

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

алгебра и АНАЛИЗ

ТОМ 25

№ 3



2013

Санкт-Петербург
«НАУКА»



Дорогому Борису Михайловичу
в знак глубокого уважения

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ГЁЛЬДЕРОВСКОЙ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИИ

© Н. А. ШИРОКОВ

В работе доказано, что внешняя в единичном круге функция, модуль которой на единичной окружности удовлетворяет условию Гёльдера порядка s , а логарифм модуля принадлежит L^p на окружности, $1 < p < \infty$, в единичном круге принадлежит $ps/(p+1)$.

Пусть неотрицательная функция $\rho(\theta)$ 2π -периодична и принадлежит классу Гёльдера H^α (напомним, что если $0 < \alpha \leq 1$, то $\rho \in H^\alpha \Leftrightarrow$ для всяких θ_1, θ_2 $|\rho(\theta_2) - \rho(\theta_1)| \leq c|\theta_2 - \theta_1|^\alpha$; если $n < \alpha \leq n+1$, n — натуральное, то $\rho \in H^\alpha \Leftrightarrow \rho^{(n)} \in H^{\alpha-n}$).

Если функция ρ удовлетворяет также условию

$$\int_0^{2\pi} \log \rho(\theta) d\theta > -\infty, \quad (1)$$

то функция $f_\rho(z)$, построенная по формуле

$$f_\rho(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho(\theta) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta \right), \quad |z| < 1, \quad (2)$$

удовлетворяет условию $|f_\rho(e^{i\theta})| = \rho(\theta)$. Функция f_ρ называется внешней [1, 2]. Если бы функция $\rho(\theta)$ удовлетворяла условию $\rho(\theta) \geq c_0 > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, то классическая теорема Зигмунда–Привалова [3] повлекла бы к соотношению $\log f(z) \in H^\alpha(\mathbb{D})$ в замкнутом единичном круге $\mathbb{D}$ и при $0 < \alpha < 1$ и, значит, $F(z) \in H^\alpha(\mathbb{D})$. Если известно лишь, что $\rho(\theta) \geq 0$ при сохранении условия (1), то ситуация меняется. В. П. Хавин и Ф. А. Шамоян [4],

Ключевые слова: классы Гёльдера, внешняя функция.

Л. Карлесон и И. Якобс установили независимо друг от друга, что при $0 < \alpha \leq 1$ выполняется неулучшаемое соотношение $f \in H^{\alpha/2}(\mathbb{D})$. Далее Дж. Бреннан [5] распространил эту теорему на случай $1 < \alpha < 2$, а автор [6] на случай любого $\alpha > 0$, при этом если $\alpha/2 = n$, n — натуральное число, то $f \in H^n(\mathbb{D})$ означает $f^{(n-1)} \in Z(\mathbb{D})$ и непрерывная в $\mathbb{D}$ функция φ принадлежит классу Зигмунда $Z(\mathbb{D})$, если для любых $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ выполняется

$$\left| \varphi(z_2) - 2\varphi\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + \varphi(z_1) \right| \leq c|z_2 - z_1|.$$

В настоящей работе доказывается, что при усилении требований, наложенных на $\log \rho(\theta)$, соответствующая внешняя функция будет более гладкой.

Теорема. Пусть 2π — периодическая неотрицательная функция ρ удовлетворяет условию (1) и принадлежит классу H^α , $\alpha > 0$. Предположим дополнительно, что (а) $\log \rho \in L^p(0, 2\pi)$, $1 < p < \infty$. Тогда для функции f_ρ , построенной по формуле (2), справедливо $f_\rho \in H^\beta(\mathbb{D})$, $\beta = \frac{p}{p+1}\alpha$, и показатель β неулучшаемы; (в) если известно, что $\log \rho \in \text{ВМО}$, то $f_\rho \in H^\alpha(\mathbb{D})$.

В случае (в) при $0 < \alpha < 1$ утверждение теоремы ранее было получено Г. Я. Бомашом [7].

