

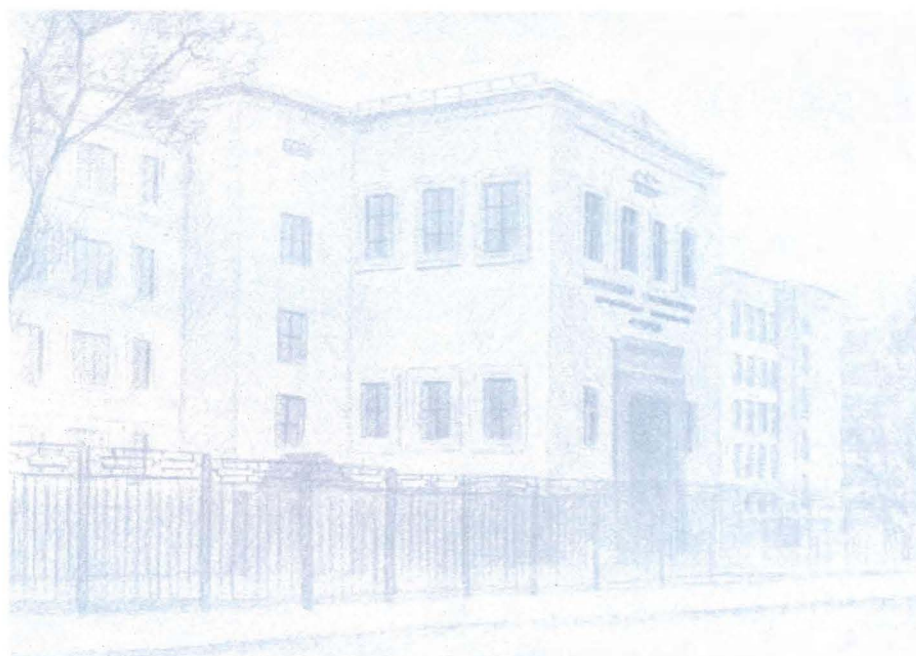
ISSN 2074-0530

4 (26)
2015

т. 4

ИЗВЕСТИЯ **МГТУ «МАМИ»**

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ



НАУЧНЫЙ РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ ЖУРНАЛ



Эндохронная теория неупругости, моделирующая микроразрушение и затвердевание материала

к.ф.-м.н. доц. Иванов Б.Ф., д.ф.-м.н. проф. Кадашевич Ю.И., д.ф.-м.н. доц. Помыткин С.П.
Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров,

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
8(812) 7868660, math.spbgtpurp@yandex.ru, 8(812) 7084372, kaf54@guap.ru

Аннотация. Предлагаются тензорно-параметрические варианты эндохронной теории неупругости, учитывающие микронапряжения, микроразрушение и затвердевание материала. Приведены решения для определяющих соотношений при одноосном нагружении. Установлена взаимосвязь между некоторыми вариантами теорий. Проанализировано влияние параметра эндохронности и параметра упрочнения материала на форму одноосных кривых «напряжение~деформация». Приведены результаты некоторых численных экспериментов, включая схему с разгрузками разупрочняющегося материала.

Ключевые слова: неупругость, эндохронная теория, определяющие соотношения, микронапряжения, микроразрушения, разупрочнение, затвердевание.

Вариант 1

В 1957 году Вильям Прагер [1, 2] в рамках концепции течения ввел понятие затвердеваемости, понимая под этим термином способность материала не воспринимать изменение деформации при росте напряжений. Автор [2] ввел понятие выпуклой поверхности затвердевания в девятимерном пространстве деформаций и разделил напряжение на две составляющие: упругое напряжение и напряжение затвердевания. Фактически Прагер сформулировал и закон затвердевания [1] в форме:

$$\sigma_{ij}^0 = \nu \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}, \quad \nu > 0, \quad (1)$$

где: ε_{ij} – девиатор тензора полных деформаций, σ_{ij}^e , σ_{ij}^0 – девиаторы тензоров упругих напряжений и напряжений затвердевания, $h(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) = 0$ – поверхность затвердевания.

Если остановиться на простейшем варианте, когда поверхность затвердевания в пространстве деформаций имеет вид:

$$h(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) \equiv \sqrt{(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{k} \cdot \sigma_{ij}^0) : (\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}^0)} - \varepsilon_0 = 0, \quad (2)$$

то определяющие соотношения такой теории запишутся следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \frac{d\sigma_{ij}^0}{d\eta} + \frac{\sigma_{ij}^0}{k}, \quad \sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij} - 2G \varepsilon_{ij}, \quad d\eta = \sqrt{d\sigma_{ij}^0 : d\sigma_{ij}^0}. \quad (3)$$

Здесь G – модуль сдвига, k – константа материала, ε_0 – деформационный предел затвердевания.

