

ISSN 1025-3106

ВЕСТНИК

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ

Том 3 (61)



Серия 1

2016

Выпуск 4

О НЕРАВЕНСТВЕ БОРА

ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ФУНКЦИЙ ИЗ $L^p(\mathbb{R}^n)$ ПРИ $p \in (2, +\infty)^*$

Б. Ф. Иванов

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна;
Высшая школа технологии и энергетики,
Российская Федерация, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4

Пусть $p \in (2, +\infty)$, $n \geq 1$, S — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ и $\Gamma(S, p)$ — множество всех тех функций $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$, носители преобразования Фурье которых лежат в S . Предполагается, что при $n = 1$ множество $\bar{S}$ может содержать ноль, а при $n > 1$ может пересекаться с координатными гиперплоскостями. В работе установлено достаточное условие выполнения неравенства

$$\left\| \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, p, S) \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

где $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $E_t = \{\tau | \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n, \tau_j \in [0, t_j], \text{ если } t_j \geq 0, \text{ и } \tau_j \in [t_j, 0], \text{ если } t_j < 0, 1 \leq j \leq n\}$, а константа $C(n, p, S) > 0$ не зависит от $\gamma \in \Gamma(S, p)$. Библиогр. 14 назв.

Ключевые слова: неравенство Бора.

Введение. Выберем произвольное $\Lambda > 0$, натуральное N и обозначим через $P_N(\Lambda)$ множество всевозможных тригонометрических сумм вида

$$p(\tau) = \sum_{m=1}^N p_m e^{i\lambda_m \tau}, \quad \lambda_m \in \mathbb{R}^1, \quad p_m \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq m \leq N,$$

показатели Фурье которых удовлетворяют неравенству

$$\min_{1 \leq m \leq N} |\lambda_m| \geq \Lambda.$$

Х. Бор [1] доказал, что при любом N для таких тригонометрических сумм выполняется неравенство

$$|p(\tau)| \leq \frac{\pi}{2\Lambda} \left\| \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)}.$$

Вскоре после публикации Х. Бора стали появляться обобщения этого неравенства: Ж. Фавар [2, 3], Б. М. Левитан [4], Л. Хермандер [5] и др., а само неравенство, начиная с работы Ж. Фавара [3], стало называться неравенством Бора. (Более подробный обзор приведен в работе автора [6].)

В связи с исследованиями автора в области теории дифференциальных уравнений (см. ссылки в [6]) им в работах [6–8] было предложено свое обобщение неравенства Бора как неравенства, дающего оценку интегралов от функций из некоторых подмножеств пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ через нормы самих этих функций. В [6] предполагалось, что $p \in (1, 2]$, в [7, 8] изучался случай, когда $p \in (2, +\infty]$, а спектры подынтегральных функций отделены от координатных гиперплоскостей. В настоящей работе это ограничение на спектры снимается.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00202).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

Пусть $n \geq 1$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in (2, +\infty)$ и $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\Gamma(S, p)$ множество всех тех функций $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$, носители преобразования Фурье которых лежат в S ; $E_t = \{\tau | \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n, \tau_j \in [0, t_j], \text{ если } t_j \geq 0 \text{ и } \tau_j \in [t_j, 0], \text{ если } t_j < 0, 1 \leq j \leq n\}$.

В настоящей работе устанавливаются условия выполнения неравенства

$$\left\| \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, p, S) \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (0.1)$$

где $\gamma \in \Gamma(S, p)$, а константа $C(n, p, S) > 0$ не зависит от выбора γ из $\Gamma(S, p)$.

Доказываются следующие утверждения:

1) если S открыто, ограничено и $\bar{S} \cap F = \emptyset$, где F — объединение координатных гиперплоскостей, то (см. теорему 2.1) для выполнения (0.1) достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\tilde{\xi}_S(\tau) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_S e^{i(y, \tau)} dy \in L^q(\mathbb{R}^n), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \quad (0.2)$$

2) если S открыто, то (см. теорему 3.1) для выполнения (0.1) достаточно, чтобы имело место соотношение

$$K(\tau, S) = \lim_{||d|| \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{S \setminus Q(d)} e^{i(y, \tau)} \left[\prod_{m=1}^n \frac{1}{iy_m} \right] dy \in L^q(\mathbb{R}^n), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (0.3)$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$, $d = (d_1, \dots, d_n)$, $d_m > 0$, $1 \leq m \leq n$,

$$Q(d) = \bigcup_{m=1}^n \{y | y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, |y_m| < d_m\}.$$

В работе также установлен и ряд других результатов.

