

ISSN 2079-8199

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

ВЕСТНИК

Санкт-Петербургского государственного
университета технологии и дизайна

научный журнал

Серия 1
ЕСТЕСТВЕННЫЕ
И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

№ 4

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ ■ 2 0 2 5

УДК 519.632

DOI 10.46418/2079–8199_2025_4_13

О. О. Иванов, Н. С. Благодарный

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, Высшая школа технологии и энергетики
198095 РФ, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4

РАЗРАБОТКА ЭФФЕКТИВНОГО ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ ЖЕСТКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© О. О. Иванов, Н. С. Благодарный, 2025

В статье представлен численный метод для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих при моделировании гидравлических систем. Метод основан на неявной схеме Эйлера с экстраполяцией Лагранжа для стартового приближения и решении нелинейных систем методом Ньютона-Рафсона с оптимальным выбором якобиана. Проведено комплексное исследование точности и сходимости метода на примере нелинейной модели трехузловой гидросистемы с квадратичным гидравлическим сопротивлением и скачкообразным изменением граничных условий. Выполнен анализ локальной и глобальной погрешностей при различных шагах интегрирования, построены графики зависимости ошибки от шага для определения порядка сходимости.

Ключевые слова: жесткие дифференциальные уравнения, неявные методы, гидравлические системы, апостериорная оценка погрешности, порядок сходимости, метод Ньютона.

Введение

Жесткие нелинейные гидродинамические системы, описываемые сложными взаимосвязанными дифференциальными уравнениями [1]–[7], требуют применения устойчивых и точных численных методов [8]. Явные интеграторы, несмотря на простоту, не справляются с жесткостью без чрезмерного уменьшения шага. Неявные методы, широко реализованные в MATLAB (например, solvers ode15s, ode23s, ode14x), лишь иногда обеспечивают необходимую устойчивость, но оказываются вычислительно затратными при больших размерах моделей и отсутствии оптимальных стратегий вычисления якобиана.

Обзор неявных методов и постановка проблемы

Неявные схемы (Backward Euler, неявные Runge–Kutta, многоконтурные схемы) требуют решения нелинейной системы на каждом шаге. Точность и производительность во многом зависят от:

1. способа прогнозирования начального приближения;
2. метода решения нелинейной системы (обычно Newton–Raphson);
3. алгоритма вычисления якобиана (полный аналитический, разреженный аналитический, численный, разреженный численный).

В среде MATLAB для неявных якобианов доступны как автоматические (auto), так и пользовательские (analytic, sparse) варианты [9], но автоматический выбор не всегда оптимален.

Проблема состоит в том, что в среде MATLAB (одноименной функции) разработчик не найдет ode14x в списке встроенных ODE-решателей (например, через команду help odeset или просмотр каталога функций). Этот метод существует только в Simulink как фиксированный шаг «ode14x (extrapolation)». При этом

имеется потребность в его программной реализации в виде кода.

Постановка задачи

Предлагается разработать модифицированный неявный интегратор, сочетающий:

1. Неявную схему интегрирования обратного метода Эйлера (Backward Euler), обеспечивающего стабильность на жестких нелинейных системах, позволяя работать с большими шагами по времени без расходимости.

2. Многошаговую экстраполяцию Лагранжа для стартового приближения, использующую предыдущие вычисленные решения, чтобы получить более точное и близкое к искомому значению приближение, что существенно ускоряет сходимость итерационного решения на каждом шаге.

3. Итерационный метод Ньютона (Ньютона–Рафсона) для решения нелинейных систем, что позволяет эффективно находить корни уравнения Backward Euler, используя вычисленные (или аппроксимированные) якобианы.

4. Адаптивный алгоритм выбора метода вычисления якобиана. В зависимости от размеров системы, структуры разреженности и доступных аналитических выражений выбирается один из четырех вариантов: полный аналитический, разреженный аналитический, полный численный, разреженный численный якобиан.

Цель — добиться высокой устойчивости и точности при снижении вычислительных затрат.

Новый разрабатываемый алгоритм предназначен для решения жестких, нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), x(t_0) = x_0, x \in \mathbb{R}^n,$$

где $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — векторная функция правой части, $x(t)$ — вектор состояния системы, t — время.

