

№1(36) январь-февраль 2013

МЕТОДЫ

РАСЧЕТЫ

КОНСТРУКЦИИ

ПРОГРАММЫ

ТЕОРИЯ

**ТЕМА НОМЕРА:
СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ.
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

Эндохронная теория пластичности, обобщающая теорию Сандерса-Клюшникова

Д.ф.-м.н., профессор Ю.И. Кадашевич;

к.ф.-м.н., доцент С.П. Помыткин;*

*ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный технологический университет
растительных полимеров*

Ключевые слова: пластичность; теория; эндохронный подход; определяющие соотношения; квазистатистический вариант

При расчетах напряженно-деформированного состояния оснований фундаментов и конструкций [1] основное внимание уделяется механическим и реологическим свойствам грунтов [2-5]. Поскольку реальные грунты и породы обладают определенными механическими особенностями, а именно сугубо нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями, а также возможностью деформаций развиваться во времени, в этих расчетах используются самые разные феноменологические [6] и физические теории упругости [3], пластичности [7, 8] и ползучести [9, 10]. Одним из направлений исследования зон пластических деформаций в материалах и грунтах является эндохронный подход [11-17].

Активное развитие эндохронной теории неупругости началось с 80-х годов прошлого века [18, 19]. Современное состояние эндохронного подхода кратко изложено в обзоре [20]. Опубликовано достаточно много оригинальных работ, пытающихся связать эндохронный подход с хорошо известными классическими теориями (деформационная теория пластичности, теория скольжения, теория пластического течения, теория процессов, физическая теория неупругости и т.д.). В предлагаемой читателям статье делается попытка построить эндохронный вариант теории пластичности с присущими ей достоинствами и недостатками на основе работ Дж. Сандерса [21] и В.Д. Клюшникова [22]. Отметим, что оригинальный взгляд на эндохронную теорию пластичности, отличающийся от предлагаемой работы и от недавно опубликованной статьи [23], можно найти в ряде работ отечественных ученых [24-26].

В работе Сандерса [21] было показано, как можно построить вариант теории пластического течения, если использовать понятия плоских поверхностей текучести. Оказалось, что такая теория близка как к прогнозам деформационной теории пластичности, так и к следствиям из теории скольжения [27]. В работе [22] В.Д. Клюшников изучил плоский случай нагружения. В статье [28] было намечено новое направление развития теории пластического течения, в предположении о том, что локальные поверхности текучести становятся плоскими. В предлагаемой статье на основе работ [21, 22] и [28, 29] авторами строится эндохронная теория пластичности.

В работе [28], исходя из предположения о том, что влиянием первого и третьего инвариантов тензора напряжений на закономерности пластического деформирования можно пренебречь, авторы строят определяющие соотношения теории течения в пятимерном пространстве Ильюшина [30], дополнительно постулируя, что поверхности текучести являются плоскими. Эти поверхности текучести движутся независимо друг от друга, удаляясь от начала координат, как только точка в пространстве напряжений достигает их границы. Определяющие уравнения такой теории имели следующий вид:

$$\sum_{k=1}^5 (\sigma_k - b \varepsilon_k^P) \cdot \cos \varphi_k = \tau, \quad (1)$$

$$\varepsilon_k^P = \varepsilon_i^P \cdot \cos \varphi_k, \quad \sum_{k=1}^5 \cos^2 \varphi_k = 1. \quad (2)$$

Здесь σ_k , ε_k^P – компоненты пятимерных векторов напряжений и пластических деформаций в пространстве Ильюшина; τ – предел текучести материала; ε_i^P – интенсивность вектора пластических деформаций; b – постоянный параметр.

Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Эндохронная теория пластичности, обобщающая теорию Сандерса-Клюшникова

В частности, для одноосного нагружения было показано, что

$$b \varepsilon_1^p = \sigma_1 \cos^2 \varphi - \tau \cdot \cos \varphi, \quad (3)$$

$$\langle \varepsilon_1^p \rangle = \frac{\tau}{2\pi b} \left(\frac{\varphi_0}{\cos \varphi_0} - \sin \varphi_0 \right), \quad (4)$$

$$\sigma_1 = \frac{\tau}{\cos \varphi_0}, \quad (5)$$

где $\langle \varepsilon_1^p \rangle$ – среднее значение пластической деформации; φ_0 – граничное значение угла φ , при котором плоскости поверхности текучести не перемещаются. Обратим внимание, что перемещаются поверхности текучести при значениях параметра в пределах $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. Асимптотика решения имеет вид:

$$\langle \varepsilon_1^p \rangle = \frac{1}{4b} \left(\sigma_1 - \frac{4\tau}{\pi} \right). \quad (6)$$