§ 1. Определения, обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть $n \geq 1$ и $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Следуя [9, с. 77], обозначим преобразование Фурье этой функции через $\hat{u}$ и выберем его в виде

$$\hat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y, t)} u(t) dt. \quad (1.1)$$

Обратное преобразование Фурье функции $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, также следуя [9, с. 77], будем обозначать через $\tilde{v}$. Оно согласно [10, с. 426] имеет вид

$$\tilde{v}(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y, t)} v(y) dy.$$

Обозначим (см. [9, с. 73], [11, с. 31]) через $S(\mathbb{R}^n)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности, и через $S'(\mathbb{R}^n)$ пространство медленно растущих обобщенных функций или, что то же самое, пространство обобщенных функций медленного роста.

Пусть $p \in [1, +\infty]$ и $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$, тогда, как известно, функционал

$$(\gamma, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\gamma(t)} \varphi(t) dt, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n),$$

принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^n)$.

Известно также, что преобразованием Фурье медленно растущей обобщенной функции f называется линейный непрерывный функционал на $S(\mathbb{R}^n)$, обозначаемый в соответствии с (1.1) $\widehat{f}$ и задаваемый (с учетом выбора определения для (f, φ) и вида записи преобразования Фурье) формулой

$$(\widehat{f}, \widehat{\varphi}) = (2\pi)^n (f, \varphi).$$

Пусть $p \in (1, +\infty)$, функция $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^1)$ и g — ее преобразование Гильберта:

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\gamma(t)}{t-x} dt.$$

Тогда [12, с. 176] существует такая константа $H_p > 0$, зависящая только от p , что справедливо неравенство

$$\|g(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \leq H_p \|\gamma(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}. \quad (1.2)$$

В работах автора [7, 8] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть $n \geq 1$, $p \in (2, +\infty]$, $d = (d_1, \dots, d_n)$, $d_k > 0$, $1 \leq k \leq n$. Тогда для любой функции $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^n \setminus Q(d), p)$ выполняется неравенство

$$\left\| \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C^n(q) \left[\prod_{k=1}^n \frac{1}{d_k^{1/q}} \right] \cdot \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (1.3)$$

где константа $C(q) > 0$ не зависит от γ и вектора d .

§ 2. Неравенство (0.1) в случае, когда S открыто, ограничено и $\overline{S} \cap F = \emptyset$.

Лемма 2.1. Пусть $p \in (2, +\infty)$, $n \geq 1$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, множество $S \subset \mathbb{R}^n$ открыто, ограничено и $\overline{S} \cap F = \emptyset$. Тогда, если справедливо

$$K(\tau, t, S) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y, \tau)} \left[\prod_{k=1}^n \frac{1 - e^{-iy_k t_k}}{iy_k} \right] \xi_S(y) dy \in L^q(\mathbb{R}^n), \quad (2.1)$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$, ξ_S — характеристическая функция множества S и $1/p + 1/q = 1$, то для любой функции $\gamma \in \Gamma(S, p)$ выполняется равенство

$$(-1)^{n(t)} \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau, t, S)} \gamma(\tau) d\tau, \quad (2.2)$$

где $n(t)$ — число отрицательных координат вектора t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную функцию $\gamma \in \Gamma(S, p)$. Если хоть одна из координат вектора $t = (t_1, \dots, t_n)$ равна нулю, то в силу (2.1) будем иметь

$K(\tau, t, s) \equiv 0$, и равенство (2.2) очевидно выполняется. Поэтому далее при доказательстве леммы мы будем предполагать, что ни одна из координат вектора t не равна нулю.

Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$\begin{aligned} (-1)^{n(t)} \int_{E_t} e^{-i(y, \tau)} \gamma(\tau) d\tau &= (-1)^{n(t)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y, \tau)} \xi_{E_t}(\tau) \gamma(\tau) d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y, \tau)} \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{1 - e^{-iy_k t_k}}{iy_k} \right\}^{\sim} (\tau) \gamma(\tau) d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y, \tau)} \left\{ \left[\prod_{k=1}^n \frac{1 - e^{-iy_k t_k}}{iy_k} \right] \xi_S(-y) \right\}^{\sim} (\tau) \gamma(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y, \tau)} \left\{ \left[\prod_{k=1}^n \frac{1 - e^{-iy_k t_k}}{iy_k} \right] \cdot [1 - \xi_S(-y)] \right\}^{\sim} (\tau) \gamma(\tau) d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y, \tau)} \overline{K(\tau, t, S)} \gamma(\tau) d\tau + \widehat{\ell}(y, t, S) * \widehat{\gamma}(y), \quad (2.3) \end{aligned}$$

где

$$\ell(\tau, t, S) = \left\{ \left[\prod_{k=1}^n \frac{1 - e^{-iy_k t_k}}{iy_k} \right] \cdot [1 - \xi_S(-y)] \right\}^{\sim} (\tau).$$