По схеме построения эндохронных вариантов теории, отвечающих любой теории течения [3], можно получить определяющие соотношения эндохронного типа, отвечающие идеям Прагера [1, 2]:

$$\varepsilon_{ij} + 2G \varepsilon_0 \alpha_1 \frac{d\varepsilon_{ij}}{dR} = \varepsilon_0 \frac{dR_{ij}}{dR} + \frac{R_{ij}}{k + 2G \alpha_1}, \quad (4)$$

$$R_{ij} = \sigma_{ij} - 2G (1 - \alpha_1) \varepsilon_{ij}, \quad dR = \sqrt{dR_{ij} : dR_{ij}}, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq 1. \quad (5)$$

Здесь, дополнительно принято, что α_1 – параметр эндохронности, R_{ij} – девиатор вспо-

могательного параметрического тензора.

Очевидно, что при $\alpha_1 = 0$ соотношения (4), (5) переходят в уравнения (3). Общее решение уравнений (4), (5) при активном одноосном нагружении и постоянных материальных параметрах модели определяется формулами:

$$\varepsilon = \frac{1}{k + 2G\alpha_1} \left[R + \varepsilon_0 k \cdot \left(1 - \exp(-R/(2G\varepsilon_0\alpha_1)) \right) \right], \quad (6)$$

$$\sigma = R + 2G(1 - \alpha_1)\varepsilon. \quad (7)$$

Кроме того, в (4), (5) учтено, что в одномерном случае $\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 2G$, а кривая $\sigma \sim \varepsilon$ одноосного нагружения выходит на асимптоту:

$$\varepsilon = \frac{\sigma + k\varepsilon_0}{2G + k}$$

при любых значениях параметра эндохронности α_1 .

Интересный вариант получается из соотношений (4), (5) если положить $\alpha_1 = 1$. Тогда:

$$\varepsilon_{ij} + 2G\varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_{ij}}{d\sigma_i} = \varepsilon_0 \frac{d\sigma_{ij}}{d\sigma_i} + \frac{\sigma_{ij}}{k + 2G}, \quad d\sigma_i = \sqrt{d\sigma_{ij} : d\sigma_{ij}}. \quad (8)$$

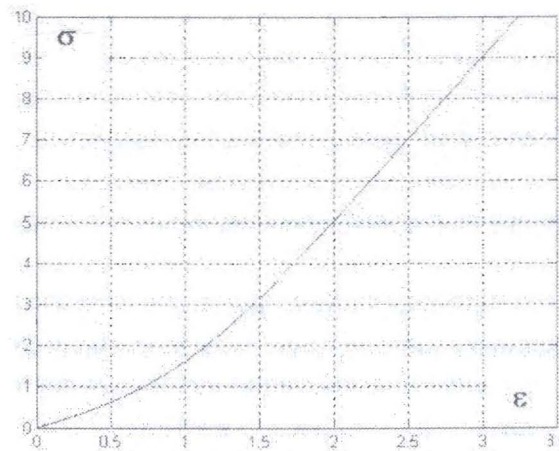


Рисунок 1. Зависимость $\sigma \sim \varepsilon$ при одноосном нагружении (по уравнениям (8))

Кривая деформирования при интегрировании этих уравнений в случае одноосного нагружения и постоянных материальных параметрах модели ($2G = 1$, $\varepsilon_0 = 1$, $k = 3$) приведена на рисунке 1. Очевидны выпуклость кривой вниз и выход её на асимптоту.

Вариант 2

В рамках концепции течения статистическая теория неупругости, учитывающая микронапряжения и микроразрушения, была опубликована в 1982 году [4]. Ее определяющие соотношения имели вид:

$$\varepsilon_{ij} = \rho \frac{d\sigma_{ij}^f}{d\mu} + \frac{\sigma_{ij}^f}{m}, \quad d\mu = \sqrt{d\sigma_{ij}^f : d\sigma_{ij}^f}, \quad (9)$$

$$\sigma_{ij} = 2G_1 \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}^f, \quad \sigma_{ij} = \tau \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{d\lambda} + k_1 \varepsilon_{ij}^p, \quad d\lambda = \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p : d\varepsilon_{ij}^p},$$

где: σ_{ij} , ε_{ij} , σ_{ij}^f – девиаторы локальных тензоров напряжений, деформаций и микроразрушений, τ – предел текучести материала, ρ – локальный предел разрушения, G_1 – модуль сдвига, k_1 – коэффициент упрочнения, m – постоянный параметр.