Согласно работам [18, 31] построим эндохронный вариант соотношений (1) – (2), если введем вместо вектора $b \varepsilon_k^p$ новый вектор r_k по формуле

$$r_k = \varepsilon_k - \frac{1-\alpha}{2G} \sigma_k. \quad (7)$$

В определение (7) входят α – параметр эндохронности ($0 \leq \alpha \leq 1$) и модуль сдвига G . Тогда получим, что

$$\sum_{k=1}^5 (\sigma_k - b r_k) \cdot \cos \varphi_k = \tau, \quad r_k = r_i \cdot \cos \varphi_k, \quad (8)$$

$$b r_i = \sum_{k=1}^5 \sigma_k \cdot \cos \varphi_k - \tau, \quad \sum_{k=1}^5 \cos^2 \varphi_k = 1. \quad (9)$$

Как и в классической теории эндохронного типа [31], здесь интересны три частных случая:

- а) $\alpha = 0$, тогда $r_k = \varepsilon_k^p$;
- б) $\alpha = 1$, тогда $r_k = \varepsilon_k$;
- в) $\alpha \rightarrow 0$, тогда решение а) может отличаться от б), особенно при циклических нагружениях.

При построении эндохронной теории пластичности [18], [31] в определяющие соотношения специально вводился новый (малый) параметр $\alpha \sigma$, чтобы обеспечить начальные условия деформирования $\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$. При формулировке данного варианта теории вместо условия (5) будем использовать условие

$$\sigma_1 = \frac{\tau}{\cos \varphi_0} \cdot (1 - \cos \varphi_0), \quad (10)$$

из которого следует, что при $\varphi_0 = 0$, $\sigma_1 = 0$. Фактически это означает, что r_i принимается в форме

$$b r_i = \sum_{k=1}^5 (\sigma_k + \tau) \cdot \cos \varphi_k - \tau, \quad (11)$$

чтобы обеспечить работу соотношений, начиная со значения $\varphi = 0$.

При одноосном прямом нагружении имеем

$$b r_1 = [(\sigma_1 + \tau) \cdot \cos \varphi - \tau] \cdot \cos \varphi,$$

$$\sigma_1 = \frac{\tau}{\cos \varphi_0} \cdot (1 - \cos \varphi_0) \quad \text{при} \quad \varphi_0 = 0, \quad \sigma_1 = 0.$$

На рис. 1 приведено решение (кривая а), полученное согласно работе [22]. График б) на рис. 1 – результат использования формулы

$$\langle r_1 \rangle = \frac{\tau}{2\pi b} \left(\frac{1 + \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0} - 1 \right). \quad (12)$$