Обозначив для краткости $\sigma(\gamma) = \text{supp} \widehat{\gamma}$, получаем в силу [13, с. 69] и [14, с. 8]

$$\text{supp} \{ \widehat{\ell}(y, t, S) * \widehat{\gamma}(y) \} \subseteq \overline{\text{supp} \widehat{\ell}(y, t, S) + \sigma(\gamma)} = [\mathbb{R}^n \setminus (-S)] + \sigma(\gamma) = \mathbb{R}^n \setminus \left\{ - \bigcap_{x \in \sigma(\gamma)} (S - x) \right\}.$$

Так как $\sigma(\gamma) \subset S$, можно указать малую окрестность нуля V такую, что выполняется $V \subset \bigcap_{x \in \sigma(\gamma)} (S - x)$, т.е. окрестность нуля, не входящую в $\text{supp} [\widehat{\ell}(y, t, S) * \widehat{\gamma}(y)]$.

Следовательно, если $y \in V$, то $\widehat{\ell}(y, t, S) * \widehat{\gamma}(y) = 0$. Но тогда в силу (2.1) из (2.3) получаем

$$\begin{aligned} (-1)^{n(t)} \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau &= (-1)^{n(t)} \lim_{\|y\| \rightarrow 0} \int_{E_t} e^{-i(y, \tau)} \gamma(\tau) d\tau = \\ &= \lim_{\|y\| \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y, \tau)} \overline{K(\tau, t, S)} \gamma(\tau) d\tau + \lim_{\|y\| \rightarrow 0} \widehat{\ell}(y, t, S) * \widehat{\gamma}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau, t, S)} \gamma(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Лемма 2.2. Пусть $n \geq 1$, $S \subset \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^n$, $p \in (2, +\infty)$, $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и выполнены следующие условия:

- 1) S открыто, ограничено и $\overline{S} \cap F = \emptyset$;
- 2) $\text{supp} \widehat{\gamma} \subset S$;
- 3) для множества S справедливо равенство (0.3).

Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned}
(-1)^{n(t)} \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau, S)} \gamma(\tau) d\tau - \sum_{a=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau_1, \dots, \tau_a - t_a, \dots, \tau_n, S)} \gamma(\tau) d\tau + \\
&+ \sum_{\substack{a, b=1 \\ a < b}}^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau_1, \dots, \tau_a - t_a, \dots, \tau_b - t_b, \dots, \tau_n, S)} \gamma(\tau) d\tau + \\
&+ \dots + (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau_1 - t_1, \dots, \tau_n - t_n, S)} \gamma(\tau) d\tau, \quad (2.4)
\end{aligned}$$

где $t = (t_1, \dots, t_n)$ и $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из (2.1), (2.2), определения $K(\tau, S)$ и равенства

$$\begin{aligned}
K(\tau, t, S) &= K(\tau, S) - \sum_{a=1}^n K(\tau_1, \dots, \tau_a - t_a, \dots, \tau_n, S) + \\
&+ \sum_{\substack{a, b=1 \\ a < b}}^n K(\tau_1, \dots, \tau_a - t_a, \dots, \tau_b - t_b, \dots, \tau_n, S) + \\
&+ \dots + (-1)^n K(\tau_1 - t_1, \dots, \tau_n - t_n, S).
\end{aligned}$$

Теорема 2.1. Пусть $n \geq 1$, $S \subset \mathbb{R}^n$, S открыто, ограничено, $\bar{S} \cap F = \emptyset$, $p \in (2, +\infty)$ и выполнено условие (0.3). Тогда при каждом $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ для любой функции $\gamma \in \Gamma(S, p)$ выполняется неравенство

$$\left\| \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 2^n \|K(\tau, S)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы очевидно следует из (2.4) и (0.2).

В следующих лемме 2.3 и теореме 2.2 условие (0.3) заменено на более простое достаточное условие, обеспечивающее выполнение неравенства (0.1).

Лемма 2.3. Пусть $n \geq 1$, $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ — вектор с положительными координатами, $S \subset \mathbb{R}^n$, S — открыто, ограничено, $\bar{S} \subset \mathbb{R}^n \setminus Q(\Delta)$, $p \in (2, +\infty)$ и выполнено условие (0.2). Тогда справедливы утверждения:

1) существует такая константа $C_{22} > 0$, не зависящая от вектора Δ и $\gamma \in \Gamma(S, p)$, что выполняется неравенство

$$\|K(\tau, S)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_{22} \left[\prod_{m=1}^n \frac{1}{\Delta_m} \right] \cdot \|\tilde{\xi}_S(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}; \quad (2.6)$$

2) при каждом $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ для любой функции $\gamma \in \Gamma(S, p)$ имеет место равенство (2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. По заданному вектору Δ выберем произвольный вектор $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ такой, что $0 < \rho_k < \Delta_k/2$, $1 \leq k \leq n$. Обозначим через $\Omega(\tau_k, \Delta_k, \rho_k)$ функцию, преобразование Фурье которой

