r = \boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}'_0$. Кроме того, недостаточно взять векторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$ в виде (10), так как для обеспечения равномерного вращения ИСЗ во вращающейся орбитальной системе координат потребуется компенсировать возникающий гироскопический момент, направленный по оси $C\zeta$. С целью компенсации указанного гироскопического момента можно ввести дополнительное слагаемое вида $k_{L1} \mathbf{r}_2$ в вектор $\mathbf{P}$ или дополнительное слагаемое вида $k_{M1} \mathbf{r}_3$ в вектор $\mathbf{I}$. Коэффициенты в этих слагаемых, как нетрудно проверить, подбираются из условия существования режима двухосной закрутки (9) на основе динамических уравнений Эйлера (5), и соответственно равны

$$k_{L1} = \frac{C\omega_0\mu}{v_{C\zeta}B_\eta}, \quad k_{M1} = -\frac{C\omega_0\mu}{B_\eta}. \quad (11)$$

Далее, для определенности, ограничимся рассмотрением случая, когда компенсирующее слагаемое содержится только в управляющем векторе $\mathbf{I}$. В случае, когда вводятся два дополнительных слагаемых ($k_{L1} \mathbf{r}_2$ в векторе $\mathbf{P}$ и $k_{M1} \mathbf{r}_3$ в векторе $\mathbf{I}$), каждое из них должно содержать дополнительный множитель, а сумма этих множителей должна быть равна единице.

Таким образом, для решения задачи стабилизации ИСЗ в рассматриваемом режиме двухосной закрутки введем следующие законы программного изменения параметров $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{P} = k_L \mathbf{T}_0 + h_L \boldsymbol{\omega}'_r \times \mathbf{T}, \quad \mathbf{I} = k_M \mathbf{B}_0 + k_{M1} \mathbf{r}_3 + h_M \boldsymbol{\omega}'_r \times \mathbf{A}^\top \mathbf{B}.$$

При этом управляющие моменты $\mathbf{M}_L$ и $\mathbf{M}_M$ в правой части уравнений (7) соответственно примут вид

$$\mathbf{M}_L = k_L \mathbf{T}_0 \times \mathbf{T} + h_L (\boldsymbol{\omega}'_r \times \mathbf{T}) \times \mathbf{T}, \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_M = k_M \mathbf{B}_0 \times \mathbf{A}^\top \mathbf{B} + k_{M1} \mathbf{r}_3 \times \mathbf{A}^\top \mathbf{B} + h_M (\boldsymbol{\omega}'_r \times \mathbf{A}^\top \mathbf{B}) \times \mathbf{A}^\top \mathbf{B}. \quad (13)$$

В случае рассматриваемого в данной работе движения ИСЗ по круговой экваториальной орбите и принятия используемой далее простейшей дипольной модели геомагнитного поля имеют место равенства

$$\mathbf{v}_C = R(\omega_0 - \omega_E) \boldsymbol{\xi}_0, \quad \mathbf{B} = B_\eta \boldsymbol{\eta}_0 = - \left(\frac{R_E}{R} \right)^3 g_1^0 \boldsymbol{\eta}_0,$$

где ω_E — угловая скорость суточного вращения Земли, R_E — радиус Земли, g_1^0 — первый гауссов коэффициент. Поэтому

$$\mathbf{v}_C \times \mathbf{B} = v_{C\xi} B_\eta \boldsymbol{\xi}_0, \quad \mathbf{T} = v_{C\xi} B_\eta \mathbf{s}_3, \quad \mathbf{T}_0 = v_{C\xi} B_\eta \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{B} = B_\eta \mathbf{s}_2, \quad \mathbf{B}_0 = B_\eta \mathbf{r}_2.$$

Подставляя эти выражения в (12) и (13), получим

$$\mathbf{M}_L = k_L \mathbf{T}_0 \times \mathbf{T} - h_L [T^2 \boldsymbol{\omega}'_r - \mathbf{T}(\mathbf{T} \boldsymbol{\omega}'_r)] = k_{L0} \mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_3 - h_{L0} [\boldsymbol{\omega}'_r - \mathbf{s}_3(\mathbf{s}_3 \boldsymbol{\omega}'_r)], \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_M &= k_M \mathbf{B}_0 \times \mathbf{A}^\top \mathbf{B} + k_{M1} \mathbf{r}_3 \times \mathbf{A}^\top \mathbf{B} - h_M [B^2 \boldsymbol{\omega}'_r - \mathbf{A}^\top \mathbf{B}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}'_r)] = \\ &= k_{M0} \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2 - C\omega_0 \mu \mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_2 - h_{M0} [\boldsymbol{\omega}'_r - \mathbf{s}_2(\mathbf{s}_2 \boldsymbol{\omega}'_r)]. \end{aligned} \quad (15)$$