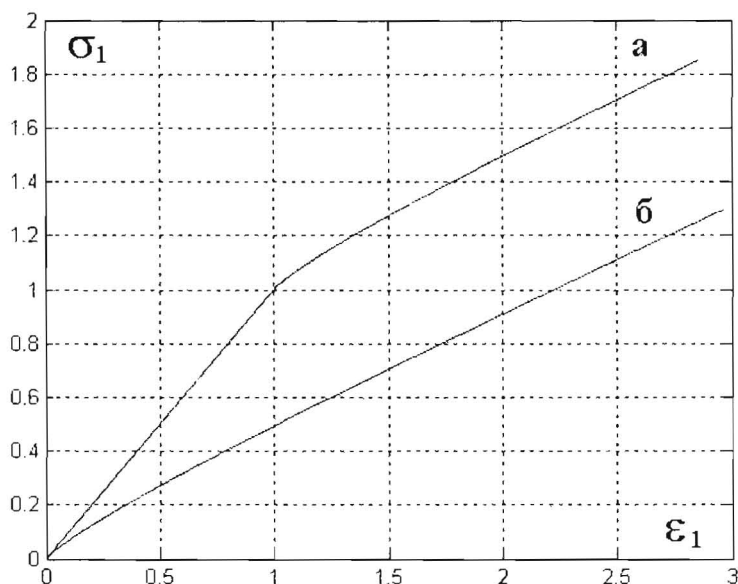


Рисунок 1. Кривые деформирования при прямом одноосном нагружении

На рис. 2 и рис. 3 приведены решения одноосной задачи, когда прямое нагружение σ_1 до величины $\sigma_1 = \sigma_1^0$ сменяется нагружением противоположного знака. Согласно идеям Сандерса [21], возникающие при этом пластические деформации образуются другими плоскими поверхностями текучести, расположенными в области от $\pi - \varphi$ до $\pi + \varphi$. Если же воспользоваться формулами вида (12), то решение примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1^0 + \frac{\tau}{\cos \varphi_0} \cdot (\cos \varphi_0 - 1) && \text{при } \varphi_0 \geq 0, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^0 + \frac{\tau}{2\pi b} \cdot \left(1 + \frac{\sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 - \varphi_0 - 1}{\cos \varphi_0} \right) && \text{при } \varphi_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь σ_1^0 и ε_1^0 – значения напряжения и деформации, достигнутые при прямом нагружении. Отметим, что характер кривых «напряжение-деформация», приведенных на рис.2 и рис.3, может вызвать вопросы у экспериментаторов. Однако они сознательно приводятся для того, чтобы подчеркнуть особенности подхода Сандерса-Клюшников и необходимость дальнейшего уточнения и развития предложенного выше метода. Во всех расчетах принято, что $\varphi_0 \geq 0$, $\alpha = 1$, $2G = 1$, $\tau = 1$, $2\pi b = 1$.

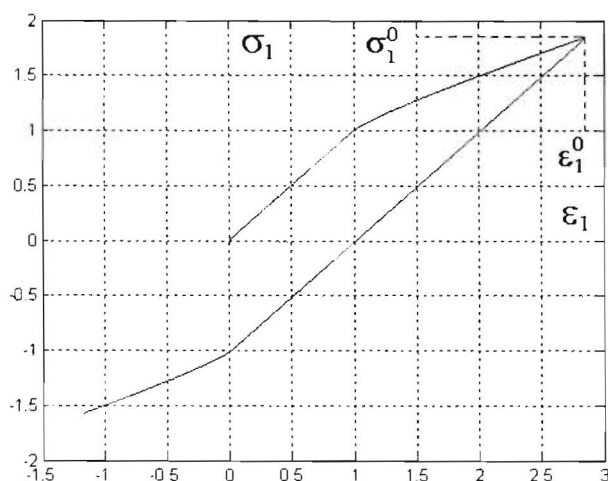


Рисунок 2. Циклическое нагружение гипотетического материала по схеме Сандерса-Ключникова

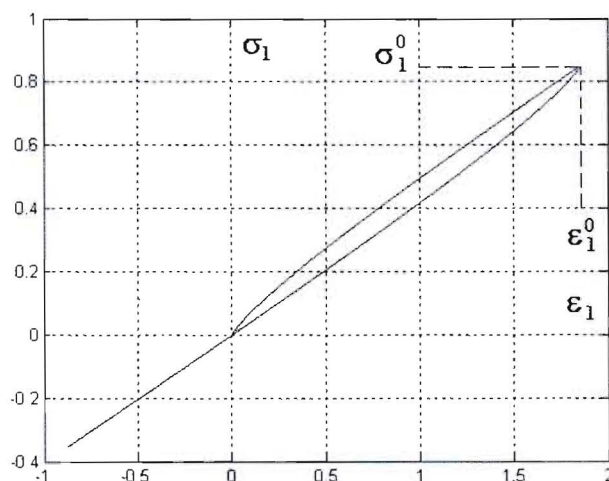


Рисунок 3. Прямое и обратное нагружение гипотетического материала согласно (13)

Подчеркнем, что знакопеременному и циклическому нагружению геоматериалов уделяется достаточно большое внимание инженеров и исследователей [32].

Таким образом, предложен новый эндохронный вариант теории неупругости, обобщающий подход Сандерса-Ключникова. Приведенные примеры продемонстрировали, что определяющие соотношения новой теории инициируют дополнительные возможности в описании неупругого поведения материалов. Отмечено, что следствия, вытекающие из уравнений новой теории, должны быть проверены экспериментально для рекомендации их применения в практике инженерных расчетов. В дальнейших публикациях авторы намерены расширить число приведенных примеров за счет сложных траекторий нагружения и сопоставить результаты расчетов с имеющимися экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 13-01-00157).

Литература

1. СНиП 2.02.01-83. Основания зданий и сооружений. М., 2003.
2. Вязлов С.С. Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978. 447 с.
3. Цытович Н.А. Механика грунтов: краткий курс. М.: Книжный Дом «Либроком», 2013. 272 с.
4. Mitchell J.K., Soga K. Fundamentals of Soil Behavior. New Jersey: John Wiley and Sons, 2005. 592 p.
5. Fang H.-Y., Daniels J.L. Introductory Geotechnical Engineering. An Environmental Perspective. London: Taylor and Francis, 2006. 546 p.
6. Nakai T. Constitutive Modeling of Geomaterials. Principles and Applications. CRC Press, 2010. 376 p.
7. Davis R.O., Selvadurai A.P.S. Plasticity and Geomechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 287 p.
8. Lade P.V. Elastoplastic stress strain theory for cohesionless soil with curved yield surface // International Journal of Solids and Structures. 1977. Vol. 13. №11. Pp. 1019-1035.
9. Динариев О.Ю., Николаевский В.Н. Ползучесть горных пород как источник сейсмического шума // Доклады Академии Наук. 1993. Т. 331. С. 739-741.
10. Culling W.E.H. Soil creep and the development of Hillside Slopes // The Journal of Geology. 1963. Vol. 71. №2. Pp. 127-161.
11. Bazant Z.P., Shieh C.Z. Endochronic model for nonlinear triaxial deformations of concrete // Nuclear Engineering and Design. 1978. Vol. 47. №4. Pp. 598-619.