имеет вид

$$\widehat{\Omega}(y_k, \Delta_k, \rho_k) = \xi_{[-\Delta_k/2, \Delta_k/2]}(y_k) * \left\{ \frac{1}{\rho_k^2} \xi_{[-\rho_k/2, \rho_k/2]}(y_k) * \xi_{[-\rho_k/2, \rho_k/2]}(y_k) \right\}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Тогда будем иметь

$$0 \leq \widehat{\Omega}(y_k, \Delta_k, \rho_k) \leq 1;$$

$$\widehat{\Omega}(y_k, \Delta_k, \rho_k) = 0, \text{ если } y_k \notin (-\Delta_k/2 - \rho_k, \Delta_k/2 + \rho_k); \quad \widehat{\Omega}(y_k, \Delta_k, \rho_k) = 1, \text{ если } y_k \in [-\Delta_k/2 + \rho_k, \Delta_k/2 - \rho_k];$$

$$\left| \frac{d^2}{dy_k^2} \widehat{\Omega}(y_k, \Delta_k, \rho_k) \right| \leq \frac{1}{\rho_k^2}.$$

Обозначим

$$K_0(\tau) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y, \tau)} \left[\prod_{m=1}^n \frac{1 - \widehat{\Omega}(y_m, \Delta_m, \rho_m)}{iy_m} \right] dy_m.$$

Тогда получим $\widehat{K}_0(y) = \prod_{m=1}^n 1/iy_m$, если $y \in \mathbb{R}^n \setminus Q(\Delta/2 + \rho)$; $\widehat{K}_0(y) = 0$, если $y \in Q(\Delta/2 - \rho)$ и

$$\left\| \frac{d^2}{dy_m^2} \widehat{K}_0(y) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty, \quad y_m \in \mathbb{R}^1.$$

Таким образом, имеем $K_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Положим $\rho = \Delta/4$. В силу леммы 2.2, установленной автором в [7, с. 32], можно указать константу $C_{22} > 0$, не зависящую от вектора Δ и такую, что выполняется неравенство

$$\|K_0(\tau)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < C_{22} \left[\prod_{m=1}^n \frac{1}{\Delta_m} \right].$$

Но тогда $K(\tau, S) = K_0(\tau) * \widetilde{\xi}_S(\tau)$ и $\|K_0(\tau, S)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|K_0(\tau)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|\widetilde{\xi}_S(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$.

2) Утверждение следует из (2.6) и леммы 2.2.

Теорема 2.2. Пусть $n \geq 1$, $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ — вектор с положительными координатами, $S \subset \mathbb{R}^n$, S открыто, ограничено, $\overline{S} \subset \mathbb{R}^n \setminus Q(\Delta)$, $p \in (2, +\infty)$ и выполнено условие (0.2). Тогда справедливо неравенство

$$\left\| \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 2^n C_{22} \left[\prod_{m=1}^n \frac{1}{\Delta_m} \right] \cdot \|\widetilde{\xi}_S(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \cdot \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.7)$$

Доказательство. Неравенство (2.7) следует из (2.5) и леммы 2.3.

Замечание 2.1. Отметим, что условия (0.2) и (0.3) выполняются не при всяком $q \in (1, 2)$ и не для всякого открытого ограниченного множества S , $\overline{S} \cap F = \emptyset$, хотя согласно теореме автора, приведенной в § 1, для таких S неравенство, дающее оценку интеграла от какой-либо функции $\gamma \in \Gamma(S, p)$ через $L^p(\mathbb{R}^n)$ — норму этой функции, — выполняется. Действительно, пусть имеем, например, $n = 2$, $a, b > 1$, $S = \{y | y = (y_1, y_2), (y_1 - a)^2 + (y_2 - b)^2 < 1\}$ и

$$\widetilde{\xi}_S(t) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \iint_S e^{i(y, t)} dy.$$

Можно проверить, что в этом случае выполняется равенство

$$\tilde{\xi}_S(t) = \frac{e^{iat_1} e^{ibt_2}}{2\pi\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} J_1\left(\sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right), \quad (2.8)$$

где $t = (t_1, t_2)$ и $J_1(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка. При этом условие $\tilde{\xi}_S \in L^q(\mathbb{R}^2)$ очевидно выполняется тогда и только тогда, когда $q > 4/3$. Из (2.8) и определения функции $K(\tau, S)$, содержащегося в (0.3), следует

$$K(\tau, S) = \int_{\tau_1}^{\text{sign}\tau_1 \cdot \infty} \int_{\tau_2}^{\text{sign}\tau_2 \cdot \infty} \tilde{\xi}_S(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad \tau = (\tau_1, \tau_2).$$

Можно также доказать, что условие $K(\cdot, S) \in L^q(\mathbb{R}^2)$ выполняется только при $q > 4/3$.