Неявная схема

Перепишем уравнение как задачу поиска корня нелинейной векторной функции

$$F(x_{n+1}) \doteq x_{n+1} - x_n - h \cdot f(x_{n+1}, t_{n+1}) = 0,$$

где $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — нелинейное отображение, для которого необходимо найти нулевой вектор, h — шаг интегрирования.

Известные свойства неявной схемы:

1. Устойчивость. Неявная схема обратного метода Эйлера (Backward Euler) обладает А-устойчивостью, что означает безусловную устойчивость для любого шага $h > 0$ при решении линейных жестких задач.
2. Точность. Метод имеет первый порядок точности $O(h)$.
3. Вычислительная сложность. Метод требует решения нелинейной системы на каждом шаге.

Экстраполяция Лагранжа (Lagrange Predictor)

Цель. Для ускорения сходимости итерационного метода Ньютона необходимо получить качественное

стартовое приближение $x_{n+1}^{(0)}$. Для этого используется

многошаговая экстраполяция на основе многочлена Лагранжа порядка m , применяющего m предыдущих значений решения.

Пусть заданы m предыдущих значений решения

$$\{(t_{n-m+1}, x_{n-m+1}), (t_{n-m+2}, x_{n-m+2}), \dots, (t_n, x_n)\}.$$

Тогда стартовое приближение для x_{n+1} вычисляется по формуле

$$x_{n+1}^{(0)} = \sum_{i=0}^{m-1} x_{n-i} L_i(t_{n+1}),$$

где многочлены Лагранжа $L_i(t)$ с базисными узлами интерполяции с номерами i и j определяются как

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m-1} \frac{t - t_{n-j}}{t_{n-i} - t_{n-j}},$$

$L_i(t_{n-k}) = \delta_{ik}$ — символ Кронекера, обеспечивающий точное интерполирование в заданных точках.

Порядок экстраполяции m влияет на точность предсказания: для $m=1$ — простое повторение предыдущего значения (статический предиктор), для $m=2$ — линейная экстраполяция, $m=3,4$ — квадратичная и кубическая экстраполяция соответственно.

Построение экстраполяционного приближения требует порядка $O(m^2)$ операций на каждый компонент вектора состояния. Для типичных значений $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ эта нагрузка невелика и не ограничивает производительность метода.

Экстраполяция Лагранжа является формальным многочленом, который строится на известных данных

x_{n-i} и непрерывно аппроксимирует ожидаемое значение x_{n+1} . При использовании в численных методах интегрирования она позволяет значительно улучшить стартовое приближение для Newton-итераций, тем самым снижая их количество и уменьшая вычислительные затраты. Однако следует учитывать, что ошибки экстраполяции могут значительно возрасти при больших шагах или резких изменениях решения.

Теоретический анализ погрешности экстраполяции Лагранжа

Экстраполяция, как разновидность прогноза значений функции за пределами построенного интерполяционного диапазона, подвержена определенным ограничениям по точности и устойчивости. Точность экстраполяции зависит:

1. от дифференцируемости функции f (гладкости) в рассматриваемой области;
2. от выбора узлов интерполяции — расположение $t_{n-m+1}, \dots, t_n$, влияющих на формулы $L_i(t)$;
3. от расстояния точки экстраполяции t_{n+1} до узлов; ошибка растёт с удалением.

Погрешность экстраполяции многочленом Лагранжа для точки t выражается через остаточный член

$$R_m(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} f(t_{n-i}) L_i(t) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} \prod_{i=0}^{m-1} (t - t_{n-i}),$$

где $\xi \in [t_{n-m+1}, t_{n+1}]$ по теореме о среднем значении, $f^{(m)}$ — производная m -го порядка.

Это означает, что погрешность зависит от величины $|\prod (t - t_i)|$, степени гладкости f и порядка m .