12. Wu H.C., Wang Z.K., Aboutorabi M.R. Endochronic modeling of sand in true triaxial test // Journal of Engineering Mechanics. ASCE. 1985. Vol.111. Issue 10. Pp. 1257-1276.
13. Valanis K.C., Read H.E. A new endochronic plasticity model for concrete // Mechanics of Materials. 1986. №5. Pp. 277-295.
14. Imai G., Xie C. An endochronic constitutive law for static shear behaviour of over consolidated clays // Soils and Foundations. 1990. Vol. 30. Pp. 65-75.
15. Wang J.G., Fan J.H. An endochronic model for normally consolidated soils // Journal of Chongqing University. 1991. Vol. 14. №4. Pp. 1-7.
16. Bakhshiani A., Khoei A.R., Modif M. An endochronic plasticity model for powder compaction processes // Material Processing Technology. 2002. Vol. 125-126. Pp. 138-143.
17. Yeh W.C., Lin S.Y. An endochronic model of yield surface accounting for deformation induced anisotropy // International Journal of Plasticity. 2006. Vol. 22. Pp. 16-38.
18. Valanis K.C. Fundamental consequence of a new intrinsic time measure-plasticity as a limit of the endochronic theory // Archives of Mechanics. 1980. Vol. 32. Pp. 171-191.
19. Мосолов А.Б. Эндохронная теория пластичности. М.: Институт проблем механики АН СССР, 1988. 44 с.
20. Кадашев Ю.И., Помыткин С.П. Этапы развития эндохронной теории неупругости // Упругость и неупругость. М.: Издательство Московского университета, 2011. С. 151-154.
21. Sanders J.L. Plastic stress-strain relations based on linear loading functions // Proceedings of the Second U.S. National Congress of Applied Mechanics. Ann Arbor, MI, 14-18 June 1954. New York: ASME, 1955. Pp. 455-460.
22. Ключников В.Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 722-731.
23. Кадашев Ю. И., Помыткин С. П. Описание эффектов второго порядка в рамках эндохронной теории неупругости для больших деформаций // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. №6. С. 123-136.
24. Семенов А.С., Мельников Б.Е., Горохов М.Ю. Циклическая неустойчивость при расчетах больших пластических деформаций // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2003. №3. С. 129-138.
25. Федоровский Г.Д. Определяющие уравнения реологически сложных полимерных сред // Вестник Ленинградского университета. Математика, механика, астрономия. 1990. №3(15). С. 87-91.
26. Быков Д.Л., Коновалов Д.Н. Применение инженерных моделей вязкоупругости в расчетах конструкций из высокоэластичных полимерных материалов при конечных деформациях // Упругость и неупругость. М.: ЛЕНАНД, 2006. С. 55-69.
27. Batdorf S.B., Budiansky B. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip: Technical Note №1871. NASA. April, 1949.
28. Кадашев Ю.И., Новожилов В.В. О предельных вариантах теории пластичности, учитывающей начальные микронапряжения // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1980. №3. С. 93-96.
29. Кадашев Ю.И., Новожилов В.В. О влиянии начальных микронапряжений на макроскопическую деформацию поликристаллов // Прикладная математика и механика. 1968. Т. 32. Вып. 5. С. 908-922.
30. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Издательство АН СССР, 1963. 271 с.
31. Кадашев Ю.И., Помыткин С.П. О взаимосвязи теории пластичности, учитывающей микронапряжения, с эндохронной теорией пластичности // Известия РАН. Механика твердого тела. 1997. №4. С. 99-105.
32. Bouckovalas G., Whitman R.V., Marr W.A. Permanent displacement of sand with cyclic loading // Journal of Geotechnical Engineering. 1984. Vol. 110. №11. Pp. 1606-1623.

**Сергей Павлович Помыткин, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. моб.: 946-52-79; эл.почта: sppom @yandex.ru

© Кадашев Ю.И., Помыткин С.П., 2013