Напомним, что функция $h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ принадлежит классу ВМО, если существует постоянная C такая, что для любого интервала $I \subset \mathbb{R}$ выполнено

$$\frac{1}{|I|} \int_I |h(x) - h_I| dm \leq C,$$

где m — мера Лебега на $\mathbb{R}$, $|I|$ — длина I , $h_I = \frac{1}{|I|} \int_I h dm$.

Для доказательства теоремы мы применим критерий принадлежности внешней функции классу $H^{\alpha_0}(\mathbb{D})$ из [6, гл. 3].

Для точки $z = re^{i\theta_0} \in \mathbb{D}$ через $\gamma(z)$ обозначим промежуток $[\theta_0 - \frac{1-r}{2}, \theta_0 + \frac{1-r}{2}]$, и пусть $M_\rho(z) = \max_{\theta \in \gamma(z)} \rho(\theta)$.

Теорема А [6, гл. 3]. Предположим, что $\rho \geq 0$, ρ — 2π -периодична, $\rho \in H^{\alpha_0}$, $\log \rho \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и существуют постоянные $A_{\alpha_0} > 0$ и $C_{\alpha_0} > 0$ такие, что для всякой точки $z \in \mathbb{D}$, для которой справедливо неравенство $M_\rho(z) \geq A_{\alpha_0}(1-r)^{\alpha_0}$, выполняется соотношение

$$\int_0^{2\pi} \left| \log \frac{M_\rho(z)}{\rho(\theta)} \right| \frac{1-r^2}{|e^{i\theta} - z|^2} dm(\theta) \leq C_{\alpha_0}. \quad (3)$$

Тогда $f_p \in H^{\alpha_0}(\overline{\mathbb{D}})$.

В [6] проверено, что если существует пара постоянных $A_{\alpha_0}^0, C_{\alpha_0}^0$, для которых справедливо соотношение (3), то и для любой постоянной A_{α_0} можно подобрать постоянную C_{α_0} так, чтобы (3) выполнялось. Поэтому при доказательстве теоремы мы можем использовать достаточно большие постоянные A_{α_0} , при этом $\alpha_0 = \beta$ в случае (а) и $\alpha_0 = \alpha$ в случае (в).

Важную роль в доказательстве имеет следующая техническая лемма [6, гл. 2].

Лемма. Пусть функция $\rho \geq 0$ 2π -периодична, $\rho \in H^{\alpha_0}$, $\log \rho \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$. Для любого замкнутого промежутка $I \subset \mathbb{R}$ положим $M_I(\rho) = \max_{\theta \in I} \rho(\theta)$. Существуют постоянные A, C , не зависящие от I , такие, что при $|I| \leq 2\pi$ и $M_I(\rho) \geq A|I|^{\alpha_0}$ справедливо соотношение

$$\int_I \log \frac{M_I(\rho)}{\rho(\theta)} dm(\theta) \leq C|I|. \quad (4)$$

Приведем для удобства читателя доказательство этого утверждения. Пусть $n < \alpha_0 \leq n+1$, $n \geq 0$, n — целое. Поскольку $\frac{M_I(\rho)}{\rho(\theta)} = \frac{M_I(b\rho)}{b\rho(\theta)}$, то, не уменьшая общности, считаем, что

$$|\rho^{(n)}(\theta_1) - \rho^{(n)}(\theta_2)| \leq |\theta_1 - \theta_2|^{\alpha_0 - n}.$$

Если $n = 0$, то при $A = 2$ в таком случае, если $M_I(\rho) = \rho(\theta_0)$, имеем

$$\rho(\theta) \geq \rho(\theta_0) - |\theta - \theta_0|^{\alpha_0} \geq M_I(\rho) - \frac{1}{2}M_I(\rho) = \frac{1}{2}M_I(\rho),$$

откуда и следует (4). Пусть $n \geq 1$, положим

$$E(h) = \{\theta \in I : \rho(\theta) \leq h\}, \quad \nu(h) = mE(h). \quad (5)$$