При этом предполагалось, что:

$$\sigma_{ij} = 2G_2 \varepsilon_{ij}^e, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^o. \quad (10)$$

Здесь ε_{ij}^p – девиатор локального тензора пластических деформаций, G_2 – параметр материала, а под ε_{ij}^o понимаются деформации, отвечающие значению ρ , при котором произошел разрыв упругих связей. При достижении девиатором тензора микроразрушений σ_{ij}^f величины $2G_1 \varepsilon_{ij}$ происходит локальный разрыв упругих связей и $\sigma_{ij} = 0$.

Этой теории отвечает одномерная модель, представленная на рисунке 2.

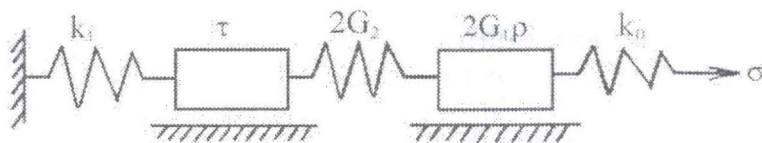


Рисунок 2. Одномерная модель, учитывающая микронапряжения и микроразрушения

Для этой модели и уравнений (9) – (10) имеем:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{k_0}, \quad k_0 = 2G_1, \quad \text{если } \varepsilon \leq \rho \quad (11a)$$

$$k_0 = 2G_1 - m + \frac{m\rho}{\varepsilon} \leq \rho, \quad \text{если } \varepsilon \geq \rho, \quad (11b)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}, \quad \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle = \int_0^\infty \varepsilon_{ij}^p d\Phi(\rho), \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \int_0^\infty \sigma_{ij} d\Phi(\rho), \quad (12)$$

где: $\langle \bullet \rangle$ – знак операции осреднения, а интегральная функция распределения $\Phi(\rho)$ считается известной.

Используя схему перехода к эндохронным вариантам [3], в работе [5] была предложена теория неупругости, учитывающая микроразрушения и основанная на положениях и результатах исследования [4]. Её определяющие соотношения имели следующий вид

$$\varepsilon_{ij} + \alpha_2 \rho_2 \frac{d\varepsilon_{ij}}{dR} = \frac{1}{2G} \cdot \left(\rho_2 \frac{dR_{ij}}{dR} + \frac{(g+1) R_{ij}}{g + \alpha_2} \right), \quad (13)$$

$$R_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} - (1 - \alpha_2) \sigma_{ij}, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq 1. \quad (14)$$

где: g – аналог коэффициента упрочнения материала, α_2 – параметр эндохронности, ρ_2 – аналог деформационного предела микроразрушения ρ из (9).

Вариант 3

Подставим сейчас ε_{ij} из (14) в (13). Тогда получим, что:

$$\sigma_{ij} + \alpha_2 \rho_2 \frac{d\sigma_{ij}}{dR} = \rho_2 \frac{dR_{ij}}{dR} + \frac{R_{ij}}{g + \alpha_2}. \quad (15)$$

Если потребовать, чтобы при $\alpha_2 = 0$ решение (15) совпадало с решением (4) при $\alpha_1 = 0$ для активного одноосного нагружения, тогда нетрудно показать, что:

$$g + 1 = \frac{2G}{2G + k}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\rho_2}{2G}. \quad (16)$$

Общее решение уравнений (13), (14) при одноосном нагружении и постоянных параметрах модели может быть получено в виде:

$$\sigma = \frac{1}{\alpha_2 + g} [R + \rho_2 g \cdot (1 - \exp(-R/(\alpha_2 \rho_2)))], \quad (17a)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2G} [R + (1 - \alpha_2) \sigma]. \quad (17b)$$

Если $\alpha_2 = 1$, то одноосное решение (17) видоизменяется до соотношения:

$$\sigma = \frac{1}{1+g} [2G\varepsilon + \rho_2 g \cdot (1 - \exp(-(2G\varepsilon)/\rho_2))]. \quad (18)$$