Итерации Ньютона для решения нелинейной системы

После предсказания стартового приближения прибегают к методу Ньютона–Рафсона для точного решения уравнения

$$F(x_{n+1}) = x_{n+1} - x_n - h f(x_{n+1}, t_{n+1}) = 0.$$

В окрестности приближения $x^{(k)}$ функция F представляется по формуле Тейлора первого порядка с остаточным членом высшего порядка

$$F(x^{(k)} + \Delta x) \approx F(x^{(k)}) + J_F(x^{(k)}) \Delta x,$$

$$\text{где } J_F(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x) = I - h J_f(x, t_{n+1}).$$

Из линейного приближения для поиска $\Delta x^{(k)}$ удовлетворяющего $F(x^{(k)} + \Delta x) = 0$ получаем

$$J_F(x^{(k)}) \Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}), x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}.$$

Подставляя $F(x^{(k)}) = x^{(k)} - x_n - h f(x^{(k)}, t_{n+1})$, получаем схему

$$\Delta x^{(k)} = - \left(I - h J_f(x^{(k)}, t_{n+1}) \right)^{-1} \times (x^{(k)} - x_n - h f(x^{(k)}, t_{n+1})).$$

При хорошем стартовом приближении (экстраполяция Лагранжа) метод Ньютона сходится квадратично, что снижает число итераций по сравнению с простым фиксированным шагом. Необходимым условием является невырожденность J_F , то есть $\det(I - hJ_f) \neq 0$.

Итерации прекращаются при выполнении одного из условий:

1. $\|\Delta x^{(k)}\| < \varepsilon$ — требуемая точность достигнута.
2. $\|F(x^{(k+1)})\| < \varepsilon_F$ — невыполненное уравнение

близко к нулю.

3. Номер итерации k превысил заданный максимум k_{max} — срабатывает предупреждение о недостижении сходимости.

Подсистема вычисления якобиана (Jacobian Evaluation Subsystem)

В данном интеграторе подсистема вычисления якобиана — ключевой модуль, определяющий производительность и устойчивость метода Ньютона для решения нелинейных задач. В этом разделе подробно рассматриваются все способы вычисления якобиана, их математическое описание, достоинства, недостатки и результаты сравнительного анализа:

1. Полный аналитический якобиан

Полный аналитический якобиан строится как матрица всех частных производных:

$$J_f(x, t) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, t) \right]_{i,j=1}^n,$$

Якобиан для Ньютона

$$J_F(x) = I - hJ_f(x, t_{n+1}).$$

Алгоритм вычисления. Для каждого уравнения $f_i(x, t)$ аналитически выразить производные по всем переменным x_j ; для текущего приближения $x = x^{(k)}$ на шаге n подставить значения и построить матрицу J_f ; собрать $J_F = I - hJ_f$.

Преимущества метода в том, что имеется наилучшая точность, быстрое заполнение при знании формул. Недостатки: требует явных производных, сложен для нестандартных систем, плохо масштабируется на большие n .

2. Разреженный аналитический якобиан

Если известно, что многие элементы J_f постоянно равны нулю, можно хранить и вычислять только ненулевые элементы. Необходимо построить логическую (булеву) матрицу шаблона разреженности S , где $S_{ij} = 1$,

если $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$, иначе 0; аналитически вычислить только

те производные, что соответствуют ненулевым ячейкам S ; собрать разреженную (sparse) матрицу J_f^{sparse} .

В системах большой размерности при моделировании можно интегрировать метод со специализированными алгебраическими библиотеками (UMFPACK, MATLAB sparse). Выгода — экономия ресурсов: менее 10% плотности дает ускорение в десятки раз и в памяти, и в вычислениях.

3. Полный численный якобиан

Оценка всех производных по разностям без аналитики

$$(J_f)_{:,j} \approx \frac{f(x + \delta_j e_j, t) - f(x, t)}{\delta_j},$$

где e_j — единичный вектор, δ_j — оптимизированное малое приращение (например, $\delta_j = \sqrt{\varepsilon_{mach} \max(1, |x_j|)}$).

Словесный алгоритм. Для каждого столбца j : создать возмущенный вектор $x + \delta_j e_j$; посчитать $f(x + \delta_j e_j, t)$; посчитать разностное отношение; собрать все столбцы в матрицу J_f .

Плюсы: не нужна аналитика, универсален для любой системы.