Тогда

$$\int_I \log \frac{M_I(\rho)}{\rho(\theta)} dm = \int_0^{M_I(\rho)} \frac{\nu(h)}{h} dh. \quad (6)$$

Если $P(\theta)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $\rho(\theta)$, $P(\theta_j) = \rho(\theta_j)$, $\theta_j \in I$, $i \leq j \leq n$, то [8, гл. 1] существует постоянная $\tilde{A}_{\alpha_0}$ такая, что

$$|\rho(\theta) - P(\theta)| \leq \tilde{A}_{\alpha_0}|I|^{\alpha_0}. \quad (7)$$

Для любого фиксированного h найдется $n+1$ точки $\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n$, $\theta_j \in E(h)$, $0 \leq j \leq n$, такие, что $\theta_{j+1} - \theta_j \geq \frac{1}{n}(h)$, $0 \leq j \leq n-1$.

Пусть $P(\theta)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами в этих точках θ_j ; тогда

$$P(\theta) = \sum_{j=0}^n \rho(\theta_j) \frac{(\theta - \theta_0) \dots (\theta - \theta_{j-1}) \dots (\theta - \theta_{n+1})}{(\theta_j - \theta_0) \dots (\theta_j - \theta_{n+1})},$$

и потому с некоторой постоянной A'_n имеем соотношение

$$|P(\theta)| \leq \sum_{j=0}^n h \frac{(\theta - \theta_0) \dots (\theta - \theta_{j-1}) \dots (\theta - \theta_{n+1})}{(\theta_j - \theta_0) \dots (\theta_j - \theta_{n+1})} \leq A'_n h \frac{|I|^n}{(\nu(h))^n}. \quad (8)$$

Выберем теперь $A_{\alpha_0} = 2\tilde{A}_{\alpha_0}$, и пусть $\rho(\theta_*) = M_I(\rho)$, $\theta_* \in I$. Тогда, учитывая (7) и (8), находим, что

$$\begin{aligned} M_I(\rho)\rho(\theta_*) &\leq |\rho(\theta_*) - P(\theta_*)| + P(\theta_*) \\ &\leq \tilde{A}_{\alpha_0}|I|^{\alpha_0} + A'_n h \frac{|I|^n}{(\nu(h))^n} \leq \frac{1}{2}M_i(\rho) + A'_n h \frac{|I|^n}{(\nu(h))^n}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\nu(h) \leq A''_n(I) \cdot \left(\frac{h}{M_I(\rho)} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (9)$$

Теперь (6) и (9) дают оценку

$$\int_I \log \frac{M_I(\rho)}{\rho(\theta)} dm \leq A''_n(I) \int_0^{M_I(\rho)} \left(\frac{h}{M_I(\rho)} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{dh}{h} = C_n|I|,$$

что и доказывает лемму.

Теперь приступим к доказательству части (а) теоремы. Положим $\alpha_0 = \beta = \frac{p}{p+1}\alpha$. Постоянную $\tilde{A}_\beta$ определим из нижеследующего неравенства, и пусть точка $z = re^{i\theta_0} \in \mathbb{D}$, $r \geq \frac{1}{2}$, удовлетворяет условию $M_I(\rho) \geq \tilde{A}_\beta|I|^\beta$, пусть точка $z = re^{i\theta_0} \in \mathbb{D}$, $r \geq \frac{1}{2}$, удовлетворяет условию $M_I(\rho) \geq \tilde{A}_\beta|I|^\beta$, пусть точка $z = re^{i\theta_0} \in \mathbb{D}$, $r \geq \frac{1}{2}$, удовлетворяет условию $M_I(\rho) \geq \tilde{A}_\beta|I|^\beta$, пусть точка $z = re^{i\theta_0} \in \mathbb{D}$, $r \geq \frac{1}{2}$, удовлетворяет условию $M_I(\rho) \geq \tilde{A}_\beta|I|^\beta$. Тогда $|J| = |I|^{\frac{p}{p+1}}$ и $M_I(\rho) \geq \tilde{A}_\beta|J|^\alpha$. Возьмем постоянную A_α из леммы и положим $\tilde{A}_\beta = 4^\alpha A_\alpha$. Определим число n_0 из условия