В формулах (14), (15) коэффициенты k_L , k_M , h_L , h_M взяты в виде

$$k_L = \frac{k_{L0}}{(v_{C\xi} B_\eta)^2}, \quad h_L = \frac{h_{L0}}{(v_{C\xi} B_\eta)^2}, \quad k_M = \frac{k_{M0}}{B_\eta^2}, \quad h_M = \frac{h_{M0}}{B_\eta^2},$$

где k_{L0} , k_{M0} , h_{L0} , h_{M0} — положительные постоянные, находящиеся в нашем распоряжении. В результате, динамические уравнения Эйлера (7) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}' + \omega_0 \mathbf{s}_2)] + (\boldsymbol{\omega}' + \omega_0 \mathbf{s}_2) \times [\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}' + \omega_0 \mathbf{s}_2)] = \\ = 3\omega_0^2 (\mathbf{s}_3 \times (\mathbf{J} \mathbf{s}_3) + k_{L0} (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_3) + k_{M0} (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2) - \\ - C\omega_0 \mu (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_2) - h_{L0} [\boldsymbol{\omega}'_r - \mathbf{s}_3(\mathbf{s}_3 \boldsymbol{\omega}'_r)] - h_{M0} [\boldsymbol{\omega}'_r - \mathbf{s}_2(\mathbf{s}_2 \boldsymbol{\omega}'_r)]]. \end{aligned} \quad (16)$$

Для замыкания дифференциальной системы следует рассматривать уравнения (16) совместно с кинематическими уравнениями Пуассона (8).

5. Условия асимптотической устойчивости. Определим условия на параметры k_{L0} , k_{M0} , h_{L0} , h_{M0} и μ , при выполнении которых стабилизируемое программное движение ИСЗ является асимптотически устойчивым. Решение поставленной задачи основано на применении прямого метода Ляпунова. Для построения функций Ляпунова будем использовать подходы, предложенные в работах [7, 8].

Выделяя в уравнениях (16) линейные члены относительно отклонений от программного движения, представим эти уравнения в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}'_r}{dt} - \omega_0 \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}'_r \times \mathbf{r}_2) + \omega_0 \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}'_r) + \mu \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}'_r) + \mu \boldsymbol{\omega}'_r \times (\mathbf{J}\mathbf{r}_3) + \omega_0 \boldsymbol{\omega}'_r \times (\mathbf{J}\mathbf{r}_2) + \\ + \omega_0^2 \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{J}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)) + \omega_0^2 (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{J}\mathbf{r}_2) + \mu \omega_0 (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{J}\mathbf{r}_3) = \\ = 3\omega_0^2 C(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) \times \mathbf{r}_3 + 3\omega_0^2 \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{J}(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)) - \Psi(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) - \\ - h_{L0}[\boldsymbol{\omega}'_r - \mathbf{r}_3(\mathbf{r}_3 \boldsymbol{\omega}'_r)] - h_{M0}[\boldsymbol{\omega}'_r - \mathbf{r}_2(\mathbf{r}_2 \boldsymbol{\omega}'_r)] + \Phi(\boldsymbol{\omega}'_r, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3). \quad (17) \end{aligned}$$

Здесь

$$\Psi(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) = -k_{L0}(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_3) - k_{M0}(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2),$$

а для нелинейной векторной функции $\Phi(\boldsymbol{\omega}'_r, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$ справедлива оценка

$$\|\Phi(\boldsymbol{\omega}'_r, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)\| \leq a_1(\|\boldsymbol{\omega}'_r\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2),$$

причем положительная постоянная a_1 зависит от значений параметров A, B, C, ω_0 .