Отметим, что форма решения (6) при $\alpha_1 = \infty$ такова что:

$$\sigma = (2G + k)\varepsilon - k\varepsilon_0 \cdot (1 - \exp(-\varepsilon/(2G\varepsilon_0))). \quad (19)$$

Сравнивая (18) и (19) и, имея ввиду условия (16), можно увидеть, что решения оказались одинаковыми. Таким образом, решение системы (13), (14) при условии $\alpha_2 = 1$ равносильно решению системы (4), (5) при условии $\alpha_1 = \infty$, и наоборот, решение системы (13), (14) при условии $\alpha_2 = \infty$ равносильно решению системы (4), (5) при условии $\alpha_1 = 1$. Это позволяет, в дальнейшем, не пользоваться двумя формами задания параметрического тензора R_{ij} (5) и (14), а ограничиться одной формой, разрешая параметру α меняться в пределах от 0 до ∞ , а не только в пределах $0 \leq \alpha \leq 1$.

Кроме того, можно заметить, что значения параметра g определяют три зоны развития деформаций при активном одноосном монотонном нагружении:

- если $g > 0$, то реализуется зона пластического течения с упрочнением - восходящая диаграмма $\sigma \sim \varepsilon$ с выпуклостью вверх;
- если $g < 0$ и $g < -1$, то после пластического течения происходит микроразрушение и разупрочнение материала - выпуклая вверх кривая $\sigma \sim \varepsilon$ с возрастанием и последующим убыванием вплоть до нуля - линия вязкого разрушения;
- если $-1 < g < 0$, то происходит затвердевание материала - восходящая диаграмма $\sigma \sim \varepsilon$ с выпуклостью вниз.

Таким образом, на плоскости $\sigma \sim \varepsilon$ при одноосном монотонном нагружении в зависимости от величины параметра g образуются две характерные точки $(\varepsilon_*, 0)$ и $(0, \sigma_*)$, которые можно назвать точками вязкого и хрупкого разрушения.

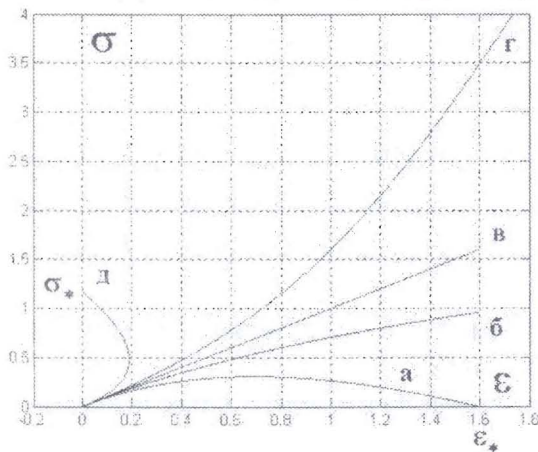


Рисунок 3. Развитие деформаций в зависимости от параметров моделей

На рисунке 3 приведены различные кривые развития деформации при одноосном нагружении, вычисленные при следующих значениях параметров моделей $2G = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\rho_2 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\varepsilon_0 = 1$: а - кривая течения с разупрочнением и вязким разрушением ($g = -2$); б - кривая течения с упрочнением ($g = 4$); в - линия упругости; г - кривая течения с затвердеванием ($g = -0.75$); д - кривая «полного» затвердевания и хрупкого разрушения ($g = -2$,

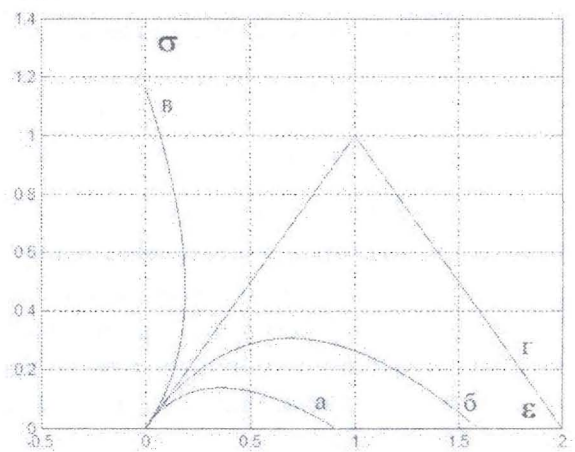


Рисунок 4. Развитие деформаций в зависимости от параметра эндохронности

$\alpha_2 = 4$).