§ 3. Основная теорема. Пусть $n \geq 1$, $p \in (2, +\infty)$ и $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Выберем произвольный вектор $d = (d_1, \dots, d_n)$ с положительными координатами и обозначим

$$\gamma(\tau, d) = \gamma(\tau) - \gamma(\tau) * \left\{ \prod_{k=1}^n \left[\frac{1}{2\pi} \delta(\tau_k) - \frac{\sin d_k \tau_k}{\pi \tau_k} \right] \right\}, \quad (3.1)$$

где $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ и $\delta(\cdot)$ — дельта-функция. Тогда будем иметь

$$\hat{\gamma}(y, d) = \hat{\gamma}(y), \quad \text{если } y \in Q(d), \quad (3.2)$$

$$\hat{\gamma}(y, d) = 0, \quad \text{если } y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q(d)}. \quad (3.3)$$

Из (3.1) и неравенства (1.2) следует $\gamma(\cdot, d) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и

$$\lim_{\|d\| \rightarrow 0} \|\gamma(\tau, d)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0. \quad (3.4)$$

Для произвольных векторов $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ таких, что выполняется $0 < \lambda_k < \Lambda_k$, $1 \leq k \leq n$, положим

$$1) \Pi_{\lambda, \Lambda} = \{y | y = (y_1, \dots, y_n), y_k \in (-\Lambda_k, -\lambda_k] \cup [\lambda_k, \Lambda_k), 1 \leq k \leq n\},$$

$$2) \gamma(\tau, \lambda, \Lambda) = \gamma(\tau) * \{\xi_{\Pi_{\lambda, \Lambda}}(y)\}^{\sim}(\tau), \quad (3.5)$$

$$3) \gamma(\tau, \lambda, \Lambda, \infty) = \gamma(\tau) - \gamma(\tau, \lambda) - \gamma(\tau, \lambda, \Lambda).$$

Тогда будем иметь

$$1) \hat{\gamma}(y, \lambda, \Lambda) = \hat{\gamma}(y), \text{ если } y \in \overset{\circ}{\Pi}_{\lambda, \Lambda} \text{ и } \hat{\gamma}(y, \lambda, \Lambda) = 0, \text{ если } y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Pi}_{\lambda, \Lambda};$$

$$2) \hat{\gamma}(y, \lambda, \Lambda, \infty) = \hat{\gamma}(y), \text{ если } y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{(Q(\lambda) \cup \Pi_{\lambda, \Lambda})} \text{ и } \hat{\gamma}(y, \lambda, \Lambda, \infty) = 0, \text{ если } y \in Q(\lambda) \cup \Pi_{\lambda, \Lambda};$$

3)

$$\gamma(\tau, \lambda, \Lambda) = \gamma(\tau) * \left\{ \prod_{k=1}^n \left[\frac{\sin \Lambda_k \tau_k}{\pi \tau_k} - \frac{\sin \lambda_k \tau_k}{\pi \tau_k} \right] \right\} \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad (3.6)$$

где $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$.

Лемма 3.1. Пусть $n \geq 1$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 < \lambda_k < \Lambda_k$, $1 \leq k \leq n$, $p \in (2, +\infty)$, $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и $t \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. Тогда справедливо неравенство

$$\left| \int_{E_t} \left\{ \gamma(\tau, \lambda, \Lambda) - \gamma(\tau) * \prod_{k=1}^n \left[\frac{1}{2\pi} \delta(\tau_k) - \frac{\sin \lambda_k \tau_k}{\pi \tau_k} \right] \right\} d\tau \right| < \\ < C_{31} \left\{ \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_k^{1/q}} + \frac{1}{\Lambda_k^{1/q}} \right) - \prod_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^{1/q}} \right\} \cdot \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

где $\tau(\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция, а $C_{31} > 0$ константа, не зависящая от λ, Λ и γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$W(\tau_k) = \frac{1}{2\pi} \delta(\tau_k) - \frac{\sin \Lambda_k \tau_k}{\pi \tau_k}, \quad w(\tau_k) = \frac{1}{2\pi} \delta(\tau_k) - \frac{\sin \lambda_k \tau_k}{\pi \tau_k},$$

$k = 1, 2, \dots, n$. Тогда согласно (3.6) получим

$$\left| \int_{E_t} \left\{ \gamma(\tau, \lambda, \Lambda) - \gamma(\tau) * \prod_{k=1}^n \left[\frac{1}{2\pi} \delta(\tau_k) - \frac{\sin \lambda_k \tau_k}{\pi \tau_k} \right] \right\} d\tau \right| \leq \\ \leq \sum_{a=1}^n \left| \int_{E_t} \gamma(\tau) * \left\{ \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq a}}^n w(\tau_k) \right] W(\tau_a) \right\} d\tau \right| + \\ + \sum_{\substack{a, b=1 \\ a < b}}^n \left| \int_{E_t} \gamma(\tau) * \left\{ \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq a, b}}^n w(\tau_k) \right] W(\tau_a) W(\tau_b) \right\} d\tau \right| + \dots \\ + \left| \int_{E_t} \gamma(\tau) * \left[\prod_{k=1}^n W(\tau_k) \right] d\tau \right|. \quad (3.7)$$