Заметим, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}'_r \times \mathbf{r}_2) - \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}'_r) &= (A + C) \begin{pmatrix} -\omega'_{r3} \cos(\mu t) \\ \omega'_{r3} \sin(\mu t) \\ \omega'_{r1} \cos(\mu t) - \omega'_{r2} \sin(\mu t) \end{pmatrix}, \\ C(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) \times \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{J}(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)) &= (C - A) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3), \\ (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{J}\mathbf{r}_2) + \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{J}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)) &= (C - A) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(\mu t) \\ 0 & 0 & -\sin(\mu t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2), \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\omega}'_r = \omega'_{r1}\mathbf{i} + \omega'_{r2}\mathbf{j} + \omega'_{r3}\mathbf{k}$.

Сначала, следуя подходу, предложенному в [7], в качестве функции Ляпунова выбираем функцию

$$V_1 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'_r{}^\top \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}'_r + \frac{k_{L0}}{2} \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2 + \frac{k_{M0}}{2} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2.$$

Дифференцируя ее в силу системы (17), (8), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= -h_{L0}(\|\boldsymbol{\omega}'_r\|^2 - (\mathbf{r}_3 \boldsymbol{\omega}'_r)^2) - h_{M0}(\|\boldsymbol{\omega}'_r\|^2 - (\mathbf{r}_2 \boldsymbol{\omega}'_r)^2) + \boldsymbol{\omega}'_r{}^\top \Phi + \\ &+ (A - C) \omega_0^2 \boldsymbol{\omega}'_r{}^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(\mu t) \\ 0 & 0 & -\sin(\mu t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) + 3\omega_0^2 \boldsymbol{\omega}'_r{}^\top \begin{pmatrix} 0 & C - A & 0 \\ A - C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3). \end{aligned}$$

Чтобы исключить последние два слагаемых в выражении для dV_1/dt , далее строим функцию

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 - \frac{1}{2} \omega_0^2 (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C - A \end{pmatrix} (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) - \\ &- \frac{3}{2} \omega_0^2 (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)^\top \begin{pmatrix} C - A & 0 & 0 \\ 0 & C - A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) = \\ &= V_1 - \frac{1}{2} \omega_0^2 (C - A) \beta_3^2 - \frac{3}{2} \omega_0^2 (C - A) (\gamma_1^2 + \gamma_2^2). \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}\frac{dV_2}{dt} = & -h_{L0}(\|\omega'_r\|^2 - (\mathbf{r}_3\omega'_r)^2) - h_{M0}(\|\omega'_r\|^2 - (\mathbf{r}_2\omega'_r)^2) + \omega'^{\top}_r \Phi + \\ & + \omega_0^2(C - A)(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)^{\top} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\omega'_r \times (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)) + \\ & + 3\omega_0^2(C - A)(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)^{\top} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\omega'_r \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)).\end{aligned}$$

Наконец, используя подход, разработанный в [7–9], добавляем к функции V_2 «перекрестное слагаемое». Пусть

$$V_3 = V_2 + \varkappa \omega'^{\top}_r \mathbf{J} \Psi, \quad \text{где } \varkappa = \text{const} > 0.$$

Производная функции V_3 в силу исследуемой системы представима в виде

$$\begin{aligned}\frac{dV_3}{dt} = & -h_{L0}(\|\omega'_r\|^2 - (\mathbf{r}_3\omega'_r)^2) - h_{M0}(\|\omega'_r\|^2 - (\mathbf{r}_2\omega'_r)^2) + \omega'^{\top}_r \Phi - \varkappa \|\Psi\|^2 + \\ & + \varkappa \Psi^{\top} \left\{ \omega_0 \mathbf{J}(\omega'_r \times \mathbf{r}_2) - \omega_0 \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{J}\omega'_r) - \mu \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{J}\omega'_r) - \mu \omega'_r \times (\mathbf{J}\mathbf{r}_3) - \omega_0 \omega'_r \times (\mathbf{J}\mathbf{r}_2) - \right. \\ & - \omega_0^2 \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{J}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)) - \omega_0^2 (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{J}\mathbf{r}_2) + 3\omega_0^2 C (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) \times \mathbf{r}_3 + \\ & + 3\omega_0^2 \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{J}(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)) - h_{L0}[\omega'_r - \mathbf{r}_3(\mathbf{r}_3\omega'_r)] - h_{M0}[\omega'_r - \mathbf{r}_2(\mathbf{r}_2\omega'_r)] + \Phi \left. \right\} + \\ & + \varkappa \omega'^{\top}_r \mathbf{J} \left[k_{M0} \mathbf{r}_2 \times (\omega'_r \times \mathbf{r}_2 + \omega'_r \times (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)) + \right. \\ & + k_{L0} \mathbf{r}_3 \times (\omega'_r \times \mathbf{r}_3 + \omega'_r \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) + \mu \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)) \left. \right] + \\ & + 3\omega_0^2(C - A)(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)^{\top} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\omega'_r \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)) + \\ & + \omega_0^2(C - A)(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)^{\top} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\omega'_r \times (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)).\end{aligned}$$