$$\frac{1}{2}(1-r)^{\frac{p}{p+1}} \leq 2^{n_0}(1-r) < (1-r)^{\frac{p}{p+1}},$$

промежутки I_n , $0 \leq n \leq n_0$:

$$I_n = \left[\theta_0 - \frac{1}{2} \cdot 2^n(1-r), \theta_0 + \frac{1}{2} \cdot 2^n(1-r) \right],$$

и пусть $M_{I_n} = \max_{\theta \in I_n} \rho(\theta)$. Ясно, что $M_{I_{n-1}} \leq M_{I_n}$, $n \geq 1$, и неравенство $M_I \geq \tilde{A}_\beta |J|^\alpha$ с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа, как в доказательстве леммы, дает неравенство

$$M_{I_n} \leq M_I + a \left(\frac{I_n}{I_0} \right)^\alpha M_I \leq (1 + 2^n a) M_I$$

с некоторой постоянной $a = a(f, \alpha)$, поэтому

$$\frac{M_{I_n}}{M_I} \leq C 2^{n\alpha}. \quad (10)$$

Применим теперь (10) и соотношение (6) из леммы, что возможно в силу выбора $\tilde{A}_\beta$.

Находим, что

$$\int_{I_0} \log \frac{M_I}{\rho(\theta)} \frac{1-r^2}{|e^{i\theta} - z|^2} dm(\theta) \leq \frac{2}{1-r} \int_I \log \frac{M_I}{\rho(\theta)} d\theta \leq \frac{2}{1-r} C_\alpha |I| = C'_\alpha, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \int_{I_n \setminus I_{n-1}} \left| \log \frac{M_I}{\rho(\theta)} \right| \frac{1-r^2}{|e^{i\theta} - z|^2} dm(\theta) &\leq \int_{I_n \setminus I_{n-1}} \log \frac{M_{I_n}}{\rho(\theta)} \cdot \frac{1-r^2}{|e^{i\theta} - z|^2} dm \\ &+ \log \frac{M_{I_n}}{M_I} \int_{I_n \setminus I_{n-1}} \log \frac{1-r^2}{|e^{i\theta} - z|^2} dm \leq \frac{10}{1-r} \cdot 2^{-2n} \int_{I_n \setminus I_{n-1}} \log \frac{M_{I_n}}{\rho(\theta)} dm \quad (12) \\ &+ \frac{10}{1-r} \cdot 2^{-2n} \int_{I_n \setminus I_{n-1}} \log(c 2^{n\alpha}) dm \leq c''_\alpha \frac{n}{2^n}. \end{aligned}$$

Теперь (11), (12) влекут

$$\int_{I_{n_0}} \left| \log \frac{M_I}{\rho(\theta)} \right| \frac{1-r^2}{|e^{i\theta} - z|^2} dm = \int_{I_0} + \int_{I_1 \setminus I_0} + \dots + \int_{I_{n_0} \setminus I_{n_0-1}} \leq c'_\alpha + c''_\alpha \sum_{n=1}^{n_0} \frac{n}{2^n} = \tilde{c}_\alpha. \quad (13)$$