Минусы: для n переменных — n вызовов функции f на каждом шаге Ньютона; ошибки из-за выбора δ_j ; численная неустойчивость при очень малых или крупных переменных.

4. Разреженный численный якобиан

В современной научной практике учитывается структура модели: если переменные в ряде уравнений независимы, их можно возмущать одновременно, группируя столбцы.

Словесный алгоритм: построить группы независимых столбцов с помощью шаблона разреженности S ; для каждого вектора группы G_k : возмущается сразу

несколько переменных: $x_{G_k} = x + \sum_{j \in G_k} \delta_j e_j$; разностное

отношение делится между всеми входящими столбцами; обнуляются элементы вне разреженного шаблона;

Итоговая нагрузка: значительно меньше вызовов функции (иногда в 2–10 раз), особенно для структурированных задач.

Формулы

$$v_k = \sum_{j \in G_k} e_j, (J_f)_{:,j \in G_k} \approx \frac{f(x + \delta v_k, t) - f(x, t)}{\delta}.$$

Нулевые элементы вне шаблона не заполняются.

Преимущества: близкая к аналитическим версиям точность, резкое уменьшение числа вычислений;

Недостатки: сложная группировка (требует графового анализа разреженности), сохраняются ошибки разностей, необходим анонимный шаблон разреженности.

В табл. 1 приведем анализ методов якобиана.

Проведение численных экспериментов в гидродинамических системах

Цель эксперимента. Для реальной гидросистемы, описываемой системой уравнений (1), изображенной на рис. 1, провести исследование устойчивости, точности, ошибок.

$$\begin{cases} L_1 \frac{dQ_1}{dt} = P_1 - P_2 - R_1 Q_1 |Q_1| \\ L_2 \frac{dQ_2}{dt} = P_2 - P_3 - R_2 Q_2 |Q_2| \\ C \frac{dP_2}{dt} = Q_1 - Q_2 \\ P_3(t) = \begin{cases} 1,8 \cdot 10^6 & t \leq 10 \text{ с} \\ 1,7 \cdot 10^6 & t > 10 \text{ с} \end{cases} \end{cases}, \quad (1)$$

Таблица 1. Сравнительный анализ (по исследованиям и практике)

Метод	Вычислит. стоимость	Точность	Применимость	Комментарий
Полный аналитический	Низкая	Высокая	Малые/средние системы, аналитика есть	Лучший вариант, если возможен
Разреженный аналитический	Очень низкая	Высокая	Крупные/разреж. системы, аналитика есть	Крайне эффективен
Полный численный	Высокая	Средняя	Любая система, нет аналитики	Медленный при больших n
Разреженный численный	Средняя	Средняя	Крупные/разреж. системы, нет аналитики	Лучший без аналитики

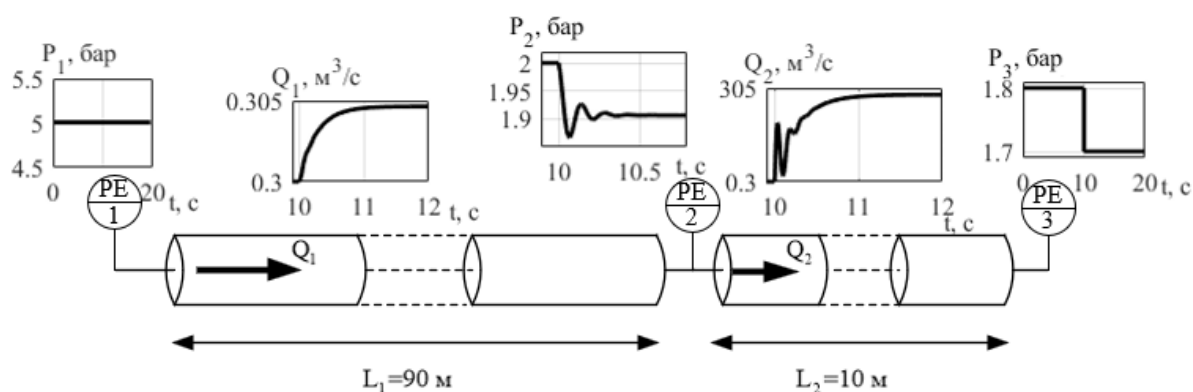


Рис. 1. Гидродинамическая система, графики давлений и расходов

где Q_1, Q_2 — расходы жидкости в участках 1 и 2; P_1, P_2, P_3 — давления в узлах; L_1, L_2 — инерция жидкости; R_1, R_2 — коэффициенты квадратичного сопротивления; C — объемная емкость узла 2 (сжимаемость жидкости).