На рисунке 4 приведены кривые деформирования, отвечающие различным значениям параметра α при фиксированном отрицательном значении параметра g . В расчетах было принято, что $\rho_2 = 1$, $2G = 1$, $g = -4$, $\alpha = 1$ (линия а), $\alpha = 1.5$ (кривая б), $\alpha = 4$ (линия в), $\alpha = 0$ (кривая г).

Отдельно рассмотрим поведение разупрочняющегося материала, когда активное нагружение сменяется разгрузкой, а затем последующим активным нагружением.

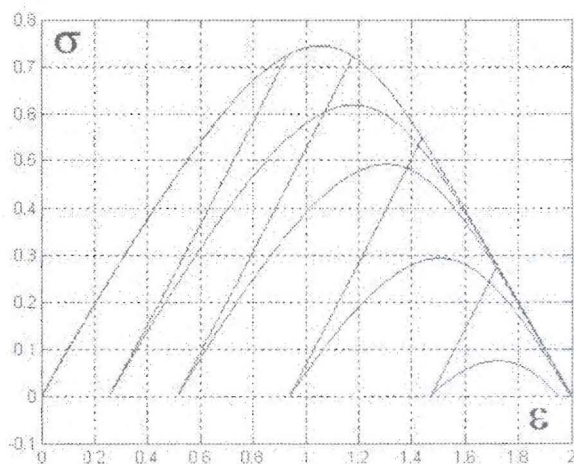


Рисунок 5. Поведение разупрочняющегося материала при нагружении с разгрузками

На рисунке 5 представлены расчеты поведения гипотетического материала по определяющим соотношениям эндохронной теории, учитывающей микроразрушения, по схеме нагрузка-разгрузка-нагрузка в первой четверти при $\alpha = 0.2$, $2G = 1$, $\rho_2 = 1$, $g + \alpha = -1.8$.

Качественно результаты расчётов по теории близки к опытным данным, полученным Борстом и Памином в экспериментах на бетонах и грунтах [6].

Замечание

Соотношения для девиаторов в (4), (5) и (13), (14) можно дополнить уравнениями, учитывающими шаровые составляющие тензоров, в форме [7]

$$\beta(R_{ii}) = \frac{dR_{ii}}{dR}, \quad R_{ii} = \varepsilon_{ii} - \frac{k_2}{K} \sigma_{ii}.$$

Здесь R_{ii} — первый инвариант параметрического тензора R_{ij} , ε_{ii} — первый инвариант тензора деформаций (мера разрыхления материала), σ_{ii} — первый инвариант тензора напряжений, K — объемный модуль материала, константа k_2 и функция материала β определяются на основе анализа экспериментальных данных.

Эти формулы обобщают предложения, используемые исследователями школы В.В. Новожилова в критерии прочности Новожилова-Рыбакиной [8].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 14-01-00202).

Литература

1. Прагер В. Об идеально затвердевающих материалах // Механика: сборник переводов. 1958. № 3 (49). С. 99-103.
2. Прагер В. Упругие тела ограниченной сжимаемости // Механика: сборник переводов. 1958. № 6 (52). С. 97-101.
3. Кадашев Ю.И., Помыткин С.П. О взаимосвязи теории пластичности, учитывающей микронапряжения, с эндохронной теорией пластичности // Известия РАН. Механика твердого тела. 1997. № 4. С. 99-105.

4. Кадашев Ю.И. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микроразрушение // Доклады АН СССР. 1982. Т.266. № 6. С. 1341-1344.
5. Кадашев Ю.И., Пейсахов А.М., Помыткин С.П. Эндохронная теории неупругости, учитывающая микроразрушения // Микромеханизмы пластичности, разрушения и сопутствующие явления: материалы IV международной школы-конференции (Тамбов, 24-30 июня 2007). Тамбов, 2007. С. 280-283.
6. Pamin, R.de Borst. Numerical simulation of localization phenomena using gradient plasticity and finite elements // Heron. 1995. Vol. 40. № 1. P. 71-92.
7. Кадашев Ю.И., Помыткин С.П. О построении критерия прочности при сложном нагружении // Актуальные проблемы прочности: материалы 46-й международной конференции (Витебск, 15-17 октября, 2007). Витебск, 2007. Ч. 1. С. 68-74.
8. Рыбакина О.Г. О работах В.В. Новожилова в области феноменологического описания первой стадии разрушения (накопления повреждений) // Труды ЦНИИ имени академика А.Н. Крылова. 2010. Вып. 53. 1 (337). С. 127-133.