Далее, неравенство $M_i \geq \tilde{A}_\beta (1-r)^\beta$ дает

$$(1-r)^{\frac{1}{\beta+1}} \log M_I \leq A'', \quad \frac{1}{2} \leq r < 1,$$

поэтому, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \int_{[\theta_0-\pi, \theta_0+\pi] \setminus I_{n_0}} \left| \log \frac{M_I}{\rho(\theta)} \right| \frac{1-r^2}{|e^{i\theta} - z|^2} dm &\leq \int_{[\theta_0-\pi, \theta_0+\pi] \setminus I_{n_0}} |\log M_I| \cdot \frac{1-r^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta \\ &+ \int_{[\theta_0-\pi, \theta_0+\pi]} \left| \log \rho(\theta) \right| \frac{1-r^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta \leq c |\log M_I| \cdot (1-r)^{\frac{1}{\beta+1}} \\ &+ 2(1-r) \left(\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} |\log \rho(\theta)|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{[\theta_0-\pi, \theta_0+\pi] \setminus I_{n_0}} \frac{dm}{|e^{i\theta} - z|^{2p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq c A' + c(1-r) \cdot (1-r)^{-1} = c'', \end{aligned} \quad (14)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, поскольку

$$\left(\int_{[\theta_0-\pi, \theta_0+\pi] \setminus I_{n_0}} \frac{dm}{|e^{i\theta} - z|^{2p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq c \left[(1-r)^{\frac{p}{\beta+1}} \right]^{-2p'+1} = c(1-r)^{-1}.$$

Для доказательства части (в) полагаем $\alpha_0 = \alpha$ и выбираем постоянную A_α из леммы. Определим число N_I из равенства

$$\log N_I = \frac{1}{|I|} \int_I \log \rho dm, \quad (15)$$

где $I = \gamma(z)$; предположим, что для точки Z выполняется условие $M_I = M_I(\rho) \geq A_\alpha |I|^\alpha$. В таком случае лемма влечет

$$|\log N_I - \log M_I| = \frac{1}{|I|} \left| \int_I \log \frac{\rho(\theta)}{M_I} d\theta \right| \leq C_\alpha,$$

поэтому

$$\left| \log \frac{M_I}{\rho(\theta)} \right| \leq \left| \log \frac{N_I}{\rho(\theta)} \right| + \left| \log \frac{M_I}{N_I} \right| \leq \left| \log \frac{N_I}{\rho(\theta)} \right| + c_\alpha,$$

откуда следует, что

$$\int \left| \log \frac{M_I}{\rho(\theta)} \right| \frac{1-r^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta \leq \int_{[\theta_0-\pi, \theta_0+\pi]} |\log N_I - \log \rho(\theta)| \frac{1-r^2}{|e^{i\theta} - z|^2} dm + 2\pi c_\alpha.$$

Применим теперь к функции $\log \rho \in \text{ВМО}$ свойство функций из класса ВМО (см. [9, гл. 6]), получим оценку

$$\int_{[\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi]} |\log N_I - \log \rho(\theta)| \frac{1 - r^2}{e^{i\theta} - r|^2} dm \leq \tilde{c}, \quad (16)$$

$\tilde{c}$ не зависит от I . Соотношения (15), (16) и теорема А доказывают часть (в) теоремы.

Список литературы

- [1] Привалов Н. Н., *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.
- [2] Hoffman K., *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
- [3] Зигмунд А., *Тригонометрические ряды*, Т. 1, Мир, М., 1965.
- [4] Хавин В. П., Шамоян Ф. А., *Аналитические функции с липшицевым модулем граничных значений*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **19** (1970), 237–239.
- [5] Brennan J., *Approximation in the mean by polynomials on non Caratheodory domains*, Ark. Mat. **15** (1977), no. 1, 117–168.
- [6] Shirokov N. A., *Analytic functions smooth up to the boundary*, Lecture Notes in Math., vol. 1312, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [7] Бомаш Г. Я., *Множества пика для аналитических классов Гёльдера*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **157** (1987), 129–136.
- [8] Гельфонд А. О., *Исчисление конечных разностей*, Наука, М., 1967.
- [9] Garnett J. B., *Bounded analytic functions*, Acad. Press, NY, 1981.

С.-Петербургский
государственный университет
математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Университетский пр., 28
Россия
E-mail: nikolai.shirokov@gmail.com

Поступило 14 февраля 2013 г.