Гидросистема состоит из трех узлов (точек), соединенных двумя участками трубопровода длиной 100 м, диаметром 0,5 м и расходом 0,3 м³/с с гидравлическим сопротивлением: узел 1 (источник) — питающая линия или насосная станция с постоянным давлением; узел 2 (промежуточный, $P_2 = 2$ бар) — точка трубопровода; узел 3 — потребитель или точка слива, где происходит ступенчатое изменение давления. Участки соединения характеризуются инерцией жидкости и квадратичным гидравлическим сопротивлением. Динамика моделируется системой (1) из трех ОДУ и кусочной функцией. Система находится в квазиустановившемся режиме. Жидкость течет из узла 1 через узел 2 в узел 3. Давление в узле 2 поддерживается на уровне 2 бара, достаточном для преодоления сопротивлений и создания необходимого расхода. Давление P_3 внезапно падает до 1,7 бар. Движущая сила $P_2 - P_3$ резко увеличивается, что вызывает скачкообразное увеличение расхода Q_2 на участке 2. Жидкость вытекает из узла 2 быстрее, чем подается из узла 1. Давление P_2 начинает падать. Из-за инерции жидкости (L_2) расход Q_2 не может мгновенно измениться и продолжает расти, создавая «волну» низкого давления.

Глобальная погрешность определяется как отклонение решения с заданным шагом dt_i от эталонного решения, полученного с очень малым шагом dt_{ref} . Для каждой точки времени t_k выполняется интерполяция эталонного решения на сетку t решения с шагом dt_i , после чего вычисляется норма разности векторов со-

стояния $e_{global}(t_k) = \|X^{(i)}(t_k) - X^{ref}(t_k)\|_2$. Локальная

погрешность для шага dt_i — это отличие решения с шагом dt_i от решения с удвоенным шагом $dt_{i-1} = 2dt_i$ (более грубым шагом), интерполированное на одина-

ковую сетку $e_{local}(t_k) = \|X^{(i)}(t_k) - X^{(i-1)}(t_k)\|_2$. Графи-

ки были представлены на рис. 2.

Для определения порядка метода также строится график зависимости максимальной глобальной ошибки от шага интегрирования. Для каждого шага dt_i вычисляют глобальную ошибку решения по сравнению с эталонным (решением с очень малым шагом), обычно по максимуму отклонений вектора состояний

$$e_{max}^{(i)} = \max_k \|X_{dt_i}(t_k) - X_{ref}(t_k)\|.$$

После этого строят график в логарифмических осях,

где по оси x — $\log(dt_i)$, по оси y — $\log(e_{max}^{(i)})$. К гра-

фику добавляют эталонные линии, соответствующие степенным законам: $e \sim dt^1$ — линия с наклоном 1, $e \sim dt^2$ — линия с наклоном 2. Фактический наклон экспериментальной линии оценивают, например, с помощью наименьших квадратов на log-масштабе и сравнивают с теорией. Результаты приведены на рис. 3.

Затем вычисляется параметр апостериорной оценки порядка точности $p_{est}(t_k)$ по формуле