Заметим, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\|\omega'_r\|^2 - (\mathbf{r}_2\omega'_r)^2 &= (\omega'_{r1} \cos(\mu t) - \omega'_{r2} \sin(\mu t))^2 + \omega'^2_{r3}, \\ \|\omega'_r\|^2 - (\mathbf{r}_3\omega'_r)^2 &= \omega'^2_{r1} + \omega'^2_{r2}, \\ \omega'^{\top}_r \mathbf{J}(\mathbf{r}_2 \times (\omega'_r \times \mathbf{r}_2)) &= A(\omega'_{r1} \cos(\mu t) - \omega'_{r2} \sin(\mu t))^2 + C\omega'^2_{r3}, \\ \omega'^{\top}_r \mathbf{J}(\mathbf{r}_3 \times (\omega'_r \times \mathbf{r}_3)) &= A(\omega'^2_{r1} + \omega'^2_{r2}), \\ \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{r}_3 \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3).\end{aligned}$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\begin{aligned} \frac{dV_3}{dt} \leq & -h_{L0}(\omega'_{r1}{}^2 + \omega'_{r2}{}^2) - h_{M0} \left((\omega'_{r1} \cos(\mu t) - \omega'_{r2} \sin(\mu t))^2 + \omega'_{r3}{}^2 \right) + \\ & + \kappa A k_{L0}(\omega'_{r1}{}^2 + \omega'_{r2}{}^2) + \kappa k_{M0} \left(A(\omega'_{r1} \cos(\mu t) - \omega'_{r2} \sin(\mu t))^2 + C\omega'_{r3}{}^2 \right) - \kappa \|\Psi\|^2 + \\ & + \kappa \|\Psi\| \left\| \omega_0 \mathbf{J}(\omega'_r \times \mathbf{r}_2) - \mu \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{J}\omega'_r) - \mu \omega'_r \times (\mathbf{J}\mathbf{r}_3) - \omega_0 \omega'_r \times (\mathbf{J}\mathbf{r}_2) - \right. \\ & \left. - \omega_0 \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{J}\omega'_r) - h_{L0}[\omega'_r - \mathbf{r}_3(\mathbf{r}_3\omega'_r)] - h_{M0}[\omega'_r - \mathbf{r}_2(\mathbf{r}_2\omega'_r)] \right\| + \\ & + \kappa \mu k_{L0} A \|\omega'_r\| \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) \right\| + \\ & + \kappa \omega_0^2 \left\| C - A \|\Psi\| \left\| 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(\mu t) \\ 0 & 0 & -\sin(\mu t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) \right\| \right\| + \\ & + a_2 (\|\omega'_r\|^3 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^3 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^3), \end{aligned}$$

где положительная постоянная a_2 зависит от значений параметров A , C , ω_0 , κ , k_{L0} , k_{M0} , h_{L0} , h_{M0} .

Для функции V_3 имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega_r'^T \mathbf{J} \omega'_r + \frac{k_{L0}}{2} \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2 + \frac{k_{M0}}{2} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 - \frac{\omega_0^2}{2} (C - A)(\beta_3^2 + 3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2) - \\ - \kappa \|\mathbf{J}\| \|\omega'_r\| (k_{M0} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\| + k_{L0} \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|) \leq V_3 \leq \frac{1}{2} \omega_r'^T \mathbf{J} \omega'_r + \frac{k_{L0}}{2} \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2 + \\ + \frac{k_{M0}}{2} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 - \frac{\omega_0^2}{2} (C - A)(\beta_3^2 + 3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2) + \\ + \kappa \|\mathbf{J}\| \|\omega'_r\| (k_{M0} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\| + k_{L0} \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|). \end{aligned}$$

Значит, если выполнены соотношения

$$k_{L0} > 3\omega_0^2(C - A), \quad k_{M0} > \omega_0^2(C - A),$$

то существуют положительные числа b_1 и b_2 , такие что при достаточно малых значениях κ справедливы оценки

$$b_1 (\|\omega'_r\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2) \leq V_3 \leq b_2 (\|\omega'_r\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2).$$