Пусть $d = (d_1, \dots, d_n)$ — вектор с положительными координатами и

$$h(\tau) = \gamma(\tau) * \left\{ \prod_{k=1}^n \left[\frac{1}{2\pi} \delta(\tau_k) - \frac{\sin d_k \tau_k}{\pi \tau_k} \right] \right\}.$$

Тогда согласно (3.1) и (1.2) будем иметь

$$\|h(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left(1 + \frac{2}{\pi} H_p \right)^n \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Так как в силу (3.1)–(3.3) имеем $\text{supp } \hat{h} \subset \mathbb{R}^n \setminus Q(d)$, то $h \in \Gamma(\mathbb{R}^n \setminus Q(d), p)$ и по теореме 1.1 из § 1 получаем неравенство

$$\left| \int_{E_t} h(\tau) d\tau \right| \leq \frac{C^n(q)}{(d_1, \dots, d_n)^{1/q}} \left(1 + \frac{2}{\pi} H_p \right)^n \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.8)$$

Применяя оценку (3.8) к каждому из слагаемых, стоящих в правой части (3.7), получим утверждение леммы при $C_{31} = C^n(q)(1 + \frac{2}{\pi}H_p)^n$.

Лемма 3.2. Пусть $n \geq 1$, $p \in (2, +\infty)$, $S \subset \mathbb{R}^n$ открыто и выполнено условие (0.3). Тогда для любых $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\gamma \in \Gamma(S, p)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} (-1)^{n(t)} \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau, S)} \gamma(\tau) d\tau - \sum_{a=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau_1, \dots, t_a - \tau_a, \dots, \tau_n, S)} \gamma(\tau) d\tau + \\ &+ \sum_{\substack{a, b=1 \\ a < b}}^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau_1, \dots, t_a - \tau_a, \dots, t_b - \tau_b, \dots, \tau_n, S)} \gamma(\tau) d\tau + \\ &+ \dots + (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n, S)} \gamma(\tau) d\tau, \quad (3.9) \end{aligned}$$

где $n(t)$ — число отрицательных координат вектора t и $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma \in \Gamma(S, p)$ и $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Для любых векторов $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$, удовлетворяющих условию $0 < \lambda_k < \Lambda_k$, $1 \leq k \leq n$, выполнено равенство

$$\int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau = \int_{E_t} \gamma(\tau, \lambda, \Lambda) d\tau + \int_{E_t} \gamma(\tau, \lambda) d\tau + \int_{E_t} \{\gamma(\tau) - \gamma(\tau, \lambda) - \gamma(\tau, \lambda, \Lambda)\} d\tau. \quad (3.10)$$

Рассмотрим первый интеграл из правой части (3.10). В силу (3.6) имеем $\gamma(\tau, \lambda, \Lambda) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и согласно (3.5) $\text{supp } \hat{\gamma}(y, \lambda, \Lambda) \subset S \subset \overset{\circ}{\Pi}_{\lambda, \Lambda}$. Следовательно, с учетом (3.5) получаем

$$(-1)^{n(t)} \int_{E_t} \gamma(\tau, \lambda, \Lambda) d\tau = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau, t, S \cap \overset{\circ}{\Pi}_{\lambda, \Lambda})} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\theta) \tilde{\xi}_{\Pi_{\lambda, \Lambda}}(\tau - \theta) d\theta \right] d\tau. \quad (3.11)$$

В силу (0.3) и (1.2) имеем $K(\tau, S \cap \overset{\circ}{\Pi}_{\lambda, \Lambda}) \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/q = 1$, поэтому из (2.1) получим $K(\cdot, t, S \cap \overset{\circ}{\Pi}_{\lambda, \Lambda}) \in L^q(\mathbb{R}^n)$. А так как $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и выполняется

$$\tilde{\xi}_{\Pi_{\lambda, \Lambda}}(\tau - \theta) = \prod_{k=1}^n \left[\frac{\sin \Lambda_k(\tau_k - \theta_k)}{\pi(\tau_k - \theta_k)} - \frac{\sin \lambda_k(\tau_k - \theta_k)}{\pi(\tau_k - \theta_k)} \right],$$