$$p_{est}(t_k) = \frac{\log(e_{12}(t_k)/e_{23}(t_k))}{\log 2}.$$

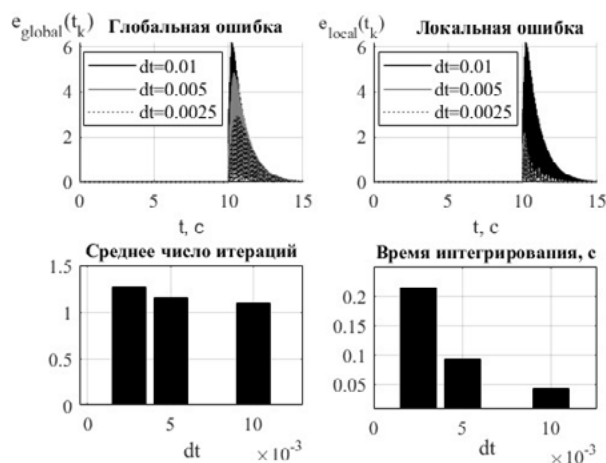


Рис. 2. Глобальная, локальная погрешность в зависимости от времени; среднее число итераций и время интегрирования в зависимости от шага

Этот параметр показывает локальный по времени порядок сходимости метода. Анализируя его график во времени и распределение (гистограмму), вычисляют среднее, медиану и стандартное отклонение. Стремление среднего p_{est} к теоретическому порядку 1 на рис. 4 подтверждает корректную реализацию и сходимость.

Заключение

В исследовании был построен и реализован численный метод для решения жестких нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих при моделировании гидравлических процессов. Для проверки эффективности метода использовалась физически реалистичная модель трехузловой гидросистемы с квадратичным сопротивлением и резкими изменениями давления.

При численных экспериментах были протестированы различные шаги интегрирования и проведен анализ локальной и глобальной погрешности. Важным результатом стало то, что апостериорные оценки порядка точности на основе сопоставления решений при трех разных шагах показали эффективный порядок, близкий к первому. Это согласуется с теоретическими ожиданиями для обратной (неявной) схемы Эйлера, которая обладает высокой устойчивостью именно для жестких задач и задач с негладкими изменениями параметров, но дает первый порядок точности.

Специальное внимание было уделено выбору аналитического якобиана для метода Ньютона. Использование явных выражений для матрицы производных системы существенно повысило быструю и стабильную сходимость метода при решении нелинейных уравнений на каждом временном шаге, особенно в областях быстрых изменений давления.

В итоге эксперименты подтвердили, что предложенная численная схема позволяет надёжно моделировать переходные процессы и перепады давления с контролируемой ошибкой, а выбранный аналитический якобиан обеспечивает сходимость для задач с резкими изменениями и нелинейностями без ухудшения устойчивости расчета.

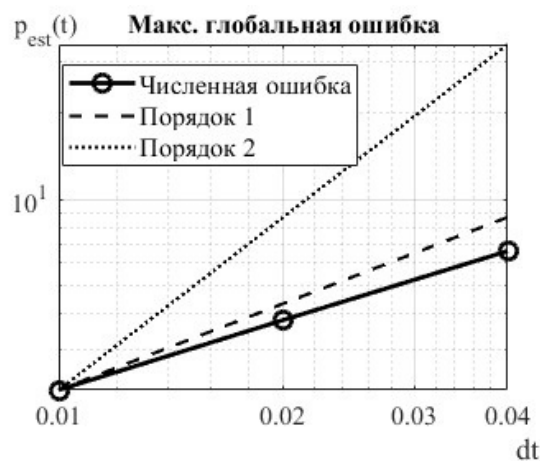


Рис. 3. Максимальная глобальная ошибка

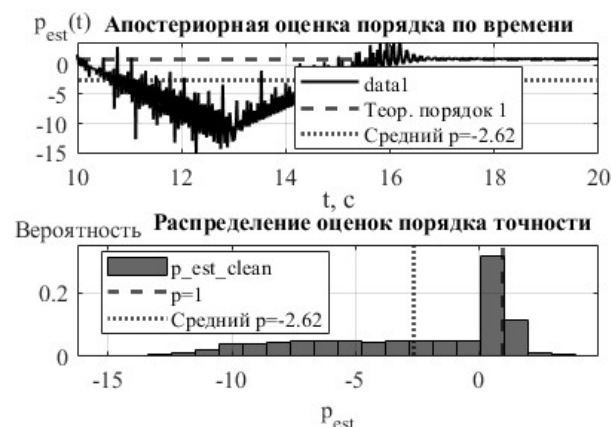


Рис. 4. Апостериорная ошибка по времени и распределение оценок порядка точности

Этот подход может быть рекомендован для дальнейших инженерных и научных приложений, связанных с вычислительным анализом жёстких гидродинамических систем.