Для получения оценки производной функции V_3 в силу системы (17), (8) используем параметры Родрига—Гамильтона λ_i ($i = \overline{0, 3}$). На основании (2) и (4) получаем, что в программном режиме вращения ИСЗ

$$\lambda_0 = \cos \frac{\mu t}{2}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \sin \frac{\mu t}{2}. \quad (18)$$

Возвращаясь к оценке функции dV_3/dt , заметим, что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|s_2 - r_2\|^2 &= 4 \left(\lambda_1 \cos \frac{\mu t}{2} - \lambda_2 \sin \frac{\mu t}{2} \right)^2 + \\ &\quad + 4 \left(\left(\lambda_0 - \cos \frac{\mu t}{2} \right) \sin \frac{\mu t}{2} - \left(\lambda_3 - \sin \frac{\mu t}{2} \right) \cos \frac{\mu t}{2} \right)^2, \\ \|s_3 - r_3\|^2 &= 4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4k_{L0}^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + (4k_{M0}^2 + 8k_{M0}k_{L0}) \left(\lambda_1 \cos \frac{\mu t}{2} - \lambda_2 \sin \frac{\mu t}{2} \right)^2 + \\ &+ 4k_{M0}^2 \left(\left(\lambda_0 - \cos \frac{\mu t}{2} \right) \sin \frac{\mu t}{2} - \left(\lambda_3 - \sin \frac{\mu t}{2} \right) \cos \frac{\mu t}{2} \right)^2 - \|\Psi\|^2 \leq \\ &\leq \varepsilon_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \varepsilon_2 \left(\left(\lambda_0 - \cos \frac{\mu t}{2} \right) \sin \frac{\mu t}{2} - \left(\lambda_3 - \sin \frac{\mu t}{2} \right) \cos \frac{\mu t}{2} \right)^2, \\ &\left\| 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (s_3 - r_3) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(\mu t) \\ 0 & 0 & -\sin(\mu t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (s_2 - r_2) \right\|^2 \leq 2 \left(9 \left\| \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ -\gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 + \beta_3^2 \right) \leq \\ &\leq 8 \left(9(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \left(\lambda_1 \cos \frac{\mu t}{2} - \lambda_2 \sin \frac{\mu t}{2} \right)^2 \right) + \varepsilon_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2). \end{aligned}$$

В последних двух неравенствах значения положительных постоянных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора рассматриваемой окрестности программного движения ИСЗ.

Таким образом, если

$$k_{L0} > 3\sqrt{2}\omega_0^2|C - A|, \quad k_{M0} > \omega_0^2(C - A), \quad k_{M0}^2 + 2k_{M0}k_{L0} > 2\omega_0^4(C - A)^2, \quad (19)$$

то можно выбрать положительные числа κ_0, Δ , и b_3 так, чтобы при $0 < \kappa < \kappa_0$, $\|s_2 - r_2\|^2 + \|s_3 - r_3\|^2 < \Delta^2$ имела место оценка

$$\frac{dV_3}{dt} \leq -b_3(\|\omega_r'\|^2 + \|s_2 - r_2\|^2 + \|s_3 - r_3\|^2).$$

Обозначив $M_c = A\omega_0^2(\varepsilon - 1)$, $\varepsilon = C/A$, замечаем, что неравенства (19) равносильны системе

$$k_{L0} > 3\sqrt{2}|M_c|, \quad k_{M0} > M_c, \quad k_{M0}^2 + 2k_{M0}k_{L0} > 2M_c^2. \quad (20)$$

Получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема. При выполнении неравенств (20) программное движение (9) системы (16), (8) асимптотически устойчиво.

6. Пример. Рассмотрим ИСЗ, находящийся на круговой экваториальной орбите с радиусом $R = 7 \cdot 10^6$ м и обладающий следующими значениями параметров: $A = 10^3$ кг·м², $\varepsilon = 0.5$, $Q = 5 \cdot 10^{-3}$ Кл. Ставится задача стабилизации следующего режима двухосной закрутки ИСЗ: $\varphi = 0$, $\theta = 0$, $\psi = \mu t$, где $\mu = 3\omega_0$. В качестве начальных

значений вращательного движения ИСЗ выбраны $\varphi(0) = 0.2$ рад, $\psi(0) = -0.2$ рад, $\theta(0) = 0.2$ рад, $\omega'_{r1}(0) = 0.1\omega_0$, $\omega'_{r2}(0) = 1.1\omega_0$, $\omega'_{r3}(0) = 0.1\omega_0$.