в правой части (3.11) можно изменить порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} (-1)^{n(t)} \int_{E_t} \gamma(\tau, \lambda, \Lambda) d\tau &= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\theta) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau, t, S \cap \overset{\circ}{\Pi}_{\lambda, \Lambda})} \tilde{\xi}_{\Pi_{\lambda, \Lambda}}(\theta - \tau) d\tau \right] d\theta = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\theta) \overline{K(\theta, t, \overset{\circ}{\Pi}_{\lambda, \Lambda} \cap S)} d\theta = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\theta) \overline{K(\theta, t, S)} d\theta - \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\theta) \left[\overline{K(\theta, t, S)} - \overline{K(\theta, t, \Pi_{\lambda, \Lambda} \cap S)} \right] d\theta. \end{aligned}$$

Но тогда из (3.10) получаем

$$\begin{aligned} (-1)^{n(t)} \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau &= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\theta) \overline{K(\theta, t, S)} d\theta - \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\theta) \left[\overline{K(\theta, t, S) - K(\theta, t, S \cap \Pi_{\lambda, \Lambda})} \right] d\theta + \\ &+ (-1)^{n(t)} \int_{E_t} \gamma(\tau, \lambda) d\tau + (-1)^{n(t)} \int_{E_t} \{\gamma(\tau) - \gamma(\tau, \lambda) - \gamma(\tau, \lambda, \Lambda)\} d\tau. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. При сделанных выше обозначениях и предположениях можно выбрать такое число $a_0 > 0$, что при всех $0 < a < a_0$ для вектора $\lambda = (a, a, \dots, a)$ третье слагаемое из правой части (3.12) не будет согласно (3.4) превосходить $\varepsilon/3$. Далее, можно выбрать такие числа $0 < a_1 < a_0 < A_0$, что для любого $A_1 > A_0$ величина

$$\|K(\tau, S) - K(\tau, S \cap \Pi_{\lambda, \Lambda})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

где $\lambda = a_1(1, \dots, 1)$ и $\Lambda = A_1(1, \dots, 1)$, будет столь малой, что второе слагаемое из правой части (3.12) не будет превосходить по модулю величину $\varepsilon/3$. Рассмотрим четвертое слагаемое. Согласно (3.1) и лемме 3.1 при $\lambda = a_1(1, \dots, 1)$ и $\Lambda = A_1(1, \dots, 1)$ имеем из (3.1)

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_t} \{\gamma(\tau) - \gamma(\tau, \lambda) - \gamma(\tau, \lambda, \Lambda)\} d\tau \right| &= \\ &= \left| \int_{E_t} \left\{ \gamma(\tau) * \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2\pi} \delta(\tau_k) - \frac{\sin a_1 \tau_k}{\pi \tau_k} \right) - \gamma(\tau, \lambda, \Lambda) \right\} d\tau \right| < \\ &< C_{31} \left\{ \left(\frac{1}{a_1^{1/q}} + \frac{1}{A_1^{1/q}} \right)^n - \frac{1}{a_1^{n/q}} \right\} \cdot \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

где $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$. Ясно, что число A_1 можно выбрать столь большим, чтобы это слагаемое не превосходило $\varepsilon/3$.

Таким образом, из (3.12) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать «малый» вектор λ и «большой» вектор Λ , для которых будет справедливо неравенство

$$\left| (-1)^{n(t)} \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau - \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\theta, t, S)} \gamma(\theta) d\theta \right| < \varepsilon.$$

Но тогда будем иметь

$$(-1)^{n(t)} \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\theta, t, S)} \gamma(\theta) d\theta,$$

откуда в силу (2.1) и (0.2) следует равенство (3.9).

Из (3.9) очевидным образом получаем нижеследующее основное утверждение параграфа.

Теорема 3.1. Пусть $n \geq 1$, $p \in (2, +\infty)$, $S \subset \mathbb{R}^n$ открыто и выполнено условие (0.3). Тогда для любых $t \in \mathbb{R}^n$ и $\gamma \in \Gamma(S, p)$ имеет место равенство (3.9) и оценка

$$\left\| \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 2^n \|K(\tau, S)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Автор выражает искреннюю признательность профессору Н. А. Широкову за внимание к работе, а также глубокую благодарность рецензентам за ценные замечания, способствовавшие улучшению изложения материала.

Литература

1. Bohr H. Ein allgemeiner Satz über Integration eines trigonometrischen Polynomials // Prace Mathematyczne Fizyczne. 1935. H. 43. S. 273–288. См. также: Collected Mathematical works. 1952. Vol. 2. P. 36.
2. Favard J. Sur une propriété extrémale de l'intégrale d'une fonction périodique // Comptes Rendus De L'Académie des Sciences. 1936. Vol. 202. P. 273–276.
3. Favard J. Application de la formule sommatoire d'Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques on Presque — périodiques // Matematisk Tidsskrift. Серия B. 1936. С. 81–94.
4. Левитан Б. М. Об одном обобщении неравенств С. Н. Бернштейна и Н. Боэр'a // ДАН СССР. 1937. Т. XV, № 4. С. 169–172.
5. Hörmander L. A new proof and a generalization of an inequality of Bohr // Mathematica Scandinavica. 1954. Vol. 2. P. 33–45.
6. Иванов Б. Ф. Об одном обобщении неравенства Боэра // Проблемы анализа. 2013. Т. 2(20), № 2. С. 21–58.
7. Ivanov B. F. Analog of an inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(\mathbb{R}^n)$. I // Проблемы анализа. 2014. Т. 3(21), № 1. С. 16–34.
8. Ivanov B. F. Analog of an inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(\mathbb{R}^n)$. II // Проблемы анализа. 2014. Т. 3(21), № 2. С. 32–51.
9. Функциональный анализ. Серия: «Справочная математическая библиотека» / под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972.
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
11. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959.
12. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.
13. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
14. Макаров Б. М., Подкорытов А. Н. Лекции по вещественному анализу. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.