Список литературы:

1. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / пер. с англ. М.: Мир, 1999. 685 с.
2. Hairer E., Nørsett, S. P., Wanner G. Solving ordinary differential equations I: nonstiff problems. Springer-Verlag, 1993.
3. Арушанян И. О., Залеткин С. Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фор-троне. М.: МГУ, 1990. 336 с.
4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: БИНОМ, 2011. 630 с.
5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 470 с.
6. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
7. Бирюков В. И., Двоеглазов А. В. Численное решение жестких систем дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. № 3.
8. Сосновский Л. А., Петрухина А. В., Котов М. В. Численное моделирование гидродинамических систем

в MATLAB/Simulink // Вестник Брестского политехнического института. 2015. № 2. С. 112–125.

9. MATLAB Documentation. Solving Stiff Differential Equations. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode15s.html> (дата обращения: 10.10.2025).

O. O. Ivanov, N. S. Blagodinny

St. Petersburg State University of Industrial Technologies and Design, Higher School of Technology and Energy
198095 Russia, St. Petersburg, Ivan Chernykh St., 4

DEVELOPMENT OF AN EFFICIENT NUMERICAL INTEGRATION METHOD FOR STIFF NONLINEAR HYDRODYNAMIC SYSTEMS

This article presents a numerical method for solving stiff systems of ordinary differential equations arising in the modeling of hydraulic systems. The method is based on an implicit Euler scheme with Lagrange extrapolation for the initial approximation and the Newton-Raphson method for nonlinear systems with an analytic Jacobian. A comprehensive study of the method's accuracy and convergence is conducted on a nonlinear model of a three-node hydraulic system with quadratic hydraulic resistance and stepwise changes in boundary conditions. An analysis of local and global errors at various integration steps is performed, and error diagrams are constructed to determine the order of magnitude of the displacement.

Keywords: stiff differential equations, implicit methods, Newton's method, hydraulic systems, a posteriori error estimation, convergence order.

References:

1. Hajrer E., Vanner G. *Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenij: zhestkie i differentsial'no-algebraicheskie zadachi* [Solving ordinary differential equations: stiff and differential-algebraic problems] / per.s angl. Moscow. Mir, 1999. 685 p. (in Rus.).
2. Hairer E., Nørsett, S. P., Wanner G. *Solving ordinary differential equations I: nonstiff problems*. Springer-Verlag, 1993.
3. Arushanyan I. O., Zaletkin S. F. *Chislennoe reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenij na Fortrane* [Numerical solution of ordinary differential equations in Fortran]. Moscow. MGU, 1990. 336 p. (in Rus.).
4. Bahvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow. BINOM, 2011. 630 p. (in Rus.).
5. Marchuk G. I. *Metody vychislitel'noj matematiki* [Methods of computational mathematics]. Moscow. Nauka, 1989. 470 p. (in Rus.).
6. Samarskij A. A., Gulin A. V. *Chislennyye metody* [Numerical Methods]. Moscow. Nauka, 1989. 432 p. (in Rus.).
7. Biryukov V. I., Dvoeglazov A. V. *Chislennoe reshenie zhestkikh sistem differentsial'nykh uravnenij metodom Runge-Kutta* [Numerical Solution of Stiff Systems of Differential Equations by the Runge-Kutta Method] // *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational Technologies]. 2003. Vol. 8. No. 3. (in Rus.).
8. Sosnovskij L. A., Petruhina A. V., Kotov M. V. *Chislennoe modelirovanie gidrodinamicheskikh sistem v MATLAB/Simulink* [Numerical Modeling of Hydrodynamic Systems in MATLAB/Simulink] // *Vestnik Brestskogo politekhnicheskogo instituta* [Bulletin of the Brest Polytechnic Institute]. 2015. No. 2. 112–125 pp. (in Rus.).
9. MATLAB Documentation. Solving Stiff Differential Equations. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode15s.html> (date accessed: 10.10.2025).