Для решения задачи стабилизации вращательного движения ИСЗ используется управление (14), (15). При этом выбираются «худшие» с точки зрения реализации условий (20) значения параметров k_{L0} и k_{M0} : значения $k_{L0} = 0.0027 > 3\sqrt{2}M_c = 0.0025$ и $k_{M0} = 0.00015$ лежат почти на самой границе области (20). На рис. 1 фрагмент этой неограниченной области показан тонировкой. Значения $h_{L0} = 20$ и $h_{M0} = 0.5$, от которых неравенства (20) не зависят, выбраны так, что демпфирующие составляющие управляющих моментов M_L и M_M малы и не превосходят возмущающего гравитационного момента.

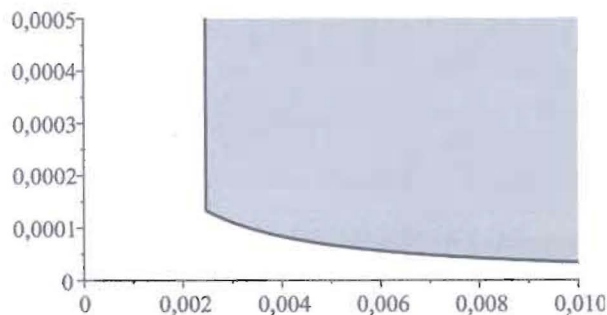


Рис. 1. Область параметров k_{L0} (по горизонтали) и k_{M0} (по вертикали).

Результаты численного интегрирования, показанные на рис. 2, свидетельствуют о том, что за достаточно короткое время (по оси абсцисс откладывается безразмерное время $u = \omega_0 t$) ИСЗ выходит на программный режим (18).

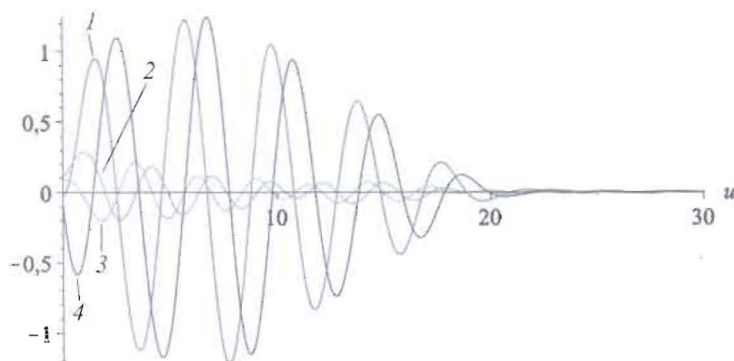


Рис. 2. Решение в параметрах Родрига—Гамильтона:
1 — $\lambda_0(u) - \cos \frac{\mu u}{2}$; 2 — $\lambda_1(u)$; 3 — $\lambda_2(u)$; 4 — $\lambda_3(u) - \sin \frac{\mu u}{2}$.

На рис. 3 показана интерпретация того же решения в «самолетных» углах φ , θ , ψ . При этом вместо неограниченно возрастающего со временем угла $\psi = \mu t$ для удобства приведены ограниченные интервалом $(-\pi/2; \pi/2)$ значения функции $\arctg(\tg \psi)$.

Заключение. Для решения задач, связанных с управлением угловой ориентацией ИСЗ, в работе [3] была предложена, а в работе [4] развита концепция элек-

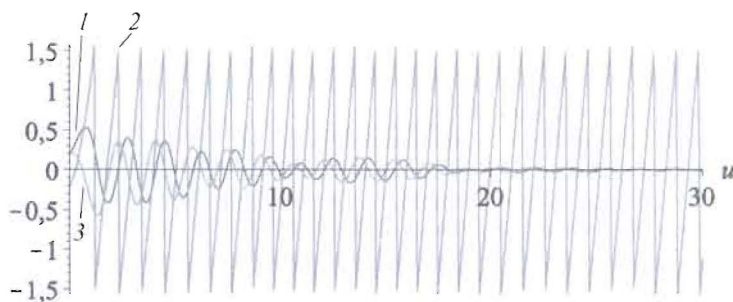


Рис. 3. Решение в «самолетных» углах: 1 — $\varphi(u)$; 2 — $\dot{\varphi}(u)$; 3 — $\theta(u)$.