Статья поступила в редакцию 16 февраля 2016 г.

Сведения об авторе

Иванов Борис Филиппович — кандидат физико-математических наук, доцент; ivanov-bf@yandex.ru

ON THE INEQUALITY OF BOHR FOR INTEGRALS OF FUNCTIONS FROM $L^p(\mathbb{R}^n)$, $2 < p < +\infty$

Boris F. Ivanov

St. Petersburg State University of Industrial Technologies and Design;
Higher School of Technology and Energy, ul. Ivana Chernykh, 4, St. Petersburg, 198095,
Russian Federation; ivanov-bf@yandex.ru

Let $p \in (2, +\infty)$, $n \geq 1$, S be an open subset of $\mathbb{R}^n$, and $\Gamma(S, p)$ be a set of all the functions $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$ spectrum of which belongs to S . If $n = 1$ then $\bar{S}$ can contain zero and if $n > 1$ $\bar{S}$ can intersect coordinate

hyperplanes. It is obtained sufficient condition validity of the inequality

$$\left\| \int_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, p, S) \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

where $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $E_t = \{\tau | \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n, \tau_j \in [0, t_j], \text{ if } t_j \geq 0, \text{ and } \tau_j \in [t_j, 0], \text{ if } t_j < 0, 1 \leq j \leq n\}$, and the constant $C(n, p, S) > 0$ does not depend on $\gamma \in \Gamma(S, p)$. Refs 14.

Keywords: inequality of Bohr.

References

1. Bohr H., "Ein allgemeiner Satz über Integration eines trigonometrischen Polynomials", *Prace Matematyczne Fizyczne* **43**, 273–288 (1935). English translation in *Collected Mathematical works* **2**, p. 36 (1952).
2. Favard J., "Sur une propriété extrémale de l'intégrale d'une fonction périodique", *Comptes Rendus De L'Académie des Sciences* **202**, 273–276 (1936).
3. Favard J., "Application de la formule sommatoire d'Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques on Presque — périodiques", *Matematisk Tidsskrift. Series B*, 81–94 (1936).
4. Levitan B. M., "On some generalization of S. N. Bernstein and H. Bohr inequalities", *Ras USSR* **XV**(4), 169–172 (1937).
5. Hörmander L., "A new proof and a generalization of an inequality of Bohr", *Mathematica Scandinavica* **2**, 33–45 (1954).
6. Ivanov B. F., "On a generalization of an inequality of Bohr", *Issues Anal.* **2**(20), No 2, 21–58 (2013) [in Russian].
7. Ivanov B. F., "Analog of an inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(\mathbb{R}^n)$. I", *Issue Anal.* **3**(21), No 1, 16–34 (2014).
8. Ivanov B. F., "Analog of an inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(\mathbb{R}^n)$. II", *Issue Anal.* **3**(21), No 2, 32–51 (2014).
9. *Functional analysis*. In Ser. *The reference mathematical library* (ed. by S. G. Krein, Nauka, Moscow, 1972) [in Russian].
10. Kolmogorov A. N., Fomin S. V., *The elements of the functions theory and functional analysis* (Nauka, Moscow, 1968) [in Russian].
11. Gelfand I. M., Shilov G. E., *The generalized functions and the operations over them* (Fizmatlit, Moscow, 1959) [in Russian].
12. Titchmarsh E., *Introduction in theory of Fourier integrals* (GITTL, Moscow, Leningrad, 1949) [in Russian].
13. Vladimirov V. S., *Generalized functions in mathematical physics* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
14. Makarov B. M., Podkorytov A. N., *The lectures on the real analysis* (BHV-Petersburg, St. Petersburg, 2011) [in Russian].

Для цитирования: Иванов Б. Ф. О неравенстве Бора для интегралов от функций из $L^p(\mathbb{R}^n)$, при $p \in (2, +\infty)$ // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 582–593. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.407

For citation: Ivanov B. F. On the inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(\mathbb{R}^n)$, $2 < p < +\infty$. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 4, pp. 582–593. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.407