тродинамической системы стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат. Однако вопрос об аналитическом представлении в явном виде достаточных условий асимптотической устойчивости стабилизируемого движения ИСЗ оставался открытым. В настоящей работе дан положительный ответ на этот вопрос на базе исследования нелинейных дифференциальных уравнений движения ИСЗ. Доказана теорема об асимптотической устойчивости программного движения. Анализ доказательства данной теоремы позволяет сделать следующие выводы.

1. Условия асимптотической устойчивости программного движения (9) оказались не зависящими от угловой скорости μ собственного вращения ИСЗ. Однако компенсирующие слагаемые управляющих моментов M_L и M_M (или только M_M , как в приведенном выше доказательстве теоремы) прямо пропорционально зависят от μ , и это означает, что в процессе стабилизации с течением времени они будут стремиться к постоянным значениям, а все остальные составляющие управляющих моментов будут стремиться к нулю. При этом возможность электродинамической стабилизации того или иного режима движения (9) с ростом μ ограничивается лишь техническими возможностями по созданию компенсирующих слагаемых (с множителями (11)) в управляемых векторах P и I . Отметим также, что наличие двух компенсирующих слагаемых в моментах M_L и M_M (с весовыми коэффициентами, в сумме равными единице) позволяет снизить нагрузку на каждый из элементов системы управления, реализующих эти моменты.

2. Для обеспечения асимптотической устойчивости программного движения (9) на параметры h_{L0} и h_{M0} не требуется накладывать никаких условий, кроме их положительности. Заметим, что доказанная теорема справедлива и в случае, когда параметры h_{L0} и h_{M0} являются непрерывными ограниченными функциями времени, для которых при всех $t \geq 0$ выполнены неравенства $h_{L0}(t) \geq \bar{h}$, $h_{M0}(t) \geq \bar{h}$, где $\bar{h}$ — положительная постоянная.

3. Построенная функция Ляпунова может быть использована для получения количественных оценок динамики исследуемой системы [7, 8], например, для оценок времени переходных процессов и области асимптотической устойчивости программного движения (9). Кроме того, с помощью построенной функции Ляпунова можно получить условия, при выполнении которых возмущения не нарушают асимптотической устойчивости программного движения [7, 8].

Предложенная в работе методика построения функции Ляпунова может быть использована для распространения полученных результатов на более общие случаи, приводящие к более сложным дифференциальным уравнениям с почти периодически-коэффициентами (неэкваториальные и некеплеровы орбиты, недипольные модели магнитного поля Земли и др.).

Литература

1. Коваленко А. П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975. 248 с.
2. Алтатов А. П., Драновский В. И., Салтыков Ю. Д., Хорошилов В. С. Динамика космических аппаратов с магнитными системами управления. М.: Машиностроение, 1978. 200 с.
3. Тихонов А. А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исследования. 2003. Т. 41. № 1. С. 69–79.
4. Антипов К. А., Тихонов А. А. Параметрическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в магнитном поле Земли // Автоматика и телемеханика. 2007. № 8. С. 44–56.
5. Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Кузнецова Е. Ю. Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты // Космические исследования. 2000. Т. 38. № 3. С. 296–306.
6. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
7. Zubov V. I. Динамика управляемых систем. М.: Высш. школа, 1982. 285 с.
8. Смирнов Е. Я. Некоторые задачи математической теории управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 200 с.
9. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 208 с.

Статья поступила в редакцию 23 декабря 2011 г.

ХРОНИКА

12 октября 2011 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме Ученых РАН выступил канд. физ.-мат. наук, доц. А. В. Костарев (СПбГПУ) с докладом на тему «Распределенный экзамен».

Краткое содержание доклада:

Изменение существующей системы контроля знаний с целью повышения регулярности работы студента и объективности ее оценки весьма актуально. В СПбГПУ при чтении курса Теоретической механики автором применяется система «распределенного экзамена». Планы работы, конспект лекций, примеры решения контрольных и заданий, таблица оценок размещаются в Интернете. Оригинальные задания выполняются в электронном виде и присылаются на проверку по почте. Экзаменационная оценка вычисляется программой по всем текущим оценкам с весами (множителями), назначенными преподавателем. Анонимный опрос показал, что 99% студентов потока одобряют систему. Их активность и успеваемость заметно повысились, а напряжение на сессии уменьшилось.